МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

**В. Д. Дмитрієнко, О. Ю. Заковоротний,**
**С.Ю. Леонов**

# ОСНОВИ НЕЙРОКОМП'ЮТИНГУ

**Лабораторний практикум**
**для студентів денної та заочної форм навчання за напрямком**
**«Комп'ютерна інженерія» та**
**«Комп'ютерні науки»**

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету НТУ "ХПІ",
протокол № 2 від 27.06.2024

Харків НТМТ 2024

**УДК 004.383.8.032.26**
**ББК 32.973-02**
**Д 53**

Рецензенти:

***Кривуля Г.Ф.,*** д-р техн. наук, проф., Харківський національний університет радіоелектроніки;

***Трубчанінова К.А.,*** доктор технічних наук, професор, професор кафедри транспортного зв'язку, Український державний університет залізничного транспорту;

Д 53 **Дмитрієнко В. Д.** Основи нейрокомп'ютингу / В. Д. Дмитрієнко, О. Ю. Заковоротний, С. Ю. Леонов : лабораторний практикум. – Х. : НТМТ, 2024.– 128 с.

ISBN 978-617-578-095-0

У лабораторному практикумі наведено теоретичні відомості про методи побудови та функціонування основних нейронних мереж: Хебба, Хеммінга, перцептрона, Хопфілда, двонаправленої асоціативної пам'яті, нейронних мереж адаптивної резонансної теорії та ін. Теоретичний матеріал підкріплено великою кількістю прикладів з використання описаних нейронних мереж для розпізнавання різних зображень.

Призначено для студентів денної та заочної форм навчання за напрямком «Комп'ютерна інженерія» та «Комп'ютерні науки».

Іл. 31. Табл. 11. Бібліогр. 2 назв.

**УДК 004.383.8.032.26**
**ББК 32.973-02**

© В. Д. Дмитрієнко,
О. Ю. Заковоротний, С. Ю. Леонов, 2024

**ISBN 978-617-578-095-0**

**ЗМІСТ**

ВСТУП ..... 5
1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1 "Нейронна мережа Хебба" ..... 7
1.1. Мета лабораторної роботи ..... 7
1.2. Короткі відомості з теорії ..... 7
1.2.1. Формальні нейрони штучних нейронних мереж ..... 7
1.2.2. Розв’язання задач розпізнавання на основі окремих нейронів. Правило Хебба ..... 11
1.2.3. Нейронна мережа Хебба ..... 18
1.3. Індивідуальні завдання ..... 19
2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2 "Елементарний перцептрон Розенблатта" ..... 20
2.1. Мета лабораторної роботи ..... 20
2.2. Короткі відомості з теорії ..... 20
2.2.1. Перцептрони – клас моделей мозку ..... 20
2.2.2. Навчання перцептронів $\alpha$- та $\gamma$-системи підкріплень ..... 24
2.2.3. Теореми Розенблатта про елементарний перцептрон ..... 36
2.3. Індивідуальні завдання ..... 41
3. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 "Нейронна мережа Хемминга" ..... 42
3.1. Мета лабораторної роботи ..... 42
3.2. Короткі відомості з теорії ..... 42
3.2.1. Мережа Хеммінга ..... 42
3.2.2. Приклад навчання та розпізнавання зображень мережею Хеммінга ..... 46
3.3. Індивідуальні завдання ..... 52
4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 "Дискретна нейронна мережа Хопфілда" ..... 53
4.1. Мета лабораторної роботи ..... 53
4.2. Короткі відомості з теорії ..... 53
4.2.1. Нейронні мережі Хопфілда ..... 53
4.2.2. Дискретна мережа Хопфілда ..... 60
4.3. Індивідуальні завдання ..... 68
5. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5 "Нейронна мережа Кохонена" ..... 69
5.1. Мета лабораторної роботи ..... 69
5.2. Короткі відомості з теорії ..... 69
5.2.1. Нейронна мережа Кохонена ..... 69

5.2.2. Алгоритм навчання мережі Кохонена ..... 72
5.3. Індивідуальні завдання ..... 77
6. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6 "Двонаправлена асоціативна пам'ять" ..... 79
6.1. Мета лабораторної роботи ..... 79
6.2. Короткі відомості з теорії ..... 79
6.2.1. Двонаправлена асоціативна пам'ять на двійкових елементах ..... 79
6.2.2. Алгоритм функціонування ДАП ..... 83
6.2.3. Оцінка ємності двонаправленої асоціативної пам'яті ..... 88
6.3. Індивідуальні завдання ..... 92
7. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7 "Дискретна нейронна мережа адаптивної резонансної теорії АРТ-1" ..... 93
7.1. Мета лабораторної роботи ..... 93
7.2. Короткі відомості з теорії ..... 93
7.2.1. Введення в теорію нейронних мереж адаптивного резонансу ..... 93
7.2.2. Базова архітектура мереж АРТ ..... 94
7.2.3. Архітектура нейронних мереж АРТ-1 ..... 97
7.2.4. Алгоритм навчання мереж АРТ-1 ..... 99
7.2.5. Алгоритм навчання нейромереж АРТ-1 ..... 102
7.3. Приклади застосування швидкого алгоритму навчання мережі АРТ-1 ..... 105
7.4. Індивідуальні завдання ..... 116
8. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8 "ДАП на основі дискретних нейронних мереж АРТ" ..... 117
8.1. Мета лабораторної роботи ..... 117
8.2. Короткі відомості з теорії ..... 117
8.2.1. Структура штучної нейронної мережі ДАП ..... 117
8.2.2. Алгоритм навчання двонаправленої асоціативної пам'яті ..... 119
8.2.3. Алгоритм роботи двонаправленої асоціативної пам'яті у режимі визначення асоціативних зображень ..... 124
8.3. Індивідуальні завдання ..... 125
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ..... 126

# ВСТУП

Початком історії нейронних мереж можна вважати вихід у світ в американському "Бюлетені математичної біофізики" у 1943 р. роботи У. С. Мак-Каллока та У. Х. Піттса "Логічне числення ідей, іманентних нервовій активності". У цій роботі американські вчені вперше в історії науки чітко запропонували загальні підходи і конкретні математичні моделі біологічних нейронних мереж та їх компонент – нейронів, що стали основоположними в теорії штучних нейронних мереж. Як моделі нейронів вони використовували порогові елементи з двома стійкими станами, які отримали згодом назву "нейронів Маккалока – Піттса". Проте завдання розробки моделей й систем на основі порогових елементів виявились настільки незвичайними та складними, що тільки через півтора десятка років (у 1956 р.) з'явилася перша працездатна штучна нейронна мережа (ШНМ) – перцептрон (персептрон) Розенблатта. Перцептрон викликав величезний інтерес, оскільки продемонстрував можливість створення технічних систем розпізнавання образів на основі моделей мозку людини й вищіх тварин. Перші успішні експерименти з перцептроном сприяли залученню до досліджень в області нейронних мереж великої кількості дослідників й появі надзвичайно оптимістичних прогнозів щодо створення штучних інтелектуальних систем, що перевершують людину. Однак подальші дослідження перцептронів Розенблатта показали, що їх використання у системах розпізнавання пов'язане з рядом труднощів. Глибокий теоретичний аналіз цих труднощів, виконаний у книзі Мінського й Пейперта "Персептрони" (1969 р.), показав, що вони носять принциповий характер. Суворість теоретичних результатів, отриманих для найпростіших перцептронів, авторитет Мінського та його негативний прогноз щодо потенційно можливого прогресу для багатошарових перцептронів викликали розчарування багатьох дослідників та сприяли спаду інтересу до нейронних мереж майже до нуля, який тривав понад десять років.

Відродження інтенсивних досліджень в області ШНМ почалося лише на початку 80-х років, коли, з одного боку, крім перцептронів вже з'явилися й інші види нейронних мереж та були розроблені принципово

нові ідеї їхнього навчання, а з іншого боку, у зв'язку з появою нейрочипів, в результаті чого ШНМ несподівано швидко зі стадії попередніх лабораторних досліджень перейшли в сферу уваги фахівців, які вирішують практичні завдання в галузі науки, техніки та економіки. Виявилося, що ці завдання можна за допомогою нейронних мереж успішно вирішувати не тільки на спеціалізованих комп'ютерах (нейрокомп'ютерах), але й на звичайних ЕОМ. І це стало початком нового напрямку – нейрокомп’ютингу, який передбачає розв’язання задач із різних областей з використанням нейронних мереж, що моделюються на звичайних послідовних комп'ютерах. В даний час цей напрям інтенсивно розвивається й проникає в усі сфери людської діяльності. Медики використовують нейронні мережі для діагностики та прогнозування лікування, митники – для виявлення наркотиків й пластикових бомб у багажі пасажирів, метеорологи – для прогнозу погоди, фахівці в галузі програмного забезпечення – для боротьби з комп'ютерними вірусами, банкіри – для оцінки кредитних ризиків, курсів облігацій, акцій та валют, для прогнозів банкрутств, оптимізації портфелів цінних паперів, забезпечення безпеки транзакцій по пластикових картках, читання рукописних підписів на чеках та страхових полісах, промисловці – для контролю якості виробів й пакування, для керування роботами, прокатними станами, атомними станціями, військові – для виявлення, розпізнавання та супроводження цілей, ведення бойових дій, пілотування сильно пошкоджених літаків.

Застосовуються нейронні мережі й у автоматизованих системах керування, й у інформаційних системах для обробки мовної інформації, автоматичного перекладу, обробки текстів, розв’язання задач кодування та декодування інформації й т. д., в Інтернет для асоціативного пошуку інформації, для адресної реклами та маркетингу в електронній торгівлі, як електронні секретарі та автономні агенти користувача в мережі, наприклад, для асоціативного пошуку інформації на місці у віддалених базах даних або для постійної фільтрації інформації на сервері провайдера й т. д. У зв'язку з цим знайомство з основами нейрокомп’ютингу, тобто з основами теорії нейронних мереж та їх застосуванням для вирішення різноманітних завдань, є необхідним для будь-якого спеціаліста, пов'язаного з обчислювальною технікою, комп'ютерними та інформаційними технологіями.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

# НЕЙРОННА МЕРЕЖА ХЕББА

## 1.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи із найпростішими нейронними мережами, для навчання яких використовується алгоритм Хебба.

## 1.2. Короткі відомості з теорії

### *1.2.1. Формальні нейрони штучних нейронних мереж*

При моделюванні нейронних мереж в якості штучних нейронів зазвичай використовується простий процесорний елемент, зображений на рис. 1.1. На його входи надходить вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)$ вхідних сигналів, що є вихідними сигналами інших нейронів, а також одиничний сигнал зсуву.

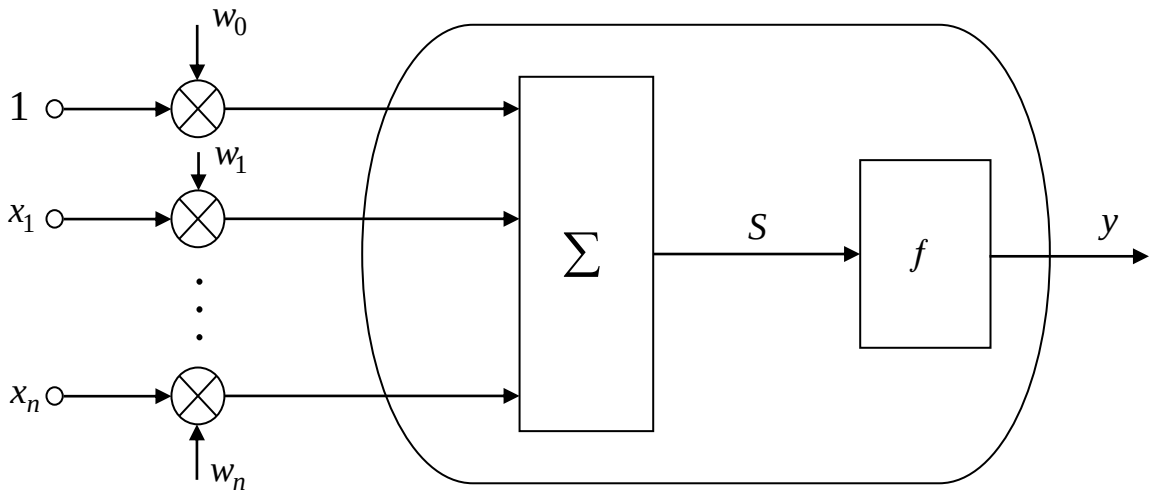



Рис. 1.1. Процесорний елемент, що використовується у звичайних нейронних мережах

Всі вхідні сигнали, включаючи й сигнал зсуву, помножуються на вагові коефіцієнти своїх зв'язків та підсумуються:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i \, w_i \; + w_0 , \tag{1.1}$$

де $S$ – сумарний вхідний сигнал; $w_i$ $(i = \overline{1,n})$ – вагові коефіцієнти зв'язків вхідних сигналів $x_1$, …, $x_n$; $w_0$ – ваговий коефіцієнт зв'язку сигналу зсуву.

Отриманий сигнал $S$ надходить на вхід блока, що реалізує функцію $f$ активації нейрона. Типовими функціями активації є бінарна :

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad S \le 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

або біполярна

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad S \le 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Багато авторів при описуванні моделі нейрона використовують не сигнал зсуву, а поріг $\theta$ нейрона, що приводить до еквівалентної моделі елемента. У цьому випадку вирази (1.2) та (1.3) набувають відповідно такого вигляду:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > \theta, \\ 0, & \text{якщо} \quad S \le \theta, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S > \theta, \\ -1, & \text{якщо} \quad S \le \theta, \end{cases} \tag{1.5}$$

де

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i \, . \tag{1.6}$$

Графічне зображення бінарної та біполярної функцій активації для цього випадку наведено на рис. 1.2, *a* та 1.2, *b*.

Із зіставлення виразів (1.1) – (1.3) та (1.4) – (1.6) виходить, що кожному значенню порогу $\theta$ нейрона може бути поставлений у відповідність ваговий коефіцієнт $w_0$ зв'язку сигналу зсуву й навпаки.

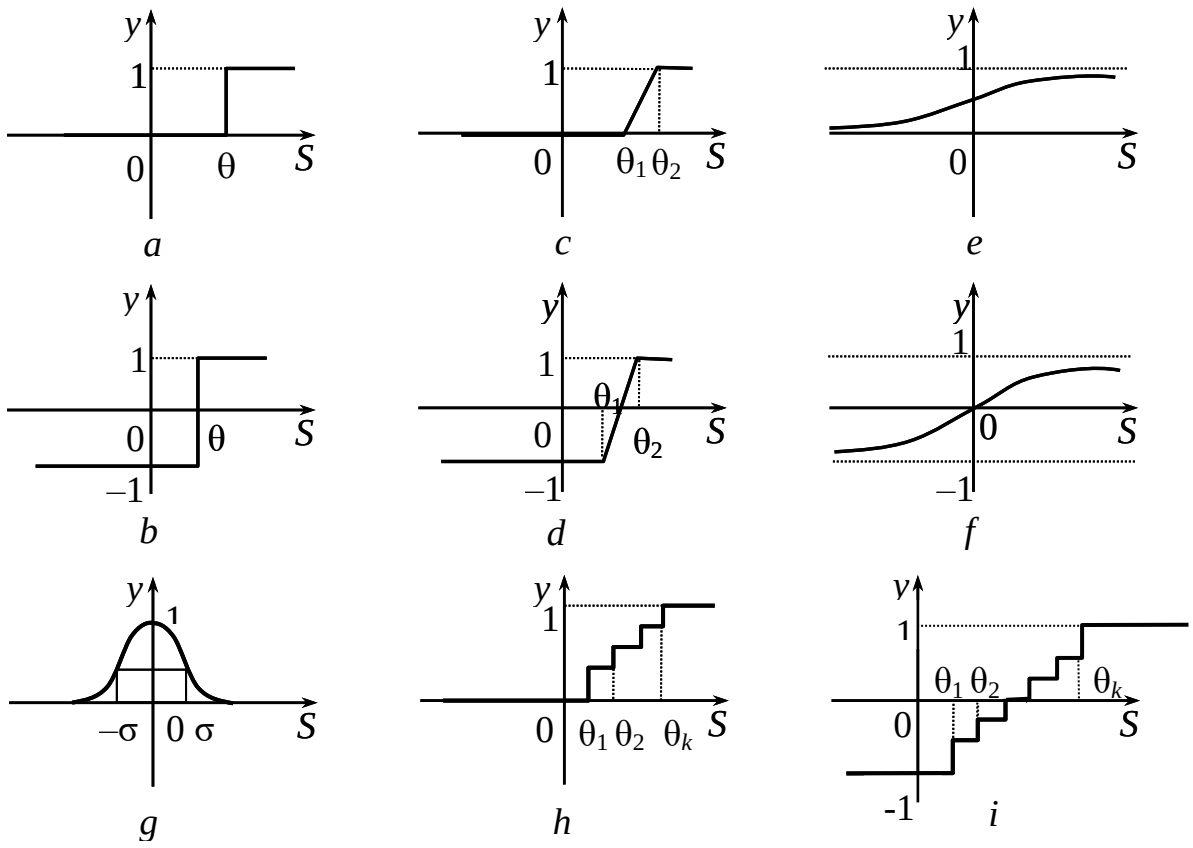



Рис. 1.2. Функції активації нейронів

Рідше використовуються лінійні бінарні або біполярні функції активації (рис. 1.2, *c* та 1.2, *d*):

$$y = \begin{cases} -a, & \text{при} \quad S < \theta_1, \\ k\,S + a_0, & \text{при} \quad \theta_1 \le S \le \theta_2, \\ 1, & \text{при} \quad S > \theta_2, \end{cases} \tag{1.7}$$

де $a$ дорівнює нулю для бінарних вихідних сигналів нейронів й $a$ дорівнює мінус одиниці для біполярних сигналів; $k$, $a_0$ – постійні коефіцієнти.

Крім наведених у теорії нейронних мереж, використовуються також наступні нелінійні функції активації:

бінарна сигмоїдальна або логічна сигмоїдальна (рис. 1.2, *e*):

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\tau S}}, \tag{1.8}$$

де $\tau$ – постійний коефіцієнт;

біполярна сигмоїдальна (рис. 1.2, *f*):

$$y = \frac{2}{1 + e^{-\tau S}} - 1; \tag{1.9}$$

радіально-симетрична (рис. 1.2, *g*):

$$y = e^{-\frac{S^2}{\tau^2}}; \tag{1.10}$$

*K*-значна бінарна (рис. 1.2, *h*):

$$y = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad S < \theta_1, \\ 1/(K-1), \quad \text{при} \ \theta_1 \le S < \theta_2, \\ 2/(K-1), \quad \text{при} \ \theta_2 \le S < \theta_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{K-2}{K-1}, \quad \text{при} \quad \theta_{k-1} \le S < \theta_k, \\ 1, \quad \text{при} \quad S \ge \theta_k; \end{cases} \tag{1.11}$$

*K*-значна біполярна (рис. 1.2, *i*):

$$y = \begin{cases} -1, \quad \text{при} \quad S < \theta_1, \\ -1 + 2/(K-1), \quad \text{при} \quad \theta_1 \le S < \theta_2, \\ -1 + 4/(K-1), \quad \text{при} \quad \theta_2 \le S < \theta_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -1 + \dfrac{2(K-2)}{K-1}, \quad \text{при} \quad \theta_{k-1} \le S < \theta_k, \\ 1, \quad \text{при} \quad S \ge \theta_k. \end{cases} \tag{1.12}$$

Наведені моделі штучних нейронів ігнорують багато відомих властивостей біологічних прототипів. Наприклад, вони не враховують тимчасові затримки нейронів, ефекти частотної модуляції, локального збудження та пов'язані з ними явища підпорогової часової та просторової сумації, коли клітина збуджується не імпульсами, що одночасно прийшли, а послідовностями збудливих сигналів, що надходять через короткі проміжки часу. Не враховуються також періоди абсолютної

рефрактерності, під час яких нервові клітини не можуть бути збуджені, тобто вони нібито мають нескінченно великій поріг збудження, що потім за декілька мілісекунд після проходження сигналу знижується до нормального рівня. Цей список відмінностей, який багато біологів вважають вирішальним, легко продовжити, однак штучні нейронні мережі все-таки виявляють ряд цікавих властивостей, характерних для біологічних прототипів.

