МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

В.М. Адашевський, О.К. Морачковський

КОМП'ЮТЕРНИЙ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Навчально-методичний посібник

для студентів бакалаврського напрямку 6.050702 «Електромеханіка» електромашинобудівного факультету

Харків НТУ «ХПІ» 2013

Рецензенти:
С.С. Ермаков, д-р пед. наук, професор,
Харьківська державна академія дизайну та мистецтв;

Ю.М. Андрєєв, д-р техн. наук, професор,
Національній технічній університет «ХПІ»

Адашевський, В.М.

Комп'ютерний лабораторний практикум з теоретичної механіки : навч.-метод. посібник / В.М. Адашевський, О.К. Морачковський – Харків : НТУ «ХПІ», 2013.– 86с.

Подано матеріали комп'ютерного лабораторного практикуму з теоретичної механіки за розділами «Кінематика»,«Статика», «Динаміка». Розглянуто загальні положення теоретичної механіки, наведено стислі теоретичні відомості, розібрано приклади рішення основних задач для підготовки до лабораторних робіт та приклади виконання лабораторних робіт.

Призначено для студентів бакалаврського напрямку 6.050702 - «Електромеханіка» електромашинобудівного факультету.

Are represented the materials of the computer laboratory practical works on theoretical mechanics sections «Kinematics»,«Statics», «Dynamics». Discuss the General provisions of theoretical mechanics, brief theoretical information, dismantled examples of solutions of the main tasks for preparation for laboratory work and examples of laboratory practical works.

Is intended for students of bachelor of 6.050702 - «Electromechanics» of the Department electromachine building.

ВСТУП

У навчальному посібнику представлено матеріал лабораторного практикуму, який охоплює основні теми курсу теоретичної механіки для студентів спеціальностей електромашинобудування, включаючи теоретичні та практичні положення трьох розділів теоретичної механіки – кінематики, статики, динаміки.

Кінематика – розділ, в якому вивчають геометричні властивості руху тіл без урахування їх маси та сил, що на них діють. ***Статика*** – розділ, в якому вивчаютьзагальне вчення про сили, методи перетворення систем сил в еквівалентні їм системи, а також рівновагу матеріальних твердих тіл під дією сил. ***Динаміка*** – розділ, в якому вивчають рух матеріальних об'єктів під дією прикладених до них сил.

По кожній темі наведено теоретичні відомості, приклади вирішення типових завдань, що дають можливість студентам набути необхідних навичок для вирішення конкретних у різних галузях техніки, і питання для самоконтролю. У посібнику є посилання на рекомендовану літературу, з якої студенти можуть отримати найбільш об'ємні знання по питаннях, що їх цікавлять.

Для підготовки до лабораторних занять необхідно ознайомитись з короткими теоретичними положеннями, вирішенням типових завдань та відповісти на питання для самоконтролю.

Методи досліджень містять аналітичні та комп'ютерні обчислювання.

Студентам пропонується самостійно виконати лабораторні роботи згідно із завданнями, попередньо виданими викладачем.

1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1
«ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕМАТИКИ ТОЧКИ ТА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ»

1.1. Мета, об’єкт, предмет, методи досліджень

Метою роботи є набуття практичних умінь у вирішенні завдань з кінематики для визначення кінематичних характеристик руху точки, який є заданим за декартовими і натуральними законами, і руху тіл та їхніх точок за заданими законами руху, набуття навичок роботи з обчислювальною технікою (комп’ютер з програмним забезпеченням) для підтвердження теоретичного положення кінематики щодо незалежності кінематичних характеристик руху точок від вибору координатних систем (інваріантність властивостей руху точки). Метою є також вивчення закономірностей руху точки, який задано у різних системах координат і вивчення закономірностей руху тіла та його точок, якщо рух тіла є заданим, або системи тіл, призначеної для перетворення руху одного або декількох тіл в необхідні рухи інших тіл.

Об’єктом досліджень є характеристики руху точки в плоскості та найпростіші рухи тіл і їхні перетворення механізмами – механічними системами тіл, призначених для перетворення руху одного або декількох тіл в необхідні рухи інших тіл.

Предметом досліджень є властивості траєкторії, векторів швидкості й пришвидшення рухомої точки і незалежність кінематичних характеристик від способу завдання закону руху точки або запису рівностей для визначення швидкості та пришвидшення точок тіла у припустимих системам координат (узгодженими зі в’язями).

Методи досліджень – аналітичні та комп’ютерні обчислювання.

1.2. Кінематика точки

1.2.1. Теоретичні відомості

Координатний спосіб завдання руху точки. За декартовим законом руху точки її положення у просторі задають функціями часу координат точки: $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$, як показано на рис.1.1.

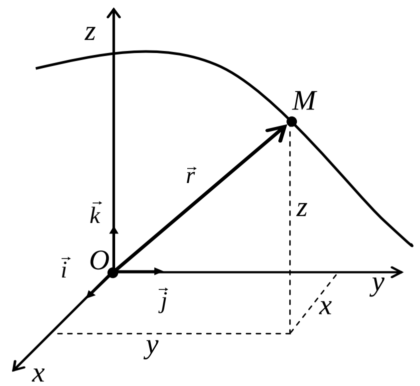


Рисунок 1.1

Проекції вектора швидкості на осі декартової системи координат обчислюють за формулами

$$v_x = \dot{x};\ v_y = \dot{y};\ z_x = \dot{z},$$

А модуль вектора швидкості точки та його напрямляючи косинуси за формулами

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};\quad \cos\alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|};\quad \cos\beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|};\quad \cos\gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|},$$

де $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – кути, що має вектор швидкості з відповідними осями координат.

Проекції вектора пришвидшення точки на осі декартової системи координат зайдемо так

$$a_x = \ddot{x}\ ,\quad a_y = \ddot{y}\ ,\quad a_x = \ddot{z}\ ,$$

а також модуль вектора пришвидшення точки та його напрямляючи косинуси

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};\quad \cos\alpha_1 = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{|\vec{a}|}\ ,$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути, що має вектор пришвидшення з відповідними осями координат.

За натуральним способом траєкторію руху точки вважають заданою, наприклад, у декартовій системі координат це $z = z(x,\ y)$. Натуральний закон руху точки є заданим, якщо відома неперервна двічі диференційована функція часу $s = s(t)$, тобто дугова координата положення точки на заданій траєкторії (рис. 1.2).

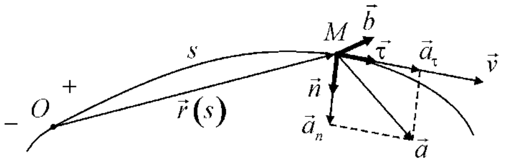


Рисунок 1.2

На заданій траєкторії визначають точку початку відліку дугової координати та напрям руху по траєкторії, а з рухомою точкою зв'язують натуральну систему координат (натуральний тригранник – тріедр Френе) – $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ сукупність дотичного, нормального й бінормального до траєкторії ортогональних одиничних векторів.

Вектор швидкості точки обчислюють за формулою

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = v_\tau \vec{\tau},$$

а вектор пришвидшення точки та його модуль за формулами

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;\quad \vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \dot{v}_\tau \vec{\tau};\quad \vec{a}_n = \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\vec{n} = \frac{v_\tau^2}{\rho}\vec{n};\qquad a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}_\tau;\ a_n = \frac{(\dot{s})^2}{\rho} = \frac{v_\tau^2}{\rho};\quad |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_\tau|^2 + |\vec{a}_n|^2};\quad \vec{a}_b = 0,$$

де $k = 1/\rho$ – кривина, ρ – радіус кривини траєкторії.

Якщо закон руху задано у декартових координатах $x = x(t);\ y = y(t);\ \ z = z(t)$, то для визначення модуля дотичного пришвидшення у натуральній (природній) системі координат можна застосовувати формули переходу:

$$a_\tau = \frac{(a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z)}{v};$$

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає кінематика?
2. Що містить в собі система відліку?
3. Що таке закон і траєкторія руху точки?
4. Як задати закони руху в декартових координатах?
5. Як задати закони руху в натуральних координатах?
6. Як визначити рівняння траєкторії в декартових координатах?
7. За якими формулами визначають швидкість та прискорення точки, якщо рух точки задано в декартових координатах?
8. За якими формулами визначають швидкість та прискорення точки, якщо рух точки задано в натуральних координатах?
9. Як визначають проекції на дотичну та нормаль к траєкторії прискорення точки, рух якої задано натуральним способом?
10. Чим відрізняються плоскі та просторові криві?

1.2.2. Приклад вирішення завдання № 1

Точка *M* рухається в площині *xOy* відповідно до рівнянь

$$\begin{cases} x = 4\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + 6 \text{ см} \\ y = -2\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + 4 \text{ см} \end{cases}.$$

Для моменту часу t_1 = 0,5 с знайти положення точки *M* на траєкторії, її швидкість, прискорення, дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії.

<u>Рішення</u>

Заданий закон руху у координатній формі можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії . Виключимо час *t* із рівнянь руху і отримаємо рівняння траєкторії у вигляді

$$\frac{(x-6)^2}{4^2} + \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1.$$

Таким чином, траєкторією точки *M* є еліпс із зміщеним центром (рис. 1.3).

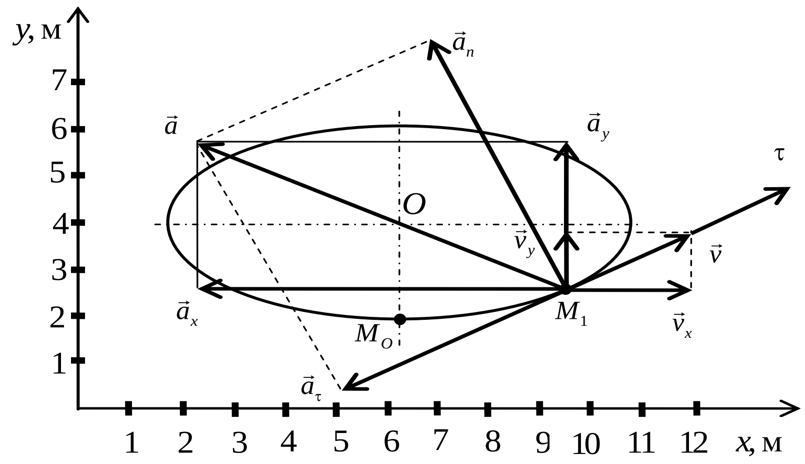


Рисунок 1.3

Визначимо на цій траєкторії положення точки M_1 ($x_{1,}$ y_1) у момент часу, коли $t_1 = 0{,}5$ с

$$x_1 = x(t = t_1) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\right) + 6 = 4\sin\frac{\pi}{4} + 6 = 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 6 = 8{,}82 \text{ см};$$

$$y_1 = y(t = t_1) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\right) + 4 = -2\cos\frac{\pi}{4} + 4 = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 2{,}59 \text{ см},$$

а також проекції вектора швидкості $v_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi\cos\frac{\pi t}{2}$; $v_y = \frac{dy}{dt} = \pi\sin\frac{\pi t}{2}$

і підрахуємо їхні значення

$$v_x(t_1 = 0{,}5\,\text{c}) = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = 2\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2} = 4{,}44\,\frac{\text{см}}{\text{c}};$$

$$v_y(t_1 = 0{,}5\,\text{c}) = \pi\sin\frac{\pi}{4} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}22\,\frac{\text{см}}{\text{c}}.$$

Вектор швидкості будуємо по двох взаємно перпендикулярних проекціях відповідно до вибраного масштабу

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y\,.$$

Отриманий вектор має бути по дотичній до траєкторії у бік руху. Модуль швидкості визначимо по вже знайденим проекціям вектора

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4{,}44^2 + 2{,}22^2} = 4{,}96\,\frac{\text{см}}{\text{c}}.$$

Тепер визначимо проекції вектора прискорення на координатні осі, рівні 1-м похідним від проекцій вектора швидкості або 2-м похідним від відповідних координат за часом

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\pi^2\sin\frac{\pi t}{2};\; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi t}{2}$$

і підрахуємо їхні значення

$$a_x(t_1 = 0{,}5\,\text{c}) = -\pi^2\sin\frac{\pi}{4} = -\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} = -6{,}97\,\frac{\text{см}}{\text{c}^2};$$

$$a_y(t_1 = 0{,}5\,\text{c}) = \frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}49\,\frac{\text{см}}{\text{c}^2}.$$

Вектор прискорення будуємо по двох взаємно перпендикулярних проекціях відповідно до вибраного масштабу

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \,.$$

Модуль прискорення визначимо по вже знайденим проекціям вектора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{-6{,}97^2 + 3{,}49^2} = 7{,}79\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

При обчисленні дотичного прискорення зручно скористатися формулою, що встановлює зв'язок між координатним і природним способами її руху

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v},$$

а потім підрахуємо його значення

$$a_\tau(t_1 = 0{,}5) = \frac{4{,}44\,(-6{,}97) + 2{,}22 \cdot 3{,}49}{4{,}96} = -4{,}67\ \text{см}/\text{с}^2 \,.$$

Дотичне прискорення має від'ємний знак, отже, у даний момент часу руху вектор дотичного прискорення в протилежну сторону напрямку вектора швидкості .

Нормальне прискорення визначимо по формулі

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$$

і підрахуємо його значення

$$a_n(t_1 = 0{,}5\text{с}) = \sqrt{7{,}79^2 - (-4{,}67)^2} = 6{,}23\text{см/с}^2 \,.$$

Радіус траєкторії визначимо по формулі

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

і підрахуємо його значення

$$\rho(t_1 = 0{,}5\,\text{с}) = \frac{4{,}96^2}{6{,}23} = 3{,}95\ \text{см} \,.$$

1.2.3. Приклад вирішення завдання № 2

Рух снаряда у вертикальній площині, як показано на рис. 1.4, описують рівняннями $x = 300\,t$, м; $y = 400\,t - 5t^2$, м, де t – час, с.

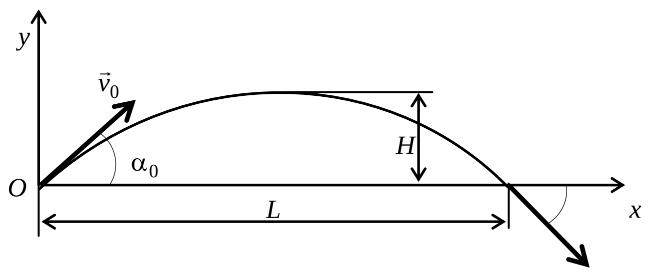


Рисунок 1.4

Треба визначити:

– швидкість снаряда у початковий момент часу;

– траєкторію, висоту підйому снаряда над рівнем горизонту H та дальність обстрілу L;

Рішення

Знайдемо рівняння траєкторії, виключивши з рівняння руху час t, $y = 400t - 5t^2$ (м). Спочатку з рівняння $x = 300t$ визначимо $t = \frac{x}{300}$, а потім отримаємо рівняння траєкторії у наступному вигляді $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{18000}x^2$. У вертикальній площині траєкторією снаряда у координатах x та y є парабола.

Визначимо проекції швидкості та прискорення снаряда на координатні осі

$$v_x = \dot{x} = 300 \text{ м/с}; \; v_y = \dot{y} = 400 - 10t \text{ м/с}$$

та обчислимо їхні значення у початковий момент часу $t = 0$

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ м/с};$$

Висоту підйому снаряда над рівнем горизонту можна знайти, дослідивши на екстремум функцію $y(t)$ по змінній t. Це означає, що з погляду кінематики проекція швидкості точки на вісь y в даний момент часу має дорівнювати нулю. Тоді $\dot{y} = 400 - 10\tau_1 = 0$, де τ_1 – час підйому снаряда на максимальну висоту, $\tau_1 = 40$ с. Підставляючи дане значення часу у вираз для y, отримаємо $y_{\max} = H = y(40) = 8000$ м. Дальність обстрілу визначимо з умови, що у момент падіння снаряда функція $y(t)$ набуває нульового значення $y(\tau_2) = 400\tau_2 - 5\tau_2^2 = 0$, де τ_2 – час польоту снаряда. Корінь цього квадратного рівняння, відповідний падінню снаряда на землю $\tau_2 = 80c$ звідки дальність польоту $x_{\max} = x(80) = L = 24000$ м.

1.3. Кінематика найпростіших рухів тіл. Перетворення найпростіших рухів

1.3.1. Теоретичні відомості

Поступальним рухом твердого тіла називають такий рух, при якому будь-яка пряма, проведена у тілі, залишається паралельною своєму начальному положенню. При поступальному русі тіла всі його точки описують однакові траєкторії, мають у будь-який час геометрично рівні швидкості та прискорення. Тому поступальний рух тіла можна визначити, вивчивши рух тільки однієї його точки (здебільшого це центр мас).

Обертанням твердого тіла навколо нерухомої осі (осі обертання) називають такий рух, при якому будь-які дві точки цього тіла залишаються під час руху нерухомими. Двогранний кут між нерухомою площиною і площиною, яка жорстко скріплена з тілом і обертається разом з ним, називають ***кутом повороту тіла*** φ_z. Закон обертання $\varphi_z = \varphi(t)$ – це рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі z ($[\varphi]$ = рад) рис. 1.5. Кут повороту можна виразити через число обертів тіла N за весь період обертання $\varphi = 2\pi N$. Кутову швидкість у техніці часто задають числом обертів за хвилину n – $\omega = \pi n / 30$.

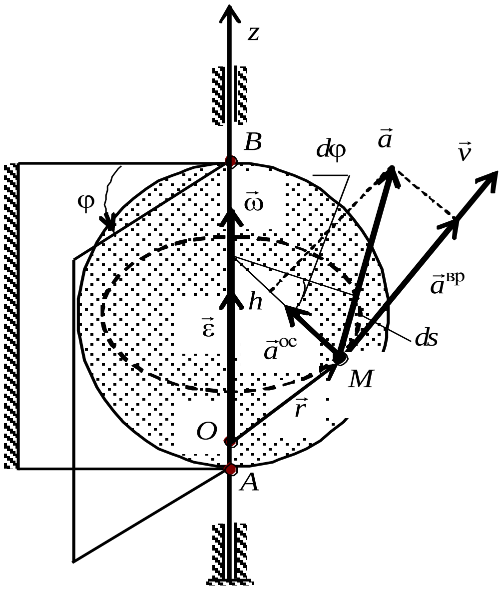


Рисунок 1.5

Формули, які потрібні для визначення кінематичних величин будь-якої точки тіла:

$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}$ – вектор кутової швидкості тіла, напрямлений уздовж осі обертання z, у той бік, звідки його обертання видно проти стрілки годинника, характеризує бистроту зміни кута повороту тіла, де $\omega_z = \dot{\varphi}_z$ – проекція кутової швидкості на вісь обертання z, $\omega = \omega_z$ – модуль (величина) кутової швидкості $[\omega] = \text{рад/с=с}^{-1}$; $\bar{k}$ – орт осі z;

$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \varepsilon_z \bar{k}$ – вектор кутового прискорення, напрямлений уздовж осі обертання, характеризує бистроту зміни кутової швидкості за часом, де $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}_z$ – проекція кутового прискорення на вісь обертання, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$ – модуль (величина) кутового прискорення $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2\text{=с}^{-2}$;

$v_A = \omega \cdot h$ – модуль лінійної швидкості точки *A*; вектор $\bar{v}_A \perp h$ і;

$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\text{об}} + \bar{a}_A^{\text{доц}}$ – прискорення точки *A*; $a_A = \sqrt{(a_A^{\text{об}})^2 + (a_A^{\text{доц}})^2}$ – модуль (величина) її прискорення, де $a_A^{\text{об}} = \varepsilon \cdot h$ – обертальне прискорення точки *A*, вектор $\bar{a}_A^{\text{об}} \perp h$; $a_A^{\text{доц}} = \omega^2 \cdot h$ – доцентрове прискорення точки *A*, вектор $\bar{a}_A^{\text{доц}}$ напрямлений вздовж відрізка *OA* від точки *A* до нерухомої точки *O*.

Механізм – це механічна система тіл, призначена для перетворення руху одного або декількох тіл у необхідні рухи інших тіл. Наприклад, обертальний рух навколо осі перетворюється в обертальний рух відносно іншої осі за рахунок зубчастих або фрикційних передач. Поступальний рух перетворюється в обертальний чи навпаки за рахунок гвинтових та кривошипно-шатунних механізмів або пасових (ремінних) передач.

На рис. 1.6-1.9 показано схеми передачі обертального руху.

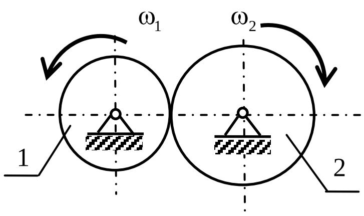


Рисунок 1.6

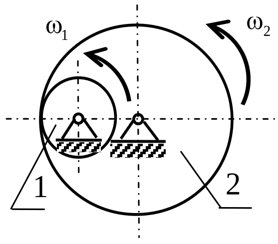


Рисунок 1.7

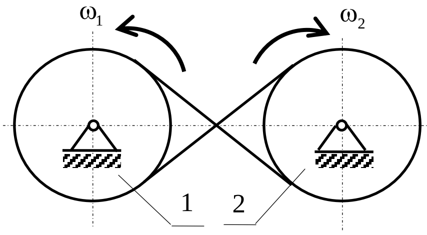


Рисунок 1.8

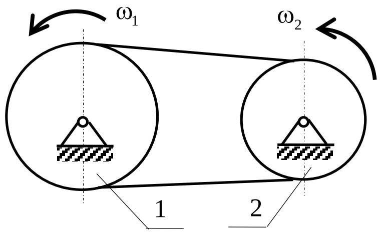


Рисунок 1.9

Для зубчастої та пасової передач $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, звідки

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.\ \varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2;\ \ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

У зубчастих передачах числа зубців коліс z пропорційні їхнім радіусам, тому виконуються співвідношення $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{z_2}{z_1}$.

Питання для самоконтролю

1. Що називають поступальним рухом твердого тіла?
2. Що називають обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі?
3. Як задати закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
4. Що таке рівнозмінний та рівномірний обертальний рух тіла навколо нерухомої осі?
5. За якими формулами визначають швидкість та прискорення точки тіла при його обертальному русі?
6. Які рухи тіл називають найпростішими та внаслідок яких накладених на тіла в’язей є частковими випадками загального руху вільного тіла: поступальний рух, обертання тіла навколо нерухомої осі, обертальний рух тіла з однією нерухомою точкою?
7. Що називають механізмом (передачею)?
8. За яких умов та за рахунок яких механізмів або передач один рух перетворюється в інший?

1.3.2. Приклад вирішення завдання № 1

Колесо 1 обертається навколо нерухомої осі згідно із законом $\varphi = 2t^2 + 4$ (рад) і приводить в рух механізм підйому вантажу 4. Механізм, кінематична схема якого приведена на рис. 1.10, складається з двох ступінчастих коліс 2 і 3, сполучених ремінною передачею, що обертаються навколо нерухомих осей.

Визначити швидкість і прискорення вантажу 4 у момент часу t = 3 с, якщо R_1 = 40 см, R_2 = 15 см, R_3 = 25 см, r_2 = 10 см, r_3 = 20 см.

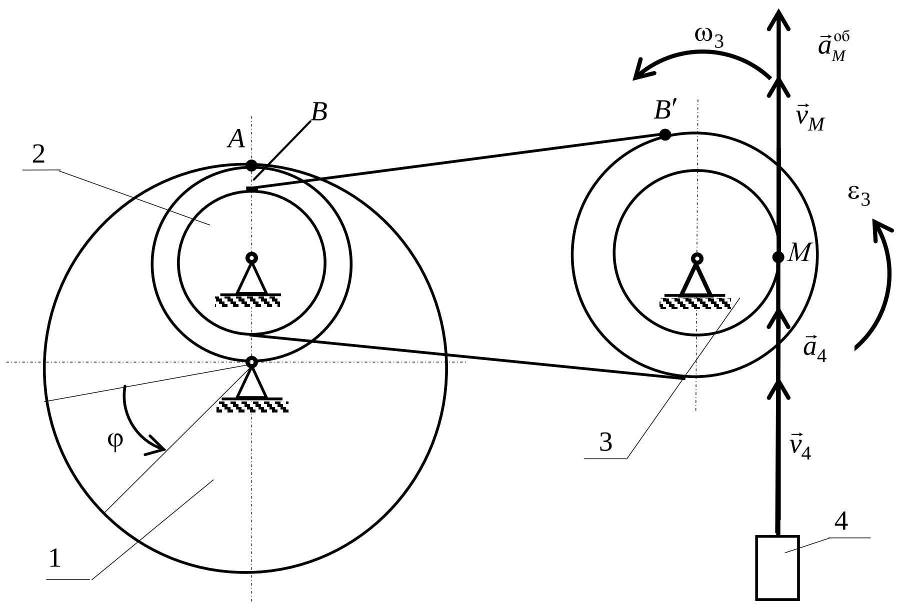


Рисунок 1.10

<u>Рішення</u>

Визначимо кутову швидкість зубчатого колеса $\omega_1 = \dot{\varphi} = 4t, \text{с}^{-1}$. Точка контакту коліс 1 і 2 є в даний момент часу їх загальною, її швидкість дорівнює $v_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$, звідки $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{R_1}{R_2}$. Далі, прирівнюючи швидкості точок, що належать у цей момент часу колесам 2 і 3, отримаємо зв'язок між кутовими швидкостями цих коліс, звідки $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Підставляючи вираз для кутової швидкості і значення радіусів коліс, визначимо, що

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{R_3} = \omega_1 \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{r_2}{R_3}, \quad \omega_3 = 4t \frac{40}{15} \cdot \frac{10}{25} = 4.267t, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2}.$$

Обчислимо швидкість точки M вантажу 4 при t=3с $v_M = v_4 = 4.267 \cdot 3 \cdot 20 = 256$ см/с. Прискорення вантажу 4 дорівнює обертальному прискоренню точки M, тобто

$$a_4 = a_M^{\text{об}} = \varepsilon_3 r_3 = \dot{\omega}_3 r_3 = 4.267 \cdot 20 = 85.34 \text{ см/с}^2.$$

1.3.3. Приклад вирішення завдання № 2

Для механізму, кінематична схема якого приведена на рис. 1.11, провідною ланкою є вантаж. Для нього задано закон зміни вертикальної координати вантажу $x(t) = 30 + 10t^2$, см, а також радіуси коліс $R_1 = R_3 =$ = 10 см, R_2 = 30 см,

r_2 = 20 см. Визначити швидкість і прискорення точки M для моменту часу t_1 = 1 с.

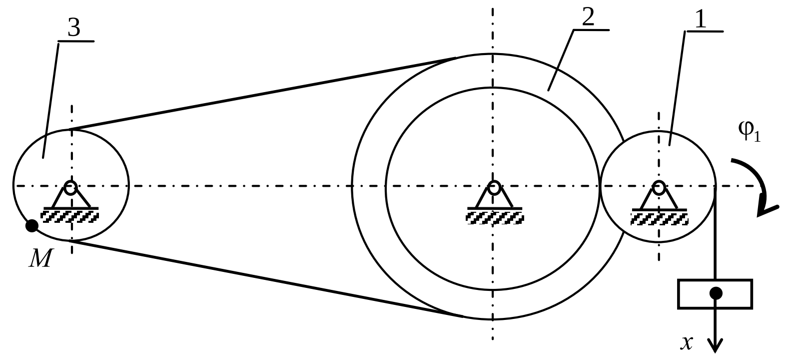


Рисунок 1.11

Рішення

Позначимо і покажемо точки механізму A, B, D_1, D_2 (рис. 1.12). Спочатку визначимо швидкість вантажу. Оскільки він здійснює поступальний рух, його можна вважати за , рух якої уздовж осі x задано координатним способом. Проекцію швидкості вантажу на цю вісь підрахуємо за часом t_1 = 1 с як похідну від координати x – $v_x = \dot{x} = 20t$ см/с, v_x = 20 см/с. Оскільки знак проекції швидкості вантажу на вісь x позитивний, вектор швидкості вниз, тобто в позитивному напрямге осі x (див. рис. 1.12).

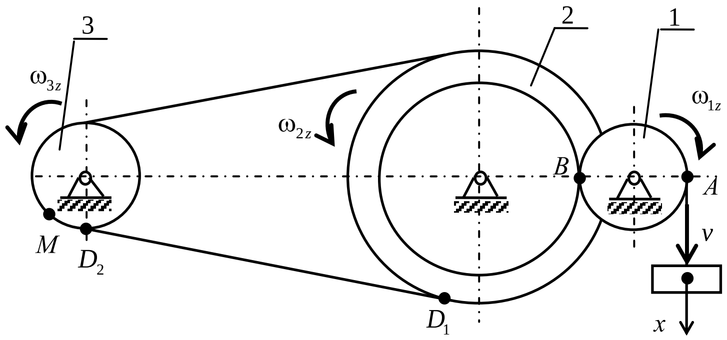


Рисунок 1.12

Швидкості усіх точок троса, на якому висить вантаж, однакові, тому що він вважається за нерозтяжний. Швидкість точки сходу тросу A з барабана (колеса) 1 дорівнює швидкості вантажу. Але ця в даний момент часу належить і барабану 1, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, що дозволяє визначити його кутову швидкість. Напрямок кутової швидкості колеса 1 відповідає напрямку швидкості точки A. Скориставшись формулою

$$\omega_{1z} = \frac{v_x}{R_1} = \frac{20t}{10} = 2t \text{ рад/с},$$

підрахуємо при t_1= 1 с значення кутової швидкості колеса 1 ω_{1z} = 2 рад/с.

Колеса 1 і 2 знаходяться в зачепленні і мають загальну точку B, тому швидкості точок цих коліс, що розташовані на їх обідді, однакові. При запису алгебраїчного значення кутової швидкості колеса 2 врахуємо, що зовнішнє зачеплення напрямок його обертання на протилежне і відповідає формулі

$$\omega_{2z} = \frac{-\omega_{1z} R_1}{r_2},$$

з якої при $t_1 = 1$ с. знайдемо модуль $\omega_{2z} = \omega_2 = 1$ рад/с.

Також однакові швидкості точок D_1 і D_2, розташованих на шківах ремінної передачі. Проте їхній напрямок обертання не змінюється, тому, скориставшись формулою

$$\omega_{3z} = \frac{\omega_{2z} R_2}{R_3} = 3t \quad ,$$

при $t_1 = 1$ с підрахуємо, що $\omega_{3z} = 3$ рад/с.

Тепер визначимо швидкість точки M колеса 3 у момент часу $t_1 = 1$ с. Величина швидкості – це добуток модуля кутової швидкості на відстань від точки M до осі обертання, яке дорівнює радіусу R_3 $v_M = \omega_{3z} R_3 = 30$ см/с. Кутове прискорення колеса 3 – $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = 3$ рад/с^2.

Прискорення точки M визначимо як геометричну суму векторів обертального та доцентрового прискорень, показаних на рис. 1.13, модулі яких обчислимо по формулах

$$a_M^{\text{об}} = \varepsilon_{3z} R_3 = 30 \text{ см/с}^2; \; a_M^{\text{доц}} = \omega_{3z}^2 R_3 = 90 \text{ см/с}^2,$$

а потім підрахуємо

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{доц}})^2 + (a_M^{\text{об}})^2} = 30\sqrt{10} \approx 94{,}87 \text{ см/с}^2.$$

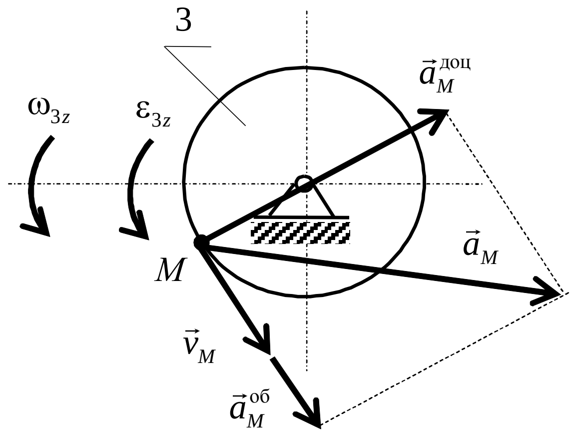


Рисунок 1.13

Рух колеса 3 прискорений, тому обертальне прискорення точки M у той же бік, що й її швидкість. Доцентрове прискорення завжди до осі обертання. Якщо умовою буде заданий не закон руху вантажу $x(t)$, а залежність кута повороту колеса 1 від часу, наприклад, $\varphi_{1(t)=}$ $3+t^2$ (рад), зміни в рішенні завдання торкнуться тільки початкового етапу, де значення кутової швидкості колеса 1 визначимо як похідну від його кута повороту за часом $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 2t$ рад/с.

1.4. Плоско-паралельній рух твердого тіла

1.4.1. Теоретичні відомості

Плоско-паралельнім рухом твердого тіла називають такий рух, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині. Вивчення плоско-паралельного руху можна звести до вивчення руху плоскої фігури в її площині (рис. 1.14,а) або відрізка прямої цієї фігури (рис. 1.14, б).

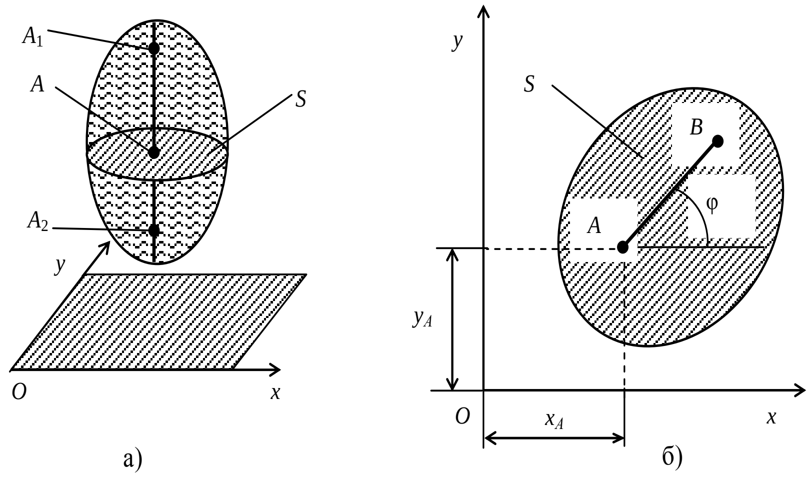


Рисунок 1.14

Положення фігури в даний момент часу визначають координатами $x_A = f_1(t)$ і $y_A = f_2(t)$ її довільної точки *A*, вибраної в якості *полюса*, і кутом φ повороту фігури навколо цього полюса $\varphi = \varphi(t)$ (рівняння руху плоскої фігури). Перші два рівняння характеризують поступальний рух фігури, при якому всі її точки рухаються так само, як і полюс, а третє – обертальний рух навколо полюса. Кутова швидкість і кутове прискорення обертального руху фігури не залежать від вибору полюса.

Швидкість будь-якої *B* плоскої фігури дорівнює геометричній сумі двох швидкостей: швидкості *A*, прийнятої за полюс, і швидкості *B* при обертанні тіла навколо полюса (рис.1.15,а) $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$; $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$, її модуль $|\vec{v}_{BA}| = \omega \cdot AB.$ Модуль і напрямок швидкості знаходять побудовою відповідного паралелограма (рис.1.15а).

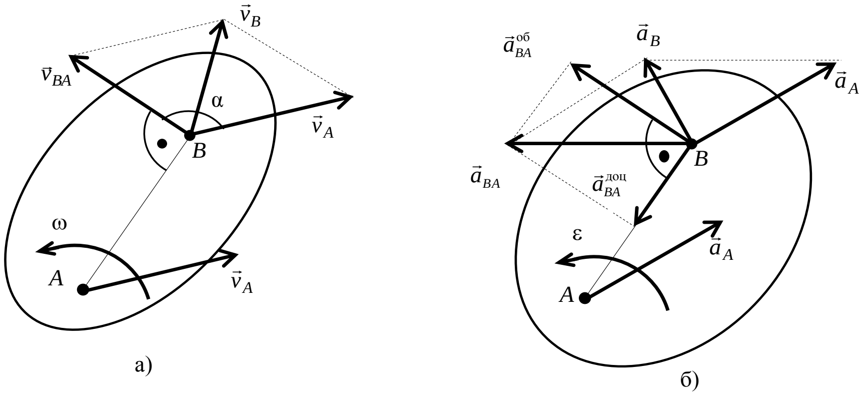


Рисунок 1.15

Ще один спосіб визначення швидкостей точок тіла при плоскопаралельному русі заснований на використанні теореми про рівність проекцій швидкостей двох точок тіла. При плоскому русі фігури проекції швидкостей точок *A* і *B* (кінців відрізка *AB*) на його напрямок рівні між собою. Слід відмітити, що ця теорема справедлива для будь-якого виду руху абсолютно твердого тіла і дозволяє легко знаходити швидкість його точки, якщо відомі напрямок швидкості цієї , а також напрямок і величина швидкості будь-якої іншої точки цього ж тіла.

Прискорення, наприклад, *B* плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення *A*, прийнятої за полюс, і прискорення, якого набуває при обертанні тіла навколо полюса (рис.1.15,б),

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}; \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}^{об} + \vec{a}_{BA}^{доц} = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}),$$

звідки можна знайти модулі відповідних векторів

$$\left|\vec{a}_{BA}^{об}\right| = \varepsilon\cdot AB; \quad \left|\vec{a}_{BA}^{доц}\right| = \omega^2\cdot AB,$$

а потім і модуль вектора прискорення точки *B*

$$\left|\vec{a}_B\right| = \sqrt{(a_B^{об})^2 + (a_B^{доц})^2} = h\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}.$$

Плоский рух тіла у даний момент часу можна розглядати як обертальний рух навколо миттєвого центра обертання або миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

Миттєвий центр швидкостей – є точка плоскої фігури, швидкість якої уданий момент часу дорівнює нулю. У загальному випадку МЦШ лежить у точці перетину перпендикулярів, проведених з двох точок плоскої фігури до їхніх швидкостей. Кутова швидкість ω плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані від МЦШ

$$\omega = \frac{V_À}{AP} = \frac{V_B}{BP}.$$

Тому швидкість будь-якої точки плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості ω на відстань від даної точки до МЦШ (рис.1.16,а)

$$V_A = \omega\cdot CP\ (\bar{V}_A \perp AÐ); \quad V_B = \omega\cdot BP\ (\bar{V}_B \perp BÐ).$$

Якщо $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B, \bar{V}_A \perp ÀÂ$, $\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$, (рис.1.16,б,в).

У випадку, коли фігура котиться без ковзання по нерухомій поверхні, МЦШ знаходиться у точці дотику фігури з цією поверхнею, $\omega = \frac{V_0}{OP}$; $V_A = \omega\cdot AP$ (рис. 1.16,г). Якщо $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B$, та не перпендикулярні *AB,* МЦШ прагне до нескінченності і $\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = 0$. Цей випадок можна розглядати як миттєво-поступальний рух для швидкостей точок (рис.1.16,д), при якому $\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}_C$.

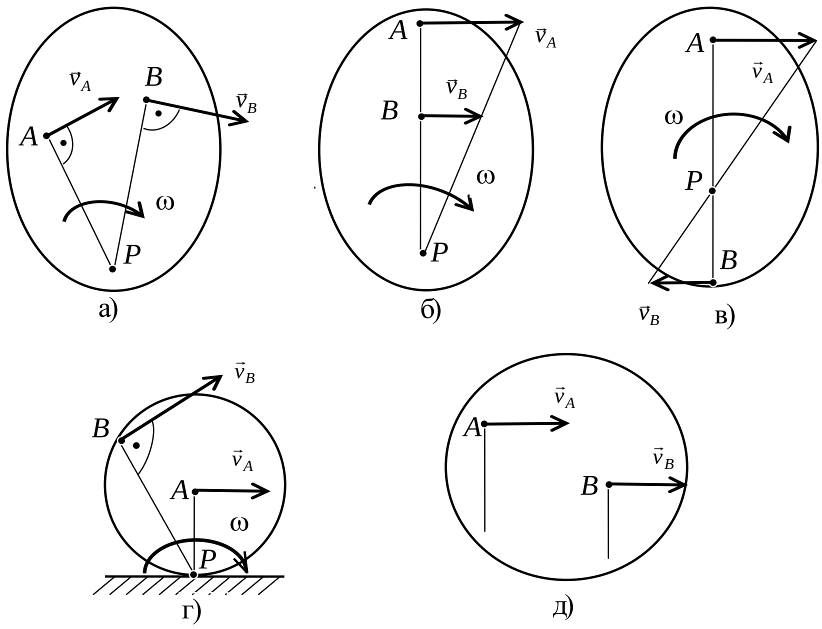


Рисунок 1.16

Питання для самоконтролю

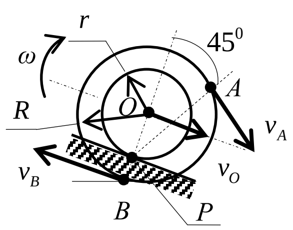
1. Що називають плоско-паралельним рухом твердого тіла та як задається цей рух?

2. За якими формулами визначають швидкість та прискорення точки тіла, якщо його рух є плоско-паралельним?

3. Що називають миттєвим центром швидкості (МЦШ)?

4 За якими формулами з допомогою МЦШ визначають кутову швидкість фігури та швидкості будь-якої її точки, якщо рух є плоско-паралельним?

1.4.2. Приклад вирішення завдання № 1



Котушка котиться без ковзання у вертикальній площині по похилому путі.

Знайти кутову швидкість котушки, швидкості B і O, якщо в даний момент часу $v_A = 2$ м/с, $r = 0.6$ м, $R = 1$ м (рис. 1.17).

Рисунок 1.17

Рішення

Котушка здійснює плоскопаралельний рух. Оскільки кочення відбувається без ковзання, то P МЦШ. Вектор швидкості A перпендикулярний відрізку AP і спрямований у бік кочення котушки, а чисельне значення швидкості пропорційне відстані від А до МЦШ

$$v_A = \omega \cdot AP,$$

де $AP = \sqrt{OA^2 + OP^2 - 2\cdot OA\cdot OP\cos\left(180^0 - 45^0\right)} = = \sqrt{R^2 + r^2 - 2R\cdot r\cos 135^0} = 1{,}49$ м.

Визначимо кутову швидкість котушки по формулі

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = 1{,}35 \text{ рад/с.}$$

Оскільки швидкості котушки B і O також пропорційні їх відстаням до точки P, то

$$v_O = \omega\cdot OP = \omega\cdot r = 0{,}81 \text{ м/с;}$$
$$v_B = \omega\cdot BP = \omega\cdot\left(R - r\right) = 0{,}54 \text{ м/с.}$$

Напрямок обертання котушки, а, отже, і напрямки швидкостей B і O, визначаються напрямком вектора швидкості по відношенню до МЦШ.

1.4.3. Приклад вирішення завдання № 2

Стрижень AB має на кінцях повзуни, один з яких A ковзає зі швидкістю v_A = 1 м/с.

Знайти у положенні, вказаному рис 1.18, кутову швидкість стрижня, швидкості B і C, якщо AB = 1,2 м, AC = ВС.

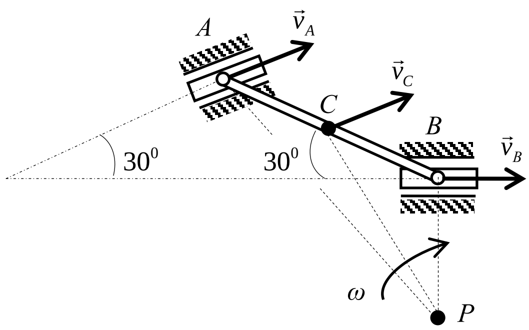


Рисунок 1.18

<u>Рішення</u>

Стрижень AB здійснює плоскопаралельний рух. Оскільки швидкості A і B направлені уздовж напрямку ковзання повзунів, то перпендикуляри A і B до їхніх швидкостей визначать положення МЦШ стрижня AB – точку P. Трикутник ABP є рівнобедрений, отже $AB = BP$ = 1,2 м. Швидкість A пропорційна відстані від неї до точки P

$$v_A = \omega_{AB}\cdot AP,$$

де $AP = 2AB\cos 30^0 = 2{,}08$ м. Обчислимо кутову швидкість стрижня AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{10}{20{,}8} = 0{,}48 \text{ рад/с.}$$

Швидкість B визначимо по формулі

$$v_B = \omega_{AB}\cdot BP = 0{,}48\cdot 1{,}2 = 0{,}58 \text{ м/с.}$$

Для визначення швидкості знайдемо відстань PC за допомогою теореми косинусів

$$CP = \sqrt{BP^2 + BC^2 - 2\cdot BP\cdot BC\cos 120^0} = 1{,}59 \text{ м.}$$

Тоді швидкість $v_C = \omega_{AB} \cdot CP$ = 0,76 м/с.

1.4.4. Приклад вирішення завдання № 3

Кривошип *OA* довжиною *r* = 0,1 м обертається з кутовою швидкістю ω_{OA}= 2 рад/с , приводячи у рух шатун *AB* довжиною *l* = 0,4 м, як показано на рис. 1.19.

Визначити швидкість повзуна, кутову швидкість шатуна ω_{AB} у двох положеннях механізму, коли кут повороту кривошипа φ = 0 і φ = 90^0.

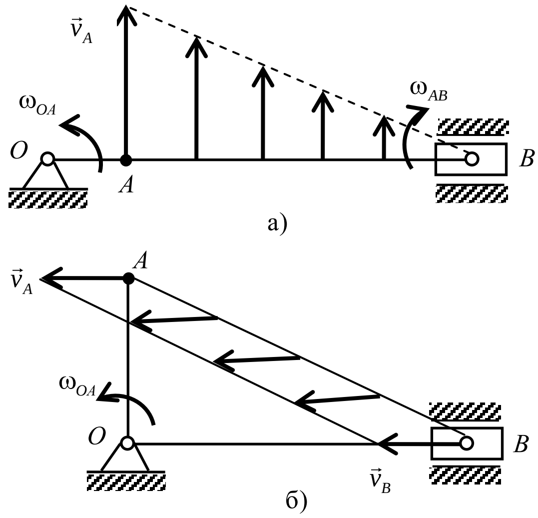


Рисунок 1.19

Рішення

Шатун *AB* здійснює плоскопаралельний рух. Т *A* належить кривошипу *OA*, що здійснює обертальний рух. Швидкість повзуна *B* паралельна швидкості *A*, чисельне значення якої $v_A = \omega_{OA} \cdot r$= 2·1 = 2 м/с. Знайдемо положення МЦШ, за допомогою перпендикулярів з *A* і *B* до їхніх швидкостей. При куті φ = 0 (рис. 1.19,а) перпендикуляри до швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ перетинаються в точці *B*. Отже, *B* у цьому положенні механізму є МЦШ. Таке положення механізму називають «мертвим».

Знайдемо кутову швидкість шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{AB} = \frac{\omega_{OA} \cdot r}{l} = 0{,}5 \text{ рад/с.}$$

На рис.1.19,а показано розподіл швидкостей точок шатуна.

При куті повороту кривошипа φ = 90^0 швидкості $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ напрямлені паралельно, а перпендикуляри до них перетинаються у нескінченності. Отже, в даний момент часу має місце миттєвий поступальний розподіл швидкостей, тобто всі точки шатуна *AB* мають однакові швидкості, рівні $\vec{v}_A$, при цьому кутова швидкість шатуна ω_{AB} = 0
(рис. 1.19,б).

1.4.5. Приклад вирішення завдання № 4

Кривошип OA = 0,5 м обертається з кутовою швидкістю ω_{OA} = = 10 рад/с і приводить в рух шатун AB = 4 м.

Знайти кутову швидкість шатуна, швидкості точок B і C, якщо (AC = 2,5 м) для кута повороту кривошипа $\varphi = 45^0$ і $OA \perp AB$ (рис. 1.20).

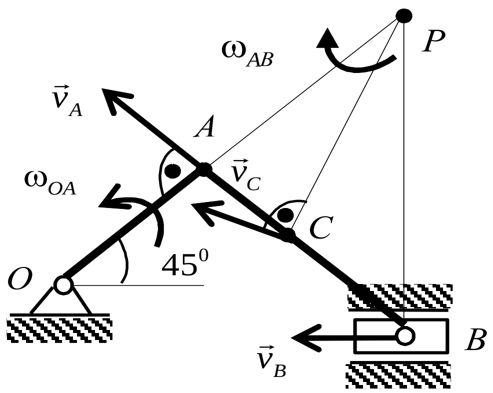


Рисунок 1.20

<u>Рішення</u>

Оскільки кривошип OA здійснює обертальний рух, то

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 5 \text{ м/с}; \quad \vec{v}_A \perp OA.$$

Шатун AB здійснює плоскопаралельний рух. Знайдемо МЦШ для даного положення шатуна – точку P на перетині перпендикулярів до швидкостей A і B. Трикутник PAB рівнобедрений, при цьому AB = AP = 4 м. Знайдемо кутову швидкість шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ рад/с}.$$

Швидкості B і C пропорційні їх відстаням до МЦШ:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP,$$

де $BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}65$ м; $v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 1{,}25 \cdot 5{,}65 = 7{,}07$ м/с;

$$CP = \sqrt{AP^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 2{,}5^2} = 4{,}72 \text{ м};$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP = 1{,}25 \cdot 4{,}72 = 5{,}9 \text{ м/с}.$$

1.5. Аналітичне визначення кінематичних характеристик руху тіл та їхніх точок механічної системи

Розглянемо електромеханічний привід, який перетворює обертальний рух вала електродвигуна 1 у поступальний рух тіла 3 та у плоско-паралельний рух колеса 4, що котиться по нерухомій поверхні. На рис.1. 21 представлено конструктивну та розрахункову схему цього привода.

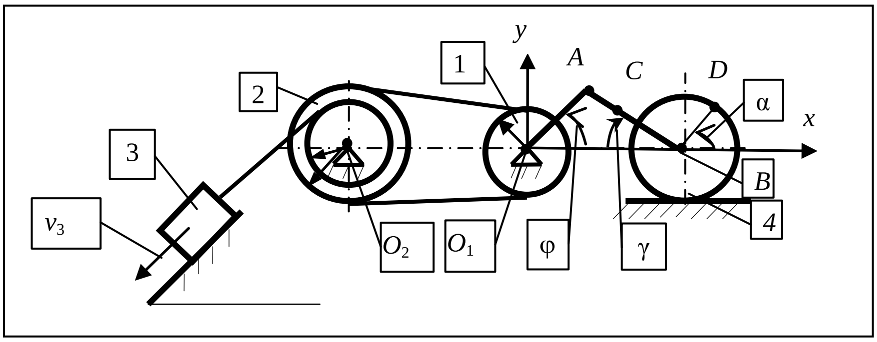


Рисунок 1.21

Для забезпечення переміщення тілу 3 вздовж нахиленої гладкої поверхні у приводі застосовано пасову передачу з паралельними осями шківу 1 радіусом R_1 та двоступеневого шківу 2 радіусами R_2 та r_2. Пасова передача перетворює обертальний рух шківа 1, жорстко зчепленого з валом електродвигуна, у обертальній рух двоступеневого шківа 2 з намотаним тросом, до якого тіло 3 прикріплено так, що дозволяє здійснювати поступальний рух кінця тросу разом з цим тілом. На валу ротора електродвигуна жорстко закріплено кривошип O_1A, шарнірно зв'язаний з шатуном AB, край якого B прикріплено до осі колеса 4 радіусом R. Кривошипно-шатунний механізм перетворює обертальний рух кривошипа в плоско-паралельний рух шатуна AB та колеса 4, що котиться без ковзання по горизонтальній поверхні.

Для електромеханічного приводу, вал електродвигуна 1 якого обертається за законом $\varphi = \kappa t^n$ (рад), треба визначити кінематичні характеристики руху тіл 1, 2, 3 кривошипно-шатунного механізму (кривошипу O_1A, шатуна AB) й колеса 4 та їхніх точок A, B, C, D (траєкторії, швидкості та прискорення) за N повних обертів валу.

Розглянемо приклад виконання завдання аналітичним способом. Для пасової передачі визначимо кутові швидкості та прискорення тіл 1, 2, 3:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1;\ \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1;\ \omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2};\ \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2;\ v_3 = \omega_2 r_2;\ a_3 = \varepsilon_2 r_2\,.$$

Скористаємось координатним методом, зв'яжемо початок системи координат O_1xy з віссю вала електродвигуна. Запишемо координати точок $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$:

$$x_A = OA\cos\varphi;\quad y_A = OA\sin\varphi;\quad \varphi = 3t^2;\quad \beta = \arcsin(y_A / AB);$$

$$x_B = x_A + AB\cos\beta;\quad y_B = 0\,;$$

$$x_C = x_A + AC\cos\beta;\quad y_C = y_A - AC\sin\beta;\quad \alpha = (OA + AB - x_B)/R;$$

$$y_D = R\sin\alpha;\quad x_D = x_B + R\cos\alpha.$$

За координатним методом знайдемо кінематичні характеристики руху тіл кривошипно-шатунного механізму.

$$\omega_{OA} = \dot{\varphi};\quad \varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA};\ \omega_{AB} = \dot{\beta};\quad \varepsilon_{AB} = \ddot{\beta};\ \omega_4 = \dot{\alpha};\ \varepsilon_4 = \ddot{\alpha},$$

а також швидкості та прискорення точок A, B, C, D.

$$v_A = \sqrt{\dot{x}_A{}^2 + \dot{y}_A{}^2};\ a_A = \sqrt{\ddot{x}_A{}^2 + \ddot{y}_A{}^2};\ \ v_B = \sqrt{\dot{x}_B{}^2 + \dot{y}_B{}^2};\ a_B = \sqrt{\ddot{x}_B{}^2 + \ddot{y}_B{}^2};\ \ v_C = \sqrt{\dot{x}_C{}^2 + \dot{y}_C{}^2};\ a_C = \sqrt{\ddot{x}_C{}^2 + \ddot{y}_C{}^2};$$

$$v_D = \sqrt{\dot{x}_D{}^2 + \dot{y}_D{}^2};\ a_D = \sqrt{\ddot{x}_D{}^2 + \ddot{y}_D{}^2}.$$

1.6. Комп'ютерне визначення кінематичних характеристик руху тіл та точок електромеханічного привода

За умовами завдання треба провести комп'ютерне дослідження характеристик руху точок і тіл механізмів, що перетворюють обертальні рухи валу й ротору електродвигуна у необхідні найпростіші рухи різних тіл електромеханічного приводу, а також встановити властивості траєкторій точок, швидкостей й прискорень точок і тіл механічної системи. Вихідний файл з інструкціями та коментарем.

Інструкції та розрахункові залежності	Коментарі
РАБОТА:=№1; **ВЫПОЛНИЛ:= Петров П.П. гр.ЭМС-38а;**	# Лабораторна робота. Кінематика механізмів #
Fi=k*t^2; k=3; R1=10; R2=60; r2=20; **OA=15; AB=30; AC=10; R=25;**	#Закон руху вала і ротора електродвигуна і кривошипа ОА, геометричні параметри тіл приводу #
w1=Fi't; e1=wOA't; w2=Fi't* R1/R2; **e2=wOA't*R1/R2;w3=Fi't*r2*R1/R2;** **e3=wOA't*r2*R1/R2;**	# Визначення кутових швидкостей та прискорень тіл – 1, 2, 3 #
xA=OA*cos(Fi); yA=OA*sin(Fi); **xB=xA+AB*cos(Beta);** **yB=0; xC=xA+AC*cos(Beta); yC=yA-AC*sin(Beta);** **xD=xB+R*cos(Alfa); yD=R*sin(Alfa);** **Beta=arcsin(yA/AB); Alfa=(OA+AB-xB)/R;**	# Визначення координат точок $A(X_A,У_A)$, $B(X_B,У_B)$, $C(X_C,У_C)$,$D(X_D,У_D)$ та кутів положення тіл кривошипно-шатунного механізму #
wOA=Fi't; eOA=wOA't; wAB=Beta't; **eAB=wAB't; wk=Alfa't; ek=wk't;**	#Визначення кутових швидкостей та прискорень тіл O_1A, AB кривошипно-шатунного механізму й колеса–4#
vAx=xA't; vAy=yA't; **vA= sqrt (vAx^2+vAy^2);aAx=vAx't; aAy=vAy't;** **aA= sqrt (aAx^2+aAy^2);vBx=xB't; vBy=yB't; vB= sqrt (vBx^2+vBy^2);aBx=vBx't; aBy=vBy't; aB= sqrt (aBx^2+aBy^2);** **vCx=xC't;vCy=yC't;vC=sqrt(vCx^2+vCy^2);aCx=vCx't ; aCy=vCy't; aC= sqrt (aCx^2+aCy^2);** **vDx=xD't; vDy=yD't; vD=sqrt(vDx^2+vDy^2);** **aDx=vDx't; aDy=vDy't; aD=sqrt(aDx^2+aDy^2);**	# Визначення проекцій та модулів векторів швидкостей та прискорень точок $A(X_A,У_A)$,$B(X_B,У_B)$, $C(X_C,У_C)$,$D(X_D,У_D)$ # Інструкції #
T=sqrt(N*2*pi/k); N=2; **ВАРЬИРОВАТЬ:=t,0,T;**	# Зміна часу $t\in[0,T]$ відповідно до N повних оборотів валу електродвигуна $\varphi(T)=2\pi N;\ T=\sqrt{N2\pi/k}$ #
ПОКАЗАТЬ:=yA(xA),xB,yC(xC),yD(xD);	# Демонструються траєкторії точок A, B, C, D #
СРАВНИТЬ:=угл_скор_тел_1_2(w1,w2,w3), **угл_ускор_тел_1_2(e1,e2,e3),**	#Порівнюються кутові швидкості й прискорення тіл 1,2#
угл_скор_кривош_шат_колеса(wOA,wAB,wk), **угл_ускор_кривош_шат_колеса(eOA,eAB,ek),**	#Порівнюються кутові швидкості й прискорення тіл O_1A, AB,колеса4 #
скор_точек_ABCD(vA,vB,vC), **ускор_точек_ABCD(aA,aB,aC);** **РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;** **КОНЕЦ;**	#Порівнюються швидкості й прискорення точок $A(X_A,У_A)$, $B(X_B,У_B)$, $C(X_C,У_C)$, $D(X_D,У_D)$#

2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2
«ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ В'ЯЗІВ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ»

2.1. Мета, об'єкт,предмет, методи досліджень

Метою роботи є набуття практичних умінь у вирішенні завдань зі статики, щодо визначення реакцій в'язів, які при дії на тіла активних сил утримують матеріальну систему в рівновазі; набуття навичок роботи з обчислювальною технікою (комп'ютера з програмним забезпеченням) у дослідженні для підтвердження теоретичного положення статики про умови рівноваги й пасивність реакцій в'язів системи матеріальних тіл, тобто реакції в'язів змінюються при переході к любим іншим системам активних сил й залежні від виду в'язі.