### *1.2.2. Розв'язання задач розпізнавання на основі окремих нейронів. Правило Хебба*

Штучні нейронні мережі, призначені для розв'язання різноманітних конкретних задач, можуть містити від декількох нейронів до тисяч та навіть мільйонів елементів. Однак вже окремий нейрон (рис. 1.1) з біполярною або бінарною функцією активації може бути використаний для розв'язання простих задач розпізнавання та класифікації зображень. Вибір біполярного (1, –1) або бінарного (1, 0) подання сигналів у нейромережах здійснюється виходячи із розв'язуваної задачі, й у багатьох випадках він рівноцінний. Є спектр задач, у яких бінарне кодування сигналів більш зручне, однак узагалі біполярне подання інформації більш переважне.

Оскільки вихідний сигнал у двійкового нейрона (рис. 1.1) набуває тільки двох значень, то нейрон можна використовувати для розподілу поданих зображень на два класи.

Нехай є множина $M$ зображень, для якої відомий коректний розподіл на два класи $X^1 = \{X^{11}, X^{12}, ..., X^{1q}\}$, $X^2 = \{X^{21}, X^{22}, ..., X^{2p}\}$, $X^1 \cup X^2 = M$, $X^1 \cap X^2 = \varnothing$, і нехай першому класу $X^1$ відповідає вихідний сигнал $y = 1$, а класу $X^2$ – сигнал $y = -1$. Якщо, наприклад, подане деяке зображення $X^\alpha = (X_1^\alpha, ..., X_n^\alpha)$, $X^\alpha \in M$ і його зважена сума вхідних сигналів перевищує нульове значення

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha w_i + w_0 > 0,$$

то $y = 1$ і, отже, вхідне зображення $X^\alpha$ належить до класу $X^1$. Якщо $S \le 0$, то $y = -1$, й подане зображення належить до другого класу.

Можливе використання окремого нейрона й для виділення з множини класів $M = \{X^1 = \{X^{11}, ..., X^{1k}\}, ..., X^i = \{X^{i1}, ..., X^{iq}\}, ..., X^p =$

$= \{X^{p1}, \ldots, X^{pm}\}\}$ зображень єдиного класу $X^i$. У цьому випадку припускають, що один із двох можливих вихідних сигналів нейрона (наприклад, 1) відповідає класу $X^i$, а другий – всім іншим класам. Тому, якщо вхідне зображення $X^\alpha$ приводить до появи сигналу $y = 1$, то $X^\alpha \in X^i$, якщо $y = -1$ (або $y = 0$, якщо використовується бінарне кодування), то це означає, що пред'явлене зображення не належить до виділеного класу.

Система розпізнавання на основі єдиного нейрона ділить весь простір можливих рішень на дві області за допомогою гіперплощини

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n + w_0 = 0.$$

Для двовимірних вхідних векторів границею між двома класами зображень є пряма лінія. Вхідні вектори, які розташовані вище цієї прямої, належать до одного класу, а нижче – до іншого.

Для адаптації, настроювання або навчання ваг зв'язків нейрона можна використовувати кілька методів. Розглянемо один з них, що одержав назву "правило Хебба". Хебб, досліджуючи механізми функціонування центральної нервової системи, припустив, що навчання відбувається шляхом посилення зв'язків між нейронами, активність яких збігається за часом. Хоча в біологічних системах це припущення виконується далеко не завжди та не вичерпує всіх видів навчання, однак при навчанні одношарових нейромереж з біполярними сигналами воно досить ефективне.

Відповідно до правила Хебба, якщо пред'явленому біполярному зображенню $X = (x_1, \ldots, x_n)$ відповідає неправильний вихідний сигнал $y$, то ваги $w_i$ ($i = \overline{1,n}$) зв'язків нейрона адаптуються за формулою

$$w_i(t+1) = w_i(t) + x_i y, \quad i = \overline{0,n}, \tag{1.13}$$

де $w_i(t)$, $w_i(t+1)$ відповідно вага $i$-го зв'язку нейрона до й після адаптації; $x_i$ ($i = \overline{1,n}$) – компоненти вхідного зображення; $x_0 \equiv 1$ – сигнал зсуву; $y$ – вихідний сигнал нейрона.

У більш повній та строгій формі алгоритм настроювання ваг зв'язків нейрона з використанням правила Хебба має такий вигляд.

***Крок 1.*** Задається множина $M = \{(X^1, t^1), \ldots, (X^m, t^m)\}$, яка складається з пар (вхідне зображення $X^k = \left(x_1^k, ..., x_n^k\right)$, необхідний вихідний сигнал нейрона $t^k$, $k = \overline{1,m}$). Ініціюються ваги зв'язків нейрона:

$$w_i = 0, \quad i = \overline{0,n}.$$

***Крок 2.*** Для кожної пари $(X^k, t^k)$, $k = \overline{1,m}$, поки не досягнуті умови зупину, виконуються кроки 3 – 5.

***Крок 3.*** Ініціюється множина входів нейрона:

$$x_0 = 1, \; x_i = x_i^k, \quad i = \overline{1,n}.$$

***Крок 4.*** Ініціюється вихідний сигнал нейрона: $y = t^k$.

***Крок 5.*** Коректуються ваги зв'язків нейрона за правилом

$$w_i\,(new) = w_i\,(old) + x_i\,y, \quad i = \overline{0,n}\,.$$

***Крок 6.*** Перевірка умов зупину. Для кожного вхідного зображення $X^k$ розраховується відповідний до нього вихідний сигнал $y^k$:

$$y^k = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S^k > 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad S^k \le 0, \end{cases} \qquad k = \overline{1,m}\,,$$

де

$$S^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k w_i + w_0.$$

Якщо вектор $(y^1, \ldots, y^m)$ розрахованих вихідних сигналів дорівнює вектору $(t^1, \ldots, t^m)$ заданих сигналів нейрона, тобто кожному вхідному зображенню відповідає заданий вихідний сигнал, то обчислення припиняються (перехід до кроку 7). Якщо ж $(y^1, \ldots, y^m) \neq (t^1, \ldots, t^m)$, то здійснюється перехід до кроку 2 алгоритму.

***Крок 7.*** Зупин.

***Приклад 1.1.*** Нехай потрібно навчити біполярний нейрон розпізнавання зображень $X^1$ й $X^2$, наведених на рис. 1.3.

$X^1$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

$X^2$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Рис. 1.3. Вхідні зображення

При цьому необхідно, щоб зображенню $X^1$ відповідав вихідний сигнал нейрона "+1", а зображенню $X^2$ – сигнал "–1".

Застосування алгоритму Хебба дає такі результати.

***Крок 1.*** Задається множина

$$M = \{(X^1 = (1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1), 1),$$
$$(X^2 = (1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1), -1)\};$$

ініціюються ваги зв'язків нейрона: $w_i = 0,\ i = \overline{0, 9}.$

***Крок 2.*** Для кожної із двох пар $(X^1,\ 1)$, $(X^2,\ -1)$ виконуються кроки 3 – 5.

***Крок 3.*** Ініціюється множина входів нейрона для зображення першої пари: $x_0 = 1,\ x_i = x_i^1,\ i = \overline{0, 9}.$

***Крок 4.*** Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення першої пари: $y = t^1 = 1.$

***Крок 5.*** Корегуються ваги зв'язків нейрона за правилом Хебба $w_i = w_i + x_i^1 y \quad (i = \overline{0, n})$:

$$w_0 = w_0 + x_0 y = 0 + 1 \cdot 1 = 1;\ \ w_1 = w_1 + x_1^1 y = 0 + 1 \cdot 1 = 1;$$
$$w_1 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_9 = 1;\ \ w_2 = w_2 + x_2^1 y = 0 + (-1) \cdot 1 = -1;$$
$$w_2 = w_7 = w_8 = -1.$$

***Крок 3.*** Ініціюється множина входів нейрона для зображення $X^2$ другої пари: $x_0 = 1,\ x_i = x_i^2,\ i = \overline{0, 9}.$

***Крок 4.*** Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення другої пари ($X^2$, $t^2$):

$$y = t^2 = -1.$$

***Крок 5.*** Корегуються ваги зв'язків нейрона:

$$w_0 = w_0 + x_0 y = 1 + 1 \cdot (-1) = 0; \quad w_1 = w_1 + x_1^2 y = 1 + 1 \cdot (-1) = 0;$$
$$w_1 = w_3 = w_4 = w_6 = w_9 = 0; \quad w_2 = w_2 + x_2^2 y = -1 + 1 \cdot (-1) = -2;$$
$$w_2 = w_7 = -2; \quad w_5 = w_5 + x_5^2 y = 1 + (-1) \cdot (-1) = 2;$$
$$w_8 = w_8 + x_8^2 y = -1 + (-1) \cdot (-1) = 0.$$

***Крок 6.*** Перевіряються умови зупину. Розраховуються вхідні та вихідні сигнали нейрона при пред'явленні зображення $X^1$:

$$S^1 = \sum_{i=1}^{9} x_i^1 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) +$$
$$+ (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = 6,$$
$$y^1 = 1, \text{ тому що } S^1 > 0.$$

Розраховуються вхідний та вихідний сигнали нейрона при пред'явленні зображення $X^2$:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) +$$
$$+ (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = -6,$$
$$y^2 = -1, \text{ тому що } S^2 < 0.$$

Оскільки вектор ($y^1$, $y^2$) = (1, –1) дорівнює вектору ($t^1$, $t^2$), то обчислення припиняються, тому що мета досягнута – нейрон правильно розпізнає задані зображення.

***Крок 7.*** Зупин.

Основна ідея правила (1.13) – підсилювати зв'язки, які з'єднують нейрони з однаковою за часом активністю, та послабляти зв'язки, що з'єднують елементи із різною активністю. Ця ідея може бути використана й при настроюванні нейромереж із бінарними елементами. Правило Хебба (1.13) для одношарових бінарних мереж можна записати у такому вигляді:

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \Delta w_i, \tag{1.14}$$

де

$$\Delta w_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x_i y = 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x_i = 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad x_i \neq 0 \quad \text{и} \quad y = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

***Приклад 1.2.*** Нехай потрібно навчити бінарний нейрон розпізнавання зображень $X^1$ та $X^2$ з прикладу 1.1. При цьому зображенню $X^1$ нехай відповідає вихідний сигнал нейрона "+1", а зображенню $X^2$ – "0". Застосування правила Хебба в цьому випадку дає такі результати.

***Крок 1.*** Задається множина

$$M = \{(X^1 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1), 1), \\ (X^2 = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1), 0)\},$$

та ініціюються ваги зв'язків нейрона $w_i = 0,\ i = \overline{0, 9}$.

***Крок 2.*** Для пар $(X^1,1),\ (X^2, 0)$ виконуються кроки 3 – 5.

***Крок 3.*** Ініціюється множина входів нейрона елементами зображення $X^1$:

$$x_0 = 1, \quad x_i = x_i^1, \quad i = \overline{0,9}.$$

***Крок 4.*** Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення $X^1$:

$$y = t^1 = 1.$$

***Крок 5.*** Корегуються ваги зв'язків нейрона за допомогою співвідношень (1.14), (1.15):

$$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = 0 + 1 = 1; \quad w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 0 + 1 = 1;$$

$$w_1 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_9 = 1;\ \ w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 0 + 0 = 0;$$

$$w_2 = w_7 = w_8 = 0.$$

***Крок 3.*** Ініціюється множина входів нейрона елементами зображення $X^2$:

$$x_0 = 1,\ x_i = x_i^2,\ i = \overline{0, 9}.$$

***Крок 4.*** Ініціюється вихідний сигнал нейрона для зображення $X^2$:

$$y = t^2 = 0.$$

***Крок 5.*** Корегуються ваги зв'язків нейрона за допомогою співвідношень (1.14), (1.15):

$$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = 1 + (-1) = 0;\ \ w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 1 + (-1) = 0;$$

$$w_1 = w_3 = w_4 = w_6 = w_9 = 0;\ \ w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 0 + (-1) = -1;$$

$$w_5 = w_5 + \Delta w_5 = 1 + 0 = 1;\ \ w_7 = w_2 = -1;$$

$$w_8 = w_8 + \Delta w_8 = 0 + 0 = 0.$$

***Крок 6.*** Перевіряються умови зупину. Розраховуються вхідні та вихідні сигнали нейрона при поданні зображень $X^1, X^2$:

$$S^1 = \sum_{i=1}^{9} x_i^1 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) +$$

$$+ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = 1,$$

$$y^1 = 1, \text{ тому що } S^1 > 0.$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 w_i + w_0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) +$$

$$+ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -2;$$

$$y^2 = -1, \text{ тому що } S^2 < 0.$$

Оскільки вектор $(y^1, y^2) = (1, 0)$ дорівнює заданому вектору $(t^1, t^2) = (1, 0)$, то мета досягнута й обчислення припиняються.

***Крок 7.*** Зупин.

### *1.2.3. Нейронна мережа Хебба*

Використання групи з $m$ біполярних або бінарних нейронів $A_1$, ..., $A_m$ (рис. 1.4) дозволяє істотно розширити можливості нейронної мережі й розпізнавати до $2^m$ різних зображень. Однак застосування цієї мережі для розпізнавання $2^m$ (або близьких до $2^m$ чисел) різних зображень може призводити до нерозв'язних проблем адаптації ваг зв'язків нейромережі. Тому часто рекомендують використовувати дану архітектуру для розпізнавання тільки $m$ різних зображень, задаючи кожному з них одиничний вихід тільки на виході одного $A$-елемента (виходи інших при цьому повинні набувати значення "–1" для біполярних нейронів або "0" – для бінарних).

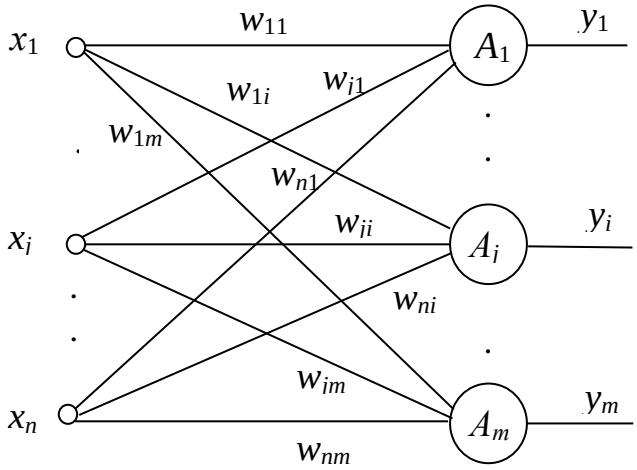



Рис 1.4. Нейронна мережа із $m$ елементів

Одношарова нейронна мережа із двійковими нейронами, наведена на рис. 1.4, може бути навчена за допомогою алгоритму на основі правила Хебба. У цьому випадку вона називається мережею Хебба. Використання інших алгоритмів навчання цієї ж мережі призводить й до зміни назви нейронної мережі. Використання в назві мереж їхніх алгоритмів навчання характерне для теорії нейронних мереж. Для біполярного подання сигналів можливе навчання нейромережі за допомогою наступного алгоритму.

***Крок 1.*** Задається множина $M = \{(X^1, t^1), \ldots, (X^m, t^m)\}$, що складається із пар (вхідне зображення $X^k = \left(x_1^k, ..., x_n^k\right)$, а також необхідний вихідний сигнал нейрона $t^k$, $k = \overline{1, m}$). Ініціюються ваги зв'язків нейрона:

$$w_{ji} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

***Крок 2.*** Кожна пара ($X^k$, $t^k$) перевіряється на правильність реакції нейронної мережі на вхідне зображення. Якщо отриманий вихідний вектор мережі ($y_1^k$, …, $y_m^k$), відрізняється від заданого $t^1 = (t_1^k, \ldots, t_m^k)$, то виконуються кроки 3 – 5.

***Крок 3.*** Ініціюється множина входів нейронів: $x_0 = 1$, $x_j = x_{jk}$, $j = \overline{1, n}$.

***Крок 4.*** Ініціюються вихідні сигнали нейронів: $y_i = t_i^k$, $i = \overline{0, m}$.

***Крок 5.*** Корегуються ваги зв'язків нейронів за правилом

$$w_{ji}(new) = w_{ji}(old) + x_j y_i, \quad j = \overline{0, n}, \quad i = \overline{0, m}.$$

***Крок 6.*** Перевіряються умови зупину, тобто правильності функціонування мережі при пред'явленні кожного вхідного зображення. Якщо умови не виконуються, то переходять до кроку 2 алгоритму, а якщо виконуються, то обчислення припиняється (переходять до кроку 7).

***Крок 7.*** Зупин.

### 1.3. Індивідуальні завдання

3.1. Розробити структуру мережі Хебба, здатну розпізнавати чотири різні букви вашого імені або прізвища. При цьому необхідно обґрунтувати вибір: числа рецепторних нейронів (число $n$ $x$-елементів мережі повинне бути в межах $12 \le n \le 30$); числа вихідних нейронів; векторів вихідних сигналів.

3.2. Розробити алгоритм та програму, що моделює мережу Хебба. При цьому в алгоритмі необхідно обов'язково передбачити можливість виникнення ситуацій з нерозв'язними проблемами адаптації ваг зв'язків нейромережі.

3.3. Навчити нейронну мережу Хебба розпізнавати чотири заданих символи.

3.4. Навести набір вхідних символів та необхідних вихідних сигналів, при яких в мережі виникає ситуація із нерозв'язною проблемою адаптації ваг зв'язків.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

# ЕЛЕМЕНТАРНИЙ ПЕРЦЕПТРОН РОЗЕНБЛАТТА

## 2.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи із найпростішою нейронною мережею, розробленою Розенблаттом.

## 2.2. Короткі відомості з теорії

### *2.2.1. Перцептрони – клас моделей мозку*

Перцептрони або персептрони (від *perceptio* – сприйняття) були першими штучними нейронними мережами, що з'явилися у результаті багаторічних досліджень мозку тварин та людини. Автор першого перцептрона – американський вчений Френк Розенблатт, що вперше опублікував свої дослідження в цій галузі у 1957 році. На думку Ф. Розенблатта, перцептрони, насамперед, є класом моделей мозку, що пояснюють деякі його характерні функції. Зокрема, перцептрони, нехай і в самій елементарній формі, пояснюють деякі проблеми організації пам'яті біологічних систем, демонструють механізм отримання знань "систем, що пізнають (*cognitive*)", про навколишній світ та показують, що ці знання залежать як від когнітивної системи, так й від навколишнього середовища. За Розенблаттом, для різних видів тварин найпростіше подання про анатомічну структуру нервової системи може бути отримане за допомогою схеми, наведеної на рис. 2.1.