Об'єктом досліджень є механічні системи тіл та реакції типових в'язів (опори, стрижні, шарніри та інші), які при дії на тіла активних сил (збіжних, плоских, просторових) утримують матеріальну систему в рівновазі.

Предметом досліджень є властивості реакцій в'язів системи матеріальних тіл й зміни реакцій в'язів при переході к іншим видам в'язів та активним силам.

Методи досліджень містять: аналітичні та комп'ютерні обчислювання.

2.2.Типи в'язів та їхні реакції

2.2.1.Теоретичні відомості

Сили реакцій накладених на тіло (систему тіл) в'язів залежать від типу в'язів:

Гладка поверхня - поверхня, при визначенні реакції якої силами тертя можна нехтувати. Вектор реакції гладкої поверхні прикладений в точці дотику тіла з поверхнею і направлений по нормалі до поверхні (рис.2.1) У разі опори тіла на уступ або вістря - тобто точкової опори, гладкою вважається поверхня самого тіла, а вектор реакції прямує по нормалі до поверхні тіла (рис.2.2).

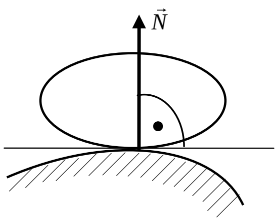


Рисунок 2.1

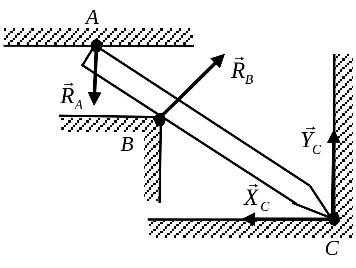


Рисунок 2.2

Невагомий стрижень з ідеальними шарнірами на кінцях - в'язі, що ідеалізується, у вигляді прямолінійного або криволінійного стержня, з шарнірами в точках його кріплення до інших тіл і з вагою, якою в задачі можна нехтувати.

В ідеальних шарнірах відсутнє тертя. Реакція стержня позначається вектором направленим по лінії проведеної скрізь осі його шарнірів (рис.2.3).

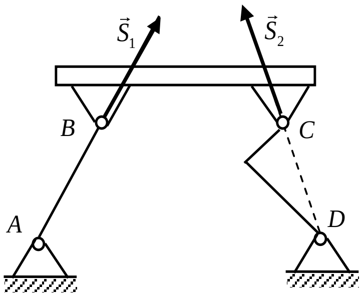


Рисунок 2.3

Гнучка нитка (трос, канат, мотузок, ланцюг тощо) - зв'язок, який може працювати лише тоді, коли вона натягнута. Вектор реакції нитки приймають прикладеним в точці, де нитка прив'язана до тіла, рівновага якого розглядується, і направляють уздовж нитки (рис.2.4).

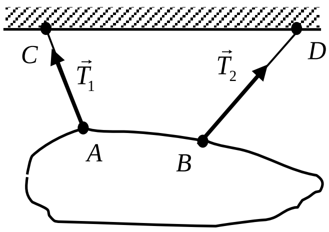


Рисунок 2.4

Шарнірно-рухома опора - опора, що дозволяє точці тіла, яка пов'язана з опорою, переміщатися без тертя уздовж якої-небудь поверхні. Реакція рухливої опори прямує по нормалі до поверхні, уздовж якої може переміщатися опора (рис.2.5).

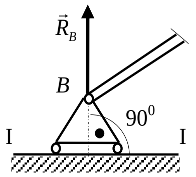


Рисунок 2.5

Шарнірно-нерухома опора або циліндровий шарнір - в'язь, що не дозволяє точці тіла, що скріпляє з такою опорою, переміщатися в плоскості, перпендикулярній осі обертання шарніра, але що дозволяє тілу за відсутності інших зв'язків повертатися щодо цієї осі. Умовно мається на увазі, що в шарнірі відсутнє тертя (рис.2.6а,б).

Конструктивне виконання шарнірно-нерухомої опори можуть бути і підшипники ковзання, і підшипники кочення, і просто пальцеві з'єднання тощо.

Сила реакції шарнірно-нерухомій опори розташована в плоскості, перпендикулярній осі обертання шарніра; проходить через центр шарніра; невідома ні по величині, ні по направленню.

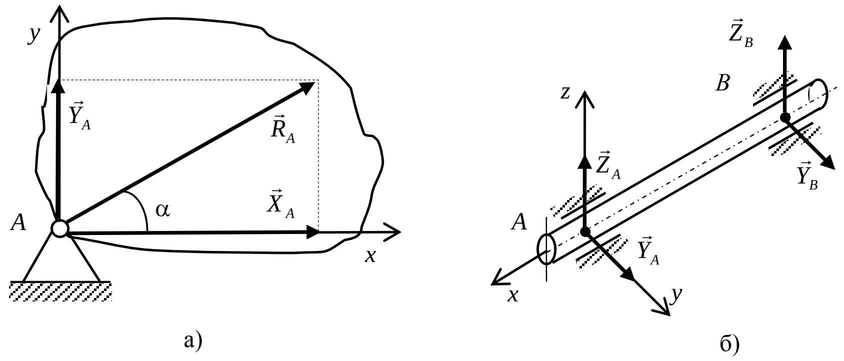


Рисунок 2.6

Кульова опора або сферичний шарнір - зв'язок, що не дозволяє одній з точок тіла переміщатися ні в одному з направлень, а дозволяє тілу повертатися в певних межах щодо будь-якої з координатних осей, що проходять через цю точку (рис.2.7а).

Реакція опори - невідома по величині і направленню в просторі сила. Її компоненти по осях координат і є шуканими величинами.

Підп'ятник - зв'язок, що є комбінацією циліндрового шарніра і опорної плоскості. Реакція підп'ятника, як і в сферичного шарніра, визначається по її складових, направлених уздовж трьох координатних осей (рис.2.7б).

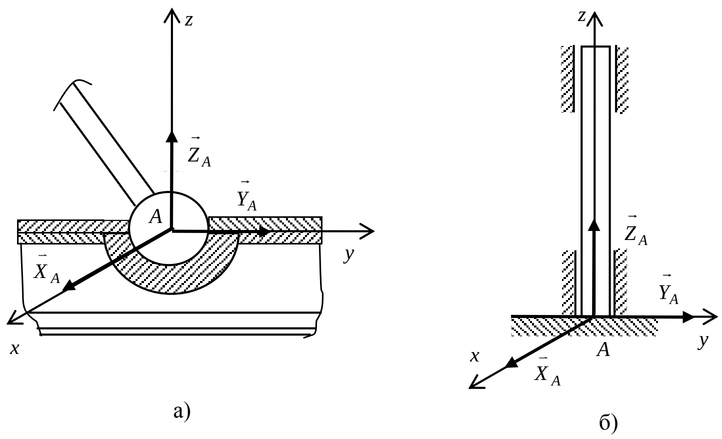


Рисунок 2.7

Затискуючи опори, звані також жорсткі затиснення, - це умовна назва в'язів, що перешкоджають закладеному тілу переміщатися в будь-якому з напрямі і повертатися навколо будь-якої з координатних осей. Прикладами таких опор є: закладені в стіну будинку плити підвіконь або балконів, кронштейни для кріплення труб, балок і рам, звичайні вбиті в стіну болти, цвяхи і інше (рис.2.8а,б).

Невідому силу реакції визначають через її компоненти, а момент невідомої пари сил прийнято називати моментом закладення.

Окрім жорсткого затиснення може зустрітися і ковзаючи закладення - зв'язок, що не дозволяє закріпленому тілу повертатися щодо точки закріплення і переміщатися лише в одному з напрямі.

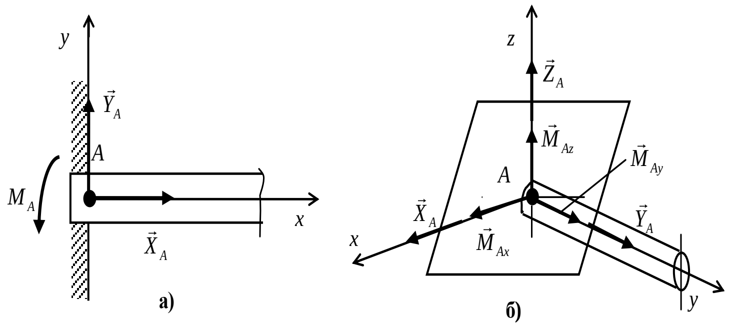


Рисунок 2.8

Питання для самоконтролю

1. Які типи в'язів Ви знаєте ?
2. Як визначають сили реакцій в’язі гладка поверхня ?
3. Як визначають сили реакцій невагомий стрижень з ідеальними шарнірами на кінцях ?
4. Як визначають сили реакцій гнучка нитка ?
5. Як визначають сили реакцій шарнірно-рухома опора ?
6. Як визначають сили реакцій шарнірно-нерухома опора або циліндровий шарнір ?
7. Як визначають сили реакцій кульова опора або сферичний шарнір ?
8. Як визначають сили реакцій підп'ятник ?
9. Як визначають сили реакцій опор, званих жорсткі затиснення ?

2.3.Рівновага тіл під дією систем збіжних сил

2.3.1.Теоретичні відомості

Сукупність сил, лінії дії яких перетинаються в одній точки, називають ***збіжною системою сил.*** Якщо всі сили розташовані в одній площині, то таку систему називають ***плоскою системою збіжних сил***, а якщо сили довільно розташовані в просторі – ***просторовою системою збіжних сил.***

З формули виходять умови рівноваги тіла під дією системи сил, що сходяться, у векторній формі:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 .$$

Для вирішення завдань зручно використовувати аналітичну форму умов рівноваги, яка вимагає рівності нулю проекцій рівнодіючій на координатні осі або сум проекцій на ці осі сил початкової системи:

Для плоскої системи збіжних сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ .$$

Для просторової системи збіжних сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0$$

Тут *x, y, z* – осі довільно вибраної системи координат.

Рівняння рівноваги – це аналітичні рівності умов рівноваги конкретної системи тіл, тіла, в які вводяться невідомі параметри: реакції в'язів, сили, кути тощо.

Проектування векторів сил при складанні рівнянь рівноваги доцільно постійно застосовувати строго певний лад розгляду векторів сил як при їх проектуванні на осі координат, так і при визначенні їх моментів:

- проекція вектора на вісь дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між направленням вектора і позитивним направленням осі;
- проекція вектора на вісь є скалярною величиною і може бути як позитивною, так і негативною;
- знак проекції визначається знаком косинуса кута, що утворює направлення вектора і позитивним напрямом осі.

На розрахункових схемах, як правило, вибирають гострі кути між лінією дії вектора і віссю (або паралельній осі лінією). Тому знак проекції встановлюють співставленням напрямів проектованих векторів і осей. Якщо напрям вектору в ту ж сторону, що і вісь, то проекція вектора позитивна, інакше - негативна.

Якщо проектується просторовий вектор, то дві його проекції знаходяться за допомогою подвійного проектування. При цьому спочатку визначаються проекції вектора на координатну плоскість де лежить вісь, а потім проекції вектора вже на осі плоскості. Кут між проекцією вектора на плоскість і однією з осей плоскості має бути або відомий, або визначатися з геометрії (рис.2.9).

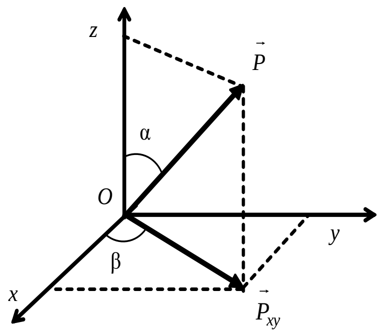


Рисунок 2.9

$$P_x = P_{xy}\cos\beta = P\sin\alpha\cdot\cos\beta\ ;\ P_y = P_{xy}\sin\beta = P\sin\alpha\cdot\sin\beta\ .$$

Проекцію сили на ось z знаходимо по загальному правилу, $P_z = P\cos\alpha$.

Послідовність вирішення завдань на рівновагу тіл

Завдання на визначення невідомих реакцій зв'язків можна вирішувати в пропонованій послідовності:

- вибрати об'єкт рівноваги;
- зобразити всі активні сили, що діють безпосередньо на об'єкт рівноваги. Якщо активні сили передаються на об'єкт рівноваги за допомогою ниток, перекинутих через нерухомі блоки без тертя в підшипниках, то на об'єкт рівноваги діють сили натягнення ниток в точках їх кріплення. Їх визначають з умов рівноваги блоків;
- відкинути зв'язки, накладені на об'єкт рівноваги і замінити їх дію реакціями, відповідними типам зв'язків;
- записати для отриманої системи сил, що включає активні сили і реакції зв'язків, систему рівнянь рівноваги;

Перевірка на статичну визначність, тобто можливість рішення задачі методами статики, полягає в зіставленні кількості невідомих в даному завданні з числом рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи тіл і сил. Для цієї перевірки необхідно знати число аналітичних умов рівноваги для можливих систем сил. При вирішенні завдань на складені конструкції в процесі такої перевірки вибирають раціональний план розв’язання задачі.

Питання для самоконтролю

1. Що розуміють під розрахунковою схемою тіла (або системи тіл, конструкції), рівновага якого розглядується ?
2. З якою метою провадять перевірку на статичну визначність
3. Що таке рівняння рівноваги ?
4. Як записуються векторні умови рівноваги збіжної просторової системи сил ?
5. Як проектувати вектори сил при складанні рівнянь рівноваги плоскої системи сил? Як встановити знак проекції вектора сил ?
6. Як проектувати просторові вектори сил при складанні рівнянь рівноваги просторової системи сил? Як встановити знак проекції вектора сил ?
7. Яка послідовність рішення задач на рівновагу тіл?

2.3.2.Приклад вирішення завдання № 1

Від точки А вертикального стовпа *OA* (ідеальний стрижень) висотою 6 *м*, що опертий на фундамент, натягнуті вздовж осі Оy дріт й обтяжні троси *AC* и *AD*, які закріплені на горизонтальній плоскості фундаменту в точках C і D на відстані *OC* = *OD* = 4,5 *м*, так що кут між лінями *OC* й *OD* складає $\angle COD = 120^0$. Виходячи з умов рівноваги стовпа визначте сили натягнення тросів S_1, S_2, та вертикальну силу притискання стовпа N, якщо дріт натягнуто силою *T* = 300 Н (рис.2.10).

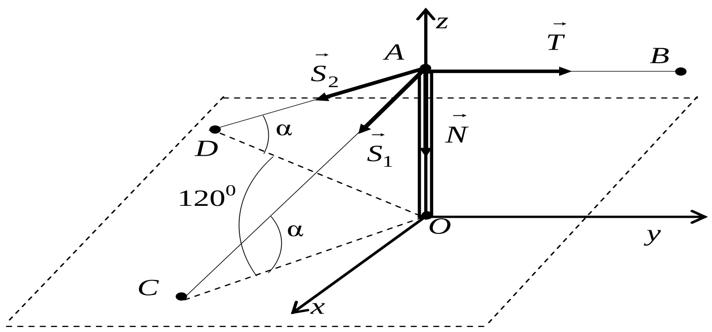


Рисунок 2.10

Рішення

1) Як об'єкт рівноваги приймемо точку *A*.

2) Активною силою є сила натягнення $\vec{T}$ дріта *AB*.

3) Відкидаючи зв'язки (відтяжки *AD*, *AC* і стовп *AO*), замінимо їх дію на об'єкт рівноваги реакціями $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\vec{N}$.

4) Запишемо рівняння рівноваги отриманої системи сил, в прийнятій системі координат. Для зручності складемо таблицю, яка є допоміжною, а для сил $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ застосуємо спосіб подвійного проектування.

$\vec{P}_k$	$\vec{T}$	$\vec{S}_1$	$\vec{S}_2$	$\vec{N}$
F_{kx}	0	$S_1\cos\alpha\cdot\cos 30^0$	$-S_2\cos\alpha\cdot\cos 30^0$	0
F_{ky}	T	$-S_1\cos\alpha\cdot\cos 60^0$	$-S_2\cos\alpha\cdot\cos 60^0$	0
F_{kz}	0	$-S_1\sin\alpha$	$-S_2\sin\alpha$	$-N$

Тепер для запису системи рівнянь рівноваги підсумуємо елементи відповідних рядків таблиці і прирівняємо ці суми нулю:

$$S_1\cos\alpha\cdot\cos 30^0 - S_2\cos\alpha\cdot\cos 30^0 = 0;$$

$$T - S_1\cos\alpha\cdot\cos 60^0 - S_2\cos\alpha\cdot\cos 60^0 = 0;$$

$$-S_1\sin\alpha - S_2\sin\alpha - N = 0.$$

Тут $\cos\alpha = \frac{CO}{AC} = \frac{4.5}{\sqrt{6^2+4.5^2}} = 0,6;\ \sin\alpha = \frac{AO}{AC} = \frac{6}{\sqrt{6^2+4.5^2}} = 0,8.$

З 1-го рівняння отриманої системи виходить, що $S_1 = S_2$. Далі знаходимо:

з 2-го рівняння

$$S_1 = S_2 = \frac{T}{2\cos\alpha\cdot\cos 60^0} = \frac{300}{2\cdot 0,6\cdot 0,5} = 500\ \text{Н}$$

з 3-го рівняння

$$N = -2S_1\sin\alpha = 2\cdot 500\cdot 0,8 = -800\ \text{Н}.$$

Знак «мінус» указує на те, що реакція стовпа насправді направлена убік, протилежну прийнятою .

2.3.3.Приклад вирішення завдання № 2

Три нахилені до горизонту під кутами $\alpha=45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 30^0$ ідеальні стержні *AD*, *BD* и *CD* з’єднані в точці *D*, до якої під кутом $\varepsilon = 30^0$ з віссю Оу протягнено трос, що перекинуто через нерухомий блок *E*, на кінці якого закріплено вантаж *Q*, що важить 100 кН. Виходячи з умов рівноваги стержневої системи визначте сили $\boldsymbol{R}_{AD}$, $\boldsymbol{R}_{BD}$, $\boldsymbol{R}_{CD}$, що діють на стержні та силу натягнення тросу ***T***. Тертям в блоці нехтувати(рис2.11).

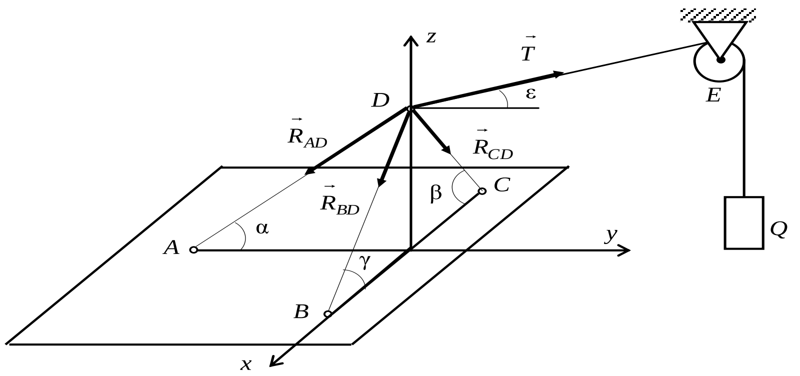


Рисунок 2.11

Рішення

1) Як об'єкт рівноваги приймемо точку *D*.

2) Активною силою є сила $\vec{T}$ натягнення тросу, що діє на об'єкт рівноваги, причому величина цієї сили дорівнює вазі вантажу *Q*, оскільки тертя в блоці відсутнє.

3) Реакції зв'язків, зусилля в ідеальних $\vec{R}_{AD}$, $\vec{R}_{BD}$, $\vec{R}_{CD}$ і осі вибраної системи координат показані на схемі.

4) Запишемо рівняння рівноваги, в даному випадку не складаючи допоміжної таблиці:

$$\sum F_{kx} = 0;\ R_{BD}\cos\gamma - R_{CD}\cos\beta = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;\ -R_{AD}\cos\alpha + T\cos\varepsilon = 0;$$
$$\sum F_{kz} = 0;\ -R_{AD}\sin\alpha - R_{BD}\sin\gamma - R_{CD}\sin\beta + T\sin\varepsilon = 0.$$

Спочатку вирішуємо 2-е рівняння, оскільки в нім міститься одна невідома реакція

$$R_{AD} = \frac{T\cos\varepsilon}{\cos\alpha} = \frac{100\cdot 0,866}{0,707} = 122,49\ \text{кН}.$$

Потім, виражаючи з 1-го рівняння $R_{BD} = \dfrac{R_{CD}\cos\beta}{\cos\gamma}$ і підставляючи R_{BD} і R_{AD} в 3-е рівняння

$$R_{CD} = \frac{T\sin\varepsilon - 122.49\sin\alpha}{\cos\beta\cdot \mathrm{tg}\gamma + \sin\beta} = \frac{100\cdot 0,5 - 122,49\cdot 0,707}{0,5\cdot 0,577 + 0,866} = -31,7\ \text{кН}.$$

Далі визначуваний $R_{BD} = \dfrac{-31,7\cdot 0,5}{0,866} = -18,3\ \text{кН}.$

Знаки «мінус» у реакцій R_{CD} і R_{BD} означають, що ці сили мають напрями, протилежні вказаним.

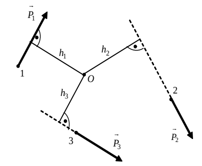
2.4.Рівновага тіл під дією довільної плоскої системи сил

2.4.1.Теоретичні відомості

Довільною плоскою системою сил називають сукупність сил, розташованих в одній плоскості, лінії дії яких не перетинаються в одній точки.

Алгебраїчнім моментом сили щодо деякої точки називають алгебричну величину, рівну додатку модуля сили на плече сили щодо даної точки, узяту з відповідним знаком. Позначення має вигляд $M_O(\vec{P})$.

Плечем сили щодо деякої точки називають найкоротшу відстань від цієї точки до лінії дії сили(довжина перпендикуляра, опущеного з точки на лінію дії сили). Прийнято ставити знак «плюс», якщо сила прагнути повернути тіло щодо вибраної точки проти ходу стрілки годинника і знак «мінус» – інакше (рис.2.12).



Приведемо приклади визначення алгебраїчних моментів сил щодо точки.

$$M_O(\vec{P}_1) = -P_1 \cdot h_1;\ M_O(\vec{P}_2) = -P_2 \cdot h_2;\ M_O(\vec{P}_3) = P_3 \cdot h_3.$$

Рисунок 2.12

З визначення також виходить, що, якщо лінія дії сили проходить через задану точку, то момент сили цієї дорівнює нулю.

Парою сил називають систему двох рівних по величині і протилежно направлених сил, не лежачих на одній прямій. Найкоротшу відстань між лініями дії сил пари називають плечем пари. З визначення виходить, що сума проекцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю. При вирішенні завдань на рівновагу тіл під дією довільної плоскої системи сил зручно користуватися поняттям моменту пари сил.

Алгебраїчним моментом пари сил називають величину, рівну додатку модуля однієї з сил пари на плече пари, узяту із знаком «плюс», якщо пара прагне обертати тіло проти ходу стрілки годинника, і із знаком «мінус» – інакше(рис.2.13). Вирази для алгебраїчних значень моментів пар сил, приведених на рисунку мають вигляд:

$$M_1 = M(\vec{P}_1, \vec{P}_1') = P_1 \cdot h_1;\ M_2 = M(\vec{P}_2, \vec{P}_2') = -P_2 \cdot h_2.$$

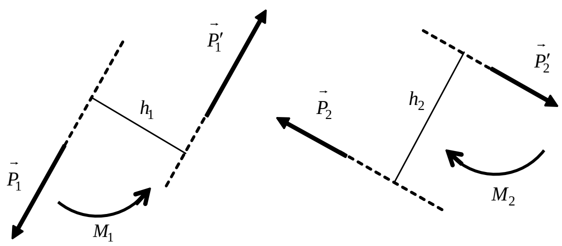


Рисунок 2.13

Аналітичні умови рівноваги – рівності нулю головного вектора і головного моменту – довільної плоскої системи сил тому можуть бути записані у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \; \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \; \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{P}_k) = 0,$$

У багатьох завданнях, коли обчислення плеча сили щодо точки утруднене, зручно використовувати ***теорему Варіньона***: "Якщо деяка система сил має рівнодіючу, то момент рівнодіючою щодо будь-якої точки дорівнює сумі моментів всіх сил системи щодо тієї ж точки ". Тепер силу можна розкласти по лінії її дії на дві складові і знайти суму моментів цих складових щодо вибраної точки. Так, сила $\vec{P}$ показана на рисунку, може бути представлена двома складовими $\vec{P}'$ і $\vec{P}''$ причому $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}''$, а модулі цих складових рівні, відповідно $|\vec{P}'| = |\vec{P}|\cos\alpha$ і $|\vec{P}''| = |\vec{P}|\sin\alpha$. На підставі приведеної теореми момент сили $\vec{P}$ відносно, наприклад, точки O знаходять по формулі

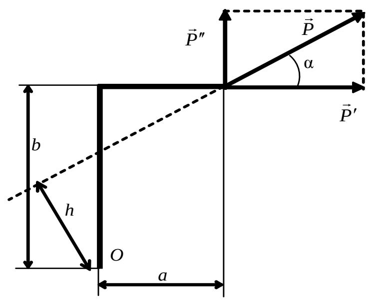


Рисунок 2.14

$$\sum M_O(\vec{P}) = \sum M_O(\vec{P}') + \sum M_O(\vec{P}'') = -P \cdot h = -P' \cdot b + P'' \cdot a$$

де a та b, плечі сил $\vec{P}''$ и $\vec{P}'$ відносно цієї точки (рис.2.14).

Для перевірки правильності рішення задачі записують додаткове рівняння, що виражає алгебраїчну суму моментів всіх сил будь-якої , не використаної при рішенні задачі. Після підстановки в це рівняння знайдених значень реакцій в'язів сума має бути рівною нулю. Оцінити отриманий результат можна за допомогою обчислення відносної погрішності, яку визначають, наприклад, по формулі

$$\delta = \frac{|\Sigma|}{|\Sigma+|} \cdot 100\%,$$

де $|\Sigma|$ – модуль отриманої суми; $|\Sigma+|$ – сума позитивних значень. Відносна погрішність залежить від точності обчислень, але не повинна перевищувати 1–3

%. Якщо погрішність велика, то необхідно перевірити правильність запису рівнянь рівноваги і обчислень при рішенні.

Питання для самоконтролю

1. Яку сукупність сил називають довільною плоскою системою сил?
2. Як визначають алгебраїчній момент сили ?
3. Що називають плечем сили ?
4. Як прийнято встановлювати знак алгебраїчного значення моменту сили ?
5. Коли зручно використовувати теорему Варіньона для знаходження моменту сили ?
6. Яку систему сил називають парою сил і як визначають алгебраїчній момент пари сил?
7. Якими основними властивостями володіє пара сил?
8. Як записують умови рівноваги довільної плоскої системи сил в основній і в додаткових формах?
9. Яким чином можна перевірити правильність рішення задачі і оцінити його точність?

2.4.2.Приклад вирішення завдання № 1

Стержнева плоска конструкція на краї - А має жорстке затиснення та на другому її краї – В діє під кутом до горизонту $\alpha = 30^0$ зосереджена сила $P = 30$ *к*Н. На вертикальну частину конструкції діє пара сил з моментом $M = 8$ *к*Н·*м*, а на горизонтальній та вертикальній частинах конструкції діють розподілені вздовж ділянок довжиною $b = 3$ *м* і $d = 2$ *м* навантаження інтенсивністю $q_1 = 2$ *к*Н/*м* і $q_2 = 5$ *к*Н/*м*, відповідно. Виходячи з умов рівноваги плоскої конструкції визначте в жорсткім затисненні реакції $\boldsymbol{M_A}$, $\boldsymbol{X_A}$, $\boldsymbol{Y_A}$, прийняти $a = 2$ *м*, $c = 1$ *м*(рис.2.15).

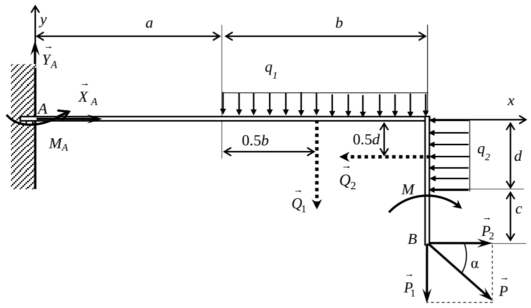


Рисунок 2.15

Рішення

1) Як об'єкт рівноваги приймемо брус *AB*.

2) Активними силами, що діють на об'єкт рівноваги, будуть $\vec{P}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ и пара сил, з моментом *M*.

.

Модулі цих складових:

$\left|\vec{Q}_1\right| = q_1 \cdot b = 2 \cdot 3 = 6$ кН.; $\left|\vec{Q}_2\right| = q_2 \cdot d = 5 \cdot 2 = 10$ кН.

Модулі цих складових:

$P_1 = P \sin\alpha = 30 \sin 30^0 = 15$ кН;

$P_2 = P \cos\alpha = 30 \cos 30^0 = 25,98$ кН.

3) Відкидаючи зв'язок (плоске жорстке закладення *A*), замінимо її дію на об'єкт рівноваги реакцією $\vec{R}_A$ яка представлена складовими $\vec{X}_A$ і $\vec{Y}_A$ паралельними координатним осям, і парою сил з моментом M_A.

4) Запишемо рівняння рівноваги отриманої плоскої системи сил в прийнятій системі координат, склавши заздалегідь таблицю.

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	M_A	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{Q}_1$	$\vec{Q}_2$	M
P_{kx}	X_A	0	–	0	P_2	0	$-Q_2$	–
P_{ky}	*0*	Y_A	–	$-P_1$	0	$-Q_1$	0	–
$M_A(\vec{P}_k)$	0	0	M_A	$-P_1 \times$ $\times(a+b)$	$P_2 \times$ $\times(d+c)$	$-Q_1 \times$ $\times(a+b/2)$	$-Q_2 \times$ $\times d/2$	$-M$

Підсумовуючи елементи відповідних рядків таблиці і прирівнюючи ці суми нулю, отримаємо систему рівнянь рівноваги:

$$X_A + P_2 - Q_2 = 0;$$

$$Y_A - P_1 - Q_1 = 0;$$

$$M_A - P_1 \cdot (a+b) + P_2 \cdot (d+c) - Q_1 \cdot (a+b/2) - Q_2 \cdot d/2 - M = 0.$$

5) Вирішимо отриману систему рівнянь і знайдемо:

з 1-го $X_A = -P_2 + Q_2 = -25,98 + 10 = -15,98$ кН;

з 2-го $Y_A = P_1 + Q_1 = 15 + 6 = 21$ кН;

з 3-го $M_A = P_1 \cdot (a+b) - P_2 \cdot (d+c) + Q_1 \cdot (a+b/2) + Q_2 \cdot d/2 + M =$
$= 15 \cdot 5 - 25,98 \cdot 3 + 6 \cdot 3,5 + 10 \cdot 1 + 8 = 36,06$ кН·м.

Знак «мінус» у реакції X_A указує на те, що ця реакція насправді направлена убік, протилежну раніше прийнятою.

По складових реакції в шарнірі *A* можна визначити її модуль і напрям

$$\left|\vec{R}_A\right| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{255,36 + 441} = 26,39 \text{ кН}$$

$$\cos\beta = \frac{X_A}{R_A} = \frac{-15,98}{26,39} = -0,6055,$$

β – кут, між вектором реакції $\vec{R}_A$ і позитивним напрямом осі О*x*.

Для перевірки отриманого рішення складемо вираз суми моментів всіх сил, наприклад, щодо точки *B*:

$$\sum M_B(\vec{P}_k) = -X_A \cdot (c+d) - Y_A \cdot (a+b) + Q_1 \cdot b/2 + Q_2 \cdot (c+d/2) - M + M_A =$$

$$= 47,94 - 105 + 9 + 20 - 8 + 36,06 = 113 - 113 = 0.$$

У даному прикладі відносна погрішність виявилася рівною нулю.

2.4.3.Приклад вирішення завдання № 2

Ідеальний стержень *AD* на краї - А закріплено в нерухомому шарнірі та на другому його краї – В під кутом до горизонту $\varepsilon = 60^0$ протягнуто трос, який перекинуто через нерухомий блок *E*, на кінці якого закріплено вантаж Р, що важить 6 *к*Н. На конструкцію діє розподілене вздовж ділянки довжиною 2 *м* навантаження інтенсивністю $q = 4$ *к*Н/*м.* Стержень AD підкріплено нахиленим під кутом до вертикалі $\alpha = 45^0$ стержнем *BC*, краї якого в точках *B* і *C* шарнірно з'єднано зі стержнем й нерухомою опорою, відповідно. Виходячи з умов рівноваги стержневої системи визначте силу натягнення тросу в точці *B* й реакції – $\boldsymbol{X_A}$**,** $\boldsymbol{Y_A}$ в шарнірі А стержня *AB* та реакцію – $\boldsymbol{R_{BC}}$ стержня *CB* в шарнірі *B*. Тертям в блоці нехтувати(рис.2.16).

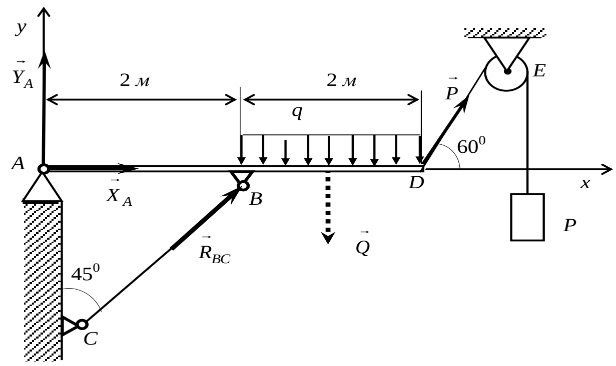


Рисунок 2.16

Рішення

1) Як об'єкт рівноваги приймемо балку *AD*.

2) Активними силами, що діють на об'єкт рівноваги, будуть сила $\vec{P}$ направлена уздовж тросу в місці кріплення, і сила $\vec{Q}$ яка є рівнодіючого розподіленого навантаження *q* і модуль якої $|\vec{Q}| = q \cdot 2 = 8$ кН.

3) Відкидаючи в'язи (нерухомий циліндровий шарнір *A* і ідеальний стрижень *BC*), замінимо їх дію на об'єкт рівноваги реакцією $\vec{R}_A$. Вона представлена складовими $\vec{X}_A$ і $\vec{Y}_A$, і зусиллям в стрижні $\vec{R}_{BC}$ яке направлене по прямій, що сполучає шарніри *B* і *C*.

4) Запишемо рівняння рівноваги отриманої плоскої системи сил в прийнятій системі координат, склавши таблицю.

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{R}_{BC}$	$\vec{P}$	$\vec{Q}$
P_{kx}	X_A	0	$R_{BC}\sin 45^0$	$P\cos 60^0$	0
$M_A(\vec{P}_k)$	*0*	0	$R_{BC}\sin 45^0 \cdot 2$	$P\sin 60^0 \cdot 4$	$-Q\cdot 3$
$M_B(\vec{P}_k)$	0	$-Y_A\cdot 2$	0	$P\sin 60^0 \cdot 2$	$-Q\cdot 1$

Сумируя елементи відповідних рядків таблиці і прирівнюючи ці суми нулю, отримаємо систему рівнянь рівноваги:

$$X_A + R_{BC}\sin 45^0 + P\cos 60^0 = 0;$$

$$R_{BC}\sin 45^0 \cdot 2 + P\sin 60^0 \cdot 4 - Q\cdot 3 = 0;$$

$$-Y_A \cdot 2 + P\sin 60^0 \cdot 2 - Q\cdot 1 = 0.$$

5) Вирішимо отриману систему рівнянь і знайдемо:

$$R_{BC} = \frac{-P\sin 60^0 \cdot 4 + Q\cdot 3}{\sin 45^0 \cdot 2} = \frac{-20,784+24}{1,414} = 2,274 \text{ кН};$$

$$X_A = -R_{BC}\sin 45^0 - P\cos 60^0 = -1,608 - 3 = -4,608 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{P\sin 60^0 \cdot 2 - Q\cdot 1}{2} = \frac{10,392-8}{2} = 1,196 \text{ кН}.$$

Знак «мінус» у X_A указує на те, що ця складова реакції насправді направлена убік, протилежну раніше прийнятою.

Для перевірки отриманого рішення складемо вираз суми проекцій всіх сил на вісь оy:

$$\sum \vec{P}_{ky} = Y_A + R_{BC}\cos 45^0 + P\sin 60^0 - Q =$$

$$= 1,196 + 1,608 + 5,196 - 8 = 8 - 8 = 0.$$

У даному прикладі відносна погрішність також виявилася рівною нулю

2.5. Рівновага тіл під дією довільної просторової системи сил

2.5.1.Теоретичні відомості

Довільною просторовою системою сил називають сукупність сил, розташованих в просторі, лінії дії яких не перетинаються в одній точки.

Моментом сили відносно деякої осі називають скалярну величину, рівну проекції на цю вісь вектора-моменту сили щодо будь-якої точки на цій осі**.** З приведеного визначення виходить інше правило обчислення вказаної величини, часто використовуване при безпосередньому вирішенні завдань. Його формулюють таким чином: «***Момент сили відносно осі дорівнює узятому з відповідним знаком додатку модуля проекції сили на плоскість, перпендикулярну даній осі, на її плече щодо точки перетину осі з плоскістю»***. Знак «плюс» ставлять тоді, коли поворот тіла навколо даної осі з її позитивного напряму спостерігається таким, що відбувається проти ходу стрілки годинника, і знак «мінус» – інакше. Момент сили щодо осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь розташовані в одній плоскості.

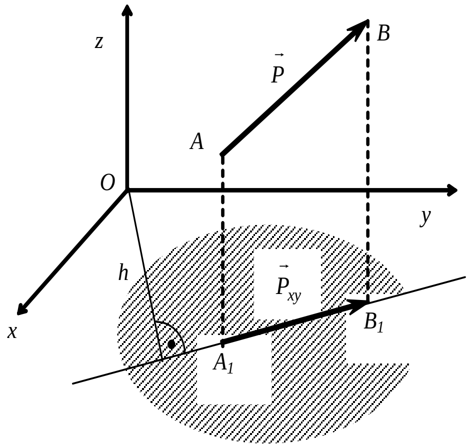
$$M_z(\vec{P}) = M_O(\vec{P}_{xy}) = \pm\left|\vec{P}_{xy}\right| \cdot h,$$

де $\vec{P}_{xy}$ – векторна величина, рівна проекції сили на плоскість, перпендикулярну осі оz, тобто на плоскість xOy; h – плече сили $\vec{P}_{xy}$ щодо точки O.

Таким чином, необхідно виконати наступні дії:

1) визначити проекцію сили на плоскість, перпендикулярну даній осі, – вектор $\vec{P}_{xy}$;

2) знайти точку перетину даної площини з віссю (у даному прикладі це точка O);



3) обчислити момент сили $\vec{P}_{xy}$ щодо цій точки, для чого помножити модуль сили на її плече щодо точки О, і поставити відповідний знак (рис.2.17).

Відмітимо, що при обчисленні алгебраїчного моменту сили щодо осі можна скористатися теоремою Варіньона, тобто розкласти зручним чином силу $\vec{P}$ на складові і визначити суму їх моментів відносно осі.

Рисунок 2.17

Векторні умови рівноваги просторової системи сил є необхідними й достатніми умовами для рівноваги просторової довільної системи сил, за якими геометрична сума всіх сил (головний вектор сил) дорівнює нулеві і геометрична сума моментів всіх сил (головний вектор моментів сил) системи відносно довільної точки також дорівнює нулеві, тобто:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k = 0,\ \sum_{k=1}^{n} (\vec{M}_o(\vec{P}_k) = 0 .$$

Аналітичні умови рівноваги для довільно вибраної системи декартових координат мають вигляд:

$$\sum P_{kx} = 0;\ \sum P_{ky} = 0;\ \sum P_{kz} = 0;$$
$$\sum M_x(\vec{P}_k) = 0;\ \sum M_y(\vec{P}_k) = 0; \sum M_z(\vec{P}_k) = 0.$$

Питання для самоконтролю

1. Яку сукупність сил називають довільною просторовою системою сил?

2. Чим характеризується обертальна дія сили на тіло, що має нерухому вісь?

3. Що називають моментом сили осі?

4. Як визначають величину моменту сили осі?

5. Як визначають знак моменту сили осі?

6. У яких випадках момент сили осі дорівнює нулю?

7. Які способи використовують для визначення моменту сили осі?

8. Як записують умови рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі?

9. Як записують умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі?

10. Яким умовам повинна задовольняти система рівнянь рівноваги для отримання єдиного рішення?

2.5.2.Приклад вирішення завдання № 1

Нерухомий вертикальний вал розміщено в підп’ятнику ***A*** та в циліндровому шарнірі (підшипнику) ***B***. До валу жорстко прикріплені стрижні *DC* й *KE*, що розміщені в плоскостях, перпендикулярних осі **z** та напрямлені вздовж координатних осів: ***x*** та ***y***, відповідно.

Вал навантажено зосередженими силами $\vec{P}$, $|\vec{P}| = 2$ *к*Н та $\vec{Q}$, що діють в плоскостях перпендикулярних осям **z** та ***x*** відповідно, в точці *E* під кутом γ = 30^0 до осі стержня *KE* та в точці С під кутом β = 60^0 до осі перпендикулярній стержню *DC*. Жорстко прикріплений до валу стержень *LG*, який розташовано в плоскості *yOz* під кутом α = 30^0 до осі **y**, навантажений на краях *L* і *G* парою сил $\vec{F}' = -\vec{F}''$, з вектором-моментом пари $\vec{M}$, $|\vec{M}| = 0,4$ *к*Н·*м*, що є напрямленим перпендикулярно стержню *LG* під кутом α = 30^0 до вісі **z**. Виходячи з умов рівноваги невагомого валу визначте значення сили $\vec{Q}$, реакції – $\boldsymbol{X_A}$, $\boldsymbol{Y_A}$, $\mathbf{Z_A}$ в підп’ятнику ***A*** та – $\boldsymbol{X_B}$, $\boldsymbol{Y_B}$ в підшипнику ***B*** (рис.2.18).

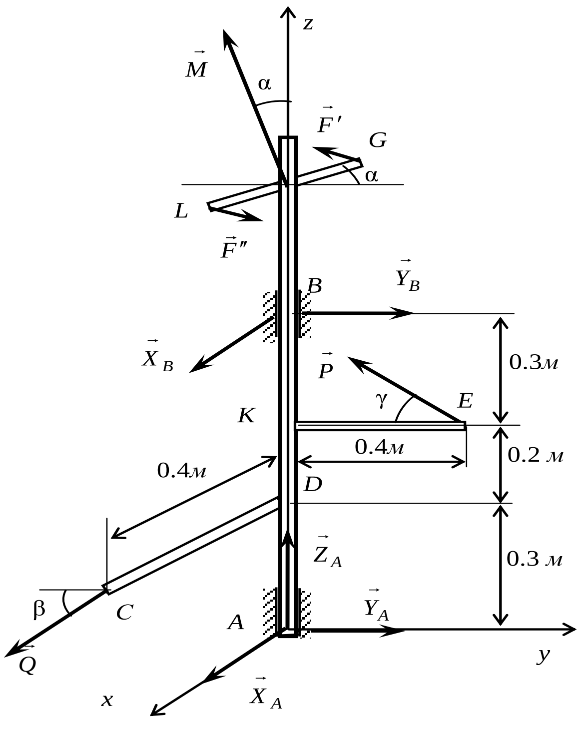


Рисунок2.18

Рішення

1) Об'єктом рівноваги є вся конструкція (вал з прикріпленими до нього).

2) Активними силами, що діють на об'єкт рівноваги, сили, $\vec{P}$, $\vec{Q}$ і пара сил, вектор-момент якої $\vec{M}$.

3) Відкидаючи зв'язки (підп'ятник *A* і нерухомий циліндровий шарнір *B*), замінимо їх дію на об'єкт рівноваги реакціями $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$. Реакція підп'ятника представлена такими складовими $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$

4) Запишемо рівняння рівноваги отриманої просторової системи сил в прийнятій системі координат за допомогою таблиці.

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{Z}_A$	$\vec{X}_B$	$\vec{Y}_B$
P_{kx}	X_A	0	0	X_B	0
P_{ky}	0	Y_A	0	0	Y_B
P_{kz}	0	0	Z_A	0	0
$M_x\left(\vec{P}_k\right)$	0	0	0	0	$-Y_B \cdot AB$
$M_y\left(\vec{P}_k\right)$	0	0	0	$-X_B \cdot AB$	0
$M_z\left(\vec{P}_k\right)$	0	0	0	0	0

Продовження таблиці

$\vec{P}_k$	$\vec{Q}$	$\vec{P}$	$\vec{M}$
P_{kx}	0	$-P\sin\gamma$	–
P_{ky}	$-Q\cos\beta$	$-P\cos\gamma$	–
P_{kz}	$-Q\sin\beta$	0	–
$M_x\left(\vec{P}_k\right)$	$Q\cos\beta \cdot AB$	$P\cos\gamma \cdot AK$	0
$M_y\left(\vec{P}_k\right)$	$Q\sin\beta \cdot DC$	$P\sin\gamma \cdot AK$	$-M\sin\alpha$
$M_z\left(\vec{P}_k\right)$	$-Q\cos\beta \cdot DC$	$P\sin\gamma \cdot KE$	$M\cos\alpha$

Розглянемо детальніше визначення моменту сили осі на прикладі сили $\vec{P}$ **.**

Визначимо проекції сили $\vec{P}$:

– на плоскість, перпендикулярну осі x $\left|\vec{P}_{yz}\right| = P\cos\gamma;$

– на плоскість, перпендикулярну осі y $\left|\vec{P}_{zz}\right| = P\sin\gamma;$

– на плоскість, перпендикулярну осі z $\left|\vec{P}_{xy}\right| = P.$

При визначенні моментів сили $\vec{P}$ щодо осей x і y плечем буде одна і та ж відстань AK. Тому з урахуванням знаків отримаємо

$$M_x(\vec{P}) = P \cdot \cos\gamma \cdot AK; \quad M_y(\vec{P}) = -P \cdot \sin\gamma \cdot AK.$$

При визначенні моментів сили $\vec{P}$ щодо осі z врахуємо, що сила вже розташована в плоскості, перпендикулярній цій осі. Точка перетину цієї плоскості з віссю – це точка *K*. Для знаходження моменту сили $\vec{P}$ щодо цієї крапки скористаємося теоремою Варіньона

$$M_z(\vec{P}) = M_K(\vec{P}_x) + M_K(\vec{P}_y) = P\sin\gamma \cdot KE + P\cos\gamma \cdot 0 = P\sin\gamma \cdot KE.$$

З відповідних рядків таблиці, отримаємо систему рівнянь рівноваги:

$$X_A + X_B - P\sin\gamma = 0;$$

$$Y_A + Y_B - Q\cos\beta - P\cos\alpha = 0;$$

$$Z_A - Q\sin\beta = 0;$$

$$-Y_B \cdot AB + Q\cos\beta \cdot AB + P\cos\gamma \cdot AK = 0;$$

$$X_B \cdot AB + Q\sin\beta \cdot DC - P\sin\gamma \cdot AK - M\sin\alpha = 0;$$

$$-Q\cos\beta \cdot DC + P\sin\gamma \cdot KE + M\cos\alpha = 0.$$

Так, з останнього рівняння визначимо

$$Q = \frac{P\sin\gamma \cdot KE + M\cos\alpha}{\cos\beta \cdot DC} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,866}{0,5 \cdot 0,4} = 3,732 \text{ кН}.$$

Потім з урахуванням знайденого значення *Q* вирішимо 5-е рівняння і визначимо

$$X_B = \frac{-Q\sin\beta \cdot DC + P\sin\gamma \cdot AK - M\sin\alpha}{AB} =$$

$$= \frac{-3,732 \cdot 0,866 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5}{0,8} = -1,241 \text{ кН},$$

Далі з рівнянь знаходимо:

З 1-го

$$X_A = -X_B + P\sin\gamma = 1,241 + 2 \cdot 0,5 = 2,241 \text{ кН};$$

З 3-го

$$Z_A = Q\sin\beta = 3,732 \cdot 0,866 = 3,232 \text{ кН};$$

З 4-го

$$Y_B = \frac{Q\cos\beta \cdot AB + P\cos\gamma \cdot AK}{AB} = \frac{3,732 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,866 \cdot 0,5}{0,8} = 2,949 \text{ кН}$$

і, нарешті, з 2-го

$$Y_A = -Y_B + Q\cos\beta + P\cos\gamma = -2,949 + 3,732 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,866 = 0,649 \text{ кН}.$$

2.5.3.Приклад вирішення завдання № 2

Край ***A*** стержневої рами *ABC*, що розташована в горизонтальній плоскості *xAy*, жорстко затиснений та другому його краї – ***C*** прикладена зосереджена сила $\vec{P}$, $|P|$= 4 *к*Н, яка діє в плоскості рами *ABC* під кутом α = 30^0 до осі стержня рами *BC* та в цій же плоскості перпендикулярно стержню *CB* протягнуто горизонтальний трос, який перекинуто через нерухомий блок *D*, на кінці якого вертикально вивішено вантаж Q, що важить 2 *к*Н. До рами жорстко прикріплено стержень *KE*, який розташовано в плоскості *zAy* та напрямлено під кутом $\beta = 60^0$ до осі **y.** На краях *К* і *E* цього стержня прикладені дві рівні та протилежно напрямлені сили $\vec{F}' = -\vec{F}''$, які розташовані в нахиленій під кутом $\beta = 60^0$ до осі **y** плоскості й утворюють пару сил з вектором-моментом пари $\vec{M}$, $|M| = 0.2$ *к*Н·*м.* Виходячи з умов рівноваги стержневої рами визначте реакції – $\boldsymbol{X_A}$**,** $\boldsymbol{Y_A}$, $\boldsymbol{Z_A}$, $\boldsymbol{M_{Ax}}$**,** $\boldsymbol{M_{Ay}}$, $\boldsymbol{M_{Az}}$ в жорсткім затисненні А рами і силу натягнення тросу в точці *C*. Тертям в блоці нехтувати(2.19).

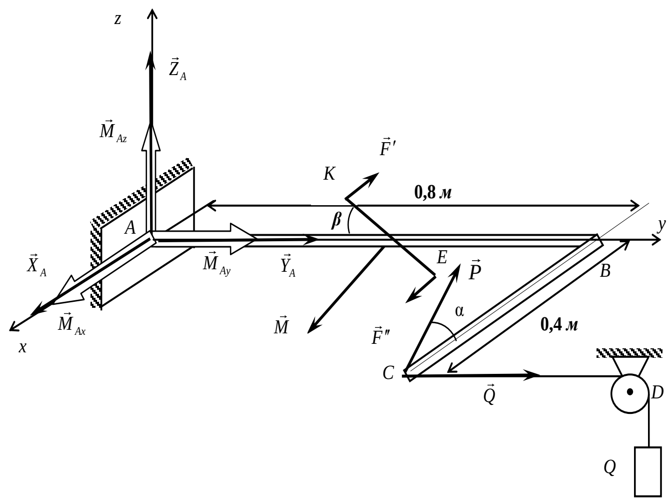


Рисунок 2.19

Рішення

1) Об'єктом рівноваги є рама *ABC*.

2) Активними силами, що діють на об'єкт рівноваги, будуть $\vec{P}$, $\vec{Q}$

3) Відкидаючи зв'язок – жорстке просторове закладення *A,* замінимо її дію на об'єкт рівноваги реакцією $\vec{R}_A$ представленою складовими $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$ $\vec{Z}_A$, и вектором-моментом $\vec{M}_A$, з складовими $\vec{M}_{Ax}$, $\vec{M}_{Ay}$ и $\vec{M}_{Az}$.

4) Запишемо рівняння рівноваги отриманої просторової системи сил в прийнятій системі координат, склавши таблицю.

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{Z}_A$	$\vec{M}_A$
P_{kx}	X_A	0	0	–
P_{ky}	0	Y_A	0	–
P_{kz}	0	0	Z_A	–
$M_x(\vec{P}_k)$	0	0	0	M_{Ax}
$M_y(\vec{P}_k)$	0	0	0	M_{Ay}
$M_z(\vec{P}_k)$	0	0	0	M_{Az}

Продовження таблиці

$\vec{P}_k$	$\vec{Q}$	$\vec{P}$	$\vec{M}$
P_{kx}	0	$-P\cos\alpha$	–
P_{ky}	Q	0	–
P_{kz}	0	$P\sin\alpha$	–
$M_x\left(\vec{P}_k\right)$	0	$P\sin\alpha\cdot AB$	0
$M_y\left(\vec{P}_k\right)$	0	$-P\sin\alpha\cdot BC$	$-M\sin\beta$
$M_z\left(\vec{P}_k\right)$	$Q\cdot BC$	$P\cos\alpha\cdot AB$	$-M\cos\beta$

Отримаємо систему рівнянь рівноваги:

$$X_A - P\cos\alpha = 0;\ Y_A + Q = 0;\ Z_A + P\sin\alpha = 0;\ M_{Ax} + P\sin\alpha\cdot AB = 0;$$
$$M_{Ay} - P\sin\alpha\cdot BC - M\sin\beta = 0;\ M_{Az} + Q\cdot BC + P\cos\alpha\cdot AB - M\cos\beta = 0.$$

5) Вирішимо отриману систему:

$$X_A = P\cos\alpha = 4\cdot 0{,}866 = 3{,}464\text{ кН};$$

$$Y_A = -Q = -2\text{ кН};$$

$$Z_A = -P\sin\alpha = -4\cdot 0{,}5 = -2\text{ кН};$$

$$M_{Ax} = -P\sin\alpha\cdot AB = -4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8 = -1{,}6\text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{Ay} = P\sin\alpha\cdot BC + M\sin\beta = 4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}866 = 0{,}973\text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{Az} = -Q\cdot BC - P\cos\alpha\cdot AB + M\cos\beta =$$
$$= -2\cdot 0{,}4 - 4\cdot 0{,}866\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}5 = -3{,}471\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2.6.Аналітичне визначення реакцій в'язів електромеханічного приводу при його статичної рівновазі під дією просторової системи активних сил

Розглянемо електромеханічний привід, який перетворює обертальний рух валу електродвигуна – 1 у поступальний рух вантажу – 4.

При рівномірному обертанні вала електродвигуна – 1 сили натягу ведучого (тягового) – T і веденого – T_0 ременів пасу, які напрямлені під кутами α до горизонту, відповідають співвідношенню $T/T_0 = 2$ та моменту $M = (T\text{-}T_0)\,R$, що передається від ротора **– 2** двоступеневому барабану – 3, вагою – G, який закріплено на жорсткому валі в циліндричних підшипниках – ***A***, ***B***. На ступень барабану радіусом r намотується трос із вантажем – 4, вагою P.

Виходячи з умов рівномірного обертання валу визначите значення моменту **M** і реакцій циліндричних підшипників – X_A, Z_A, X_B, Z_B для електромеханічного приводу прийняв: a= 0.6 *м*, b = 0.3 *м*, c = 0.6 *м*, r=0.2 *м*, R=0.4 *м*, **G** =100 *к*Н, P=800 *к*Н, α =20^0(рис.2.20).