Кожний з п'яти видів інформації про зовнішнє середовище сприймається своїми спеціалізованими сенсорними нейронами й передається по своїх окремих сенсорних трактах у центральну нервову систему. Через моторні нейрони центральна нервова система пов'язана із м'язами та залозами організму. У своїх перших роботах Розенблатт розглядав модель тільки зорової системи. У найбільш простому вигляді ця модель містить у собі три послідовно з'єднані безлічі нейронів: чутливі (*S*-елементи); нейрони, що асоціюють (*A*-елементи), та реагуючі (*R*-елементи). *S*-елементам у нервовій системі тварини або людини відповідають сенсорні або рецепторні нейрони, які генерують сигнали на

зовнішні подразнення, що надходять (зображення), та передають їх *A*-нейронам. *A*-елементи у нервовій системі живого організму аналогічні нейронам, що утворюють локальний спеціалізований зоровий центр у корі головного мозку та єднають рецепторні нейрони із моторними. *R*-елементам у нервовій системі відповідають ефекторні (моторні) нейрони, які упорядковані в обмежені топологічні структури і які пересилають сигнали керування центральної нервової системи до м'язів й залоз організму.

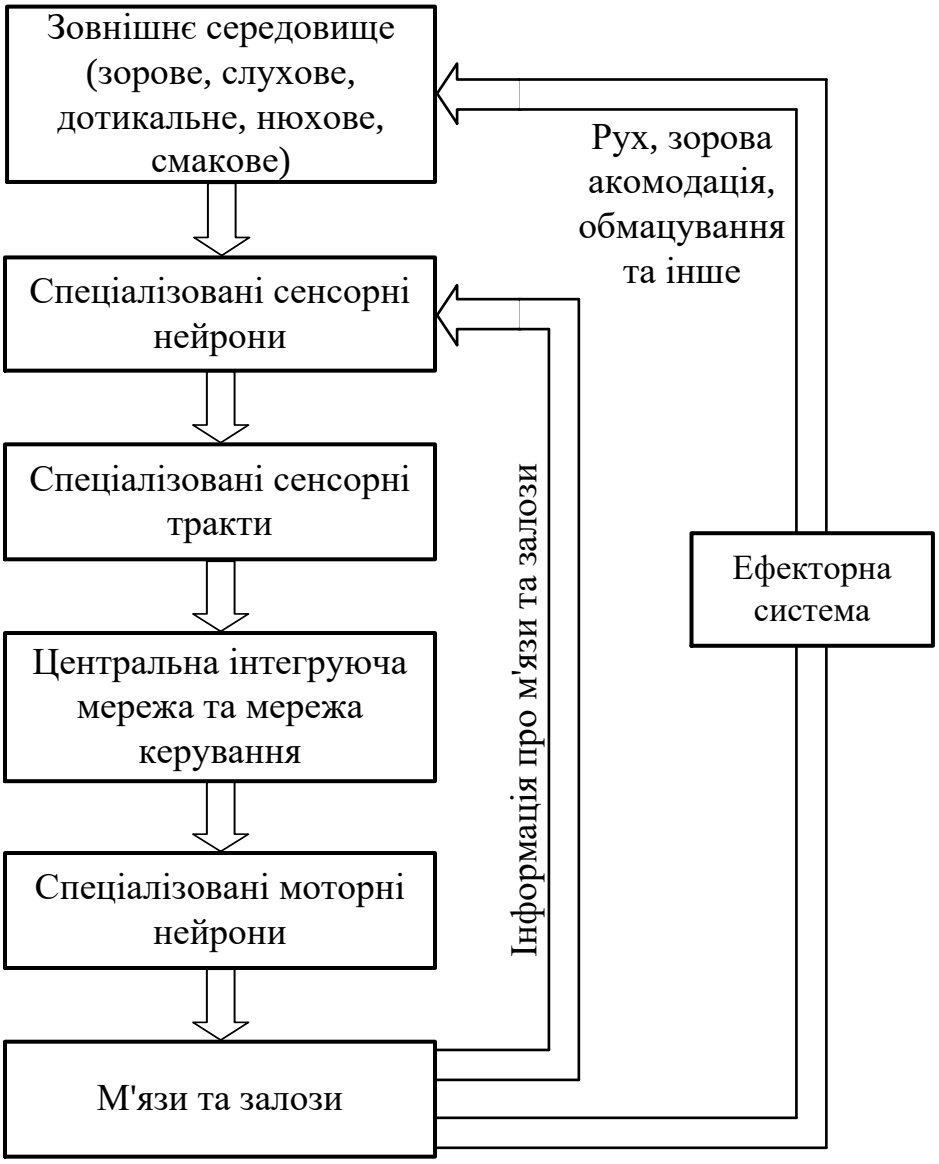



Рис. 2.1. Структура нервової системи

***Визначення 2.1.*** *S*-елемент називається простим, якщо він видає одиничний вихідний сигнал при вхідному сигналі, що перевищує деякий заданий поріг $\theta$, та нульовий сигнал – у противному випадку.

***Визначення 2.2.*** Простим асоціативним елементом називається *A*-елемент, що видає одиничний вихідний сигнал, якщо алгебраїчна сума його вхідних сигналів перевищує деякий заданий поріг $\theta > 0$, інакше – вихідний сигнал асоціативного нейрона дорівнює нулю.

***Визначення 2.3.*** Простим біполярним (бінарним) реагуючим елементом називається *R*-елемент, що видає одиничний вихідний сигнал, якщо алгебраїчна сума його вхідних сигналів більша за граничне значення або дорівнює йому, та від'ємний одиничний (нульовий) сигнал, якщо сума його вхідних сигналів менша від заданого порога.

Чутливі *S*-елементи живого організму (рис. 2.2) збуджуються від впливу енергії світла, якщо величини їх вхідних сигналів перевищують деякий поріг $\theta_i$. Рецепторні нейрони випадковим чином пов'язані із *A*-елементами, вихідні сигнали яких відмінні від нуля тільки у тому випадку, коли збуджена досить велика кількість сенсорних нейронів, які впливають на входи одного елемента, що асоціює. Простий *A*-елемент, аналогічно простому *S*-елементу, є активним та видає одиничний вихідний сигнал, якщо алгебраїчна сума сигналів на його вході перевищує задану порогову величину, у противному випадку нейрон перебуває не у збудженому стані. Коефіцієнти (ваги) зв'язків між *S*- та *A*-елементами постійні.

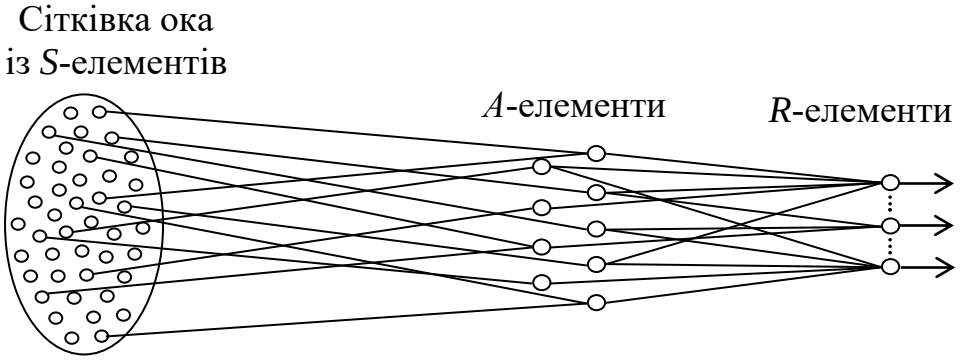



Рис. 2.2. Структура моделі зорової системи

Комбінація виходів всіх *A*-елементів являє собою реакцію двох перших шарів перцептрона на пред'явлене вхідне зображення, що за допомогою вихідного шару нейронів перетвориться в необхідну комбінацію вихідних сигналів системи. Часто вимагають, щоб кожному класу вхідних зображень відповідав тільки один певний активний *R*-нейрон. Необхідних комбінацій вихідних сигналів на кожний клас

зображень домагаються на етапі навчання або адаптації перцептрона за рахунок зміни змінних ваг зв'язків між *A*- та *R*-елементами.

Поділ множини *G* зображень на два класи $G_1$ та $G_2$ можна виконати за допомогою одного вихідного елемента. У цьому випадку зображенням першого класу може відповідати додатний вихідний сигнал (+1) *R*-елемента, а другого класу – від'ємний (–1). На прикладі найпростішого (елементарного) перцептрона розглянемо різні способи навчання цих нейромереж, уперше запропонованих та досліджених Розенблаттом.

***Визначення 2.4.*** Простим перцептроном називається нейронна мережа, що складається із *S*-, *A*- й *R*-елементів та задовольняє такі п'ять умов:

1. У мережі є тільки один *R*-нейрон, що з'єднаний зв'язками зі змінними вагами з усіма *A*-нейронами.

2. У мережі є тільки послідовні зв'язки від *S*- до *A*-елементів та від *A*-елементів до *R*-елемента.

3. Ваги зв'язків між *S*- та *A*-елементами є фіксованими.

4. Час передачі сигналів кожним окремим зв'язком дорівнює нулю (або фіксованій постійній величині).

5. Вихідні сигнали всіх нейронів мережі формуються у такому вигляді:

$$U_{\text{вих.}} = f\left(\sum_i U_{\text{вх.}i}(t)\right),$$

де $\sum_i U_{\text{вх.}i}(t)$ – алгебраїчна сума сигналів, що надходять одночасно на вхід нейрона.

***Визначення 2.5.*** Елементарним перцептроном називається простий перцептрон із простими *A*- та *R*-елементами й передатними функціями зв'язків вигляду

$$C_{ij}(t) = w_{ij}(t) U_{\text{вих.}i}(t - \tau_{ij}),$$

де $w_{ij}(t)$ – вага зв'язку між *i*-м та *j*-м нейронами в момент часу *t*; $U_{\text{вих.}i}(t - \tau_{ij})$ – вихідний сигнал *i*-го нейрона в момент часу $(t - \tau_{ij})$; $\tau_{ij}$ – час передачі сигналу $U_{\text{вих.}i}(t - \tau_{ij})$ з виходу *i*-го нейрона на вхід *j*-го елемента.

Елементарний перцептрон навчається або настроюється на розпізнавання двох класів зображень $G_1$, $G_2$ шляхом пред'явлення йому деяких послідовностей зображень із цих класів. Учитель (людина або обчислювальна машина), що спостерігає реакцію перцептрона на кожне вхідне зображення, при наявності помилкових рішень мережі повинен корегувати ваги зв'язків між *R*- та *A*-елементами відповідно до деякої системи правил.

***Визначення 2.6.*** Матрицею взаємодії перцептрона називається матриця, елементами якої є ваги зв'язків $w_{ij}$ для всіх пар нейронів $U_i$, $U_j$ мережі.

Якщо зв'язок між нейронами $U_i$, $U_j$ відсутній (наприклад, у простому перцептроні немає зв'язків між *R*- та *S*-нейронами), то припускають, що $w_{ij} = 0$.

Матриця взаємодії фактично відображає стан пам'яті перцептрона. Множина всіх можливих станів пам'яті мережі утворить фазовий простір мережі, що може бути представлений у вигляді області в *n*-мірному евклідовому просторі, кожна координатна вісь якого відповідає одному зв'язку мережі.

### *2.2.2. Навчання перцептронів α- та γ-системи підкріплень*

***Визначення 2.7.*** Системою підкріплень нейронної мережі називається будь-який набір правил, за допомогою яких можна змінювати у часі стан пам'яті мережі (або матрицю взаємодії).

***Визначення 2.8.*** Додатним (від’ємним) підкріпленням називається такий процес корекції ваг зв'язків, при якому вага зв'язку $w_{ij}(t)$, що починається на виході активного *i*-го елемента й закінчується на вході *j*-го елемента, змінюється на величину $\Delta w_{ij}(t)$, знак якої збігається зі знаком вихідного сигналу *j*-го нейрона (знак якої протилежний знаку вихідного сигналу *j*-го нейрона).

Існує велика кількість різних систем підкріплень, більша частина з яких становить лише історичний інтерес. Тому зупинимося тільки на системі підкріплень з корекцією похибок, що є основною на цей час.

У системі підкріплень з корекцією похибок насамперед необхідно визначити, чи є реакція перцептрона правильною. Доти, поки вихідний сигнал *R*-елемента набуває бажаного значення, величина сигналу підкріплення η дорівнює нулю. З появою неправильної реакції

перцептрона використовується підкріплення, величина та знак якого в загальному випадку визначається монотонно зростаючою функцією $f$

$$\eta = f(R^* - R), \tag{2.1}$$

де $R^*$ – бажана реакція; $R$ – отримана реакція; $f(0) = 0$.

Таким чином, з появою помилки для корекції ваг зв'язків використовується сигнал, знак якого протилежний знаку вихідного сигналу $R$-елемента. У зв'язку із цим розглянутий метод корекції ваг одержав назву системи з від'ємним підкріпленням.

Конкретним прикладом системи підкріплень з корекцією похибок є альфа-система підкріплень. У цій системі при наявності похибок ваги всіх активних зв'язків, які скінчуються на $R$-елементі, змінюються на однакову величину η, а ваги всіх неактивних зв'язків залишаються без змін. Перцептрони, у яких застосовується альфа-система підкріплення, називаються альфа-перцептронами.

При використанні альфа-системи підкріплень сума ваг всіх зв'язків між $R$- та $A$-нейронами може зростати (або убувати) від кроку до кроку, що повинно приводити до небажаних ситуацій, коли багато зв'язків мають максимальні (або мінімальні) ваги й не можуть використовуватися надалі у процесі навчання нейронної мережі. Для усунення цього недоліку α-системи підкріплень була запропонована гамма-система підкріплень, що має властивість консервативності щодо суми $\Sigma_1$ ваг всіх зв'язків між нейронами, тобто сума $\Sigma_1$ залишається постійною в процесі навчання перцептрона. Це досягається за рахунок того, що при наявності помилкової реакції перцептрона спочатку ваги всіх активних зв'язків змінюються на однакове значення η, а услід за цим з ваг всіх активних та пасивних зв'язків віднімається величина, яка дорівнює відношенню суми зміни ваг всіх активних зв'язків до числа всіх зв'язків. Зміна ваг окремих зв'язків при цьому визначається співвідношенням

$$\Delta w_{ij} = \begin{cases} \eta - \dfrac{N_{\text{ак}}\eta}{N}, & \text{якщо } i\text{-й } A\text{-нейрон збуджений,} \\ -\dfrac{N_{\text{ак}}\eta}{N}, & \text{якщо } i\text{-й } A\text{-нейрон загальмований,} \end{cases} \tag{2.2}$$

де $\Delta w_{ij}$ – у загальному випадку приріст ваги зв'язку між $i$-м $A$-нейроном та $j$-м $R$-нейроном, для елементарного перцептрона $j = \text{const} = 1$; $\eta$ – величина сигналу підкріплення; $N_{\text{ак}}$ – число активних зв'язків; $N$ – число зв'язків, що закінчуються на вході $j$-го елемента.

При такій системі корекції ваг зв'язків виконується рівність

$$\eta N_{\text{ак}} - \frac{N_{\text{ак}}\eta}{N} \cdot N = 0,$$

з якої й виходить консервативність гамма-системи підкріплень відносно суми всіх ваг зв'язків, що навчаються.

***Зауваження 2.1.*** Відзначимо, що співвідношення (2.2) у неявній формі передбачає, що ваги $w_{ij}$ зв'язків, що корегуються, досить далекі від своїх граничних значень $w_{ij\,\min} = 0$ й $w_{ij\,\max} = 1$, тобто

$$w_{ij\,\min} \le w_{ij} + \Delta w_{ij} \le w_{ij\,\max}. \qquad (2.3)$$

Якщо нерівності (2.3) порушуються, а вимога консервативності щодо суми $\Sigma_1$ ваг зв'язків залишається незмінною, то співвідношення (2.2) необхідно уточнити. Нехай, наприклад, серед активних зв'язків $N_{\text{а гр.}}$ зв'язків мають граничні значення ваг $w_{ij\,\max}$ або $w_{ij\,\min}$ й для них виконуються умови

$$w_{ij\,\max} + \Delta w_{ij} > w_{ij\,\max} \quad \text{або} \quad w_{ij\,\min} + \Delta w_{ij} < w_{ij\,\min}. \qquad (2.4)$$

Нехай також $N_{\text{а бгр.}}$ активних зв'язків мають ваги, близькі до граничних, для яких справедливі такі нерівності:

$$w_{ij} + \Delta w_{ij} > w_{ij\,\max} \quad \text{або} \quad w_{ij} + \Delta w_{ij} < w_{ij\,\min}. \qquad (2.5)$$

У цьому випадку загальна сума $S_{\text{а}}$ первісних змін ваг активних зв'язків буде становитиме

$$S_{\text{а}} = (N_{\text{ак}} - N_{\text{а гр.}} - N_{\text{а бгр.}})\eta + \text{sign}(\eta) \sum_{k=1}^{N_{\text{а бгр.}}} \left| w_{kj}^{\text{гр.}} - w_{kj} \right|, \quad \left| w_{kj}^{\text{гр.}} - w_{kj} \right| < \left| \Delta w_{kj} \right|, \tag{2.6}$$

де $w_{kj}^{\text{гр.}}$ – граничне значення ваги зв'язку між $k$-м та $j$-м нейронами, $w_{kj}^{\text{гр.}} \in \{0,1\}$; $\Delta w_{kj}$ – зміна ваги зв'язку, яка обчислюється за співвідношенням (2.2) без врахування наявності множини $\{w_{ij\,\min},\ w_{ij\,\max}\} \equiv \{0,1\}$; $\text{sign}(\cdot)$ – знакова функція.

Зміна ваг окремих зв'язків при цьому може бути визначена співвідношенням

$$\Delta w_{ij} = \begin{cases} \eta_i - \dfrac{S_{\text{а}}}{N}, & \text{якщо } i\text{-й } A\text{ - нейрон збуджений,} \\ -\dfrac{S_{\text{а}}}{N}, & \text{якщо } i\text{-й } A\text{-нейрон загальмований.} \end{cases}$$

Прикладом ще одного загального способу навчання перцептронів є метод корекції похибок випадковими збурюваннями. Він передбачає, як і у альфа-системи підкріплень, з появою помилок – корекцію ваг активних зв'язків, але знак та величина корекції для кожного зв'язку вибирається випадково відповідно до деякого заданого розподілу ймовірностей.

***Приклад 2.1.*** Навчимо елементарний перцептрон з бінарними *S*- та *A*-нейронами й біполярним *R*-нейроном (рис. 2.3) розпізнавати зображення букв Н і П (рис. 2.4, *а*, *б*) на рецепторному полі з дев'яти елементів (рис. 2.4, *в*).

При цьому зажадаємо, щоб при пред'явленні зображення букви Н на виході *R*-елемента був сигнал “–1”, з появою другого зображення – сигнал “+1”.

Задамо у таблицях 2.1 та 2.2 ваги зв'язків $w_{ij}^1$ ($i = \overline{1,9},\ j = \overline{1,6}$), $w_k^2$ ($k = \overline{1,6}$) відповідно між бінарними *S*- та *A*-нейронами й між *A*-нейронами та біполярним нейроном *R* за допомогою генератора випадкових чисел, що генерує їх із скінченої множини $\{0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9\}$.