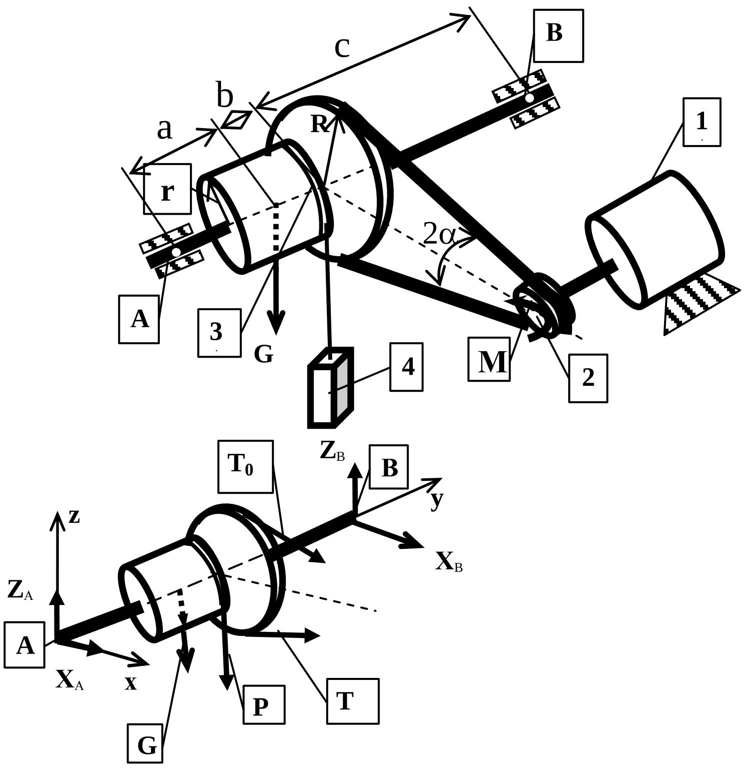


Рисунок 2.20

Дослідити вплив ваги **P** (0,800) *к*Н вантажу – 4 на величини моменту **M** і реакції циліндричних підшипників – X_A, Z_A, X_B, Z_B та сили натягу ведучого ременя пасу T. Встановити вплив кута між напрямами ременів пасу – α (0^0 …65^0) на ці величини при двох рівнях ваги **P** (400,800) *к*Н вантажу – 4(рис.2.20).

Аналітично визначимо реакції в'язів електромеханічного приводу – X_A, Z_A, X_B, Z_B при статичної рівновазі під дією просторової системи активних сил: ***G, P, T,*** T_0 та зрівноваженого моменту **M.** Виберемо систему координат ***Oxy*** з центром в точці ***A*** та запишемо рівняння рівноваги валу *AB* відносно невідомих: **M,** X_A, Z_A, X_B, Z_B :

$$\sum P_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + (T + T_0)\cos\alpha = 0.$$

$$\sum P_{kz} = 0; \; -P - G + Z_A + Z_B + (T - T_0)\sin\alpha = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{P}_k) = 0; \; -P(a+b) - Ga + (T - T_0)\sin\alpha(a+b) + Z_B(a+b+c) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{P}_k) = 0; \; -Pr - (T - T_0)R = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{P}_k) = 0. \; -X_B(a+b+c) - (T + T_0)\cos\alpha(a+b) = 0.$$

Розглянута система рівнянь є статично визнаною, бо з п'яти алгебраїчних рівнянь однозначно одержимо п'ять невідомих величин: ***M***, X_A; X_B; Z_A; Z_B.

2.7.Комп’ютерне визначення реакцій в’язів електромеханічного приводу при його статичної рівновазі під дією просторової системи активних сил

Підтверджуються теоретичні положення статики про умови рівноваги (відносного покою) - пасивність реакцій в’язів системи матеріальних тіл електромеханічного приводу. Досліджується вплив ваги **Р** вантажу при рівномірному обертанні валу на величини моменту **М** і реакції циліндричних підшипників та сили натягу ведучого ременя пасу. Встановлюється вплив зміни виду в’язів з різними кутами між напрямами ременів пасу на ці величини при різних рівнях ваги вантажу **Р**.

Завдання на самостійну роботу: студентам пропонується самостійно підготувати свій файл для виконання завдання попередньо виданого викладачем. Для взірця у табл. 2.1 наведено вихідний файл з інструкціями та коментарем.

Таблиця 2.1 – Вихідний файл

Інструкції та розрахункові залежності	**Коментарі**
РАБОТА:=№ 2 (Визначення реакцій та моменту:P=(0...800)кН,alfa=pi/6); ВЫПОЛНИЛ:= Иванов И.И. гр.ЭМС- 58;	# Лабораторна робота. Статична рівновага електромеханічного приводу під дією просторової системи активних сил #
P.x=XA+XB+(T+T0)*cos(alfa); P.z=ZA-P-G+ZB+(T-T0)*sin(alfa); P.fix=-P*(a+b)-G*a+(T-T0)*sin(alfa)*(a+b)+ZB *(a+b+c); P.fiy=P*r-(T-T0)*R; P.fiz=-XB*(a+b+c)-(T+T0)*cos(alfa)*(a+b);	#Рівняння рівноваги в проекціях сил на осі системи координат, моментів сил відносно координатних осей #
RA=sqrt(XA^2+ZA^2); RB=sqrt(XB^2+ZB^2); M=(T-T0)*R;	# Підрахунок реакцій в підшипниках А, В, та моменту за значеннями сил натягу ведучого (тягового) – Т і веденого – T_0 ременів пасу #

a=0.6;b=0.3;c=0.6;r=0.2;R=0.4;
G=100;P=800;T0=T/2;
alfa=pi/6;
	# Вихідні дані приводу та пасу #

НЕИЗВЕСТНЫЕ:=XA, ZA, XB, ZB,T;	# Невідомі в системі рівнянь рівноваги #
ПОКАЗАТЬ:=M,RA,RB;	# Інструкції

ВАРЬИРОВАТЬ:=P(0,800); РАСЧЕТ:=СТАТИКА; РАБОТА:=№2(Дослідження впливу вантажу та кута ременів:P=(400,800)кН,alfa=(0,pi/3); alfa=alfaG*pi/180;	для визначення впливу ваги вантажу на реакції підшипників та привод-ний момент: P=(0…800) кН,alfa=pi/6#
ВАРЬИРОВАТЬ:=P(400,800,1),alfaG(0,60); РАСЧЕТ:=СТАТИКА; КОНЕЦ;	# Інструкції для дослідження впливу вантажу та кута ременів на реакції підшипників та приводний момент: P=(400,800)кН, alfa=(0,pi/3) #

3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3
«ВИЗНАЧЕННЯ РУХУ ТОЧОК ТА ТІЛ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ»

3.1. Мета, об'єкт, предмет, методи досліджень

Метою занять є набуття практичних умінь у вирішенні завдань з динаміки, щодо визначення законів руху матеріальної точки, абсолютно твердого тіла, системи матеріальних точок та тіл з урахуванням мас і під дією прикладених до них сил; набуття навичок роботи з обчислювальною технікою (комп'ютера з програмним забезпеченням) у моделюванні та дослідженні закономірностей механічного стану і властивостей динаміки механічних (матеріальних) систем на базі диференціальних рівнянь руху, які в інваріантній формі є наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналітичної механіки.

Метою роботи є вивчення закономірностей і властивостей руху механічних (матеріальних) систем на базі інваріантних форм їх моделювання.

Об'єктом досліджень є матеріальні точки або абсолютно тверді тіла і механічні (матеріальні) системи, які під дією прикладених до них сил переміщуються у просторі й часі з початкового положення рівноваги в інше.

Предметом досліджень є закони руху матеріальних точок та абсолютно твердих тіл і механічних (матеріальних) систем з урахуванням мас і під дією прикладених до них сил, закономірності зміни у часі мір механічного руху і дії сил: кількості руху, кінетичного моменту, кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил, а також кінематичних характеристик руху: швидкостей, пришвидшень й переміщення з початкового положення в інше, що визначаються шляхом розв'язування диференціальних рівнянь руху механічних систем, які в інваріантній формі є наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналітичної механіки.

Методи досліджень містять: загальні аналітичні методи розв'язання задач механіки та комп'ютерні обчислювання.

3.2.Динаміка матеріальної точки

3.2.1.Теоретичні відомості

Основне рівняння динаміки. Прискорення матеріальної точки $\bar{a}$ пропорційно прикладеній до неї силі або рівнодійної декількох сил $\bar{F}$, прикладених до точки, і спрямоване вздовж вектора сили. Якщо масу – m матеріальної точки вважати згідно з уявленнями класичної механіки сталою, то закон матиме вираз:

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

де: $\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$ – сила, що є рівнодійною n активних сил і сил реакцій в'язів.

Диференціальне рівняння руху точки у векторній формі має вид:

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\,,$$

де $\overline{a}=\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ – прискорення матеріальної точки.

Диференціальні рівняння руху точки у координатній формі визначають у проекціях на три відповідні осі координат x, y, z:

$$m\ddot{x}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix};\;\; m\ddot{y}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy};\;\; m\ddot{z}=\sum_{i=1}^{n}F_{iz},$$

де прискорення точки та алгебраїчні суми проекцій усіх сил на осі визначаються у проекціях на ці ж осі:

$$a_x=\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2};\;\; a_y=\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2};\;\; a_z=\ddot{z}=\frac{d^2z}{dt^2}\,,$$

Диференціальні рівняння руху точки у натуральній формі визначають у проекціях на дотичну $\overline{\tau}$ та нормаль $\overline{n}$ та на бінормаль $\overline{b}$:

$$m\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}F_i^{\tau},\;\; m\frac{v^2}{\rho}=\sum_{i=1}^{n}F_i^{n},\;\; 0=\sum_{i=1}^{n}F_i^{b}\,,$$

де швидкість та прискорення матеріальної точки у проекціях на ці ж осі дорівнюють:

$$v=v^{\tau}=\frac{ds}{dt}\,,\;\; a^{\tau}=\frac{dv}{dt};\;\; a^{n}=\frac{v^2}{\rho},\;\; a^{b}=0\,,$$

ρ – радіус кривизни кривої, по якій рухається точка.

Останнє рівняння в є рівнянням статики в проекції на бінормаль.

Дві задачі динаміки матеріальної точки формулюються так:

За заданими масою матеріальної точки та законом її руху визначити силу або рівнодійну силу, яка діє на матеріальну точку – ***перша задача*** динаміки точки;

Згідно із заданими силами, які діють на матеріальну точку заданої маси, і початковими умовами руху (швидкість і положення в початковий момент) визначити закон її руху – **друга або основна задача** динаміки точки

Методи розв'язування першої задачі динаміки матеріальної точки зводиться до диференціювання рівнянь руху, а другої – до інтегрування диференціальних рівнянь руху при заданих початкових умов руху (координат і проекцій швидкості точки у початковий момент часу) матеріальної точки.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає динаміка і які її основні задачі?
2. Сформулюйте основні закони динаміки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах.
4. Напишіть диференціальні рівняння руху невільної точки.
5. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
6. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
7. Що таке початкові умови руху точки?
8. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь ?

3.2.2.Приклад вирішення завдання № 1

Вантаж А масою 600 *кг* за допомогою тросу, що намотується на барабан ворота радіусом $r = 20$ *см*, піднімається з ковзанням по шорсткій поверхні, яку нахилено до горизонту під кутом 60^0. Прийняти, що закон обертання барабану ворота, вісь якого закріплено в центрі В, задано функцією часу для кута обертання $\varphi = 0,4t^3$ *рад*, та коефіцієнт тертя між вантажем і поверхнею дорівнює $f = 0,2$. Визначте силу натягу тросу, як функцію часу – Т=Т(t), та обчисліть її значення через $t = 2c$ після підйому вантажу (рис.3.1).

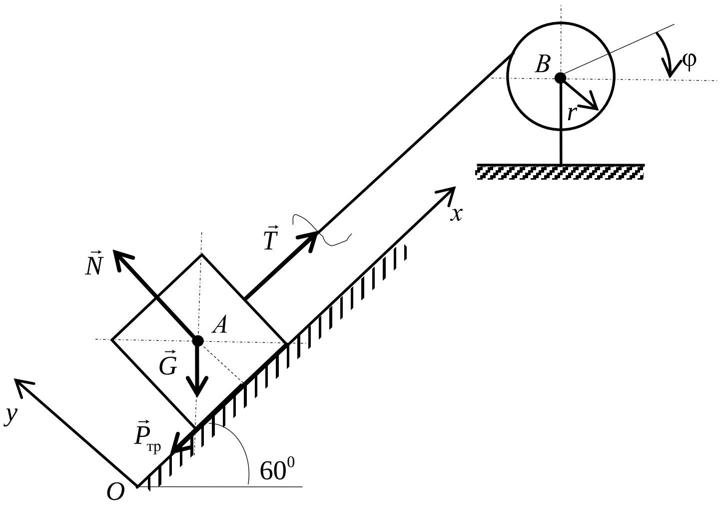


Рисунок.3.1

Рішення

Зобразимо вантаж *A* в поточному положенні, вважаючи за його матеріальну крапку. Основне рівняння динаміки у векторній формі має вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{P},$$

де

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_k^a + \sum \vec{N}_k .$$

Зобразимо також всі сили, що діють на точку *A,* умовно розриваючи трос. Виберемо систему декартових координат і запишемо основне рівняння динаміки в проекціях на осі цієї системи

$$m\ddot{x} = P_x; \quad m\ddot{y} = P_y$$

Скориставшись заданими величинами, отримаємо

$$m\ddot{x} = -G\sin 60^0 + T - P_{тр}; \quad m\ddot{y} = -G\cos 60^0 + N,$$

де $P_{тр}$ – сила тертя ковзання вантажу *A. Так* як вантаж рухається уздовж осі *x*, то $\ddot{y} = 0$ і, отже

$$N = G\cos 60^0 = mg\cos 60^0; \quad P_{тр} = fN = fmg\cos 60^0.$$

Підставляючи отримані вирази в 1-е рівняння системи, знайдемо

$$m\ddot{x} = -mg\sin 60^0 + T - fmg\cos 60^0.$$

Тепер визначимо прискорення вантажу *A* через характеристики обертального руху ворота:

$$\ddot{x} = a_\tau; \quad a_\tau = \varepsilon r; \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = 2,4t \; 1/\text{с}^2,$$

звідки

$$a_\tau = 2,4t \cdot 0,2 = 0,48t \; \text{м/с}^2.$$

Останній вираз дозволяє обчислити силу натягнення троса для заданого моменту часу $t = 2$ с

$$T = 600\left(0,48 \cdot 2 + 9,8 \cdot 0,866 + 0,2 \cdot 9,8 \cdot 0,5\right) = 6256\,\text{Н} = 6,256\,\text{кН}.$$

3.2.3.Приклад вирішення завдання № 2

В умовах невагомості матеріальна точка масою *M* = 2 *кг* обертається у плоскості по колу радіусом *R* =1 *м*. Натуральний закон руху точки є заданим: $S = OM = \sin \pi t$, *м.* Визначите силу, під дією якої точка рухається та обчисліть її значення в момент часу $t = 1/4c$.(рис.3.2).

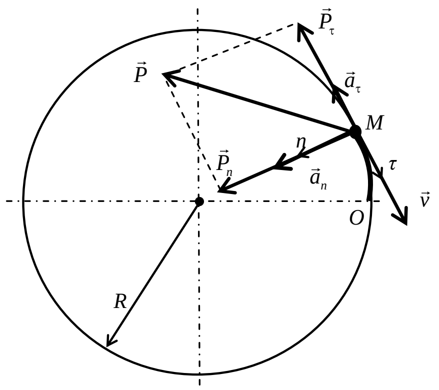


Рисунок.3.2

Рішення

Зобразимо всі сили, що діють на точку *M* в поточному положенні, вибравши природну систему координат, і запишемо основне рівняння динаміки у векторній формі

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

і в проекціях на природні осі координат

$$ma_\tau = P_\tau; \quad ma_n = P_n.$$

По відомій з кінематики рівності визначимо величини a_τ і a_n у момент часу $t = 1/4$ с

$$a_\tau = \ddot{S} = -\pi^2 \sin \pi t = -6.97\,\text{м/с}^2; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{S}^2}{R} = \frac{\pi^2 \cos^2 \pi t}{R} = 4,93\,\text{м/с}^2.$$

Для того, щоб встановити напрями шуканих сил, необхідно проаналізувати знаки проекцій швидкості і складових прискорення. У заданий момент часу t швидкість $v_\tau = \dot{S} > 0$. Негативне значення a_τ указує на те, що це прискорення направлене убік, протилежну вектору швидкості, а сила P_τ

збігається по напряму з прискоренням a_τ . Напрями сили P_τ і прискорення a_τ однакові.

Визначивши величини проекцій сили *P*

$$P_\tau = ma_\tau = 2\cdot(-6,97) = -13,94\text{Н}, \quad |P_\tau| = 13,94\,\text{Н};$$

$$P_n = ma_n = 2\cdot 4,93 = 9,86\,\text{Н},$$

знайдемо її значення

$$P = \sqrt{P_\tau^2 + P_n^2} = \sqrt{13,94^2 + 9,86^2} = 17,07\,\text{Н}.$$

3.2.4.Приклад вирішення завдання № 3

Тіло рухається з крапки *A* вгору по ділянці *AB* похилої плоскості, під кутом $\alpha = 30^0$ з горизонтом, під дією сили *Q*, рівної 0,5 ваги вантажу. Коефіцієнт тертя ковзання тіла по плоскості *f* = 0,1. У початковий момент швидкість тіла $v_0 = 10\,\text{м/с}$ (рис2.3).

Визначити шлях *S*, пройдений тілом, і його швидкість *v* через час *t* = 5 с.

Рішення

Розглянемо рух тіла, приймаючи його за матеріальну точку, в поточному положенні на ділянці *AB*. Виберемо систему координат з центром *A,* співпадаючим з початковим положенням крапки, а одну з осей направимо паралельно вектору швидкості. Зобразимо активні сили, прикладені до матеріальної точки, і реакції зв'язків.

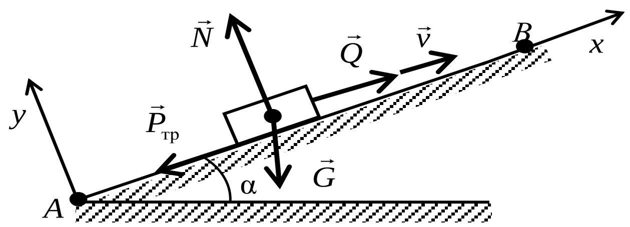


Рисунок.3.3

Запишемо основне рівняння динаміки у векторній формі:

$$m\vec{a} = \vec{P}.$$

Складемо диференціальні рівняння руху в проекціях на осі вибраної системи координат:

$$m\ddot{x} = Q - P_{\text{тр}} - G\sin\alpha; \quad m\ddot{y} = N - G\cos\alpha; \quad \ddot{y} = 0;$$

$$P_{\text{тр}} = fN; \quad N = G\cos\alpha; \quad G = mg; \quad Q = 0,5mg.$$

Тепер обчислимо

$$m\ddot{x} = 0,5mg - 0,1mg\cos\alpha - mg\sin\alpha,$$

звідки

$$\ddot{x} = 9{,}8\left(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}866 - 0{,}1\cdot 0{,}5\right) = 3{,}56\,\text{м/с}^2 .$$

Проінтегруємо двічі диференціальне рівняння руху

$$\dot{x} = 3{,}56t + c_1; \quad x = 1{,}78t^2 + c_1 t + c_2 .$$

Використовуючи початкові умови руху тіла, визначимо при t = 0 сталі інтегрірування:

$$c_1 = \dot{x}_0 = v_0 = 10 \quad \text{і} \quad c_2 = x_0 = s_0 = 0 \quad .$$

Для моменту часу t = 5 з кінцеві параметри наступні: $\dot{x} = v$ і $x = s$. Тепер визначимо значення цих величин

$$v = 3{,}56t + 10 \quad \text{і} \quad v = 3{,}56t + 10 \quad \text{и} \quad s = 1{,}78t^2 + 10t\,,$$

звідки остаточно отримаємо

$$v = 27{,}8\,\text{м/с} \quad \text{и} \quad s = 94{,}5\,\text{м}.$$

3.2.5.Приклад рішення завдання № 4

Снаряд вилітає із знаряддя, що знаходиться на висоті h = 10 м під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту, з початковою швидкістю v_0 = 600 м/с.

Скласти рівняння руху снаряда і рівняння його траєкторії, визначити дальність польоту, максимальну висоту польоту, час польоту, швидкість снаряда у момент його падіння, нехтуючи опором повітря(рис.3.4).

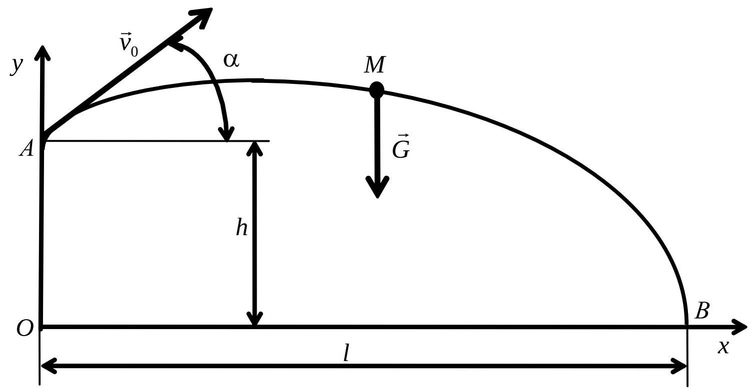


Рисунок 3.4

Рішення

Виберемо систему координат і зобразимо (снаряд) точку M в довільному положенні. На точку діє тільки постійна сила тяжіння G. Запишемо диференціальні рівняння руху точки:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}.$$

В даному випадку $m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = -G = -mg$. Скоротивши в цих рівняннях величину маси m, відмінну від нуля, отримаємо

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g.$$

Початкові умови у момент часу $t=0$:

$$x_0=0;\quad y_0=h;\quad \dot{x}_0=v_0\cos\alpha;\quad \dot{y}_0=v_0\sin\alpha.$$

Двічі проінтегруємо диференціальні рівняння руху :

$$v_x=\dot{x}=C_1;$$

$$x=C_1\cdot t+C_2;$$

$$\ddot{y}=-g;\quad v_y=\dot{y}=-gt+C_3;$$

$$y=-\frac{gt^2}{2}+C_3\cdot t+C_4.$$

Обчисливши сталі інтегрування C_1-C_4 з початкових умов при $t=0$,

$$C_1=\dot{x}_0=v_0\cos\alpha,\ C_2=x_0=0\quad C_3=\dot{y}_0=v_0\sin\alpha,\ C_4=y_0=h$$

запишемо рівняння руху снаряда:

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t;\quad y=-\frac{gt^2}{2}+v_0\sin\alpha\cdot t+h.$$

Виключаючи з 1-го рівняння час $t=\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$, отримаємо рівняння траєкторії руху точки в декартовій системі координат

$$y=x\cdot tg\,\alpha-\frac{g\cdot x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}+h.$$

Відповідна цьому рівнянню траєкторія є параболою.

Визначимо дальність польоту снаряда. У момент падіння його координати $y=0$, $x=l$.

З рівняння траєкторії виходить, що

$$l\cdot tg\,\alpha-\frac{gl^2}{2v_O^2\cos^2\alpha}+h=0,$$

звідки з урахуванням початкових даних отримаємо

$$l\frac{0,5}{0,866}-\frac{9,8l^2}{2\cdot 600^2\cdot 0,866^2}+10=0.$$

Вирішуючи квадратне рівняння, знайдемо $l_1=-17,32$ м; $l_2=31896$ м. Оскільки траєкторією руху снаряда є гілка параболи з позитивними абсцисами її , то дальність польоту $l=31896$ м.

При максимальній ординаті польоту снаряда $y_{\max}$ проекція швидкості $v_y=\dot{y}=0$.

З рівняння

$$-gt_1+v_O\sin\alpha=0$$

знайдемо час польоту до досягнення максимальної висоти снаряда

$$t_1=\frac{v_O\sin\alpha}{g}=30,6\ \text{с}.$$

Підставляючи набутого значення часу в 2-е рівняння

$$y_{\max} = h_{\max} = -\frac{9,8 \cdot 30,6^2}{2} + 600 \cdot 0,5 \cdot 30,6 = 4592 \text{ м}$$

і використовуючи 1-е рівняння, визначимо при значенні координати $x = l$ час польоту снаряда

$$t_2 = \frac{l}{v_O \cos\alpha} = \frac{31896}{600 \cdot 0,866} = 61,4 \text{ с.}$$

Швидкість снаряда у момент його падіння знайдемо за допомогою формул для проекцій швидкостей на осі координат

$$v_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_O^2 \cos^2\alpha + \left(gt_2 + v_O \sin\alpha\right)^2} =$$

$$= \sqrt{600^2 \cdot 0,866^2 + \left(9,8 \cdot 61,4 + 600 \cdot 0,5\right)^2} = 1040,7 \text{ м/с.}$$

3.3.Динаміка механічної системи

3.3.1.Теоретичні ведомісті

Механічна система (матеріальна система) – це сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов’язані і взаємообумовлені.

Сили, які діють на матеріальну систему, поділяються на ***внутрішні*** – $\bar{R}_k$ та *зовнішні* – $\bar{F}_k^e$. *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. *Зовнішні сили* – це сили, які діють на точки системи з боку інших точок, які не належать даній матеріальній системі. Внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як дія і протидія $(\bar{R}_k = -\bar{R}_{k+1})$, так що

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O\left(\bar{R}_k\right) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_z\left(\bar{R}_k\right) = 0.$$

геометрична сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю, та геометрична сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно осі дорівнюють нулю.

Центр мас матеріальної системи характеризує розподіл мас по об'єму та є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{M},$$

де $M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – маса матеріальної системи, $\bar{r}_k$ – радіус-вектор положення кожної k-тої точки системи відносно фіксованої у просторі точки O

Центр мас матеріальної системи у проекціях осі координат x, y, z визначається так:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{M},\ y_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{M},\ z_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k}{M},$$

де x_k, y_k, z_k – координати окремих точок матеріальної системи.

У однорідному силовому полі Землі центр мас матеріальної системи збігається з його центром ваги.

Моменти інерції маси тіла характеризують розподіл мас по об'єму та розрізняються на осьові, полярні, відцентрові моменти інерції з одиницею виміру – $кг\,м^2$:

– *осьовий момент інерції маси тіла* (системи матеріальних точок) характеризує міру інертності тіла при обертальному русі відносно координатної осі – є завжди додатною величиною, яка дорівнює сумі добутків мас окремих точок на квадрати їх відстаней до цієї осі ($k = 1,...,n$):

$$I_x = \Sigma m_k\, r_{kx}^2 = \Sigma m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right),$$
$$I_y = \Sigma m_k\, r_{ky}^2 = \Sigma m_k \left(z_k^2 + x_k^2\right),$$
$$I_z = \Sigma m_k\, r_{kz}^2 = \Sigma m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right).$$

Якщо тіло суцільне або має неперервний розподіл маси, то момент інерції твердого тіла визначається інтегралом, поширеним на всю масу:

$$I_x = \int\limits_{(M)} \left(y^2 + z^2\right) dm,\ I_y = \int\limits_{(M)} \left(z^2 + x^2\right) dm,\ I_z = \int\limits_{(M)} \left(x^2 + y^2\right) dm.$$

– ***полярний момент інерції маси тіла*** (системи матеріальних точок) – I_o є сума добутків мас точок тіла m_k на квадрати їх відстаней $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$, ($k = 1,...,n$) до полюса O:

$$I_o = \Sigma m_k r_k^2 = \Sigma m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right), \quad I_x + I_y + I_z = 2I_o$$

– *відцентровий момент інерції маси тіла* (системи матеріальних точок) характеризує асиметричність розподілу мас при обертальному русі ($k = 1,...,n$):

$$I_{xy} = \Sigma m_k x_k y_k;\ I_{xz} = \Sigma m_k x_k z_k;\ I_{yz} = \Sigma m_k y_k z_k$$

Для суцільного з неперервним розподілом маси тіла операції суми замінюються інтегралом:

$$I_{xy} = \int\limits_M xydm,\ I_{xz} = \int\limits_M xzdm,\ I_{yz} = \int\limits_M yzdm.$$

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

Головною віссю інерції* тіла** називається вісь Oz, для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю ($I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$). Вісь симетрії тіла є головною віссю інерції. Якщо всі три відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю: $I_{xy} = 0$; $I_{xz} = 0$; $I_{yz} = 0$, то кожна з координатних осей є головною віссю інерції даного тіла для точки O початку координат. Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції є ***головними моментами інерції.

Центральною називається довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла. Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є ***головною***

центральною віссю інерції. Моменти інерції маси тіла відносно цих осей називаються ***головними центральними моментами інерції тіла***.

Радіус інерції ρ_z ***,*** i_z ***тіла*** – це лінійна величина, добуток квадрату якої на масу тіла $-M$ визначає осьовий момент інерції маси тіла, наприклад, відносно координатної осі – z: $I_z = M \cdot \rho_z^2$.

Теорема Гюйгенса про моменти інерції маси тіла: момент інерції маси тіла відносно осі z дорівнює сумі моменту інерції маси тіла відносно паралельної осі – z_c, яка проходить через центр мас – C, і добутку маси тіла – M на квадрат відстані між осями – а: $I_z = I_{z_c} + M \cdot a^2$.

Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи – це векторні характеристики динамічного руху, які визначаються так:

Кількість руху матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості: $\bar{q} = \vec{k} = m\bar{v}$, *кгм/с*, його напрямок збігається з напрямом вектора швидкості $\bar{v}$.

Кількість руху матеріальної системи дорівнює геометричній сумі векторів кількостей руху окремих точок системи: $\bar{Q} = \vec{K} = \sum_{k=1}^{n} \bar{q}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k$, *кгм/с*.

Вектор кількості руху матеріальної системи або головний вектор кількості руху системи дорівнює добутку маси усієї системи на вектор швидкості її центра мас:

$$M\bar{v}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k = \bar{Q}, \quad Q_x = M \quad v_{cx}, \quad Q_y = M v_{cy}, \quad Q_z = M v_{cz},$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}, \quad \cos\left(\bar{Q}, \hat{x}\right) = \frac{Q_x}{Q}; \quad \cos\left(\bar{Q}, \hat{y}\right) = \frac{Q_y}{Q}; \quad \cos\left(\bar{Q}, \hat{z}\right) = \frac{Q_z}{Q}.$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи у диференціальній формі: похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної системи дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему: $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e$.

Закон збереження кількості руху матеріальної системи: якщо геометрична сума всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то головний вектор кількості руху системи залишається незмінним: $\bar{Q} = const$.

Теорема про рух центра мас: центр масс системи матерыальних точок рухаэться як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил – $M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e$.

Моментом кількості руху $(m\bar{v})$ ***матеріальної точки відносно центра*** O названо вектор $\bar{l}_{ok}$, який дорівнює добутку $\vec{l}_{ok} = \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$ і спрямований у той бік, звідки здається, що вектор $(m\bar{v})$ намагається повернути цю площину відносно центра O проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика).

Головним або кінетичним моментом матеріальної системи відносно будь-якого центра є вектор $\bar{L}_o$, який дорівнює геометричній сумі векторів $\bar{l}_{ok}$ моментів кількості руху усіх точок системи відносно цього центра:

$$\bar{L}_o = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o\left(m_k \bar{v}_k\right) = \sum \left(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k\right).$$

Кінетичним або головним моментом кількості руху механічної системи відносно будь-якої осі z є алгебраїчна сума моментів l_{zk} кількості руху усіх точок системи відносно осі z:

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_z\left(m_k \bar{v}_k\right).$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання z дорівнює добутку осьового моменту інерції маси тіла відносно осі на кутову швидкість тіла: $L_z = I_z \cdot \omega$.

Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи: похідна за часом від кінетичного моменту $\bar{L}_0$ матеріальної системи відносно будь-якого центра O дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно того ж центра.

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o\left(\bar{F}_k^e\right),$$

проектуючи останній вираз на осі координат, отримаємо:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z\left(\bar{F}_k^e\right); \quad \frac{dL_x}{dt} = \sum m_x\left(\bar{F}_k^e\right); \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum m_y\left(\bar{F}_k^e\right).$$

Похідна за часом від кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно цієї осі.

Закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи**:** якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра O дорівнює нулю – $\sum \bar{m}_o\left(\bar{F}_k^e\right) = 0$, то кінетичний момент матеріальної системи відносно цього центра зберігає своє значення: $\bar{L}_o = \sum \bar{m}_o\left(m_k \bar{v}_k\right) = const$.

Кінетичною енергією називають фізичну величину, яка є скалярною мірою механічного руху в нерухомій системі координат при переході однієї форми руху в іншу, наприклад, механічної в теплову тощо.

Кінетичною енергією точки називають скалярну величину, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат швидкості – $T = \frac{mv^2}{2}$, Нм (Дж), та є величиною додатною.

Кінетична енергія матеріальної системи – це скалярна величина, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій окремих точок, що складають систему:

$$T = \sum T_k = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості довільної точки або центра мас: $T = \frac{Mv^2}{2}$, де $\bar{v}$ - швидкості усіх точок, які при поступальному русі однакові.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω, дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості: $T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}$, де $I_z = \sum m_k r_k^2$ – осьовий момент інерції маси тіла, міра інертності тіла при обертальному русі.

Кінетична енергія тіла, яке рухається плоско-паралельно, дорівнює сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас: $T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc}\omega^2}{2}$.

Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому переміщенні.

Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил $T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}$, де $\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему; $\sum A_k^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил, які діють між точками системи.

Зміна кінетичної енергії матеріальної системи для незмінних механічних систем (деформації яких можна не враховувати, $\sum A_k^{in} = 0$) дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх робіт на цьому переміщенні: $T - T_0 = \sum A_k^e$.

***Робота* сил** тяжіння на переміщенні точки з положення M_1 в положення M_2, якщо $z_1 - z_2 = h$, дорівнює: $A = mgh.$

Робота сили пружності, якщо вона відповідає закону Гука ($F_{пр} = cx$), дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на квадрат переміщення її точки прикладання, яке відраховується від положення недеформованого стану: $A = \frac{c}{2}\left(x_{нач}^2 - x_{кон}^2\right)$. Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно переміщенню її точки прикладання

Робота сил тертя $P_{тр}$ на переміщенні її точки прикладання – s точки, з положення M_1 в положення M_2, дорівнює: $A = -P_{тр} \cdot s$, та завжди від'ємна тому, що вектор сили тертя спрямований протилежно переміщенню її точки прикладання.

Робота моменту - пари сил – $M_z(\vec{P})$**,** під дією якого тіло обернеться навколо нерухомої осі z на кут рівний – φ, дорівнює: $A = \pm M_z(\vec{P}) \cdot \varphi$.

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла є диференціальними рівняннями руху центра мас тіла поступального руху твердого тіла.

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e,\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e,\ M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e,$$

де M – маса тіла; x_c, y_c, z_c – координати центра мас; $F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ – проекції зовнішньої k - тої сили на осі координат.

Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла, що під дією прикладених до нього сил $\bar{P}_1^e,\ \bar{P}_2^e,\ ...,\ \bar{P}_n^e$ обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω має наступні форми:

$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z\left(\bar{P}_k^e\right)$, або $I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z\left(\bar{P}_k^e\right)$, чи $I_z\varepsilon = \sum m_z\left(\bar{P}_k^e\right)$.

Обертальний рух прискорений $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$, якщо $\sum m_z\left(\bar{P}_k^e\right) > 0$, то, сповільнений $\sum m_z\left(\bar{P}_k^e\right) < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$ – обертальний рух, $\sum m_z\left(\bar{P}_k^e\right) = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ – обертання рівномірне ($\omega = const$).

Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла у координатній формі, якщо обрати за полюс центр мас тіла точку *С,* набувають вигляду:

$$M\ddot{x}_c = \sum P_{kx},\ M\ddot{y}_c = \sum P_{ky},\ I_{zc}\ddot{\varphi} = \sum m_z\left(\bar{P}_k^e\right).$$

Питання для самоконтролю

1.Які моменти інерції маси тіла Вам відомі?

2.В яких одиницях вимірюється момент інерції маси тіла і що він характеризує?

3.Що таке радіус інерції тіла?

4.Сформулюйте теорему Гюйгенса про моменти інерції.

5.Як обчислити моменти інерції стержня, суцільного і трубчастого циліндра, кулі, конуса?

6.Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?

7.Які осі в тілі є головними центральними осями?

8.Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?

9.Які міри руху існують в тілі, що рухається?

10.Як визначити імпульс змінної і сталої сили?

11.Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і системи.

12.Напишіть теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.

13.Сформулюйте закон збереження кількості руху матеріальної системи.

14.Які задачі розв’яжуться за допомогою загальних теорем динаміки?

15.Які міри дії сил мають місце під час руху тіла?

16.Визначте поняття моменту кількості руху матеріальної точки і системи.

17.Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки.

18.Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи.

19.Як визначити кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?

20.Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної точки.

21.Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи.

22.Наведіть приклади із побуту, як працює закон збереження кінетичного моменту системи.

23.Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи відносно осей координат.

24.Як визначити головний момент кількості руху матеріальної системи?

25.Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки

точки?
26.Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?
27.Напишіть формулу і сформулюйте словами вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі.
28.В яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?
29.Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд ці рівняння мають?
30.Запишіть вираз кінетичної енергії точки і системи.
31.Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоско паралельно, і обертаються?
32.Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки і напишіть її вираз у диференціальній і кінцевій формах.
33.Яка розмірність кінетичної енергії?
34.Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи.

3.3.2.Приклад вирішення завдання № 1

Застосування теореми про рух центру мас механічної системи

Електродвигун 1 вагою G_1 встановлений вертикально на ідеально гладкій плоскості фундаменту і закріплений на ній болтами. На його валу під прямим кутом одним кінцем прикріплений невагомий стрижень з вантажем 2 вагою G_2 розташованим на іншому кінці. Довжина стрижня $C_1C_2 = l$, кутова швидкість ω обертання валу постійна, рівняння обертання валу щодо тієї точки, що проходить через точку C_1 горизонтальній осі $\varphi = \omega t$ (рис.3.5).

Визначити найбільші зусилля: горизонтальне, таке, що діє на болти, вертикальне, таке, що діє з боку двигуна на плоскість. Записати також рівняння руху електродвигуна по горизонтальній плоскості за відсутності кріплення болтами з урахуванням того, що механічна система в початковий момент часу була нерухомою.

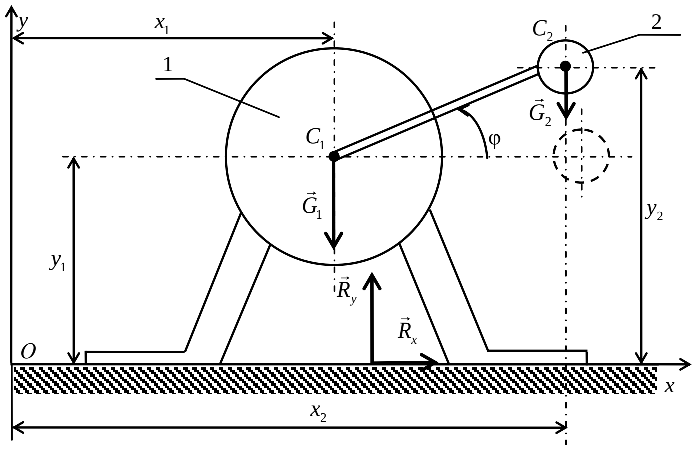


Рисунок.3.5

Рішення

Виділимо механічну систему, яка складається з двох тіл: електродвигуна 1 і вантажу 2. Зовнішніми силами, що діють на систему, є: вага електродвигуна $\vec{G}_1$, вага вантажу $\vec{G}_2$, сумарні горизонтальні реакції болтів $\vec{R}_x$ і вертикальні реакції $\vec{R}_y$ горизонтальної плоскості.

Запишемо вираз для теореми про рух центру мас системи у векторній формі

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{P}_k^e$$

і в проекціях на осі координат

$$M\ddot{x}_C = \sum P_{kx}^e; \quad M\ddot{y}_C = \sum P_{ky}^e .$$

Визначимо проекції зовнішніх сил, що діють, і запишемо диференціальні рівняння руху центру мас системи у вибраній системі координат

$$M\ddot{x}_C = R_x; \quad M\ddot{y}_C = R_y - G_1 - G_2 .$$

У цих рівняннях

$$M\ddot{x}_C = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2; \quad M\ddot{y}_C = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 ,$$

де x_1, y_1 і x_2, y_2 – координати центру мас електродвигуна 1 і вантажу 2 відповідно. Для випадку, коли електродвигун закріплений, ці координати обчислюють таким чином

$$x_1 = 0; \quad y_1 = h = \text{const}; \quad x_2 = x_1 + l\cos\varphi = l\cos\omega t;$$

$$y_2 = h + l\sin\varphi = h + l\sin\omega t.$$

Тепер знайдемо значення других похідних

$$\ddot{x}_1 = 0; \quad \ddot{y} = 0; \quad \ddot{x}_2 = -l\omega^2\cos\omega t; \quad \ddot{y}_2 = -l\omega^2\sin\omega t ,$$

з урахуванням яких отримаємо вирази

$$M\ddot{x}_C = -m_2 l\omega^2\cos\omega t; \quad M\ddot{y}_C = -m_2 l\omega^2\sin\omega t ,$$

звідки

$$R_x = -\frac{G_2}{g} l\omega^2\cos\omega t; \quad R_y = G_1 + G_2 - \frac{G_2}{g} l\omega^2\sin\omega t .$$

Далі визначимо силу тиску на горизонтальну плоскість:

– максимальну

$$G_{y_{\text{мах}}} = R_{y_{\text{мах}}} = G_1 + G_2 + \frac{G_2}{g} l\omega^2$$

при $\sin\omega t = -1; \quad \omega t = \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$;

– мінімальну

$$G_{y_{\text{мин}}} = R_{y_{\text{мин}}} = G_1 + G_2 - \frac{G_2}{g} l\omega^2$$

Слід зазначити, що за відсутності кріплення у вертикальному напрямі корпус електродвигуна відірветься від плоскості при тиску $G_{y_{мин}} = R_{y_{мин}}$ < 0. Кутова швидкість валу електродвигуна при цьому складе

$$G_1 + G_2 - \frac{G_2}{g} l\omega^2 < 0; \ \omega > \sqrt{\frac{g(G_1 + G_2)}{G_2 \cdot l}}.$$

Максимальну горизонтальну силу тиску на болти знайдемо по формулі

$$Q_x = R_{x_{мах}} = \frac{G_2}{g} l\omega^2$$

за умови, що . $\cos\omega t = \pm 1; \quad \omega t = \varphi = 0, \pi$

Тепер отримаємо шукане рівняння руху електродвигуна по горизонтальній плоскості за відсутності кріплення болтами. З урахуванням того, що вибрана механічна система в початковий момент часу була нерухома, запишемо

$$M\ddot{x}_C = \sum P_{kx}^e; \quad M\ddot{x}_C = 0; \quad \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0; \quad \dot{x}_C = 0.$$

У даному випадку виконується закон збереження руху центру масс в проекции на ось Ox. для $t = 0 \quad \dot{x}_C = 0,$ то $x_C = \text{const}$.

– у початковому положенні при значеннях $t = 0; \quad \omega t = 0; \quad \varphi = 0$

$$x_{C_0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \frac{G_2 \cdot l}{G_1 + G_2};$$

– у поточному положенні при значеннях $t = t_т; \quad \varphi \neq 0$

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_1 + l\cos\omega t)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2) x_1 + m_2 \cdot l\cos\omega t}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{(G_1 + G_2) x_1 + G_2 \cdot l\cos\omega t}{G_1 + G_2}.$$

Оскільки $x_{C_0} = 0,$ те $\dfrac{G_2 l}{G_1 + G_2} = \dfrac{(G_1 + G_2) x_1 + G_2 \cdot l\cos\omega t}{G_1 + G_2}$,

звідки остаточно отримаємо

$$x_1 = \frac{G_2 l(1 - \cos\omega t)}{G_1 + G_2}.$$

Отже, корпус електродвигуна у разі відсутності кріплень болтами здійснює гармонійні коливання з амплітудою $\dfrac{G_2 l}{G_1 + G_2}$ і циклічною частотою, рівній кутовій швидкості ω обертання валу.

3.3.3.Приклад вирішення завдання № 2

Застосування теореми про зміну кількості руху механічної системи

Для отримання рівняння руху електродвигуна (завдання1) по горизонтальній плоскості за відсутності кріплення болтами можливо також скористатися теоремою про зміну кількості руху системи (рис.3.6).

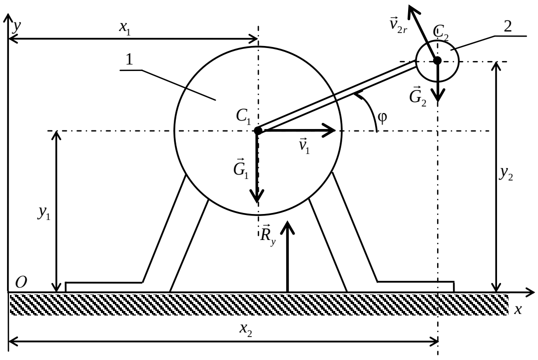


Рисунок.3.6

Рішення

Запишемо вираз для теореми про зміну кількості руху системи у векторній формі:

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\vec{P}_k^e.$$

У проекції на вісь Ox декартової системи координат воно виглядає таким чином

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum_{k=1}^{n}P_{kx}^e\ ;$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n}P_{kx}^e=0$ то виконується закон збереження кількості руху в проекції на вісь Ox. По умові при $t=0$ $x_C=0,$ то

$$K_x=\sum_{k=1}^{n}m_k v_{kx}=Mv_{cx}=M\dot{x}_c=0\,.$$

Проекція швидкості корпусу електродвигуна на вісь Ox $v_{1x}=\dot{x}_1$ Відповідно до теореми складання швидкостей точки при складному русі абсолютна швидкість її дорівнює геометричній сумі переносної і відносної швидкостей. Тому проекцію абсолютної швидкості вантажу 2 на вісь Ox знайдемо по формулі

$$v_{2x}=\dot{x}_1-v_{2r}\sin\varphi=\dot{x}_1-\omega\cdot l\cdot\sin\omega t\,,$$

де v_{2r} – чисельне значення відносної швидкості вантажу по відношенню до корпусу електродвигуна $v_{2r}=\omega\cdot l$. Підставляючи отриманий вираз в рівняння, знайдемо

$$\dot{x}_1=\frac{m_2\omega\cdot l\cdot\sin\omega t}{m_1+m_2}\,.$$

Для знаходження рівняння руху електродвигуна по горизонтальній площині необхідно проінтегрувати рівняння

$$x_1 = -\frac{m_2 \cdot l \cdot \cos \omega t}{m_1 + m_2} + C\,,$$

де C – постійна інтегрування, визначувана з початкових умов, при $t = 0 \quad x_{1_0} = 0$. У нашому випадку $C = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2}$ і остаточне шукане рівняння руху набере вигляду

$$x_1 = \frac{m_2 \cdot l \cdot (1 - \cos \omega t)}{m_1 + m_2} = \frac{G_2 l \left(1 - \cos \omega t\right)}{G_1 + G_2},$$

що збігається з рішенням, отриманим за допомогою теореми про рух центру мас.

3.3.4.Приклад рішення завдання № 3 Застосування теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи

Вантаж -1 масою $m_1 = 100$ *кг*, вагою G_1, спускається на тросі, що навитий на другу ступень двоступеневого барабану – 2, радіусами $R = 0,2\,м$ і $r = 0,1\,м$, масою m_2 та осьовим моментом інерції $I_2 = 2$ *кг м*^{2}. Вантаж – 3 масою $m_3 = 900$ *кг*, вагою G_3, піднімається по нахиленій до горизонту під кутом $\alpha = 45^0$ шорсткій поверхні, з коефіцієнтом тертя *f* = 0,2 між тілом і поверхнею, за допомогою троса, що навитий на другу ступень барабану –2. Двоступеневий барабан – 2 під дією незмінних у часі привідного моменту - $M_{вр}$ = *800* Н*м* та моменту опору в підшипнику - $M_с$ = *110* Н*м* обертається з постійною кутовою швидкістю. Визначте кутову швидкість двоступеневого барабану –2, пришвидшення вантажив – 1 і 2, а також, значення реакцій тросів в місцях кріплення вантажу(рис.3.7).

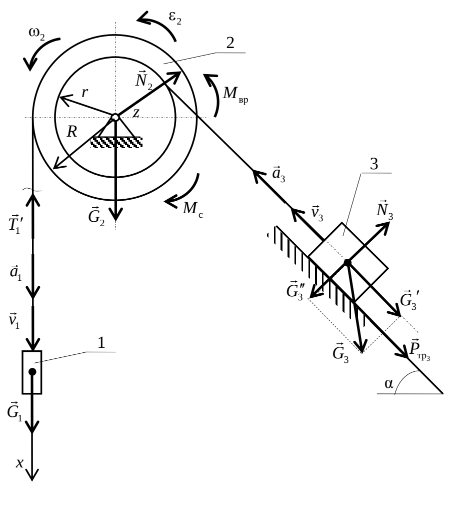


Рисунок.3.7

Рішення

Механічна система, що складається з барабана і двох вантажів, показана в поточному положенні зі всіма зовнішніми силовими чинниками $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{N}_2, \vec{N}_3, \vec{P}_{\text{тр}_3}, M_{\text{вр}}, M_{\text{с}}$ що діють на неї. Вісь координат *Oz* збігається з віссю обертання барабана. Запишемо вирази для теореми про зміну кінетичного моменту системи у векторній формі і в проекції на цю вісь:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^e; \quad \vec{M}_O^e = \sum \vec{M}_O\left(P_k^e\right); \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right).$$

Тепер обчислимо проекцію кінетичного моменту системи на вісь *Oz* по формулі

$$L_z = L_{z1} + L_{z2} + L_{z3},$$

$$L_{z1} = m_1 v_1 R_2 = m_1 \omega_2 R_2^2; \quad L_{z2} = I_2 \omega_2^2; \quad L_{z3} = m_3 v_3 r_2 = m_3 \omega_2 r_2^2,$$

звідки знайдемо

$$L_z = \omega_2\left(m_1 R_2^2 + I_2 + m_3 r_2^2\right).$$

Далі визначимо алгебраїчну суму моментів всіх зовнішніх сил, що діють на систему, щодо осі *Oz*

$$\sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right) = M_z\left(\vec{G}_1\right) + M_z\left(\vec{G}_2\right) + M_z\left(\vec{N}_2\right) + M_{\text{вр}} + M_{\text{с}} + M_z\left(\vec{G}_3'\right) + M_z\left(\vec{P}_{\text{тр}_3}\right), \; M_z\left(\vec{G}_1\right) = m_1 g R_2;$$

$$M_z\left(\vec{G}_2\right) = M_z\left(\vec{N}_2\right) = 0; \quad M_z\left(\vec{G}_3'\right) = -G_3 \sin\alpha\, r_2 = -m_3 \sin\alpha\, r_2,$$

оскільки силу $\vec{G}_3$ розклали на дві складові $\vec{G}_3'$ і $\vec{G}_3''$;

$$M_z\left(\vec{P}_{\text{тр}_3}\right) = -\vec{P}_{\text{тр}_3} \cdot r_2 = -m_3 g \cos\alpha\, f_3 \cdot r_2.$$

Визначимо

$$\sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right) = m_1 g R_2 + M_{\text{вр}} - M_{\text{с}} - m_3 g \sin\alpha\, r_2 - m_3 g \cos\alpha\, f_3 \cdot r_2.$$

Тепер знайдемо першу похідну від проекції кінетичного моменту на вісь *Oz*:

$$\frac{dL_z}{dt} = \varepsilon_2\left(m_1 R_2^2 + I_2 + m_3 r_2^2\right).$$

Підставляючи отримані результати у вираз для теореми про зміну кінетичного моменту системи, остаточно запишемо

$\varepsilon_2\left(m_1 R_2^2 + I_2 + m_3 r_2^2\right) = m_1 g R_2 + M_{\text{вр}} - M_{\text{с}} - m_3 g \sin\alpha \cdot r_2 - m_3 g \cos\alpha \cdot f_3 \cdot r_2$. З цього рівняння визначимо кутове прискорення барабана 2 і прискорення вантажів 1, 3

$$\varepsilon_2 = \frac{m_1 g R_2 - m_3 g \sin\alpha\, r_2 - m_3 g \cos\alpha\, f_3 r_2 + M_{\text{вр}} - M_{\text{с}}}{m_1 R_2^2 + I_2 + m_3 r_2^2} =$$

$$= \frac{100 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2 - 900 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}71 \cdot 0{,}1 - 900 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}71 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 700 - 100}{100 \cdot 0{,}04 + 2 + 300 \cdot 0{,}01} = = 17{,}5\ 1/\text{с}^2;$$

$$a_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 17{,}5 \cdot 0{,}2 = 35\ \text{м/с}^2;$$

$$a_3 = \varepsilon_2 \times r_2 = 17,5 \times 0,1 = 1,75 \text{ м/с}^2 .$$

Из этого уравнения определим угловое ускорение барабана 2 и ускорения грузов 1, 3.Знайдемо реакції двох гілок троса(рис.3.8)

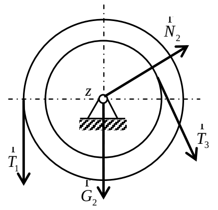


Рисунок.3.8

$$m_1\ddot{x}_1 = G_1 - T_1' ; \quad T_1' = m_1 g - m_1 a_1 = m_1\left(g - a_1\right) = 100 \cdot 6,3 = 630\,\text{Н};$$

$$T_1' = T ; \qquad I_{2z} \cdot \varepsilon_2 = \sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right); \quad I_{2z} \cdot \varepsilon_2 = T_1 \cdot R_2 - T_3 \cdot r_2;$$

$$T_3 = \frac{T_1 \cdot R_2 - I_{2z} \cdot \varepsilon_2}{r_2} =$$

$$= \frac{630 \cdot 0,2 - 2 \cdot 17,5}{0,1} = 910\,\text{Н}.$$

3.3.5.Приклад вирішення завдання № 4

Застосування закону збереження кінетичного моменту матеріальної системи

Вертикальний вал, вагою P, який закріплено в підп’ятнику – А та в підшипнику – В, має два шарнірно причеплені жорсткі невагомі стріжні, рівної довжини l, які симетрично розташовані в вертикальній плоскості під кутом α до осі валу, та на кінці кожного з них розташовано вантаж однакової маси *m*. Встановите залежності кутової швидкості вала – ω і реакціями в опорах валу від кута положення стержнів – α при обертанні вала. Прийняти, що осьовий момент інерції маси валу дорівнює – *I*(рис.3.9).

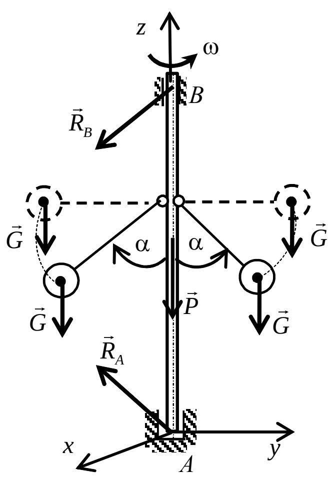


Рисунок.3.9

Рішення

Прикладемо до даної механічної системи, що складається з валу і стрижнів з вантажами, всі зовнішні сили $\vec{G}, \vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$ що діють на цю систему. Вісь *Az* збігається з віссю обертання валу. Запишемо вираз для теореми про зміну кінетичного моменту системи у векторній формі і в проекціях на вісь Az*:*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^e; \; \vec{M}_O^e = \sum \vec{M}\left(\vec{P}_k^e\right); \; \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right).$$

Оскільки лінії дії сил тяжіння $\vec{G}, \vec{P}$ паралельні осі *Az*, а реакції підп'ятника $\vec{R}_A$ і підшипника $\vec{R}_B$ перетинають її, то $\sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right) = 0$ і, отже, має місце закон збереження кінетичного моменту системи щодо осі *Az*, тобто $L_{z0} = L_z = \text{const}$.