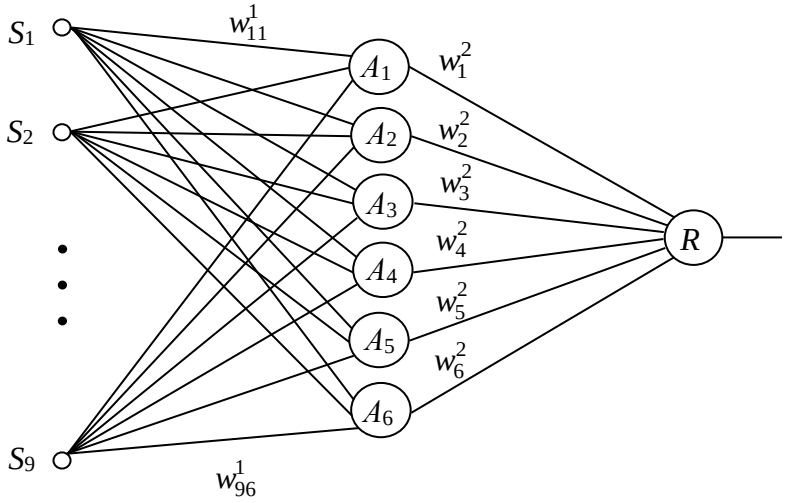
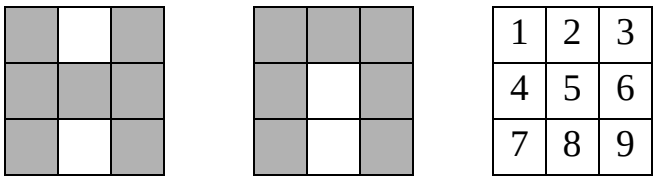



Рис. 2.3. Елементарний перцептрон




*а* *б* *в*

Рис 2.4. Зображення букв Н та П

Таблиця 2.1 – Ваги $w_{ij}^1$ зв'язків перцептрона між *S*- та *A*-елементами

| $w_{ij}^1$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ | $S_7$ | $S_8$ | $S_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,9 | 0,6 | 0,7 |
| $A_2$ | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,1 | 0,9 |
| $A_3$ | 0,3 | 0,5 | 0,1 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,9 | 0,4 | 0,7 |
| $A_4$ | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,9 |
| $A_5$ | 0,5 | 0,3 | 0,3 | 0,6 | 0,1 | 0,2 | 0,9 | 0,2 | 0,7 |
| $A_6$ | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,8 | 0,5 | 0,8 |

Таблиця 2.2 – Ваги $w_k^2$ зв'язків перцептрона між *R*- та *A*-елементами

| $w_k^2$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ | 0,2 | 0,8 | 0,6 | 0,9 | 0,8 | 0,1 |

Подамо на вхід перцептрона зображення букви Н (рис 2.4, *а*). Це зображення збуджує всі *S*-нейрони, крім другого та восьмого. Одиничні сигнали з виходів збуджених бінарних *S*-нейронів через зв'язки, вагові

коефіцієнти яких задані табл. 2.1, надходять на входи *A*-нейронів. Сумарний вхідний сигнал на вході *i*-го *A*-елемента визначається співвідношенням

$$U_{\text{вх. }Ai} = \sum_{j=1}^{9} U_{\text{вих. }Sj} w_{ji}^{1}, \quad i = \overline{1,6}, \tag{2.7}$$

де $U_{\text{вх.}Ai}$ – сигнал на вході *i*-го *A*-нейрона; $U_{\text{вых.}Sj}$ – сигнал на виході *j*-го *S*-нейрона; $w_{ji}$ – вага зв'язку між *j*-м *S*-нейроном та *i*-м *A*-елементом.

Для першого *A*-нейрона маємо

$$U_{\text{вх.}A1} = \sum_{j=1}^{9} U_{\text{вих.}Sj} w_{j1}^{1} = 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}4 +$$
$$+ 1 \cdot 0{,}9 + 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}7 = 3{,}5.$$

Аналогічно обчислюються сигнали на входах інших *A*-елементів. Результати цих обчислень наведено в другому рядку табл. 2.3. У третьому рядку цієї таблиці – результати розрахунків сигналів на входах *A*-елементів при пред'явленні перцептрону зображення букви П.

Таблиця 2.3 – Величини сигналів на входах *A*-елементів

| Зображення | Сигнали на входах *A*-елементів | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $U_{\text{вх.}A1}$ | $U_{\text{вх.}A2}$ | $U_{\text{вх.}A3}$ | $U_{\text{вх.}A41}$ | $U_{\text{вх.}A5}$ | $U_{\text{вх.}A6}$ |
| Буква Н | 3,5 | 3,6 | 3,5 | 3,7 | 3,3 | 3,2 |
| Буква П | 3,2 | 3,2 | 3,4 | 3,2 | 3,6 | 3,5 |

Для спрощення розрахунків припустимо, що пороги $\theta_i$, $i = \overline{1,6}$ всіх *A*-нейронів однакові:

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_6 = \theta.$$

Якщо величина порога $\theta$ обрана менше 3,2, то при пред'явленні будь-якого зображення будуть збуджені всі *A*-нейрони, а якщо вибрати $\theta > 3{,}7$, то на виходах всіх нейронів будуть нульові сигнали. В обох цих

випадках перцептрон не може виконувати розпізнавання пропонованих зображень.

Очевидно, що для забезпечення працездатності нейронної мережі поріг θ необхідно вибрати між 3,2 та 3,7 й таким чином, щоб при пред'явленні різних зображень збуджувалися різні множини $M_1$, $M_2$ $A$-елементів, причому бажано, щоб ці множини не перетиналися, тобто

$$M_1 \bigcap M_2 = 0. \qquad (2.8)$$

Нехай вихідний сигнал $A$-елементів визначається співвідношенням

$$U_{\text{вих}.A} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } U_{\text{вх}.A} \geq \theta, \\ 0, & \text{якщо } U_{\text{вх}.A} < \theta, \end{cases}$$

тоді умова (2.8) виконується при θ = 3,5 й при пред'явленні зображення букви Н будуть збуджені елементи $A_1$, $A_2$, $A_3$ й $A_4$, а при пред'явленні букви П – нейрони $A_5$ й $A_6$. Розрахуємо з урахуванням даних табл. 2.2 сигнали $U_{\text{вх}.R\boldsymbol{Н}}$, $U_{\text{вх}.R\boldsymbol{П}}$ на вході $R$-нейрона при пред'явленні зображень букв Н и П:

$$U_{\text{вх}.R\boldsymbol{Н}} = \sum_{i=1}^{6} U_{\text{вих}.Ai} w_i^2 = 1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}9 + 0 \cdot 0{,}8 + 0 \cdot 0{,}1 = 2{,}5,$$

$$U_{\text{вх}.R\boldsymbol{П}} = \sum_{i=1}^{6} U_{\text{вих}.Ai} w_i^2 = 0 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}8 + 0 \cdot 0{,}6 + 0 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}9.$$

При величині порога $R$-елемента $\theta_R = 1{,}7$ й пред'явленні зображення букви Н на виході перцептрона буде сигнал “+1”, а при пред'явленні другого зображення – сигнал “–1”, що не відповідає вихідним вимогам до вихідних сигналів нейронної мережі. Використовуємо для настроювання перцептрона α-систему підкріплень при величині сигналу підкріплення η, що дорівнює 0,1, й при пред'явленні послідовності зображень Н, П, Н, П, ... у моменти часу $t_1$, $t_2$, $t_3$, ... . Процес адаптації ваг зв'язків між $R$- та $A$-нейронами ілюструється в табл. 2.4.

У другому стовпці цієї таблиці при $t = t_0$ наведено значення вихідних ваг зв'язків та величини сигналів $U_{\text{вх}.R\text{Н}}$, $U_{\text{вх}.R\text{П}}$ на вході $R$-елемента при пред'явленні відповідно зображень букв Н та П. При першому пред'явленні зображення букви Н у момент часу $t_1$ (позначено $t_1^{\text{Н}}$) у силу наявності

помилкового сигналу на виході перцептрона корегуються ваги активних зв'язків $w_1^2, ..., w_4^2$ на величину $\eta$ = 0,1. Ця корекція зменшує сумарний вхідний сигнал $U_{\text{вх.}R\text{Н}}$ до величини 2,1.

Нехай функціонування *R*-елемента описується співвідношенням

$$U_{\text{вих.}R} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } U_{\text{вх.}R} \geq \theta_R, \\ -1, & \text{якщо } U_{\text{вх.}R} < \theta_R, \end{cases}$$

де $\theta_R$ – поріг *R*-елемента, тоді для досягнення правильної реакції *R*-елемента на зображення букви Н необхідні дві повторні корекції ваг зв'язків $w_1^2, ..., w_4^2$. Результати цих корекцій наведено в табл. 2.4 відповідно в п'ятому й сьомому стовпцях при $t = t_3^{\text{Н}}$ й $t = t_5^{\text{Н}}$.

Таблиця 2.4 – Адаптація ваг зв'язків перцептрона за допомогою $\alpha$-системи підкріплень

| Вагові коефіцієнти та вхідні сигнали | Моменти часу | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t_0$ | $t_1^{\text{Н}}$ | $t_2^{\text{П}}$ | $t_3^{\text{Н}}$ | $t_4^{\text{П}}$ | $t_5^{\text{Н}}$ | $t_6^{\text{П}}$ | $t_7^{\text{П}}$ | $t_8^{\text{П}}$ | $t_9^{\text{П}}$ |
| $w_1^2$ | 0,2 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w_2^2$ | 0,8 | 0,7 | 0 | 0,6 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w_3^2$ | 0,6 | 0,5 | 0 | 0,4 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w_4^2$ | 0,9 | 0,8 | 0 | 0,7 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w_5^2$ | 0,8 | 0 | 0,9 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_6^2$ | 0,1 | 0 | 0,2 | 0 | 0,3 | 0 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
| $U_{\text{вх.}R\text{Н}}$ | 2,5 | 2,1 | – | 1,7 | – | 1,4 | – | – | – | – |
| $U_{\text{вх.}R\text{П}}$ | 0,9 | – | 1,1 | – | 1,3 | – | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 |

Після моменту часу $t = t_5^{\text{Н}}$, через те що виконується співвідношення (2.8), із вхідної послідовності можуть бути виключені зображення букви Н та можуть пред'являтися тільки зображення букви П. Результати корекції ваг зв'язків $w_5^2$, $w_6^2$, що визначають сигнал на вході *R*-елемента при пред'явленні зображення букви П, наведено в останньому рядку табл. 2.4. Оскільки в розглянутому прикладі корекція вхідного сигналу *R*-елемента при пред'явленні зображення букви П здійснюється тільки за допомогою

ваг двох зв'язків, причому, після другої корекції вага зв'язку $w_5^2$ набуває максимального значення та надалі зростати не може, то процес навчання нейронної мережі правильної реакції на друге зображення більш тривалий та закінчується тільки при $t = t_9^{\text{П}}$.

У табл. 2.5 наведено результати настроювання елементарного перцептрона при тих же вихідних даних, але за допомогою γ-системи підкріплень.

Таблиця 2.5 – Адаптація ваг зв'язків перцептрона за допомогою γ-системи підкріплень

| Вагові коефіцієнти та вхідні сигнали | Моменти часу | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t_0$ | $t_1^{\text{Н}}$ | $t_2^{\text{П}}$ | $t_3^{\text{Н}}$ | $t_4^{\text{П}}$ | $t_5^{\text{Н}}$ | $t_6^{\text{П}}$ | $t_7^{\text{Н}}$ | $t_8^{\text{П}}$ | $t_9^{\text{Н}}$ |
| $w_1^2$ | 0,2 | 0,1666 | 0,1333 | 0,1000 | 0,0800 | 0,0600 | 0,0400 | 0,0200 | 0,0000 | 0,0000 |
| $w_2^2$ | 0,8 | 0,7666 | 0,7333 | 0,7000 | 0,6800 | 0,6600 | 0,6400 | 0,6200 | 0,6000 | 0,5750 |
| $w_3^2$ | 0,6 | 0,5666 | 0,5333 | 0,5000 | 0,4800 | 0,4600 | 0,4400 | 0,4200 | 0,4000 | 0,3750 |
| $w_4^2$ | 0,9 | 0,8666 | 0,8333 | 0,8000 | 0,7800 | 0,7600 | 0,7400 | 0,7200 | 0,7000 | 0,6750 |
| $w_5^2$ | 0,8 | 0,8667 | 0,9341 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| $w_6^2$ | 0,1 | 0,1667 | 0,2341 | 0,3004 | 0,1380 | 0,4604 | 0,5404 | 0,6204 | 0,7004 | 0,7754 |
| $U_{\text{вх}.R\text{Н}}$ | 2,5 | 2,3664 | – | 2,1000 | – | 1,9400 | – | 1,7800 | – | 1,6250 |
| $U_{\text{вх}.R\text{П}}$ | 0,9 | – | 1,1682 | – | 1,3800 | – | 1,5404 | – | 1,7004 | 1,7754 |
| $\Sigma_1$ | 3,4 | 3,3998 | 3,4004 | 3,4004 | 3,4000 | 3,4004 | 3,4004 | 3,4004 | 3,4004 | 3,4004 |

У другому стовпці табл. 2.5 при $t = t_0$ наведено вихідні ваги зв'язків та величини сигналів на вході *R*-елемента при пред'явленні зображень букв Н та П, а також сума $\Sigma_1$ ваг всіх зв'язків між *R*- та *A*-нейронами. Значення ваг зв'язків у третьому стовпці таблиці отримано після пред'явлення зображення букви Н у момент часу $t = t_1^{\text{Н}}$. Оскільки $\eta = 0{,}1$, $N_{\text{ак}} = 4$ й $N = 6$, то, використовуючи співвідношення (2.2) для розрахунку збільшення ваг активних зв'язків, одержимо

$$\Delta w_1 = \Delta w_2 = \Delta w_3 = \Delta w_4 = \eta - N_{\text{ак}}\eta / N = 0{,}1 - 4 \cdot 0{,}1 / 0{,}6 = 0{,}0334, \qquad (2.9)$$

а для зміни ваг пасивних зв'язків маємо

$$\Delta w_5 = \Delta w_6 = -N_{\text{ак}}\eta / N = -4 \cdot 0{,}1 / 0{,}6 = 0{,}0667. \qquad (2.10)$$

Знаючи збільшення ваг зв'язків та використовуючи співвідношення

$$w_i^2(t_1^{\text{Н}}) = w_i^2(t_0) - \Delta w_i\ ,\quad i = \overline{1,6},$$

неважко одержати й чисельні значення, наведені у третьому стовпці табл. 2.5.

При пред'явленні зображення букви П у момент часу $t = t_2^{\text{П}}$ активними є тільки нейрони $A_5$ та $A_6$, тому $N_{\text{ак}} = 2$ і співвідношення (2.2) дає наступні чисельні значення збільшень ваг зв'язків:

$$\Delta w_5 = \Delta w_6 = \eta - N_{\text{ак}}\eta / N = 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}1 / 0{,}6 = 0{,}0667, \qquad (2.11)$$

$$\Delta w_1 = \ldots = \Delta w_4 = -N_{\text{ак}}\eta / N = -2 \cdot 0{,}1 / 0{,}6 = 0{,}0333. \qquad (2.12)$$

Знаючи збільшення $\Delta w_i\ \ (i = \overline{1,6})$ й використовуючи вираз

$$w_i^2(t_2^{\text{П}}) = w_i^2(t_1^{\text{Н}}) + \Delta w_i\ ,\quad i = \overline{1,6}\ ,$$

нескладно одержати дані четвертого стовпця табл. 2.5.

При розрахунку збільшень ваг зв'язків при $t = t_3^{\text{Н}}$ за співвідношеннями (2.9), (2.10) виявляється, що збільшення $\Delta w_5$ більше, ніж можлива зміна ваги зв'язку $w_5^2$:

$$\Delta w_5 = -N_{\text{ак}}\eta / N = -4 \cdot 0{,}1 / 0{,}6 = 0{,}0667 > 1 - w_5^2(t_2^{\text{П}}) = 1 - 0{,}9341 = 0{,}0659.$$

Тому для виконання умови консервативності щодо суми $\Sigma_1$ ваг зв'язків необхідно величину різниці

$$\Delta_1 w_5 = \Delta w_5 - \left|1 - w_5^2(t_2^{\text{П}})\right| = 0{,}0667 - 0{,}0659 = 0{,}0008$$

використовувати для зміни ваг зв'язків, які не набули граничних значень. Один з можливих способів використання різниці $\Delta_1 w_5$ – змінити кожний з таких $(N-1)$ активних та пасивних зв'язків на величину

$$\eta_1 = \frac{\Delta_1 w_5}{N-1}.$$

Чисельні значення ваг зв'язків при $t = t_3^{\text{Н}}$ наведено у п'ятому стовпці табл. 2.5.

При розрахунку ваг зв'язків за допомогою виразів (2.11), (2.12) для $t = t_4^{\text{П}}$ необхідно враховувати, що змінюватися може вага тільки одного активного зв'язку:

$$\Delta w_5 = 0, \tag{2.13}$$

$$\Delta w_6 = \eta - \frac{N_{\text{ак}} - 1}{(N-1)}\eta = 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}1/5 = 0{,}0800, \tag{2.14}$$

$$\Delta w_1 = \ldots = \Delta w_4 = (N_{\text{ак}} - 1)\eta/(N-1) = -1 \cdot 0{,}1/5 = -0{,}0200. \tag{2.15}$$

Аналогічно при $t = t_5^{\text{Н}}$ маємо

$$\Delta w_1 = \ldots = \Delta w_4 = -\eta + N_{\text{ак}}\eta/(N-1) = -0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1/5 = -0{,}0200, \tag{2.16}$$

$$\Delta w_5 = 0, \tag{2.17}$$

$$\Delta w_6 = N_{\text{ак}}\eta/(N-1) = 4 \cdot 0{,}1/5 = 0{,}0800. \tag{2.18}$$

Використовуючи співвідношення (2.13) – (2.18), аналогічним образом розраховуються ваги зв'язків при $t = t_6^{\text{П}}, t_7^{\text{Н}}, t_8^{\text{П}}$. Коли $t = t_9^{\text{Н}}$ число активних *A*-нейронів при пред'явленні зображення букви Н буде дорівнювати чотирьом, але у виразі (2.16) необхідно використовувати $N_{\text{ак}} = 3$, оскільки ваговий коефіцієнт $w_1^2 = 0$. Зменшується до чотирьох й число ваг зв'язків, які використовуються для забезпечення постійності суми $\Sigma_1$ ваг всіх змінюваних зв'язків перцептрона.

У результаті одержуємо

$$\Delta w_1 = \Delta w_5 = 0,$$

$$\Delta w_2 = \Delta w_3 = \Delta w_4 = -\eta + (N_{\text{ак}} - 1)\eta/(N-2) = -0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1/4 = -0{,}025,$$

$$\Delta w_6 = (N_{\text{ак}} - 1)\eta/(N-2) = 3 \cdot 0{,}1/(6-2) = 0{,}075,$$

$$U_{\text{вх.}R\text{Н}} = 1{,}6250 < \theta_R = 1{,}7, \quad U_{\text{вх.}R\text{П}} = 1{,}7754 > \theta_R = 1{,}7.$$

Таким чином, при пред'явленні букви Н на вході *R*-елемента сигнал менший від величини порога $\theta_R$ й, отже, на виході *R*-нейрона буде необхідний сигнал "–1", а при пред'явленні зображення букви П на вихідному нейроні з'явиться заданий сигнал "+1".

Виходячи з співвідношення (2.2) в γ-системі підкріплень при тій самій величині сигналу підкріплення η, що й у α-системі, збільшення $\Delta w_{ij}$ ваги активного зв'язку, що корегується, менше, ніж в α-системі. У зв'язку з цим можливо очікувати, що у загальному випадку процес настроювання нейронної мережі другим методом вимагає більшого числа ітерацій. Однак аналіз даних табл. 2.4 та 2.5 розглянутого прикладу показує, що число ітерацій при використанні γ-системи підкріплень не більше, ніж при застосуванні α-системи. Це пояснюється наступним. Якщо ваги всіх зв'язків далекі від граничних значень, то загальна сума $S_\alpha$ зміни ваг в α-системі пов'язана тільки з активними зв'язками:

$$S_\alpha = \eta N_{\text{ак}}.$$

В γ-системі аналогічна сума $S_\gamma$ може дорівнювати, бути менше або більше $S_\alpha$, тому що на кожній ітерації коректуються ваги всіх зв'язків:

$$S_\gamma = (\eta - \frac{N_{\text{ак}}\eta}{N})N_{\text{ак}} + \frac{N_{\text{ак}}\eta}{N}(N - N_{\text{ак}}).$$

За допомогою першого доданка в цьому виразі підраховується сума зміни ваг активних зв'язків, а за допомогою другого – сума зміни ваг пасивних зв'язків. Після перетворень маємо

$$S_\gamma = N_{\text{ак}}\eta + (N_{\text{ак}} - \frac{2N_{\text{ак}}^2}{N})\eta . \qquad (2.19)$$

З аналізу виразу (2.19) виходить, що залежно від співвідношення величин $N_{\text{ак}}$ та $N$ можливі три вирази:

$$S_\gamma = S_\alpha, \text{ якщо } N_{\text{ак}} = 0{,}5N, \qquad (2.20)$$

$$S_\gamma > S_\alpha, \text{ якщо } N_{\text{ак}} < 0{,}5N, \qquad (2.21)$$

$$S_\gamma < S_\alpha, \text{ якщо } N_{\text{ак}} > 0{,}5N . \qquad (2.22)$$

Зі співвідношень (2.20) – (2.22) можна зробити висновок, що в загальному випадку за числом ітерацій у процесі навчання елементарного перцептрона жодна з розглянутих систем підкріплень не має помітної переваги.

### *2.2.3. Теореми Розенблатта про елементарний перцептрон*

Перша теорема Розенблатта доводить існування елементарного перцептрона, здатного виконати будь-яку класифікацію заданої множини чорно-білих зображень, тобто вона показує, що перцептрон є універсальним пристроєм для вирішення будь-якого завдання класифікації зображень.

***Теорема 2.1.*** Нехай дана множина $W = \{W_1, ..., W_n\}$ чорно-білих зображень на деякій сітківці $S = \{S_1, ..., S_m\}$, тоді для будь-якої класифікації $C(W)$ множини $W$ чорно-білих зображень на дві підмножини $W^1$, $W^2$ існує не порожній клас елементарних перцептронів із сітківкою $S$, здатних виконати цю класифікацію.

***Доведення.*** Для доведення досить показати існування хоча б одного елементарного перцептрона, здатного виконати довільну класифікацію $C(W)$. Розглянемо перцептрон, кожному зображенню $W_k$ $(k = \overline{1,n})$ на сітківці $S$ якого відповідає один $A$-елемент – нейрон $A_k$, функціонування якого визначається виразом

$$U_{\text{вих.}Ak} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } U_{\text{вх.}Ak} \geq \theta, \\ 0, & \text{якщо } U_{\text{вх.}Ak} < \theta, \end{cases} \tag{2.23}$$

де $U_{\text{вих.}Ak}$ – вихідний сигнал нейрона $A_k$; $U_{\text{вх.}Ak}$ – сигнал на вході нейрона $A_k$,

$$U_{\text{вх.}Ak} = \sum_{j=1}^{m} U_{\text{вих.}Sj} w_{jk}, \tag{2.24}$$

$U_{\text{вих.}Sj}$ – вихідний сигнал $j$-го $S$-елемента,

$$U_{\text{вих.}Sj} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S\text{-елемент збуджений}, \\ -1, & \text{якщо } S\text{-елемент загальмований}, \end{cases} \tag{2.25}$$

$w_{jk}$ – вага зв'язку між $j$-м $S$-елементом та $k$-м $A$-нейроном; $\theta$ – поріг спрацьовування $k$-го $A$-елемента; $\theta = m$.

Для кожного зображення $W_k$ задамо ваги $w_{jk}$ ($j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$) співвідношенням

$$w_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо елемент } S_j \text{ збуджений } k\text{-м зображенням}, \\ -1, & \text{якщо елемент } S_j \text{ загальмований } k\text{-м зображенням}. \end{cases} \tag{2.26}$$

При пред'явленні будь-якого зображення $W_k$ ($k = \overline{1,n}$) перцептрону, що задовольняє співвідношенням (2.23) – (2.26), тільки на вході одного $k$-го $A$-нейрона буде сигнал, що дорівнює, відповідно до співвідношення (2.24), числу $m$, й тільки на виході цього нейрона відповідно до виразу (2.23) буде одиничний вихідний сигнал. Тепер для правильного виконання поділу вихідної множини $W$ на дві підмножини $W^1$, $W^2$ за допомогою елементарного перцептрона необхідно тільки всім вагам зв'язків між $R$- та $A$-нейронами, які відповідають $A$-елементам, збудженим зображеннями підмножини $W^1$, додати додатні значення, а всім вагам зв'язків $A$-нейронів, які збуджуються зображеннями підмножини $W^2$, – від’ємні значення, а потім задати вихідний сигнал $R$-нейрона $U_{вих.R}$ виразом вигляду

$$U_{\text{вих}.R} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } U_{\text{вх}.R} \geq 0, \\ -1, \text{ якщо } U_{\text{вх}.R} < 0, \end{cases}$$

де $U_{\text{вх}.R}$ – вхідний сигнал $R$-елемента.

У цьому випадку всі зображення підмножини $W^1$ будуть кодуватися додатними одиничним вихідним сигналом нейронної мережі, а підмножина $W^2$ – від'ємними, тобто буде правильно виконуватися класифікація $C(W)$ вихідної множини $W$ зображень.

Хоча побудована в такий спосіб нейронна мережа не має істотного практичного значення, проте її наявність показує, що елементарний перцептрон є універсальним пристроєм розподілу будь-якої множини зображень на два класи. У тому випадку, коли число зображень множини $W$ перевищує число $A$-нейронів, елементарний перцептрон втрачає свою універсальну здатність класифікувати зображення.

***Теорема 2.2.*** Якщо число $n$ зображень у множині $W$ більше від числа $A$-елементів елементарного перцептрона, то існує деяка класифікація $C(W)$ множини $W$ чорно-білих зображень на дві підмножини $W^1$, $W^2$, що не може бути виконана перцептроном.

***Теорема 2.3.*** Для будь-якого елементарного перцептрона із скінченним числом $A$-нейронів ймовірність виконання класифікації $C(W)$, що вибирається з рівномірного розподілу за всіма можливими розподілами множини $W = \{W_1, ..., W_n\}$ зображень на два класи, прямує до нуля при $n$, що прямує до нескінченності.

Теорема 2.1 доводить існування елементарного перцептрона, здатного виконувати будь-який заданий розподіл $C(W)$ зображень деякої множини $W$ на два класи, однак вона не вказує алгоритмів досягнення цієї здатності в процесі навчання нейронної мережі. Розенблаттом була доведена важлива для теорії елементарних перцептронів теорема про наявність таких алгоритмів для α-перцептронів.

Розглянемо деяку класифікацію $C(W)$ множини $W$ зображень на дві підмножини $W^1$, $W^2$, що може здійснюватися перцептроном з $R$-елементом, вихідний сигнал якого задовольняє умови

$$U_{\text{вих}.R} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } W_k \in W^1, \\ -1, \text{ якщо } W_k \in W^2, \end{cases} \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.27}$$

Припустимо також, що

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } W_k \in W^1, \\ -1, & \text{якщо } W_k \in W^2, \end{cases} \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.28}$$

***Визначення 2.9.*** Метод корекції похибок без квантування – це метод системи підкріплень з корекцією похибок, коли при помилковій реакції *R*-елемента з порогом $\theta$ на деяке зображення $W_k \in W$ до ваги кожної зі зв'язків, що з'єднують активні *A*-нейрони з *R*-елементом, додається величина $\eta = \rho_k R_k$, де коефіцієнт $R_k$ вибирається з умови, що після корекції ваг зв'язків виконується співвідношення (2.27), тобто перцептрон правильно класифікує пред'явлене зображення. У методі корекції похибок з квантуванням застосовується це ж правило корекції ваг зв'язків, але величина $R_k$ в загальному випадку набагато менша й правильний сигнал на виході *R*-нейрона, як правило, досягається не за одну ітерацію.

***Теорема 2.4.*** Нехай є елементарний α-перцептрон, множина чорно-білих зображень $W = \{W_1, ..., W_n\}$, деяка класифікація $C(W)$ цих зображень на дві підмножини, що може бути виконана α-перцептроном. Зображення $W_1, ..., W_n \in W$ подаються на вхід перцептрона в довільній послідовності, у якій кожне з них з'являється неодноразово, через скінченне число пред'явлень інших зображень. Тоді процес навчання перцептрона методом корекції похибок (із квантуванням або без квантування підкріплень) незалежно від початкових значень ваг зв'язків між *R*- та *A*-елементами завжди приводить за скінченне число ітерацій до множини ваг зв'язків, за допомогою яких α-перцептрон може виконати задану класифікацію зображень.

Теорема 2.4 доводить наявність збіжного детермінованого методу навчання з корекцією помилок для елементарного перцептрона із квантуванням або без квантування підкріплень. Наступна теорема доводить, що навчання елементарного перцептрона може бути виконане й при менш жорстких вимогах до виду корекції – методом корекції похибок з випадковим законом підкріплень, коли з появою похибки сигнал підкріплення формується як в α-системі, але знак підкріплення з імовірністю 0,5 може бути додатним або від'ємним.

***Теорема 2.5.*** Нехай є елементарний α-перцептрон із скінченним числом значень ваг зв'язків між *R*- та *A*-нейронами, множина чорно-білих

зображень $W = \{W_1, ..., W_n\}$, деяка класифікація $C(W)$ цих зображень на дві підмножини, що може бути виконана α-перцептроном при деякому наборі ваг зв'язків між *R*- та *A*-нейронами, зображення $W_1, ..., W_n \in W$, що подаються на вхід перцептрона в довільній послідовності, у якій кожне з них з'являється неодноразово через скінченне число пред'явлень інших зображень. Тоді процес навчання перцептрона, величина сигналів підкріплень якого формується, як у α-системі із квантуванням підкріплень, а знак підкріплення вибирається з імовірністю 0,5 додатним або від'ємним, може бути виконаний за скінченний час із ймовірністю, що дорівнює одиниці, незалежно від початкових значень ваг зв'язків між *R*- та *A*-нейронами.

Природно, що метод з випадковим знаком підкріплення вимагає більшого обсягу обчислень при навчанні перцептрона, ніж пряма корекція похибок із квантуванням або без квантування підкріплень. Ще більшого обсягу обчислень вимагає метод, у якому виробляється випадковий вибір не тільки знака, але й величини підкріплення. Розенблаттом доведена теорема про те, що з імовірністю, яка дорівнює одиниці, навчання перцептрона може бути виконане за скінченний час і методом корекції випадковими збурюваннями, коли підкріплення формується, як у α-системі, але при цьому величина η та знак підкріплень для кожної ваги зв'язку вибираються окремо й незалежно відповідно до деякого заданого закону розподілу ймовірностей.

Менш універсальною системою підкріплень, ніж α-система й системи з випадковим формуванням підкріплень, є γ-система. Це доводить наступна теорема Розенблатта.

***Теорема 2.6.*** Нехай є елементарний γ-перцептрон, підмножина $W = \{W_1, ..., W_n\}$ чорно-білих зображень та деяка класифікація $C(W)$ цих зображень на два класи $W^1$, $W^2$. Тоді для виконання класифікації $C(W)$ може існувати набір ваг зв'язків, недосяжний для γ-системи підкріплень.

***Доведення.*** Нехай функціонування *A*-нейронів визначається виразом

$$U_{\text{вих}.Ak} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } U_{\text{вх}.Ak} \geq \theta, \\ 0, & \text{якщо } U_{\text{вх}.Ak} < \theta, \end{cases} \quad k = \overline{1,n},$$

де $U_{\text{вих}.Ak}, U_{\text{вх}.Ak}$ – відповідно вихідний й вхідний сигнали *k*-го *A*-нейрона; $\theta$ – поріг спрацьовування *A*-нейронів.

Нехай також кожний *A*-нейрон збуджується тільки одним зображенням з множини *W*, а класифікація *C*(*W*) здійснюється за допомогою *R*-елемента, функціонування якого описується співвідношенням

$$U_{\text{вих}.R} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } U_{\text{вх}.R} > 0, \\ -1, & \text{якщо } U_{\text{вх}.R} < 0, \end{cases}$$

де $U_{\text{вих}.R}, U_{\text{вх}.R}$ – відповідно вихідний й вхідний сигнали *R*-нейрона. Виберемо класифікацію *C*(*W*), що відносить всі зображення до класу $W^1$ ($U_{\text{вих}.R}$, $U_{\text{вх}.R} > 0$) або до класу $W^2$ ($U_{\text{вих}.R}$, $U_{\text{вх}.R} < 0$). Очевидно, що у першому випадку рішення існує тільки тоді, коли ваги всіх зв'язків між *R*- та *A*-елементами додатні (або від'ємні, якщо всі зображення відносяться до класу $W^2$). Якщо для першого випадку початкові ваги всіх зв'язків між *R*- та *A*-нейронами від'ємні, а для другого – додатні, то в силу властивості консервативності γ-системи підкріплень щодо суми всіх ваг зв'язків між *R*- та *A*-нейронами, вона не зможе виконати правильне настроювання ваг зв'язків перцептрона для розглянутої класифікації *C*(*W*).

### 2.3. Індивідуальні завдання

1. Розробити структуру елементарного перцептрона, здатного розпізнавати перші дві букви вашого імені та вашого прізвища. При цьому необхідно обґрунтувати вибір:

- числа рецепторних нейронів (число *n* *S*-елементів перцептрона повинне бути в межах $12 \le n \le 30$);
- числа нейронів схованого шару;
- величину кроку в алгоритмі навчання перцептрона;
- види функцій активації нейронів кожного шару;
- величини порогів нейронів кожного шару.

2. Навчити нейронну мережу методом α- та γ-підкріплень. Порівняти роботу обох методів.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

# НЕЙРОННА МЕРЕЖА ХЕММІНГА

## 3.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи з нейронною мережею Хеммінга.

## 3.2. Короткі відомості з теорії

### *3.2.1. Мережа Хеммінга*

Мережа Хеммінга – це одна з найбільш багатообіцяючих нейронних мереж, що розпізнає та класифікує зображення. У цій мережі чорно-білі зображення подаються у вигляді $m$-мірних біполярних векторів. Свою назву вона отримала від відстані Хеммінга, що використовується в мережі у мірі подібності $R$ зображень вхідного та еталонного, що зберігається за допомогою ваг зв'язків мережі. Міра подібності визначається співвідношенням

$$R = m - R_x, \tag{3.1}$$

де $m$ – число компонентів вхідного та еталонного векторів; $R_x$ – відстань Хеммінга між векторами.

***Визначення 3.1***. Відстанню Хеммінга між двома двійковими векторами називається число компонентів, у яких вектори різні.

В силу визначення відстані Хеммінга міра подібності зображень (3.1) може задаватися й як число $a$ компонент двійкових векторів, у яких вони збігаються: $R = a$.

Запишемо для біполярних векторів $S = (s_1, ..., s_m)$ та $Z = (z_1, ..., z_m)$ їхній скалярний добуток через число збіжних компонентів та компонентів, що відрізняються:

$$SZ = \sum_{i=1}^{m} s_i z_i = a - d, \tag{3.2}$$

де $a$ – число однакових компонентів векторів; $d$ – число різних компонентів векторів $S$ та $Z$.

Оскільки $m$ – розмірність векторів, то $m = a + d$, а отже, скалярний добуток (3.2) можна записати у вигляді

$$SZ = 2a - m.$$

Звідси нескладно одержати

$$a = m/2 + \frac{SZ}{2} = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} s_i z_i. \qquad (3.3)$$

Праву частину виразу (3.3) можна розглядати як вхідний сигнал нейрона, що має $m$ синапсів з ваговими коефіцієнтами $z_i/2$ $(i = \overline{1,m})$ та зсувом $m/2$. Синапси нейрона сприймають $m$ компонент вхідного вектора $S = (s_1, ..., s_m)$. Така інтерпретація правої частини виразу (3.3) приводить до архітектури нейронної підмережі, зображеної в нижній частині рис. 3.1. Одні автори мережу, зображену на рис. 3.1, називають мережею Хеммінга. Інші мережею Хеммінга називають тільки її нижню частину, уважаючи, що наведена мережа складається із двох підмереж: Хеммінга й Maxnet. Ми будемо дотримуватися першої точки зору.