Кінетичний момент системи при горизонтальному розташуванні стрижнів визначимо сумою

$$L_{z0} = L_{z0_{\text{вала}}} + L_{z0_{\text{грузов}}}.$$

Абсолютна швидкість кожного з вантажів

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Оскільки лінія дії вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ перетинає вісь *Az*, то складові кінетичного моменту щодо осі обертання від відносного руху вантажів дорівнюють нулю, тому

$$L_{z0_{\text{грузов}}} = 2m \cdot v_{\text{пер}_0} l = 2m \cdot \omega_0 l^2; \quad L_{z0_{\text{вала}}} = I \cdot \omega_0.$$

Кінетичний момент системи при відхиленні стрижнів на кут α визначимо сумою

$$L_z = L_{z_{\text{вала}}} + L_{z_{\text{грузов}}},$$

де

$$L_{z_{\text{грузов}}} = 2m \cdot v_{\text{пер}} l \cos\alpha = 2m \cdot \omega l^2 \cos\alpha; \quad L_{z_{\text{вала}}} = I \cdot \omega.$$

Прирівнюючи вирази для проекцій кінетичних моментів L_z і L_{z0}, остаточно отримаємо

$$2m \cdot \omega_0 l^2 \cos\alpha + I\omega_0 = 2m \cdot \omega l^2 \cos\alpha + I\omega_0,$$

звідки знайдемо кутову швидкість валу

$$\omega = \frac{\omega_0\left(2m \cdot l^2 + I\right)}{2m \cdot l^2 \cos\alpha + I}.$$

3.3.6.Приклад вирішення завдання № 5

Застосування теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху механічної системи

Механічна система зі стану покою починає рухатись під дією сил тяжіння вантажу – 1, масою m_1 = 10*m*, вагою G_1, і циліндричного катка – 2, масою m_2 = *m*, вагою G_2, які зв’язані між собою нерозтяжним тросом й рухаються разом по нахиленій під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту шорсткій поверхні з коефіцієнтами тертя ковзання – $f_1 = 0,3$ та тертя кочення – δ = 0,002 *м*. На каток -2 намотано нерозтяжний трос, один кінець якого намотано на зовнішній обід двоступеневого барабаном – 3, масою m_3 = 5*m*, вагою G_3, з радіусом інерції ρ_3 = 0,3 *м*, радіусами R_3 = 0,4 *м* і r_3 = 0,2 *м.* На внутрішню ступень барабану – 3 намотано нерозтяжний трос, кінець якого намотано на внутрішню ступень двоступеневого блоку –4, масою m_4 = 2 *m*, вагою G_4, з радіусом інерції ρ_4 = 0,2 *м*, радіусами R_4 = 0,3 *м* і r_4 = 0,15 *м*. На зовнішню ступень барабану – 4 намотано нерозтяжний трос, другий кінець якого вивішено вертикально і закріплено в нерухомій жорсткий опорі А, так що зовнішній обід блоку – 4 котячись по тросу піднімається вертикально. Визначите швидкість v_1 вантажу – 1 коли його шлях по поверхні буде дорівнювати s_1 = 2 *м*.(рис.3.10).

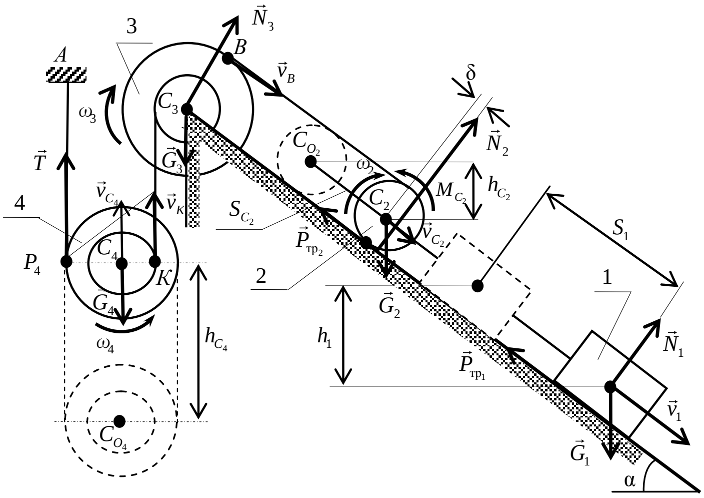


Рисунок.3.10

Рішення

У даній механічній системі вантаж 1 здійснює поступальний рух, циліндровий каток 2 і рухомий ступінчастий блок 4 – плоскопаралельний, нерухомий ступінчастий блок 3 – обертальний. Скористаємося виразом для теореми про зміну кінетичній енергії в інтегральній формі:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i .$$

У цьому виразі T_0 і T – кінетична енергія системи в початковому і кінцевому положеннях відповідно; $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, прикладених до системи; $\sum_{k=1}^{n} A_k^i$ – сума робіт її внутрішніх сил. Оскільки в початковому положенні система знаходилася у спокої, то $T_0 = 0$. Система складається з абсолютно твердих тіл, які сполучені нерозтяжними тросами, тому $\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0$ і, отже, кінетична енергія $T = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$. У кінцевому положенні вона складається з суми кінетичних енергій тіл 1-4, що входять в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Тепер зобразимо дану механічну систему в початковому і кінцевому положеннях, а також всі силові чинники, що діють на цю систему. Визначимо кінетичні енергії вхідних в систему тіл, виразив їх через швидкість v_1 вантажу1.

Кінетична енергія вантажу1

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} .$$

Кінетична енергія катка 2

$$T_2 = \frac{I_{C_2}\,\omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{C_2}^2}{2} ,$$

де I_{C_2} – момент інерції катка (однорідного циліндра) в його подовжньої центральної осі $I_{C_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$, ω_2 – кутова швидкість катка, який котиться без ковзання по похилій плоскості. Його миттєвий центр швидкостей знаходиться в P_2, тому, $\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{P_2 C_2}$, где $v_{C_2} = v_1$; $P_2 C_2 = r_2$, $\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}$. Підставляючи це відношення у формулу для кінетичної енергії, отримаємо

$$T_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2\cdot 2}\cdot\frac{v_1^2}{2^2} + \frac{m_2 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_1^2}{4} + \frac{m_2 v_1^2}{2} .$$

Кінетична енергія нерухомого ступінчастого блоку 3

$$T_3 = \frac{I_{C_3}\,\omega_3^2}{2} ,$$

де I_{C_3} – момент інерції блоку його подовжньої центральної осі $I_{C_3} = m_3 i_{C_3}^2$; ω_3– його кутова швидкість $\omega_3 = \frac{v_B}{r_3}$. Оскільки $v_B = \omega_2 2 r_2 = \frac{v_1 2 r_2}{r_2} = 2 v_1$, то $\omega_3 = \frac{2 v_1}{R_3}$. Підставляючи це відношення у формулу для кінетичної енергії, остаточно отримаємо

$$T_3 = \frac{m_3 i_{C_3}^2}{2}\cdot\frac{4 v_1^2}{R_3^2} .$$

Кінетична енергія рухомого ступінчастого блоку 4

$$T_4 = \frac{I_{C_4}\omega_4^2}{2} + \frac{m_4 v_{C_4}^2}{2},$$

де I_{C_4} – момент інерції блоку його подовжньої центральної осі $I_{C_4} = m_4 i_{C_4}^2$; ω_4 – кутова швидкість блоку $\omega_4 = \frac{v_K}{P_4 K}$. Оскільки трос не ковзає по блоку 4, його миттєвий центр швидкостей знаходиться в крапці P_4, $v_K = \omega_3 r_3 = \frac{v_1 2 r_3}{R_3}$ то $\omega_4 = \frac{2 v_1 r_3}{R_3(R_4 + r_4)}$ $v_{C_4} = \omega_4 P_4 C_4 = \frac{2 v_1 2 r R_4}{R_3(R_4 + r_4)}$. Підставляючи ці вирази у формулу для кінетичної енергії, отримаємо

$$T_4 = \frac{m_4 i_{C_4}^2}{2} \cdot \frac{4 v_1^2 r_3^2}{R_3^2 (R_4 + r_4)^2} + \frac{m_4 4 v_1^2 r_3^2 R_4^2}{2 R_3^2 (R_4 + r_4)^2}.$$

Тепер визначимо кінетичну енергію всієї механічної системи, використовуючи початкові дані

$$T = \frac{10 m v_1^2}{2} + \frac{4 m v_1^2}{4} + \frac{4 m v_1^2}{2} + \frac{5m}{2} \cdot \frac{0,3^2 \cdot 4 v_1^2}{0,4^2} +$$

$$+ \frac{2m \cdot 0,2^2 \cdot 4 v_1^2 \cdot 0,2^2}{2 \cdot 0,4^2 \left(0,3 + 0,15\right)^2} + \frac{2m \cdot 4 v_1^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,3^2}{2 \cdot 0,4^2 \left(0,3 + 0,15\right)^2} = 1,24 m v_1^2.$$

Роботу в даній системі здійснюють тільки зовнішні сили, зображені в її кінцевому положенні. Визначимо роботу зовнішніх сил на заданих переміщеннях точок системи при переміщенні вантажу1 на відстань S_1 . Роботи сил $\vec{G}_3$ і $\vec{N}_3$ дорівнюють нулю, оскільки точки застосування цих сил нерухомі. Роботи сил $\vec{P}_{\text{тр}_2}$ і $\vec{T}$ дорівнюють нулю, оскільки ці сили прикладені в , які є миттєвими центрами швидкостей. Реакція $\vec{N}_1$ перпендикулярна переміщенню вантажу 1 і її робота також дорівнює нулю. Запишемо формулу для знаходження суми робіт зовнішніх сил

$$\sum A_k^e = A_{\vec{G}_1} + A_{\vec{P}_{\text{тр}1}} + A_{\vec{G}_2} + A_{M_{C2}} + A_{\vec{G}_4}$$

і визначимо складові, що входять в цю суму:

– роботу сили тяжіння $\vec{G}_1$

$$A_{\vec{G}_1} = G_1 h_1 = m_1 g S_1 \sin\alpha;$$

– роботу сили тертя ковзання

$$A_{\vec{P}_{\text{тр}1}} = -P_{\text{тр}1} \cdot S_1,$$

$$P_{\text{тр}1} = f_1 N_1 = f_1 m_1 g \cos\alpha$$

$$A_{\vec{P}_{\text{тр}1}} = -f_1 m_1 g S_1 \cos\alpha;$$

– роботу сили тяжіння $\vec{G}_2$ з урахуванням того, що $S_{C_2} = S_1$

$$A_{\vec{G}_2} = G_2 h_{C_2} = m_2 g S_1 \sin\alpha \,;$$

– роботу пари сил опору коченню катка 2, момент якої M_{C_2}

$$A_{M_{C2}} = -M_{C_2}\cdot\varphi_2 \,;\; M_{C_2} = \delta N_2 = \delta G_2\cos\alpha = \delta m_2 g\cos\alpha$$

де, $\varphi_2 = \dfrac{S_{C_2}}{|P_2C_2|} = \dfrac{S_1}{r_2}$ кут повороту катка 2, що котиться без ковзання, звідки витікає, що

$$A_{M_{C2}} = -\delta m_2 g\cos\alpha\frac{S_1}{r_2}\,;$$

– роботу сили тяжіння $\vec{G}_4$

$$A_{\vec{G}_4} = -G_4 h_{C_4} = -m_4 g\,\frac{2S_1 r_3 R_4}{R_3\left(R_4 + r_4\right)}\,.$$

При знаходженні $A_{M_{C2}}$ і $A_{\vec{G}_4}$ слід було врахувати, що залежність між лінійними і кутовими швидкостями така ж, як між відповідними лінійними і кутовими переміщеннями.

Тепер визначимо суму робіт зовнішніх сил

$$\sum A_k^e = 10m\cdot 9,8\cdot 2\cdot 0,5 - 0,3\cdot 10m\cdot 9,8\cdot 2\cdot 0,86 + 4m\cdot 9,8\cdot 2\cdot 0,5 -$$

$$-0,002\cdot 4m\cdot 9,8\cdot 0,86\cdot\frac{2}{0,2} - 2m\cdot 9,8\cdot\frac{2\cdot 0,2\cdot 0,3}{0,4\left(0,3+0,15\right)} = 59,5m\,.$$

Згідно виразу для теореми про зміну кінетичній енергії, прирівнюючи значення T і $\sum A_k^e$ скоротивши на m обидві частини цієї рівності, набудемо значення швидкості вантажу 1 з формули $1,24mv_1^2 = 59,5m$ звідки

$$v_1 = \sqrt{\frac{59,5}{1,24}} = 6,93 \text{ м/с}.$$

3.3.7.Приклад вирішення завдання № 6

Механічна система, складається з вантажів 1, 4, блоку 2 з нерухомою віссю обертання і ступінчастого циліндрового катка 3. Груз 1 масою $m_1 = 8\ m$ опускається вертикально і за допомогою нерозтяжного троса, перекинутого через блок 2 (однорідний циліндр), приводить в рух каток 3. Він, у свою чергу, зв'язаний за допомогою того ж троса, прикріпленого в центрі мас, з вантажем 4, піднімається, як і каток 2, по шорсткій похилій плоскості, яка складає з горизонтом кут $\beta = 60^0$. Коефіцієнт тертя вантажу 4 об плоскість $f_4 = 0,2$,його маса $m_4 = m$; маса блоку 2 $m_2 = 5\ m$; маса катка 3 $m_3 = 2\ m$; радіуси ступенів катка 3: $R_3 =$ 0,3 м, $r_3 = 0,1$ м, радіус інерції $i_{C_3} = 0,2$ м.(рис.3.11).

Визначити швидкість центру мас v_{C_3} і кутову швидкість ω_3 катка 3 після того, як груз 1 опуститься на відстань $s_1 = 1$ м за умови, що тертям кочення катка 3 по похилій плоскості можна нехтувати.

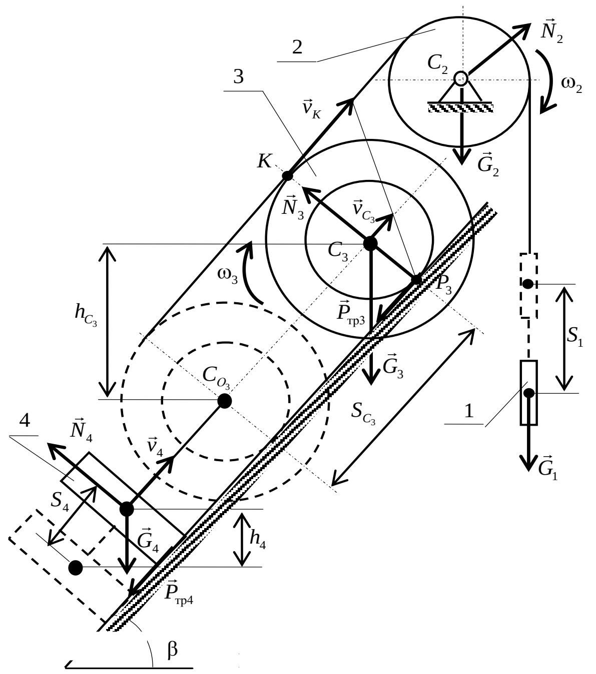


Рисунок 3.11

Рішення

У даній механічній системі вантажі1, 4 здійснюють поступальний рух, блок 2 – обертальний, каток 3 – плоскопаралельний. Скористаємося виразом для теореми про зміну кінетичній енергії в інтегральній формі

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \ .$$

У кінцевому положенні системи кінетична енергія складається з суми кінетичних енергій абсолютно твердих тіл 1-4, що входять в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \,.$$

Визначимо кінетичні енергії вхідних в систему тіл:

– вантажу 1

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \,,$$

де v_1 – швидкість вантажу 1;

– блоку 2

$$T_2 = \frac{I_{C_2} \cdot \omega_2^2}{2} \,,$$

де I_{C_2} – момент інерції блоку 2 (однорідного циліндра) його подовжньої центральної осі ; ω_2 – кутова швидкість блоку;

– катка 3

$$T_3 = \frac{I_{C_3}\omega_3^2}{2} + \frac{m_3 v_{C_3}^2}{2},$$

де I_{C_3} – момент інерції ступінчастого катка 3 його подовжньої центральної осі $I_{C_3} = m_3 i_{C_3}^2$; ω_3 і v_{C_3} – кутова швидкість і швидкість центру мас катка відповідно;

– вантажу 4

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2}$$

де v_4 – швидкість вантажу 4.

Тепер зобразимо дану механічну систему в початковому і кінцевому положеннях, а також всі силові чинники, що діють на цю систему. Виразимо швидкості тіл 1-4 через кутову швидкість катка ω_3 . Для цього знайдемо кінематичні залежності:

$$v_1 = v_K; \quad \omega_2 = \frac{v_K}{r_2}.$$

Оскільки каток 3 котиться по похилій плоскості без ковзання, його миттєвий центр швидкостей знаходиться в P_3, іх контакту

$$\omega_3 = \frac{v_K}{P_K} = \frac{v_1}{R_3 + r_3},$$

звідки витікає, що

$$v_1 = \omega_3\left(R_3 + r_3\right); \quad \omega_2 = \frac{\omega_3\left(R_3 + r_3\right)}{r_2};$$

$$v_{C_3} = \omega_3 PC_3 = \omega_3 r_3$$

або

$$v_{C_3} = v_4 = \omega_3 r_3.$$

Визначимо кінетичну енергію всієї системи, використовуючи кінематичні залежності, вирази для моментів інерції I_{C_2} і I_{C_3}, а також початкові дані

$$T = \frac{8m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}16}{2} + \frac{5m\cdot r_2^2\omega_3^2\cdot 0{,}16\cdot 25}{2\cdot 2\cdot r_2^2} + \frac{2m\cdot 0{,}04\cdot\omega_3^2}{2} +$$

$$+\frac{2m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}01}{2} + \frac{m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}01}{2} = m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}895.$$

Знайдемо суму робіт зовнішніх сил на заданих переміщеннях точок системи з урахуванням того, що груз 1 перемістився по вертикалі на відстань s_1, яка складається з суми робіт

$$\sum A_k^e = A_{\vec{G}_1} + A_{\vec{G}_3} + A_{\vec{G}_4} + A_{\vec{P}_{\text{гр}4}},$$

Де $A_{\vec{G}_1}, A_{\vec{G}_3}, A_{\vec{G}_4}$ – роботи сил тяжіння, відповідно

$$A_{\vec{G}_1} = G_1 \cdot h_1 = m_1 g S_1; \; A_{\vec{G}_3} = -G_3 \cdot h_{C_3} = -m_3 g S_{C_3} \sin\beta; \; A_{\vec{G}_4} = -G_4 \cdot h_4 = -m_4 g S_4 \sin\beta;$$

$A_{\vec{P}_{тр4}}$ – робота сили тертя $\vec{P}_{тр_4}$ $\left(\vec{P}_{тр_4} = -f_4 \cdot N_4 = -f_4 m_4 g \cos\beta\right)$,

$$A_{\vec{P}_{тр4}} = -\vec{P}_{тр_4} \cdot S_4 = -f_4 m_4 g \cos\beta \cdot S_4 .$$

Враховуючи, що залежність між переміщеннями така ж, як і між відповідними швидкостями

$$S_{C_3} = \frac{S_1 \cdot r_3}{\left(R_3 + r_3\right)}; \quad S_4 = S_{C_3} = \frac{S_1 \cdot r_3}{\left(R_3 + r_3\right)},$$

остаточно виразимо суму повної роботи сил системи

$$\sum A_k^e = m_1 g S_1 - m_3 g S_{C_3} \frac{S_1 \cdot r_3}{\left(R_3 + r_3\right)} - \frac{m_4 g S_1 \cdot r_3 \sin\beta}{\left(R_3 + r_3\right)} - f_4 m_4 g \cos\beta \frac{S_1 \cdot r_3}{\left(R_3 + r_3\right)} .$$

Підставляючи в цей вираз початкові дані, отримаємо

$$\sum A_k^e = 8m \cdot 9{,}8 \cdot 1 - 2m \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}1}{0{,}4} - \frac{m \cdot 9{,}8 \cdot 1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}86}{0{,}4} -$$
$$- \frac{m \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}1}{0{,}4} = 71{,}2m.$$

Далі прирівнюючи $m\omega_3^2 \cdot 0{,}895 = 71{,}2m$, знайдемо кутову швидкість катка 3

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{71{,}2}{0{,}895}} = 8{,}9 \text{ рад/с}$$

швидкість його центру мас знайдемо

$$v_{C_3} = \omega_3 \cdot P_3 C_3 = \omega_3 \cdot r_3 = 8{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}89 \text{ м/с}.$$

3.4.Аналітична динаміка

3.4.1.Теоретичні відомісті

Невільна механічна система є системою точок на які накладені в’язі, що обмежують положення або швидкості руху точок (тіл) системи.

В’язі називаються **голономними або неголономними**, якщо записуються аналітичними функціями від координат або не інтегрованими функціями координат і швидкостей; якщо ці записи мають вид рівностей або нерівностей, в’язі поділяються на утримуючі та не утримуючі. ***Нестаціонарними*** є в’язі, аналітичні функції яких явно залежать від часу, а навпаки – ***стаціонарні***.

Узагальненими координатами називаються незалежні між собою параметри $q_1, q_2, ..., q_N$ будь-якої розмірності, кількість яких дорівнює кількості ступенів вільності системи і які однозначно визначають положення та швидкість окремих точок цієї системи: $\bar{r}_k = \bar{r}\left(q_1, q_2, ..., q_s, t\right)$. Величини $\dot{q}_i \, (i = \overline{1, s})$ називаються ***узагальненими швидкостями.***

Рівняннями Лагранжа другого роду для механічних систем с ідеальними, стаціонарними, голономними та утримающімі в'язями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{dT}{\partial q_i}\right)=Q_q,$$

Узагальнені сили, що відповідні узагальненим координатам q_i визначаються:

$$Q_q=\frac{\left(\sum\delta A\right)q_i}{\delta q_i},$$

де $\left(\sum\delta A\right)q$ – сума робот усіх активних сил, на елементарном прирощенні δq узагальненої координати q.

***Методика розв'язування задач за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду складає*:** спочатку, для заданої матеріальної системи з голономними стаціонарними в'язями визначають кількість ступенів вільності і обирають відповідну систему узагальнених координат й визначають узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам та визначають кінетичну енергію системи як функцію узагальнених координат і узагальнених швидкостей; далі, складають рівняння Лагранжа другого роду для кожної узагальненої координати та після їхнього інтегрування отримують закон руху системи і визначають сталі інтегрування за допомогою початкових умов**.**

Питання для самоконтролю

1.Яка механічна система має назву невільної?
2.Які в'язі називаються голономними?
3.Які в'язі називаються стаціонарними?
4.Які координати називаються узагальненими?
5.Що називають узагальненимі швидкостями?
6.Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду? Чому дорівнює кількість цих рівнянь для кожної матеріальної системи?
7.Як визначаються узагальнені сили?

3.4.2.Приклад вирішення завдання № 1

Дослідження руху механічної системи з однією ступеню свободи за допомогою рівняння Лагранжа 2-го роду

Визначте прискорення вантажу – 1, вагою $G_1=3G$, і силу натягу тросу, що з'єднує цій вантаж з першою ступінню двоступеневого шківу – 2, радіусами $R_2=0,4\text{м}$ і $r_2=0,3\text{м}$ радіусом інерції 0.35м та вагою $G_2=2G$. Вантаж – 1 піднімається вздовж нахиленій під кутом $\alpha=60^0$ до горизонту шорсткій поверхні з коефіцієнтом тертя f = 0,1 між тілом і поверхнею. Вантаж – 4 вагою $G_4 = G$ піднімається за допомогою троса, що перекинутий через першу ступень двоступеневого шківу – 3, радіусами $R_3 = 0,2$ *м* і $r_3 = 0,1$ *м* радіусом інерції 0.15м та вагою $G_3 = 2G$. Осі шківів є нерухомими, а шківи –2 і 1 є зв'язаними ремінним пасом, та обертаються під дією прикладених до них привідного моменту $M_2 = 2G$ Н*м* та моменту опору $M_3 = G$ Н*м*, відповідно(рис.3.12).

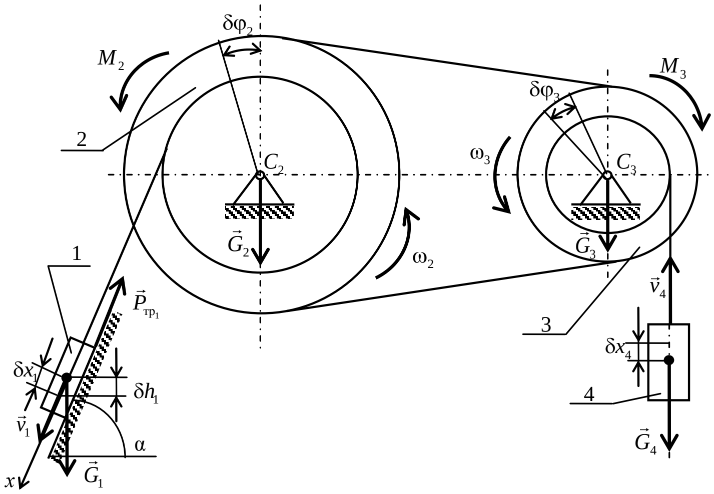


Рисунок 3.12

Рішення

Дана система має одну ступень свободи. Для визначення прискорення a_1 вантажу 1 виберемо як узагальнену координату його лінійне переміщення. Запишемо рівняння Лагранжа 2-го роду для вибраної узагальненої координати x і відповідно для узагальненої швидкості $\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x .$$

Механічна система зображена в зміщеному положенні з урахуванням позитивного напряму узагальненої координати x. Позитивний елементарний приріст узагальненої координати $\delta x = \delta x_1$ тому величини $\delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \delta x_4$ будуть елементарними приростами відповідних координат. На схемі показані активні сили тяжіння $\vec{G}_1, \vec{G}_4$ вантажів 1, 4 і $\vec{G}_2, \vec{G}_3$ шківів 2, 3, сила тертя $\vec{P}_{тр_1}$ вантажу 1 об похилу плоскість, а також моменти M_2, M_3 прикладені до шківів 2, 3.

Обчислимо суму робіт всіх перерахованих сил і моментів, окрім сил $\vec{G}_2, \vec{G}_3$, на елементарних приростах відповідних координат з урахуванням того, що зв'язок між цими приростами така ж, як і між відповідними швидкостями

$$\delta A_{\vec G_1}=G_1\delta h_1=G_1\delta x\sin\alpha;$$

$$\delta A_{\vec P_{тр1}}=-P_{тр1}\cdot\delta x=-G_1\cos\alpha f_1\delta x,\quad P_{тр1}=N_1f_1=G_1\cos\alpha f_1;$$

$$\delta A_{M_2}=M_2\delta\varphi_2=M_2\frac{\delta x}{r_2};$$

$$\delta A_{M_3}=-M_3\delta\varphi_3=-M_3\frac{\delta x\cdot R_2}{r_2\cdot R_3};$$

$$\delta A_{\vec G_4}=-G_4\frac{\delta x\cdot R_2r_3}{r_2\cdot R_3}.$$

Оскільки, $\delta h_{C_2}=0,\delta h_{C_3}=0$ то роботи сил $\vec G_2,\vec G_3$ також дорівнюють нулю, тобто $\delta A_{\vec G_2}=0;\quad \delta A_{\vec G_3}=0$

Підставляючи початкові дані, обчислимо суму робіт

$$\left(\sum\delta A\right)_x=\delta A_{\vec G_1}+\delta A_{\vec P_{тр1}}+\delta A_{M_2}+\delta A_{M_3}+\delta A_{\vec G_4}$$

$$\left(\sum\delta A\right)_x=\delta x\left(3G\cdot0,86-3G\cdot0,5\cdot0,1+\frac{2G}{0,3}-G\frac{0,4}{0,3\cdot0,2}-G\frac{0,4\cdot0,1}{0,3\cdot0,2}\right)=$$
$$=\delta x\cdot2,06G,$$

звідки знайдемо узагальнену силу, відповідну вибраній узагальненій координаті x

$$Q_x=\frac{\left(\sum\delta A\right)_x}{\delta x}=2,06G\,.$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичних енергій тіл 1-4, що входять в цю систему

$$T=T_1+T_2+T_3+T_4\,.$$

Для її знаходження потрібно виразити лінійні і кутові швидкості і тіл системи через узагальнену швидкість $\dot x$, а потім визначити всі складові:

– вантажу 1, що здійснює поступальний рух

$$T_1=\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_1\dot x^2}{2}\,;$$

– шківа 2, що здійснює обертальний рух

$$T_2=\frac{I_{C_2}\omega_2^2}{2}=\frac{m_2i_{C_2}^2\dot x^2}{2r_2^2}\,,$$

де I_{C_2} – момент інерції шківа його подовжньої центральної осі $I_{C_2}=m_2i_{C_2}^2$; ω_2 – його кутова швидкість;

– шківа 3, що здійснює обертальний рух

$$T_3=\frac{I_{C_3}\omega_3^2}{2}=\frac{m_3i_{C_3}^2\dot x^2R_2^2}{2r_2^2R_3^2}\,,$$

де I_{C_3} – момент інерції шківа його подовжньої центральної осі $I_{C_3} = m_3 i_{C_3}^2$;
ω_3 – його кутова швидкість $\omega_3 = \frac{v_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\dot{x} R_2}{r_2 R_3}$;

– вантажу 4, що здійснює поступальний рух

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2} = \frac{m_4 \dot{x}^2 R_2^2 r_3^2}{2 r_2^2 R_3^2},$$

де v_4 – швидкість вантажу $v_4 = \omega_3 r_3 = \frac{v_1 R_2 r_3}{r_2 R_3} = \frac{\dot{x} R_2 r_3}{r_2 R_3}$.