Мережа Хеммінга має $m$ вхідних нейронів $S_1$, …, $S_m$, що сприймають біполярні компоненти $s_1^q, ..., s_m^q$ вхідних зображень $S^q$ $(q = \overline{1,L})$. Вихідні сигнали $S$-елементів визначаються співвідношенням

$$U_{\text{вих.}Si} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } s_i^q = 1, \\ -1, & \text{якщо } s_i^q = -1, \end{cases} \qquad (3.4)$$

тобто вихідний сигнал $S$-елемента повторює його вхідний сигнал:

$$U_{\text{вих.}Si} = U_{\text{вх.}Si} = s_i^q.$$

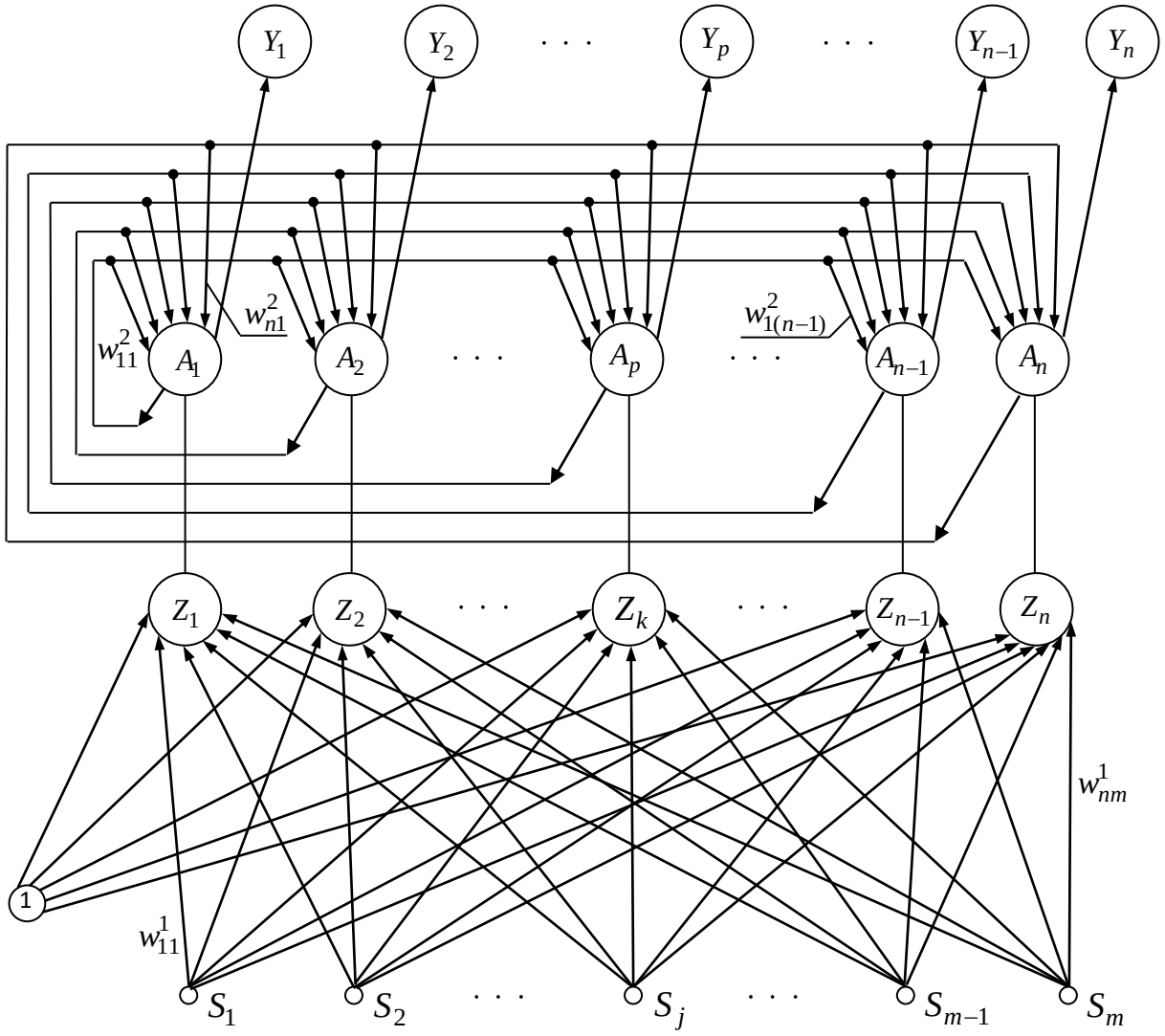



Рис. 3.1. Мережа Хеммінга

Кожний нейрон $S_j$ ($j = \overline{1,m}$) зв'язаний із входом кожного елемента $Z_k$ ($k = \overline{1,n}$). Ваги цих зв'язків $w^1_{11}, w^1_{12}, ..., w^1_{mn}$ містять інформацію про $k$ еталонних зображень $V^k = (v^k_1, ..., v^k_m)$:

$$w^1_{1k} = v^k_1 / 2, ..., w^1_{mk} = v^k_m / 2. \qquad (3.5)$$

Функції активації $Z$-елементів описується співвідношенням

$$g_Z(U_{\text{вх.}}) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } U_{\text{вх.}} \le 0, \\ k_1 U_{\text{вх.}}, \text{ якщо } 0 \le U_{\text{вх.}} \le U_n, \\ U_n, \text{ якщо } U_{\text{вх.}} > U_n, \end{cases} \quad (3.6)$$

де $U_{\text{вх.}}$ – вхідний сигнал нейрона; $k_1$, $U_n$ – константа.

При пред'явленні вхідного зображення $S^* = (s_1^*, ...., s_m^*)$ кожний $Z$-нейрон розраховує свій вхідний сигнал відповідно до виразу (3.3)

$$U_{\text{вх.}Zk} = m/2 + \sum_{i=1}^{m} w_{ik}\ S_i^* \quad (3.7)$$

і за допомогою функцій активації визначає вихідний сигнал $U_{\text{вих.}Z_k}$. Вихідні сигнали $Z$-елементів є вхідними сигналами $a_1$, …, $a_n$ верхньої підмережі, що є мережею Maxnet. Функції активації нейронів $A_p$ ($p = \overline{1,n}$) та ваги їхніх зв'язків задаються співвідношеннями

$$g(U_{\text{вх.}}) = \begin{cases} U_{\text{вх.}}, \text{ якщо } U_{\text{вх.}} > 0, \\ 0, \text{ якщо } U_{\text{вх.}} \le 0. \end{cases}$$

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = j, \\ -\varepsilon, \text{ якщо } i \ne j, \ i, j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

де $\varepsilon$ – константа, що задовольняє нерівності $0 < \varepsilon \le 1/n$.

Мережа функціонує циклічно, динаміка нейронів описується ітераційним виразом

$$U_i(t+1) = g(U_i(t) - \varepsilon \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} U_j(t)), \quad i = \overline{1,n},$$

при початкових умовах

$$U_i(0) = a_i = U_{\text{вих.}Z_i}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (3.8)$$

Якщо серед вхідних сигналів $a_1$, …, $a_n$ нейронів $A_1$, …, $A_n$ є один найбільший сигнал $a_p$ ($p \in \{1, 2, \ldots, n\}$), то в результаті ітераційного

процесу в підмережі Maxnet тільки один нейрон $A_p$ залишиться з вихідним сигналом, більшим від нуля, тобто стане "переможцем". Оскільки вихідні сигнали $U_1$, …, $U_p$ , …, $U_n$ *A*-елементів надходять на входи *Y*-нейронів, які мають функцію активації вигляду

$$g_Y(U_{\text{вх.}}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } U_{\text{вх.}} > 0, \\ 0, & \text{якщо } U_{\text{вх.}} \le 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

то в результаті на виході мережі Хеммінга тільки один нейрон $Y_p$ виявиться з одиничним вихідним сигналом. Одиничний вихід цього нейрона та нульові всіх інших й будуть указувати на те, що пред'явлене зображення $S^* = (s_1^*, ...., s_m^*)$ найбільш близьке, у розумінні заданої міри близькості (3.1), до еталонного зображення $V^p = (v_1^p, ..., v_m^p)$.

Істотна перевага мережі Хеммінга полягає у тому, що вона не вимагає трудомістких обчислювальних процедур для свого навчання. Помітний недолік мережі: вона не виділяє два та більше еталонних зображень, що мають з пред'явленим однакові максимальні міри близькості.

### *3.2.2. Приклад навчання та розпізнавання зображень мережею Хеммінга*

***Приклад 3.1.*** Розробити мережу Хеммінга, що має в якості еталонних п'ять чорно-білих зображень $V^1$, …, $V^5$, наведених на рис. 3.2. Визначити реакцію мережі на зображення, наведені на рис. 3.3.

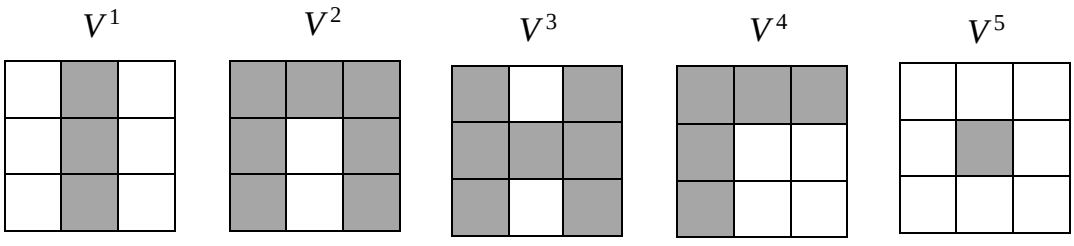



Рис. 3.2. Еталонні зображення

Оскільки задано всього п'ять еталонних зображень, то мережа повинна мати по п'ять *Z*-, *A*- та *Y*-нейронів. Наявність дев'яти чорно-білих

елементів у зображеннях рис. 3.2 та рис. 3.3 визначають дев'ять *S*-нейронів, що сприймають елементи вхідних зображень.

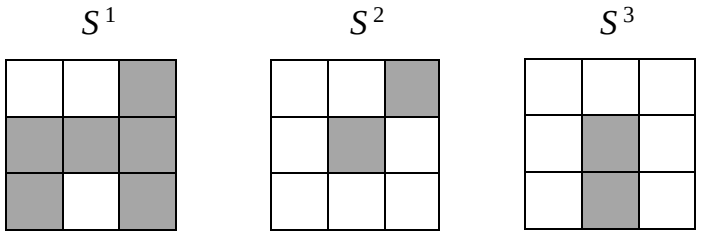



Рис. 3.3. Вхідні зображення

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Рис. 3.4. Нумерація елементів зображень

Пронумеруємо елементи зображень рис. 3.2 та 3.3 відповідно до рис. 3.4 й наведемо зображення $V^p$ $(p=\overline{1,s})$ у векторній формі, використовуючи біполярне подання векторів:

$$V^1 = (-1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1),\ V^2 = (1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1),$$
$$V^3 = (1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1),\ V^4 = (1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1),$$
$$V^5 = (-1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1).$$

Знаючи вектори еталонних зображень та їхнє число за співвідношенням (3.5), розрахуємо матрицю $|W_{ik}|$ $(i=\overline{1,9},\ k=\overline{1,5})$ ваг зв'язків нижньої підмережі мережі Хеммінга:

$$|W_{ik}| = \begin{array}{c|ccccc} & V^1(Z_1) & V^2(Z_2) & V^2(Z_3) & V^4(Z_4) & V^5(Z_5) \\ S_1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ S_2 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ S_3 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ S_4 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ S_5 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ S_6 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ S_7 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ S_8 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ S_9 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{array}, \qquad (3.10)$$

де для наочності рядки та стовпці матриці пронумеровані відповідно за допомогою *S*-елементів та еталонних зображень $V^p$ або нейронів $Z_p$, узятих у круглі дужки.

Зсуви $b_1, ..., b_5$ *Z*-нейронів розраховуються за допомогою виразу

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_5 = \frac{m}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5. \qquad (3.11)$$

Функції активації *Z*-нейронів задамо співвідношенням (3.6) при $k_1 = 0{,}1$ та $U_n = 1/k_1 = 1/0{,}1 = 10$. Функції активації *Y*-нейронів визначимо як функції (3.9). Константу $\varepsilon$, що визначає ваги від'ємних зв'язків у підмережі Maxnet, знайдемо з рівності $\varepsilon = 1/n$, а оскільки $n = 5$, то $\varepsilon = 0{,}2$.

Знаючи всі параметри мережі Хеммінга, розглянемо її функціонування при пред'явленні зображення $S^1$ = (–1,–1, 1, 1, 1, 1, 1,–1, 1) рис. 3.3.

Після пред'явлення зображення $S^1$ на виходах *S*-нейронів у силу того, що їхні вихідні сигнали повторюють вхідні (співвідношення (3.4)), з'явиться вектор сигналів $S_{\text{вих}.S} \equiv S^1$. Використовуючи вихідні сигнали *S*-елементів, кожний *Z*-нейрон розраховує свій вхідний сигнал відповідно до виразу (3.7), матрицею ваг (3.10) та зсувом $b_k$, $k = \overline{1,5}$ (3.11):

$$U_{\text{вх}.Z1} = \frac{9}{2} + \sum_{i=1}^{9} w_{i1} S_i^1 = 4{,}5 + (-0{,}5)\cdot(-1) + 0{,}5(-1) + (-0{,}5)\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot 1 + \\ + 0{,}5\cdot 1 + (-0{,}5\cdot 1) + (-0{,}5)\cdot 1 + (+0{,}5)\cdot(-1) + (-0{,}5)\cdot 1 = 2,$$

$$U_{\text{вх}.Z2} = \frac{9}{2} + \sum_{i=1}^{9} w_{i2} S_i^1 = 4{,}5 + 0{,}5\cdot(-1) + 0{,}5\cdot(-1) + 0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot 1 + \\ + 0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot(-1) + 0{,}5\cdot 1 = 6,$$

$$U_{\text{вх}.Z3} = \frac{9}{2} + \sum_{i=1}^{9} w_{i3} S_i^1 = 4{,}5 + 0{,}5\cdot(-1) + (-0{,}5)\cdot(-1) + 0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 1 + \\ + 0{,}5\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot(-1) + 0{,}5\cdot 1 = 8,$$

$$U_{\text{вх}.Z4} = \frac{9}{2} + \sum_{i=1}^{9} w_{i4} S_i^1 = 4{,}5 + 0{,}5\cdot(-1) + 0{,}5\cdot(-1) + 0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 1 + (-0{,}5\cdot 1) + \\ + (-0{,}5)\cdot 1 + 0{,}5\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot(-1) + (-0{,}5)\cdot 1 = 4,$$

$$U_{\text{вх.}Z5} = \frac{9}{2} + \sum_{i=1}^{9} w_{i5}\, S_i^1 = 4{,}5 + (-0{,}5)\cdot(-1) + (-0{,}5)\cdot(-1) + (-0{,}5)\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot 1 + \\ + 0{,}5\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot(-1) + (-0{,}5)\cdot 1 = 4.$$

За вхідним сигналом $U_{\text{вх.}Zk}$, використовуючи свою функцію активації (3.6) при $k_1 = 0{,}1$ й $U_n = 10$, кожний $Z$-нейрон розраховує свій вихідний сигнал:

$$U_{\text{вих.}Z1} = k_1 U_{\text{вх.}Z1} = 0{,}1\cdot 2 = 0{,}2,$$
$$U_{\text{вих.}Z2} = k_1 U_{\text{вх.}Z2} = 0{,}1\cdot 6 = 0{,}6,$$
$$U_{\text{вих.}Z3} = k_1 U_{\text{вх.}Z3} = 0{,}1\cdot 8 = 0{,}8,$$
$$U_{\text{вих.}Z4} = k_1 U_{\text{вх.}Z4} = 0{,}1\cdot 4 = 0{,}4,$$
$$U_{\text{вих.}Z5} = k_1 U_{\text{вх.}Z5} = 0{,}1\cdot 4 = 0{,}4,$$

Вектор

$$U_{\text{вих.}Z} = (0{,}2;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 0{,}4;\ 0{,}4) \qquad (3.12)$$

є вхідним вектором підмережі Maxnet, що починає ітераційний процес виділення максимального вихідного сигналу при початкових умовах (3.12). Для $t = 1$ маємо

$$U_{\text{вих.}A1}(1) = g(U_{\text{вих.}A1}(0) - \varepsilon \sum_{k=2}^{5} U_{\text{вих.}Ak}(0)) = g(0{,}2 - 0{,}2(0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}4 + 0{,}4)) = \\ = g(-0{,}24) = 0,$$
$$U_{\text{вих.}A2}(1) = g(U_{\text{вих.}A2}(0) - \varepsilon \sum_{k=1,\, k\neq 2}^{5} U_{\text{вих.}Ak}(0)) = g(0{,}6 - 0{,}2(0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}4 + 0{,}4)) = \\ = g(0{,}24) = 0{,}24,$$
$$U_{\text{вих.}A3}(1) = g(U_{\text{вих.}A3}(0) - \varepsilon \sum_{k=1,\, k\neq 3}^{5} U_{\text{вих.}Ak}(0)) = g(0{,}8 - 0{,}2(0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}4)) = \\ = g(0{,}48) = 0{,}48,$$

$$U_{\text{вих.}A4}(1) = g(U_{\text{вих.}A4}(0) - \varepsilon \sum_{k=1,\, k\neq 4}^{5} U_{\text{вих.}Ak}(0)) = g(0{,}4 - 0{,}2(0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}4)) =$$

$$= g(0) = 0\,,$$

$$U_{\text{вих.}A5}(1) = g(U_{\text{вих.}A5}(0) - \varepsilon \sum_{k=1}^{4} U_{\text{вих.}Ak}(0)) = g(0{,}4 - 0{,}2(0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}4)) =$$

$$= g(0) = 0\,.$$

Використовуючи вектор ($U_{\text{вих.}A1}(1)$, ..., $U_{\text{вих.}A5}(1)$) вихідних сигналів *A*-елементів при $t = 1$, аналогічним образом розраховують вихідні сигнали *A*-нейронів при $t = 2$, 3 та 4. Результати розрахунків наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати розрахунків ітераційного процесу у підмережі Maxnet

| Час | Величина вихідних сигналів нейронів $A_k$ $(k = \overline{1,5})$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $U_{\text{вих.}A1}$ | $U_{\text{вих.}A2}$ | $U_{\text{вих.}A3}$ | $U_{\text{вих.}A4}$ | $U_{\text{вих.}A5}$ |
| 0 | 0,200 | 0,600 | 0,800 | 0,400 | 0,400 |
| 1 | 0,000 | 0,240 | 0,480 | 0,000 | 0,000 |
| 2 | 0,000 | 0,144 | 0,432 | 0,000 | 0,000 |
| 3 | 0,000 | 0,058 | 0,403 | 0,000 | 0,000 |
| 4 | 0,000 | 0,000 | 0,402 | 0,000 | 0,000 |

Ітераційний процес у підмережі Maxnet закінчується при $t = 5$, оскільки на цьому кроці функціонування підмережі не змінюється жоден вихідний сигнал *A*-елементів. Вектор вихідних сигналів *A*-елементів, записаний в останньому рядку табл. 3.1, надходить на входи *Y*-елементів. Оскільки *Y*-нейрони мають функцію активації вигляду (3.9), то на виході тільки одного елемента $Y_3$ з'явиться одиничний сигнал. Поява цього сигналу говорить про те, що пред'явлене зображення $S^1$ найбільше близьке до еталонного зображення $V^3$. Візуальне зіставлення рис. 3.2 та 3.3 підтверджує правильність роботи мережі.

Визначимо тепер реакцію мережі при пред'явленні зображення $S^2$ = = (–1, –1, 1, –1, 1, –1, –1, –1, –1). Оскільки розрахунки аналогічні, то наведемо тільки основні проміжні результати:

$$U_{\text{вх}.Z1}(S^2) = 6,\ U_{\text{вх}.Z2}(S^2) = 2,\ U_{\text{вх}.Z3}(S^2) = 4,$$
$$U_{\text{вх}.Z4}(S^2) = 4,\ U_{\text{вх}.Z5}(S^2) = 8;$$
$$U_{\text{вих}.Z1}(S^2) = a_1 = 0{,}6;\ U_{\text{вих}.Z2}(S^2) = a_2 = 0{,}2;$$
$$U_{\text{вих}.Z3}(S^2) = U_{\text{вих}.Z4}(S^2) = a_3 = a_4 = 0{,}4;$$
$$U_{\text{вих}.Z5}(S^2) = a_5 = 0{,}8.$$

Оскільки вхідний вектор (0,6; 0,2; 0,4; 0,4; 0,8) підмережі Maxnet містить єдиний максимальний елемент $a_5$ = 0,8, то в результаті ітераційного процесу на виході тільки елемента $A_5$ виявиться додатний вихідний сигнал, що викличе одиничний сигнал на виході нейрона $Y_5$. Отже, пред'явлене зображення найбільш близьке до еталонного зображення $V^5$, що підтверджує й візуальне зіставлення рис. 3.2 та 3.3.

Визначимо тепер реакцію мережі Хеммінга на вхідне зображення $S^3$ = (–1, –1, –1, –1, 1, –1, –1, 1, –1) (рис. 3.3). При пред'явленні зображення $S^3$ маємо

$$U_{\text{вх}.Z1}(S^3) = 8,$$
$$U_{\text{вх}.Z2}(S^3) = 0,$$
$$U_{\text{вх}.Z3}(S^3) = 1,$$
$$U_{\text{вх}.Z4}(S^3) = 2,$$
$$U_{\text{вх}.Z5}(S^3) = 8.$$

Оскільки сигнали $U_{\text{вх}.Z1}(S^3) = U_{\text{вх}.Z5}(S^3)$ є однаковими максимальними вхідними сигналами, то однаковими будуть й максимальні сигнали на виходах $Z$-елементів $(U_{\text{вих}.Z1}(S^3) = U_{\text{вих}.Z5}(S^3) = 0{,}8)$ та на входах $A$-нейронів $(a_1(S^3) = a_5(S^3) = 0{,}8)$. Отже, підмережа Maxnet не зможе виділити єдиного максимального сигналу й у результаті її функціонування на всіх виходах $A$- та $Y$-нейронів з'являться нульові сигнали.

Таким чином, мережа Хеммінга не може визначити, до якого з еталонних зображень найбільш близьке пред'явлене зображення $S^3$.

### 3.3. Індивідуальні завдання

1. Розробити нейронну мережу Хеммінга, що зможе розпізнавати не менше 6 різних букв вашого імені та вашого прізвища. При цьому необхідно обґрунтувати вибір:

- числа рецепторних нейронів та нейронів вихідного шару;
- величини параметра ε у підмережі Maxnet;
- види функцій активації нейронів кожного шару;
- величини ваг зв'язків та зсувів у підмережі Хеммінга.

2. Навчити нейронну мережу еталонним зображенням букв.

3. Дослідити можливості мережі з розпізнавання перекручених зображень.

4. Підібрати вхідне зображення, рівновіддалене за відстанню Хеммінга від двох еталонних зображень. Яка реакція при пред'явленні цього зображення? Чи можете ви запропонувати спосіб більш інформативної поведінки мережі при пред'явленні подібних зображень?

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

# ДИСКРЕТНА НЕЙРОННА МЕРЕЖА ХОПФІЛДА

## 4.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи з нейронною мережею Хопфілда.

## 4.2. Короткі відомості з теорії

### *4.2.1. Нейронні мережі Хопфілда*

Мережі цього типу були запропоновані американським біофізиком Джоном Хопфілдом у 1982 році, коли йому вдалося залучити до аналізу нейронних мереж потужний апарат статистичної фізики на основі аналогій між нейронними мережами та особливими фізичними системами – спіновими стеклами. Спінові стекла – це ансамблі електромагнітних часток, що перебувають на переході фаз, наприклад, на нижній точці плавлення скла. Кожна частка має власний момент кількості руху, що називається спіном. Спін може мати тільки дві орієнтації $S_1$, $S_2$ щодо зовнішнього магнітного поля, спрямованого по деякій осі $x$. Одна з них збігається з напрямком поля ($S_1 = 1$), а інша – йому протилежна ($S_2 = -1$). Спінові стекла мають структуру атракторів (стійких станів) у своєму фазовому просторі. Кожний атрактор можна розглядати як запис певної інформації, яку можна зчитати за певних умов. Пізніше з'ясувалося, що не тільки спінові стекла, але й інші фізичні системи мають у своїх фазових просторах підходящі для нейронних мереж множини атракторів. Це поняття часто використовується в теорії нейронних мереж, тому наведемо основні відомості про атрактори.

***Визначення 4.1.*** Топологією у деякій множині $X$ називається будь-яка система $\tau$ її підмножин $M$, що задовольняє такі вимоги:

1. Множина $X$ і порожня множина $\varnothing$ належать $\tau$.

2. Об'єднання $\bigcup_{i=1}^{m} M_i$ будь-якого скінченного або нескінченного числа множин з $\tau$ належить $\tau$.

3. Перетинання $\bigcap_{r=1}^{n} M_r$ будь-якого скінченного числа множин з $\tau$ належить $\tau$.

***Визначення 4.2.*** Топологічним простором називається пара $(X, \tau)$, тобто множина $X$ із заданою в ній топологією.

***Визначення 4.3.*** $C^0$-потоком називається відображення $F_t(x)$, що задовольняє такі умови:

1. $F_t(x)$ – неперервне по $t$ та $x$.

2. $F_t$: $(X, \tau) \to (X, \tau)$, $F_0$ – тотожне відображення; $F_{t+s} = F_s \circ F_t$ для всіх $t, s \in R$; $R$ – множина дійсних чисел.

***Визначення 4.4.*** $C^0$-напівпотоком називається $C^0$-потік, визначенний тільки для $t \geq 0$.

***Визначення 4.5.*** Нехай $M_k$ – множина й $M_k \subset X$, $F_t$ – $C^0$-напівпотік на топологічному просторі $(X, \tau)$, що задовольняє умову $F_t(M_k) \subset M_k$. Множина $M_k$ називається стійкою у топологічному просторі $(X, \tau)$, якщо для будь-якого досить малого околу $U$ множини $M_k$ існує такий його окіл $V \supset U$, що траєкторія $x(x_0, t) \equiv F_t(x_0)$ при деякому $t \geq 0$ належить $U$, якщо $x_0 \in V$.

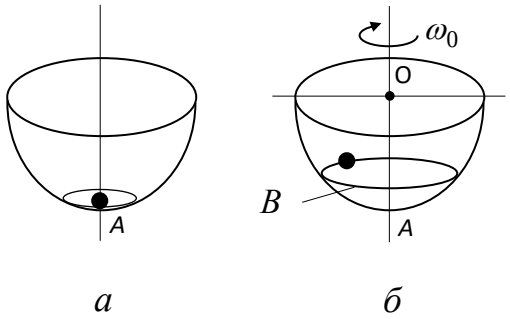
***Визначення 4.6.*** Стійка множина $M_k$ називається асимптотично стійкою або аттрактором, якщо для будь-якого околу $U$ множина $M_k$ існує такий його окіл $V$, що перетинання всіх траєкторій $x(x_0, t) \equiv F_t(\mathrm{x}_0)$, $x_0 \in V$ задовольняє рівність $\bigcap_{t>0} F_t(V) = M_k$.

Іншими словами, множина $M_k$ стійка (асимптотично стійка), якщо будь-яка траєкторія, що проходить через точку, близьку до множини $M_k$, залишається поблизу цієї множини (прямує в множину $M_k$).

Стійкі точки й множини часто зустрічаються в різних областях природознавства. Можна розглянути порожню нерухливу півсферу, у яку кинута маленька важка кулька (рис. 4.1, *а*). Кулька після ряду рухів зупиняється або в самій нижній точці $A$ півсфери, або в одній із точок її досить малого околу. У цьому випадку ми маємо стійку точку.

Якщо півсферу почати обертати навколо деякої вертикальної осі $OA$ (рис. 4.1, *б*) з деякою кутовою швидкістю $\omega_0$, то кулька прийде у рух та її стійке положення тепер буде не окрема точка, а ціла орбіта $B$, на яку вона попадає при будь-яких киданнях кульки усередину цієї півсфери. Якщо півсфера й кулька оброблені ідеально та торкаються одна одної тільки в одній точці, то точка $A$ і траєкторія $B$ перетворюються в асимптотично

стійкі. Для будь-якого околу (який перебуває в межах півсфери або поза неї, але забезпечує влучення кульки у півсферу з подальшим рухом усередині неї) точка *A* при нерухливій півсфері або орбіта *B* при обертанні траєкторії кульки кінчається в асимптотичному стійкому стані.




*а* *б*

Рис. 4.1. Стійкі множини у нерухомій півсфері та півсфері, що обертається

Можна дати й трохи іншу інтерпретацію атрактора. Уявимо собі деякий природний ландшафт, коли йде сильний дощ і по місцевості тече вода. Атрактору можна протипоставити озеро або басейн, що збирає воду. А якщо атрактор – це точка, через яку вода йде під землю, то кожна крапля води прагне потрапити в цю точку.

Розглянемо тепер приклад з області нейронних мереж, зокрема, навчання елементарного перцептрона розпізнавання двох зображень, наприклад, букв П й Г (рис. 4.2).

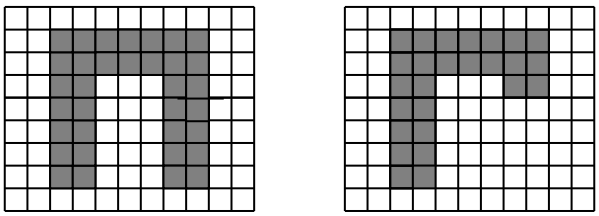


Рис. 4.2. Еталонні навчальні зображення букв

У процесі навчання мережі виникають дві стаціонарні точки або два атрактори. Басейни атракторів створюються всіма зображеннями букв П та Г з різними дефектами. Ці зображення разом з еталонними багаторазово пред'являються перцептрону в процесі навчання мережі, коли фактично по двох заданих стаціонарних точках, використовуючи ітераційну процедуру, намагаються знайти відповідну матрицю ваг зв'язків нейромережі.

Елементарний перцептрон – це мережа тільки із прямою передачею сигналів, а в таких нейромережах атракторами можуть бути тільки – стаціонарні точки. Якщо ж у перцептроні або будь-якій іншій нейронній мережі є зворотні зв'язки, то при зовнішнім збурюванні мережі в ній можуть виникати незатухаючі динамічні процеси. Розглянемо більш докладно процеси в мережах зі зворотними зв'язками. Нехай деяка мережа складається з $n$ біполярних нейронів з матрицею ваг $W = \left| w_{ij} \right|, \quad i, j = \overline{1,n}$ та час змінюється дискретно: $t = 0, 1, 2, \ldots$ . Припустимо, що функціонування кожного нейрона такої мережі описується рівнянням

$$U_{\text{вих}.i}(t) = \text{Sign}(\sum_{j=1}^{n} U_{\text{вих}.j}(t) w_{ji} - \theta_i,\ U_{\text{вих}.i}(t-1)),\ \ i = \overline{1,n}, \qquad (4.1)$$

де $U_{\text{вих}.i}(t)$, $U_{\text{вих}.i}(t-1)$ – вихідні сигнали $i$-го нейрона в моменти часу $t$, $t-1$; $U_{\text{вих}.j}(t)$ – вихідний сигнал $j$-го нейрона; $w_{ji}$ – вага зв'язку між $j$-м та $i$-м нейронами; Sign – функція двох змінних, обумовлена співвідношенням

$$U_{\text{вих}.i}(t) = \text{Sign}(U_{\text{вх}.i}(t),\ U_{\text{вих}.i}(t-1)) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } U_{\text{вх}.i}(t) > 0, \\ -1, \text{ якщо} U_{\text{вх}.i}(t) < 0, \\ U_{\text{вих}.i}(t-1), \text{ якщо } U_{\text{вх}.i}(t) = 0, \end{cases} \qquad (4.2)$$

$$U_{\text{вх}.i}(t) = \sum_{j=1}^{n} U_{\text{вих}.j}(t) w_{ji} - \theta_i .$$

Рівняння (4.1) часто називають нейрорівняннями. Система з $n$ нейрорівнянь визначає еволюцію мережі в часі, що багато в чому залежить від режимів спрацьовування її елементів. Можна виділити три характерних режими спрацьовування:

- всі нейрони спрацьовують одночасно;
- для кожного моменту часу $t = 0, 1, 2, \ldots$ задана деяка підмножина $M_t$ з елементів мережі, й у будь-який розглянутий момент часу $t$ спрацьовують нейрони тільки множини $M_t$;
- нейрони, що обрані випадково (іноді послідовно або циклічно), спрацьовують строго по одному.

Останній режим функціонування компонент нейромережі біологічно більш природний, оскільки експерименти на живих організмах показують, що нервові клітини спрацьовують незалежно одна від одної й асинхронно.

***Визначення 4.7.*** Стан $S^* = (U^*_{\text{вих.}1}, U^*_{\text{вих.}2}, ..., U^*_{\text{вих.}n})$ нейромережі називається стійким стосовно довільної підмножини $M$ [1] елементів мережі, якщо він не змінюється при одночасному спрацьовуванні будь-яких його окремих нейронів.

***Визначення 4.8.*** Стан $S^*$ нейромережі називається стійким або стаціонарним, якщо він стійкий стосовно асинхронного спрацьовування будь-яких окремих нейронів та одночасного спрацьовування всіх елементів мережі.

***Визначення 4.9.*** Пряма задача стаціонарності для нейронних мереж складається у визначенні всіх стаціонарних станів нейромережі за заданою матрицею ваг зв'язків $W$ та вектором порогів θ (або вектором зсувів $W_0$) нейронів.

***Визначення 4.10.*** Зворотне завдання стаціонарності для нейронних мереж полягає у тому, щоб за заданою множиною $S = \{S^1 = (U^1_{\text{вих.}1}, ..., U^1_{\text{вих.}n}), ..., \quad S^k = (U^k_{\text{вих.}1}, ..., U^k_{\text{вих.}n})\}$ стаціонарних станів мережі визначити матрицю ваг зв'язків $W$ та вектор порогів θ (або вектор зсувів $W_0$), що забезпечують ці стаціонарні стани.

Всі стаціонарні стани нейромережі теоретично можна визначити із системи рівнянь (4.1), що описує всі компоненти мережі. Для цього досить вибрати початковий стан $S^0$ всіх нейронів мережі й, використовуючи заданий режим їхнього спрацьовування, визначити новий стан $S^1$ мережі, а потім, скориставшись $S^1$ у якості наступного початкового стану, визначити стан $S^2$ і т. д. У результаті цього процесу виникає послідовність станів мережі

$$S^0, S^1, S^2, \ldots, S^k, \ldots \ . \tag{4.3}$$

Ця послідовність може скінчитися або яким-небудь стаціонарним станом $S^p$ або деяким нескінченним динамічним процесом. У випадку досягнення стаціонарного стану $S^p$ з деякого моменту часу $t = t_q$ спостерігаються стани $S^q$, $S^{q+1}$, $S^{q+2}$, ..., $S^{q+m}$, які задовольняють умову $S^q = S^{q+1} = S^{q+2} = ... = S^{q+m} = S^p$.

Стаціонарний стан мережі $S^p$ часто називають асоційованим з її початковим станом $S^0$. Взаємозв'язок станів $S^0$ та $S^p$ використовується для розв'язання задач розпізнавання образів за допомогою нейромереж зі зворотними зв'язками. На подібному взаємозв'язку побудоване й функціонування мереж із прямим поширенням сигналів, наприклад, перцептронів.

Якщо послідовність (4.3) не кінчається стаціонарним станом, тобто якщо вона нескінченна, то в загальному випадку при випадковому спрацьовуванні окремих нейронів або їхніх груп виникають важкоаналізовані послідовності (4.3) станів мережі. У зв'язку із цим обмежимося тільки режимами спрацьовування, які однозначно визначають наступний стан мережі за поточним. Одним з таких режимів є режим синхронного спрацьовування всіх елементів мережі (режим маршрування), іншим – режим послідовного або циклічного спрацьовування по одному елементу: *i*-й, (*i* + 1)-й, …, *n*-й, …, 1-й, 2-й, …, *i*-й, (*i* + 1)-й, … . У цих режимах спрацьовування нейронів ланцюжок станів (4.3) однозначно визначається своїм початковим станом $S^0$. У силу скінченного числа *n* двійкових елементів мережі скінченне й загальне число ($2^n$) станів нейромережі, тому в нескінченній послідовності (4.3) знайдуться принаймні два однакових стани: $S^q$ і $S^p$, $q < p$. Оскільки $S^q = S^p$ й наступний стан мережі однозначно визначається поточним станом та режимом спрацьовування нейронів, то маємо

$$S^q = S^p,\ \ S^{q+1} = S^{p+1},\ S^{q+2} = S^{p+2},\ \ ...,\ S^{p-1} = S^{2p-q-1},\ ...,\ S^p = S^{2p-q},$$

тобто цикл повторюється. В окремому випадку, коли $p = q + 1$, одержуємо одночленний цикл або розглянутий вище стаціонарний стан.

***Визначення 4.11.*** Цикл станів нейромережі, що не має усередині себе інших циклів, називається мінімальним.

Очевидно, що будь-які два мінімальних цикли або збігаються, або не мають загальних станів.

Нехай $C = \{C_1, ..., C_p\}$ – множина всіх мінімальних циклів (або атракторів) нейромережі *N* з заданою матрицею *W* ваг зв'язків. Тоді для будь-якого стану $S^*$ цієї нейромережі існує атрактор або мінімальний цикл $C^* \in C$, до якого він притягається.

***Визначення 4.12.*** Басейном $B_S$ притягнення циклу $C_r$ (або басейном атрактора) називається сукупність всіх станів нейронної мережі, які притягаються до даного циклу: $B_S = \{S_{Cr}^1, \ ..., \ S_{Cr}^{kr}\}$.

Басейни притягнення будь-яких двох циклів $C_k, C_m \in \mathrm{C}$ не перетинаються, тобто

$$B_S(C_k) \bigcap B_S(C_m) = \varnothing, \text{ якщо } k \neq m,$$

а об'єднання басейнів всіх циклів дорівнює множині всіх станів $S$ нейронної мережі:

$$\bigcup_{r=1}^{p} B_S(C_r) = S.$$

У графічній інтерпретації басейни атракторів містять у собі стани (або точки), що відповідають мінімальному циклу, і дерева, що стягуються до станів або точок циклу (рис. 4.3).

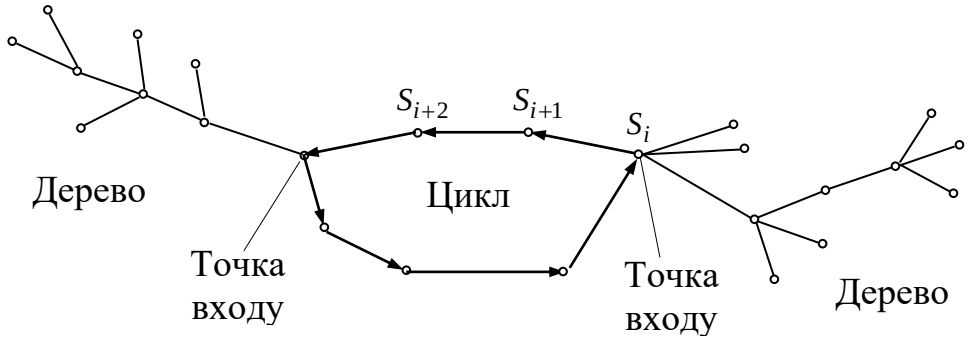



Рис. 4.3. Басейн атрактора

Точки циклу, що мають непусті дерева, називаються точками входу у цикл. Дерева різних точок входу не перетинаються, а їхня сукупність покриває весь басейн атрактора.

Кожний стан $S_{Cr}^1, \ ..., \ S_{Cr}^{kr}$ басейну $B_S(C_r)$ притягнення циклу $C_r$ характеризується числом кроків $q(S_{Cr}^i), \ i = \overline{1, k_r}$, за які мережа зі стану $S_{Cr}^i$ попадає в цикл $C_r$, а найважливішою характеристикою басейну є максимальна висота $h$ його дерев:

$$h(B_S(C_r)) = \max_{i\in\{1,\dots,kr\}} q(S_{Cr}^{i}).$$

У найгіршому разі, коли цикл має одну точку входу, а дерево лінійне, висота дерева дорівнює числу станів мережі у басейні атрактора.