Тепер підставимо всі отримані вирази для кінетичних енергій тіл 1-4 і початкові дані у формулу для повної кінетичної енергії системи

$$T = \frac{G_1 \dot{x}^2}{2g} + \frac{G_2 i_{C_2}^2 \dot{x}^2}{2g r_2^2} + \frac{G_3 i_{C_3}^2 \dot{x}^2 R_2^2}{2g r_2^2 R_3^2} + \frac{G_4 \dot{x}^2 R_2^2 r_3^2}{2g r_2^2 R_3^2} =$$

$$= \frac{3G\dot{x}^2}{2g} + \frac{2G \cdot 0,35^2 \dot{x}^2}{2g \cdot 0,3^2} + \frac{2G \cdot 0,15^2 \dot{x}^2 \cdot 0,4^2 \dot{x}^2}{2g \cdot 0,3^2 \cdot 0,2^2} + \frac{G\dot{x}^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,1^2 \dot{x}^2}{2g \cdot 0,3^2 \cdot 0,2^2} =$$

$$= \frac{G\dot{x}^2 \cdot 0,68}{2},$$

оскільки узагальнена координата *x* у формулу для кінетичної енергії не входить, знайдемо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}G \cdot 0,68}{2}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}G \cdot 0,68; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

Підставляючи набутих значень в рівняння Лагранжа 2-го роду

$$\ddot{x}G \cdot 0,68 = 2,06G,$$

далі визначимо лінійне прискорення вантажу 1

$$\ddot{x} = a_{1x} = \frac{2,06}{0,68} = 3,03 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо силу натягнення троса, рівну по величині реакції, в думках розрізає його і зобразивши всі сили, що діють на вантаж1, вважаючи вантаж як матеріальну точку(рис.3.13).

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної у векторній формі

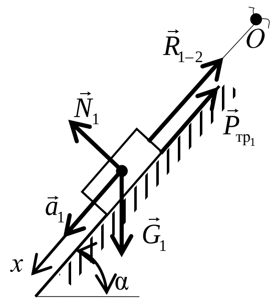


Рисунок.3.13.

$$m\vec{a} = \sum \vec{P}_k,$$

і в проекції на вісь *Ox*

$$m\ddot{x} = Px; \quad m\ddot{x} = G_1 \sin\alpha - P_{тр_1} - R_{1-2} \qquad \frac{G_1}{g} a_1 = G_1 \sin\alpha - G_1 f_1 \cos\alpha - R_{1-2},$$

звідки, підставляючи початкові дані, знайдемо

$$R_{1-2} = 3G \sin\alpha - 3Gf_1 \cos\alpha - \frac{3G}{g} a_1 = 3G\left(0,86 - 0,5 \cdot 0,1 - \frac{3,03}{9,8}\right) = 1,35G \text{ Н}.$$

3.4.3.Приклад вирішення завдання № 2

Дослідження руху механічної системи з однією ступеню свободи за допомогою рівняння Лагранжа 2-го роду

Механічна система зображена на рисунку складається з вантажів 1, 4 і барабанів 2, 3, зв'язаних між собою. До барабана 2 вагою $G_2 = 2G$ Н, радіусами $R_2 = 0,4$м $r_2 = 0,3$м з радіусом інерції $i_{C_2} = 0,35$м прикладено привідной момент $M_2 = G$ Н*м*, до барабана 3 (суцільного однорідного циліндра) вагою $G_3 = 3G$ Н, радіусами $r_3 = 0,1$ì прикладено момент опору $M_3 = 2G$ Н*м*. Вантаж 1 вагою $G_1 = 4G$ Н, вантаж 4 вагою $G_4 = G$ Н, , коефіцієнт тертя вантажу 4 об похилу плоскість. $f_4 = 0,2$, $\alpha = 30^0$.

Визначити кутове прискорення барабана 2 ε_2 і силу натягнення троса, що сполучає тіла 1-2 залежно від параметра G (рис.3.14). .

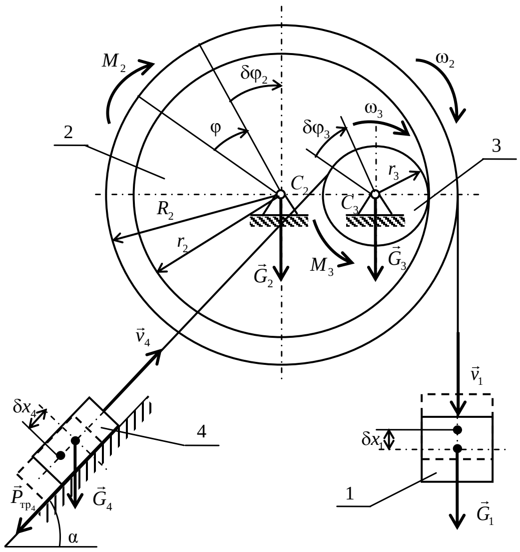


Рисунок.3.14.

Рішення

Для визначення кутового прискорення ε_2 барабана 2 виберемо як узагальнену координату його кутове переміщення φ. Тоді рівняння Лагранжа 2-го роду для координати φ і відповідно узагальненій швидкості $\dot{\varphi}$ запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}\,.$$

Механічна система зображена в зміщеному положенні з урахуванням позитивного напряму координати, показані всі активні сили, що діють на неї: сили тяжіння $\vec{G}_1, \vec{G}_4$ вантажів 1, 4 і $\vec{G}_2, \vec{G}_3$ барабанів 2, 3, а також сила тертя $\vec{P}_{тр_4}$ вантажу 4 об похилу плоскість. Якщо позитивний елементарний приріст узагальненої координати системи $\delta\varphi = \delta\varphi_2$, то величини $\delta\varphi_3, \delta x_1, \delta x_4$ будуть елементарними приростами відповідних координат.

Знайдемо суму робіт всіх перерахованих сил на цих елементарних приростах

$$\left(\sum \delta A\right)_\varphi = \delta A_{\vec{G}_1} + \delta A_{M_2} + \delta A_{M_3} + \delta A_{\vec{G}_4} + \delta A_{\vec{P}_{\text{тр}4}},$$

де

$$\delta A_{\vec{G}_1} = G_1 \cdot \delta x_1;$$

$$\delta A_{M_2} = M_2 \delta\varphi_2;$$

$$\delta A_{M_3} = -M_3 \delta\varphi_3;$$

$$\delta A_{\vec{G}_4} = -G_4 \cdot \delta h_4 = -G_4 \cdot \delta x_4 \sin\alpha;$$

$$\delta A_{\vec{P}_{\text{тр}4}} = -P_{\text{тр}_4} \cdot \delta x_4 \quad .$$

Оскільки в останній формулі сила тертя вантажу 4 $P_{\text{тр}_4} = G_4 \cos\alpha \cdot f_4$, то

$$\delta A_{\vec{P}_{\text{тр}4}} = -G_4 \cos\alpha \cdot f_4 \cdot \delta x_4 .$$

Оскільки $\delta h_{C_2} = 0, \delta h_{C_3} = 0$, то роботи сил $\vec{G}_2, \vec{G}_3$ також дорівнюють нулю, тобто

$$\delta A_{\vec{G}_2} = 0; \quad \delta A_{\vec{G}_3} = 0 .$$

Запишемо кінематичні співвідношення, враховуючи, що залежність між елементарними приростами координат така ж, як і між відповідними швидкостями

$$\delta x_1 = \delta\varphi \cdot R_2; \quad \delta x_4 = \delta\varphi \cdot r_2; \quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_3} = \frac{r_3}{r_2}, \quad \text{откуда} \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta\varphi_2 r_2}{r_3} .$$

Тепер, підставляючи початкові дані, порахуємо суму елементарних робіт всіх сил

$$\left(\sum \delta A\right)_\varphi = \delta\varphi\left(4G \cdot 0,4 + G - 2G \cdot \frac{0,3}{0,1} - G \cdot 0,3 \cdot 0,5 - G \cdot 0,86 \cdot 0,2\right) =$$

$$= \delta\varphi \cdot 0,275G,$$

звідки знайдемо узагальнену силу, відповідну вибраній узагальненій координаті ,

$$Q_\varphi = \frac{\left(\sum \delta A\right)_\varphi}{\delta\varphi} = 0,275G .$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичних енергій тіл 1-4, що входять в цю систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Для її обчислення потрібно виразити лінійні і кутові швидкості і тіл системи через узагальнену швидкість $\dot{\varphi}$, а потім визначити всі складові:

– вантажу 1, що здійснює поступальний рух

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{G_1\dot{\varphi}^2 R_2^2}{g2}, \quad \text{так как} \quad v_1^2 = \dot{\varphi}^2 \cdot R_2^2;$$

– барабана 2, що здійснює обертальний рух

$$T_2 = \frac{I_{C_2}\omega_2^2}{2} = \frac{G_2 i_{C_2}^2 \dot{\varphi}^2}{g2},$$

де I_{C_2} – момент інерції барабана його подовжньої центральної осі $I_{C_2} = m_2 i_{C_2}^2 = \frac{G_2}{g} i_{C_2}^2$; ω_2 – його кутова швидкість $\omega_2 = \dot{\varphi}$;

– барабана 3, що здійснює обертальний рух

$$T_3 = \frac{I_{C_3}\omega_3^2}{2} = \frac{G_3 \cdot r_3^2 \cdot r_2^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g2 \cdot 2r_3^2},$$

де I_{C_3} – момент інерції барабана (суцільного однорідного циліндра) його подовжньої центральної осі $I_{C_3} = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{G_3 r_3^2}{g2}$;

ω_3 – його кутова швидкість $\omega_3 = \frac{\dot{\varphi} r_2}{r_3}$;

– вантажу 4, що здійснює поступальний рух

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2} = \frac{G_4 \dot{\varphi}^2 r_3^2}{g2},$$

де v_4 – швидкість вантажу $v_4 = \dot{\varphi} r_3$.

Тепер підставимо всі отримані вирази для кінетичних енергій тіл 1-4 і початкові дані у формулу для повної кінетичної енергії системи

$$T = \frac{G_1\dot{\varphi}^2 R_2^2}{g \cdot 2} + \frac{G_2 i_{C_2}^2 \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} + \frac{G_3 r_2^2 \dot{\varphi}^2}{g \cdot 4} + \frac{G_4 \dot{\varphi}^2 r_3^2}{g \cdot 2} =$$

$$= \frac{4G \cdot 0,4^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} + \frac{2G \cdot 0,35^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} + \frac{3G \cdot 0,3^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 4} + \frac{G \cdot 0,1^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} = \frac{G \cdot 0,06 \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$$

оскільки узагальнена координата φ у вираз для кінетичної енергії не входить, знайдемо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2\dot{\varphi} G \cdot 0,06}{2}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi} G \cdot 0,06; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

Далі визначимо кутове прискорення барабана 2, підставляючи набутих значень в рівняння Лагранжа 2-го роду

$$\ddot{\varphi} G \cdot 0,06 = 0,275G,$$

звідки

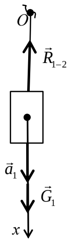
$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_2 = \frac{4,275}{0,06} = 4,58 \, \text{рад/с}^2 .$$

Знайдемо силу натягнення троса, рівну по величині реакції $R_{1\text{-}2}$, в думках розрізав його і зобразивши всі сили, що діють на вантаж 1, вважаючи вантаж за матеріальну (рис.3.15).

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної у векторній формі

$$m_1 \vec{a}_1 = \sum \vec{P}_k,$$

і в проекції на вісь *Ox*



$$m_1\ddot{x} = G_1 - R_{1-2}; \quad m_1 = \frac{G_1}{g}; \quad \ddot{x} = a_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2 .$$

$$R_{1-2} = G_1 - \frac{G_1\varepsilon_2 R_2}{g} = 4 \cdot G - \frac{4 \cdot G \cdot 4,58 \cdot 0,4}{9,8} =$$

$$= 4 \cdot G \cdot (1 - 0,187) = 3,252 \cdot G \text{ Н.}$$

Рисунок.3.15

3.5. Аналітичне моделювання динаміки електромеханічного приводу на базі рівнянь Лагранжу 2-го роду

Електромеханічний привод під дією змінного у часі моменту – М, який передається від лектродвигуна на шків – 1, приводить тіло – 3 з масою m_3 до поступального руху вздовж нахиленій під кутом β до горизонту шорсткій поверхні з коефіцієнтом тертя між тілом – 3 і поверхнею f, та до плоско-паралельного руху колесо – 4 з масою m_4, радіусом ободу R_4 і ступені r_4, що котиться без ковзання вздовж нерухомій гладкій поверхні, яку нахилено під кутом α до горизонту(рис.3.16).

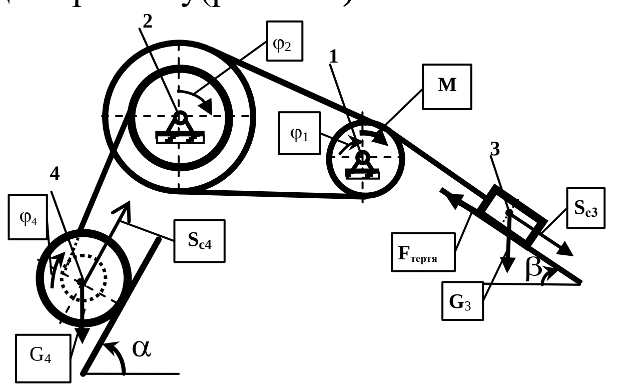


Рисунок 3.16

Для забезпечення переміщень тілу і колесу у приводі застосовано пасову передачу з шківом – 1, масою m_1 і радіусом R_1 та двоступеневого шківу – 2, радіусами R_2 та r_2 із загальною масою m_2 і радіусом інерції ρ, вісі яких є нерухомими. Пасова передача приводить до обертання двоступеневий шків – 2 з намотаним на його першу ступень та колесо тросом, що дозволяє здійснювати рух колесу – 4, та шків – 1, що жорстко зчеплений з валом електродвигуна, та на який намотано трос, на кінці якого прикріплено тіло – 3.

На підставі розв’язування диференціальних рівнянь Лагранжу 2-го роду визначте закони руху тіл електромеханічного приводу – 1, 2, 3, 4 та встановите кінематичні характеристики руху тіл приводу: швидкостей, пришвидшень й переміщення закономірності за час, коли при підйомі колесо - 4 пройде шлях S_{4k}, а також зміни у часі мір механічного руху і дії сил: кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил. При обчисленнях прийміть, що на початку механічна система знаходилась в покої, а рух тіл системи здійснюється під дією їхньої ваги і сили тертя, а також змінного у часі моменту – $M = kt^n$, кН$м$, який передається від електродвигуна на шків – 1. Інерційні дані тіл системи дорівнюють: m_1=2; m_2=20; m_3=30; m_4=5 (*кг*); геометричні параметри шківів та колеса: R_1=0.15; R_2=0.3; r_2=0.2; ρ_{2z} =0.25; R_4 =0.3, r_4 = 0.15; ρ_{4z} =0.25 (*м*); кути нахилу поверхонь: $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$ та коефіцієнт тертя між тілом – 3 і поверхнею: $f = 0,2$.

Для вирішення завдань на підставі диференціальних рівнянь руху тіл механічної системи спочатку із врахуванням в'язів для кожного з тіл

$$S_3 = \varphi_1 R_1$$

$$S_4 = \varphi_4 R_4\,;\ \varphi_4 = \varphi_2 r_2 /(2R_4)\,;\ \varphi_2 = \varphi_1 R_1 / R_2\,;$$

та діючих на ці тіла зовнішніх сил, складемо рівняння динаміки поступального руху тіла – 3 під дією ваги та сил тертя, обертальних рухів шківу – 1, під дією прикладеного до нього моменту, та шківу – 2 і плоско-паралельного руху колеса – 4 під дією ваги:

$$m_3\ddot{S}_3 = m_3 g \sin\beta - f m_3 g \cos\beta \quad m_4\ddot{S}_4 = -m_4 g \sin\alpha \quad I_4\ddot{\varphi}_4 = 0$$

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = M(t) \quad I_2\ddot{\varphi}_2 = 0$$

$$I_4 = m_4\rho_{4z}^2,\ I_1 = m_1 R_1^2/2,\ I_2 = m_2\rho_{2z}^2$$

Розв'язування цій системи рівнянь зводиться до інтегрування з урахуванням умови, що на початку механічна система знаходилась в покої.

Для вирішення завдань на базі рівнянь Лагранжу 2-го роду, спочатку, для заданої матеріальної системи визначають кількість ступенів вільності. З цією метою, для заданої системи оберемо наступну систему узагальнених координат: S_{c3} – переміщення центру маси тіла - 3 вздовж шорсткій поверхні; φ_1, φ_2 – кути обертання шківів – 1 та - 2; S_{C4}, φ_4 – переміщення центру маси та кут обертання колеса – 4.

Випишемо співвідношення між цими координатами, які є наслідком накладених на тіла механічної системи в'язів:

$$S_{c3} = \varphi_1 R_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 R_1 / R_2$$

$$\varphi_4 = \varphi_2 r_2 /(R_4 + r_4)$$

$$S_{c4} = \varphi_4 R_4 .$$

Ці чотири геометричні рівняння мають одну невідому узагальнену координату, наприклад, якщо прийняти за незалежну координату

$$q = S_{c3}$$

то усі інші узагальнені координати можна виразити через неї так:

$$\varphi_1 = q/R_1 \quad \varphi_2 = q/R_2 \quad \varphi_4 = q r_2 /((R_4 + r_4)R_2) \quad S_{C4} = q r_2 R_4 /((R_4 + r_4)R_2)$$

Звідси встановлюють, що механічна система має голономні і стаціонарні в'язі, та одну ступень вільності: s=1.

Далі визначають кінетичну енергію системи як функцію узагальненої координати і узагальненої швидкості: $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$,

де $T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2R_1^2}J_1\dot{q}^2$, $T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2R_1R_2}J_2\dot{q}^2$ – кінетичні енергії обертального руху шківів – 1 та 2; $T_3 = \frac{1}{2}m_3 v_3^2 = \frac{1}{2}m_3\dot{q}^2$, $T_4 = \frac{1}{2}m_4 v_4^2 + \frac{1}{2}J_{C4}\omega_4^2 = \frac{1}{2}[(m_4 + J_{C4}/R_4^2)(r_2 R_4 /((R_4 + r_4)R_2)^2)]\dot{q}^2$ – кінетичні енергії поступального руху тіла – 3 та плоско-паралельного руху колеса – 4.

Остаточно, кінетична енергія електроприводу визначиться так:

$$T = \frac{1}{2} M_q \dot{q}^2$$

$$M_q = J_1 / R_1^2 + J_2 / R_2^2 + m_3 + (m_4 + J_{C4} / R_4^2)(r_2 R_4 /((R_4 + r_4) R_2)^2)$$

Далі визначають узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам. Елементарна робота потенціальних сил на узагальнених переміщеннях знаходиться так:

$$\partial A = M(t) \cdot \partial\varphi_1 + (m_3 g \sin\beta - f m_3 g \cos\beta) \cdot \partial S_{c3} - m_4 g \sin\alpha \cdot \partial S_{c4} =$$

$$= [M(t) / R_1 + m_3 g \sin\beta - f m_3 g \cos\beta - m_4 g \sin\alpha \cdot r_2 R_4 /((R_4 + r_4) R_2)] \cdot \partial q \,.$$

Звідси отримуємо:

$$\partial A = Q \partial q, \; Q = M(t) / R_1 + F, \; F = m_3 g \sin\beta - f m_3 g \cos\beta - m_4 g \sin\alpha \cdot r_2 R_4 /((R_4 + r_4) R_2) \; q(0) = \dot{q}(0) = 0$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду для узагальненої координати

$$\cdot\, M_q \ddot{q} = Q$$

Після його інтегрування та визначення сталих інтегрування за допомогою початкових умов отримуємо закон руху системи:

$$\dot{q} = (F / M_q) t + 1/(M_q R_1) \int M(t) dt \qquad q = (F /(2 M_q)) t^2 + 1/(M_q R_1) \int [\int M(t) dt] dt$$

У випадку $M(t)=kt^n$: $\int M(t) dt = k /(n+1) t^{n+1}$, $\int [\int M(t) dt] dt = k /(n+1) t^{n+2} /(n+2)$

При k = 3, n = 2, отримуємо:

$$q = (F /(2 M_q)) t^2 + 1/(4 M_q R_1) t^4 \; \dot{q} = (F /(M_q)) t + 1/(M_q R_1) t^3 , \; \ddot{q} = F /(M_q) + 3/(M_q R_1) t^2$$

закони руху тіл:

$$\varphi_1 = q / R_1 \;\; \varphi_2 = q / R_2 \cdot \;\; \varphi_4 = q r_2 /((R_4 + r_4) R_2) \quad S_{C4} = q r_2 R_4 /((R_4 + r_4) R_2)$$

міри механічного руху і дії сил: кінетична енергія - $T = 1/2 M_q \dot{q}^2$, робота та потужність сил – $A = Qq$, $N = Q\dot{q}$;

- кінематичні характеристики руху тіл: швидкості –

$$\omega_1 = \dot{q} / R_1 \quad \omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2 \quad v_{c4} = \omega_4 R_4 \quad \omega_4 = \omega_2 r_2 R_4 /((R_4 + r_4) R_4)$$

й пришвидшення –

$$a_{c3} = \ddot{q} \;\; \varepsilon_1 = \ddot{q} / R_1 \;\; \varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2 \;\; a_{c4} = \varepsilon_4 R_4 \;\; \varepsilon_4 = \varepsilon_2 r_2 R_4 /((R_4 + r_4) R_4)$$

3.6. Комп’ютерне моделювання динаміки електромеханічного приводу на базі рівнянь Лагранжу 2-го роду

Досліджуються закони руху тіл механізму електромеханічного приводу, що під дією змінного у часі моменту на валу електродвигуна приводить до руху різні тіла електромеханічного приводу; закономірності зміни у часі мір механічного руху і дії сил: кількості руху, кінетичного моменту, кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил, а також кінематичних характеристик руху тіл механізму: швидкостей, пришвидшень й переміщення з початкового їхнього положення, на базі розв’язування диференціальних рівнянь Лагранжу 2-го роду, які в інваріантній формі є наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналітичної механіки.

Завдання на самостійну роботу: студентам пропонується самостійно підготувати свій файл для виконання завдання попередньо виданого викладачем. Для взірця у табл. 3.1 наведено вихідний файл з інструкціями та коментарем.

Інструкції та розрахункові залежності	Коментарі
РАБОТА:=№3 Динаміка електромеханічного приводу; **ВЫПОЛНИЛ:= ст. Сидоров С.С., гр.ЭМС-18;** **J.S3=m3; J.S4=m4; J.F4=I4; J.F1=I1; J.F2=I2;** **P.S3=P3;P3=m3*g*sin(betta)-f*m3*g*cos(betta);** **P.S4=P4; P4=-m4*g*sin(alfa); P.F1=M; M=k*t^n;k=3; n=2;F1=S3/R1;F2=F1*R1/R2;** **F4=F2*r2*R4/((R4+r4)*R4); S4=F4*R4;Xc3=S3; Xc4=S4; Vc3=Xc3't; Vc4=Xc4't; Ac3=Xc3't't; Ac4=Xc4't't; om1=F1't; om2=F2't; om4=F4't; eps1=F1't't; eps2=F2't't;eps4=F4't't;** **T=I1*om1^2/2+I2*om2^2/2+m3*Vc3^2/2+m4*Vc4^2/2 +I4*om4^2/2; A=M*F1+P3*S3+P4*S4; N=M*om1+P3*Vc3+P4*Vc4;** **T'=I1*eps1*om1+I2*eps2*om2+m3*Ac3*Vc3 +m4*Ac4*Vc4+I4*eps4*om4; E=T-A; E'=T'-N;**	# **Лабораторна робота.** Динаміка електромеханічного приводу # #Рівняння динаміки руху тіла – 3 під дією ваги та сил тертя, обертальних рухів шківу –1, під дією моменту, та шківу – 2 і руху колеса – 4 під дією ваги # #закони руху тіл; кінематичні характеристики руху тіл: швидкості й пришвидшення; # #міри механічного руху і дії сил: кінетична та повна енергії, робота та потужність сил #
# Рівняння Лагранжа # **J.q = Mm; P.q = Q; Mm=I1/R1^2+I2/R2^2+ m3+ (m4+I4/R4^2)*(r2*R4/((R4+r4)*R2))^2;** **Q=M/R1+m3*g*sin(betta)-f*m3*g*cos(betta)- m4*g*sin(alfa)*r2*R4/((R4+r4)*R2);**	#Рівняння Лагранжа з приведеною масою та узагальненою силою #
Sc3=q; fi1=q/R1; fi2=q/R2; fi4=q*r2/((R4+r4)*R2); **Sc4 = q*r2*R4/((R4+r4)*R2);** **vc3=Sc3't; vc4=Sc4't; ac3=Sc3't't; ac4=Sc4't't;** **omega1=fi1't; omega2=fi2't; omega4=fi4't;** **epsil1=fi1't't; epsil2=fi2't't;epsil4=fi4't't;** **Tq=Mm*q't^2/2; Aq=Q*q; Nq=Q*q't;** **Tq'=Mm*ac3*vc3; Eq=Tq-Aq;**	#Закони руху тіл; кінематичні характеристики руху тіл: швидкості й пришвидшення; міри механічного руху і дії сил: кінетична та повна енергії,робота та потужність сил #
m1=2*m; m2=20*m; m3=30*m; m4=5*m; **R1=0.15*r; R2=0.3*r; r2=0.2*r; RO2z=0.25*r;** **R4=0.3*r; RO4z=0.15*r;r4=0.15*r;** **r=1; m=1; alfa=pi/4; betta=pi/3; f=0.2;** **I1=m1*R1^2/2; I2=m2*RO2z^2;I4=m4*RO4z^2;**	#вихідні дані, мас-геометричні характеристики тіл системи, Моменти інерції мас тіл системи #
Начальные условия := t(0),S3(0),S3't(0),q(0),q't(0); **Конечные условия := t(1),S4(S4k);**	# Інструкції для визначення початкових умов та часу руху системи , коли при підйомі колесо - 4 пройде шлях S_{4k} : S4k=0.25;#
ПОКАЗАТЬ:=M,P3,P4,Q; **СРАВНИТЬ:= закон_руху тіла_3 (S3,Sc3),** **закон_руху тіла_4 (S4,Sc4,F4,fi4),** **закони руху тіл_1_2 (F1,fi1,F2,fi2),** **швидкості ЦВ тіл_3_4 (Vc3,vc3,Vc4,vc4),** **кутові швидкості тіл_1_2 (om1,omega1,om2,omega2),** **кутові пришвидшення тіл_1_2 (eps1,epsil1,eps2,epsil2),** **кутові швидкість і пришвидшення тіла_4 (om4,omega4,eps4,epsil4),** **виконання енергетичних теорем руху (E,T,A,Tq,Aq),** **виконання теорем потужності руху (E',T',N,Tq',Nq);** **РАСЧЕТ := уравнения движения;** **КОНЕЦ;**	# Інструкції для показу та порівняння результатів: закони руху тіл;кінематичні характеристики руху тіл: швидкості й пришвидшення; міри механічного руху і дії сил: кінетична та повна енергії, робота та потужність сил, що отримано на базі інтегрування диференціальних рівнянь руху тіл механічної системи та на базі інтегрування диференціального рівняння Лагранжу 2-го роду **#**

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М. А. Теоретична механіка : підруч. – К. : Техніка, 2002. – 510 с.

2. Короткий довідник з теоретичної механіки : навч. посіб. / Смерека І. П., Барвінський А. Ф., Білоус Б. Д. та ін. – Львів «Інтелект-Захід, 2001. – 240 с.

3. Андреев Ю. М., Дружинин Е. И., Ларин А. А. Практикум по теоретической и аналитической механике с применением ПЭВМ навч. посіб. – Харьков : НТУ „ХПИ”, 2004. – 100 с.

4. Лавинский Д. В., Морачковский О. К. Информационные технологии в аналитической механике : навч. посіб. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2007. – 183 с.

5. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Общий курс теоретической механики / Учебное пособие.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2005.– 112 с.

6. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Теоретическая механика. Статика / Учебно-методическое пособие.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2006.– 64 с.

7. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Теоретическая механика. Кинематика / Учебно-методическое пособие.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2007.– 72 с.

8. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Теоретическая механика. Динаміка / Учебно-методическое пособие.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2008.– 88 с.

Навчальне видання

В.М. Адашевський, О.К. Морачковський

КОМП'ЮТЕРНИЙ ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Навчально-методичний посібник