Якщо нейронні мережі $N_1$, $N_2$ мають однакові цикли $C_1$, …, $C_p$ та басейни притягнення $B_S(C_1)$, ..., $B_S(C_p)$, але різні набори чисел $h^{N1}(B_S(C_i))$, $h^{N2}(B_S(C_i))$, $i=\overline{1,p}$, то мережа $N_1$ краща від мережі $N_2$, якщо виконуються співвідношення

$$h^{N1}(B_S(C_i)) \le h^{N2}(B_S(C_i)), \quad i=\overline{1,p}. \tag{4.4}$$

Якщо співвідношення (4.4) виконуються не для всіх циклів $C_i$, то мережі вважаються непорівнянними. Висота дерев басейнів атракторів використовується й для оцінки якості процесів або алгоритмів навчання. Нехай є два алгоритми навчання $A_1$, $A_2$, які за заданими стаціонарними станами $S$ мережі одержують матриці ваг зв'язків $W_{A1}(S)$, $W_{A2}(S)$. Якщо басейни атракторів, породжені матрицею ваг $W_{A1}(S)$, виходять регулярно кращими від басейнів нейромереж з матрицею $W_{A2}(S)$, то алгоритм навчання $A_1$ кращий від алгоритму $A_2$.

### *4.2.2. Дискретна мережа Хопфілда*

У своїй першій роботі, присвяченій нейронним мережам, Хопфілд розглянув повнозв'язну нейронну мережу з бінарних елементів із симетричними зв'язками. Структура цієї мережі наведена на рис. 4.4.

Дискретна мережа Хопфілда складається з єдиного шару нейронів, кожний з яких зв'язаний з усіма іншими та має мережні входи та виходи. Сигнали на мережних входах нейронів визначають їхні вихідні сигнали:

$$U_{\text{вих}.i} = s_i, \quad i=\overline{1,n}.$$

При відсутності сигналів на мережних входах елементи мережі функціонують в асинхронному режимі, при якому кожний з них визначає свій вихідний сигнал у випадкові моменти часу із заданою середньою частотою відповідно до виразу

$$U_{\text{вих}.i} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum_{j=1}^{n} w_{ji} U_{\text{вих}.i} > \theta_i, \\ 0, \text{ якщо } \sum_{j=1}^{n} w_{ji} U_{\text{вих}.i} < \theta_i, \\ U_{\text{вих}.i}, \text{ якщо } \sum_{j=1}^{n} w_{ji} U_{\text{вих}.i} = \theta_i, \end{cases} \tag{4.5}$$

де $U_{\text{вих}.i}, \theta_i$ – відповідно вихідний сигнал та поріг $i$-го нейрона; $w_{ji}$ – вага зв'язку між $j$-м та $i$-м нейронами.

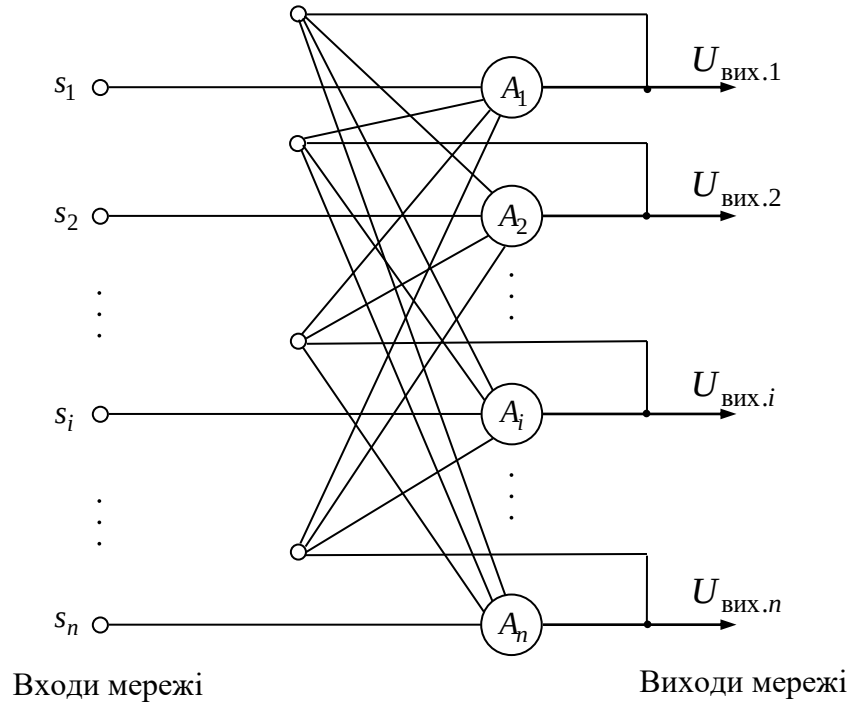



Рис. 4.4. Нейронна мережа Хопфілда

Матриця $W = \left| w_{ij} \right|$ $(i, j = \overline{1,n})$ ваг зв'язків нейромережі симетрична й має нульові компоненти на головній діагоналі, тобто

$$w_{ij} = w_{ji}, \quad w_{ii} = 0, \quad i, j = \overline{1,n}. \tag{4.6}$$

Такий вигляд матриці ваг забезпечує стійкість мережі при подачі на її входи зовнішніх сигналів, внаслідок чого виникає послідовність станів мережі вигляду (4.3), що закінчується стаціонарним станом. Процес

досягнення стаціонарного стану можна описати за допомогою мінімізації спеціальної енергетичної функції:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} U_{\text{вих}.i} U_{\text{вих}.j} - \sum_{j=1}^{n} U_{\text{вх}.j} U_{\text{вих}.j} + \sum_{j=1}^{n} \theta_j U_{\text{вих}.j}, \qquad (4.7)$$

де $E$ – штучна енергія мережі, задана у вигляді функції Ляпунова; $U_{\text{вх}.j}$ – зовнішній вхідний сигнал $j$-го нейрона.

Енергію всієї мережі можна визначити як суму енергій її окремих нейронів:

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j. \qquad (4.8)$$

З виразів (4.8) та (4.7) маємо

$$E_j = -\left( \sum_{i=1, i\neq j} w_{ij} U_{\text{вих}.i} + U_{\text{вх}.j} - \theta_j \right) U_{\text{вих}.j}.$$

Розглянемо зміну енергії $\Delta E_j$ довільного $j$-го елемента при його спрацьовуванні:

$$\begin{aligned} \Delta E_j &= E_j(U_{\text{вих}.j} + \Delta U_{\text{вих}.j}) - E_j(U_{\text{вих}.j}) = \\ &= -\left( \sum_{i=1, i\neq j} w_{ij} U_{\text{вих}.i} + U_{\text{вх}.j} - \theta_j \right) \Delta U_{\text{вих}.j}. \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Для бінарних нейронів прирощування їх вихідних сигналів може набувати тільки трьох значень: +1, 0, –1. При цьому знак прирощування $\Delta U_{\text{вих}.j}$ для $j$-го елемента збігається зі знаком виразу в круглих дужках. Дійсно, якщо $\Delta U_{\text{вих}.j} = -1$, тобто нейрон переходить із одиничного стану у нульовий, то це означає, що відповідно до виразу (4.5) виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ij} U_{\text{вих}.i} + U_{\text{вх}.j} < \theta_j,$$

тобто вираз у круглих дужках співвідношення (4.9) від'ємний. Якщо $\Delta U_{\text{вих}.j} = 1$, то розглянутий $j$-й нейрон переходить із нульового стану в одиничний й, отже,

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ij} U_{\text{вих}.i} + U_{\text{вх}.j} > \theta_j,$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ij} U_{\text{вих}.i} + U_{\text{вх}.j} - \theta_j > 0.$$

Зі збігу знаків співмножників у виразі (4.9) випливає, що при спрацьовуванні будь-якого $j$-го нейрона ні його енергія, ні енергія всієї мережі збільшитися не може. Вона або залишається незмінною, якщо $\Delta U_{\text{вих}.j} = 0$, або зменшується, якщо $\Delta U_{\text{вих}.j} \neq 0$. Отже, у міру спрацьовування нейронів енергія буде монотонно убувати, поки не досягне одного зі своїх локальних мінімумів, якому відповідає одна зі стаціонарних точок нейромережі. Еволюція мережі з будь-якого початкового стану в силу існування функції Ляпунова (4.7) завжди закінчується в одній з її стаціонарних точок, тобто атракторами в дискретній бінарній мережі Хопфілда є тільки стаціонарні точки. Це ж твердження справедливе й для дискретної мережі Хопфілда з біполярними нейронами.

Для зберігання деякої множини зображень $S = \{S^1 = (s_1^1, \ldots, s_n^1), \ldots, S^p = (s_1^p, \ldots, s_n^p)\}$ у біполярній мережі Хопфілда використовується матриця $W$ ваг зв'язків з елементами

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{p} s_i^k s_j^k, \quad w_{ij} = w_{ji} \text{ при } i \neq j, \quad w_{ii} = 0, \tag{4.10}$$

де індекс $k$ указує на приналежність вхідних сигналів $k$-му зображенню.

При переході до бінарних нейронів елементи $w_{ij}$ матриці $W$ визначаються співвідношенням

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (2s_i^k - 1)(2s_j^k - 1), \quad w_{ij} = w_{ji} \text{ при } i \neq j, \quad w_{ii} = 0. \tag{4.11}$$

Пороги $\theta_i$ всіх бінарних елементів звичайно беруться такими, що дорівнюють нулю, а пороги біполярних нейронів часто визначаються через суму елементів матриці ваг:

$$\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} w_{ij}. \qquad (4.12)$$

Для мережі Хопфілда число $p$ зображень, що запам'ятовуються, не повинне перевищувати величину, що приблизно дорівнює $0{,}15n$, де $n$ – число нейронів мережі. Крім того, якщо є пари дуже схожих зображень, наприклад $S^k$, $S^q$, то вони можуть викликати в мережі перехресні асоціації, тобто пред'явлення на входи мережі зображення $S^k$ може приводити до появи на її виході зображення $S^q$ й навпаки.

Задачі, що розв'язуються дискретними мережами Хопфілда з бінарними або біполярними нейронами у якості асоціативної пам'яті, формулюються в такий спосіб. Відомий набір еталонних двійкових зображень або сигналів. Мережа повинна вміти за частковою інформацією неідеальних зображень, що подаються на її вхід, виділяти еталонні зображення або подавати інформацію про те, що вхідний вектор не відповідає жодному зі збережених у її пам'яті. Коли мережа розпізнає яке-небудь зображення, то на її виходах з'являється саме це зображення. У противному випадку вектор вихідних сигналів не збігається з жодним з еталонних.

***Приклад 4.1.*** Розглянемо можливості дискретної мережі Хопфілда з дев'ятьма біполярними нейронами щодо розпізнавання неідеальних зображень букв Н и Т. Еталонні зображення $S^1$ та $S^2$ цих букв наведено на рис. 4.5, там же дана нумерація елементів зображень, що відповідає нейронам мережі Хопфілда й їхньому векторному поданню:

$$S^1 = (s_1^1,\ ...,\ s_9^1) = (1, -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, -1,\ 1),$$
$$S^2 = (s_1^2,\ ...,\ s_9^2) = (1,\ 1,\ 1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1).$$

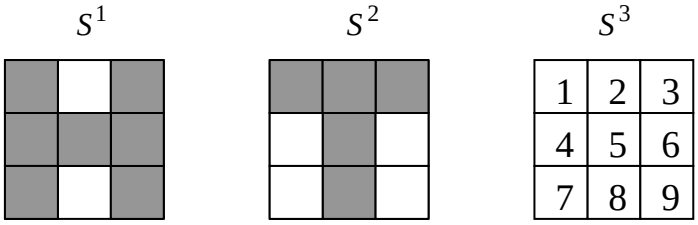



Рис. 4.5. Зображення $S^1$, $S^2$, $S^3$

Відповідно до вихідних даних вираз (4.11) для розглянутого прикладу набуває вигляду

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{2} s_i^k s_j^k = s_i^1 s_j^1 + s_i^2 s_j^2 , \quad i \neq j.$$

Розрахуємо вагу зв'язку $w_{12}$:

$$w_{12} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

У силу загальної рівності $w_{ij} = w_{ji}$ також одержимо, що $w_{21} = w_{12} = 0$. Аналогічно розраховуються й інші елементи $w_{ij}$ $(i, j = \overline{1,9},\ i \neq j)$ матриці $W$ ваг зв'язків. Елементи головної діагоналі матриці $W$ визначаються виразом (4.10) при $i = j$: $w_{11} = w_{22} = ... = w_{99} = 0$.

Результати розрахунків матриці $W$ наведено в табл. 4.1.

Пороги біполярних нейронів мережі Хопфілда розраховуються за допомогою співвідношення (4.12) та даних табл. 4.1:

$$\theta_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{9} w_{ij} = 4, \quad k = \overline{1,9}.$$

Пред'явимо мережі Хопфілда зображення $S^1$ букви Н (рис. 4.5) та розрахуємо вихідні сигнали мережі після його зняття при двох значеннях порогів: $\theta_k = 4$ та $\theta_k = -4$. Результати розрахунків наведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.1 – Матриця ваг зв'язків

| Номери нейронів | Номери нейронів | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | –2 | 0 | –2 | –2 | 2 | –2 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | –2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | –2 | 2 |
| 5 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | –2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | –2 | 2 |
| 7 | 0 | –2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | –2 | 2 |
| 8 | 0 | 2 | 0 | –2 | 0 | –2 | –2 | 0 | –2 |
| 9 | 0 | –2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | –2 | 0 |

Таблиця 4.2 – Результати розрахунків вихідних сигналів мережі Хопфілда після пред'явлення зображення $S^1$ букви Н

| Номери нейронів | Компоненти зображення $S^1$ | Вхідні сигнали нейронів | Пороги нейронів | Вихідні сигнали нейронів |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | –4 або 4 | 1 |
| 2 | –1 | –10 | –4 або 4 | –1 |
| 3 | 1 | 4 | –4 або 4 | 1 |
| 4 | 1 | 10 | –4 або 4 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | –4 або 4 | 1 |
| 6 | 1 | 10 | –4 або 4 | 1 |
| 7 | 1 | 10 | –4 або 4 | 1 |
| 8 | –1 | –10 | –4 або 4 | –1 |
| 9 | 1 | 10 | –4 або 4 | 1 |

З аналізу даних табл. 4.2 випливає, що вектор вихідного зображення мережі повторює зображення $S^1$ у широкому діапазоні значень порогів. Аналогічна ситуація виходить й при пред'явленні зображення $S^2$ букви Т (табл. 4.3), тобто розрахована дискретна мережа Хопфілда, як їй і треба, повторює на своєму виході ідеальні вхідні зображення.

Пред'явимо тепер мережі зображення $S^{3i}$, інверсне зображенню $S^3$ (рис. 4.5). Зображення $S^{3i}$ можна розглядати як перекручене подання букви Н, у якого загублені два від'ємних компоненти. Результати розрахунків для цього випадку при $\theta_k = -4$ наведено у табл. 4.4 (при $\theta_k > 2$

зображення не відновлюється). Зіставлення п'ятих стовпців таблиць 4.4 та 4.2 показує, що мережа відновила еталонне зображення букви Н.

Таблиця 4.3 – Результати розрахунків вихідних сигналів мережі Хопфілда після пред'явлення зображення $S^2$ букви Т

| Номери нейронів | Компоненти зображення $S^2$ | Вхідні сигнали нейронів | Пороги нейронів | Вихідні сигнали нейронів |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | –4 або 4 | 1 |
| 2 | 1 | 10 | –4 або 4 | 1 |
| 3 | 1 | 4 | –4 або 4 | 1 |
| 4 | –1 | –10 | –4 або 4 | –1 |
| 5 | 1 | 4 | –4 або 4 | 1 |
| 6 | –1 | –10 | –4 або 4 | –1 |
| 7 | –1 | –10 | –4 або 4 | –1 |
| 8 | 1 | 10 | –4 або 4 | 1 |
| 9 | –1 | –10 | –4 або 4 | –1 |

Таблиця 4.4 – Результати розрахунків вихідних сигналів мережі Хопфілда після пред'явлення зображення $S^3$

| Номери нейронів | Компоненти зображення $S^{3i}$ | Вхідні сигнали нейронів | Пороги нейронів | Вихідні сигнали нейронів |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | –4 | 1 |
| 2 | 1 | –6 | –4 | –1 |
| 3 | 1 | 4 | –4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | –4 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | –4 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | –4 | 1 |
| 7 | 1 | 2 | –4 | 1 |
| 8 | 1 | –6 | –4 | –1 |
| 9 | 1 | 2 | –4 | 1 |

При пред'явленні зображень $S^1$, $S^2$, $S^{3i}$ мережа попадала в стаціонарну точку за один такт часу при синхронному спрацьовуванні всіх її елементів. Однак таке ідеально швидке досягнення стійкого стану можливе далеко не завжди. Пред'явимо мережі зображення $S^4$ (рис. 4.6), яке можна розглядати як сильно перекручений еталон букви Н, у якого п'ять одиничних компонентів замінені на протилежні "–1".

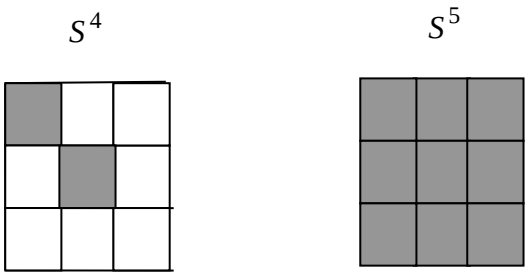



Рис. 4.6. Зображення $S^4$, $S^5$

Для досягнення стаціонарної точки, що відповідає зображенню $S^1$ букви Н, у цьому випадку при $\theta_k = -4$ необхідно два такти часу. При цьому мережа проходить через стани $S^5$ (рис. 4.6). Вхідні й вихідні сигнали нейронів під час цього динамічного процесу наведено в табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – Результати розрахунків вихідних сигналів мережі Хопфілда після пред'явлення зображення $S^4$

| Номери нейронів | Компоненти зображення $S^4(t = 0)$ | Вхідні сигнали нейронів | | Вихідні сигнали нейронів | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 1$ | $t = 2$ |
| 1 | 1 | 0 | 4 | 1 | 1 |
| 2 | –1 | 6 | –6 | 1 | –1 |
| 3 | –1 | 4 | 4 | 1 | 1 |
| 4 | –1 | –2 | 2 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 4 | 1 | 1 |
| 6 | –1 | –2 | 2 | 1 | 1 |
| 7 | –1 | –2 | 2 | 1 | 1 |
| 8 | –1 | 6 | –6 | 1 | –1 |
| 9 | –1 | –2 | 2 | 1 | 1 |

### 4.3. Індивідуальні завдання

1. Навчити дискретну мережу Хопфілда розпізнавання трьох різних букв вашого імені. Обґрунтувати вибір:

- числа нейронів мережі;
- способу кодування елементів чорно-білих зображень;
- алгоритму навчання мережі.

2. Дослідити можливості мережі щодо розпізнавання перекручених або зашумлених зображень.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

# НЕЙРОННА МЕРЕЖА КОХОНЕНА

## 5.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи з нейронною мережею Кохонена.

## 5.2. Короткі відомості з теорії

### *5.2.1. Нейронна мережа Кохонена*

На відміну від нейронної мережі Хеммінга, дослідженої в попередній лабораторній роботі і віднесеної до класу мереж, що змагаються, у яких ваги зв'язків залишаються фіксованими в процесі їхнього функціонування, мережа Кохонена – представник іншого класу конкуруючих мереж або мереж, що змагаються, у яких ваги зв'язків змінюються в ході ітераційного процесу виділення нейронів-переможців.

Структура цієї нейронної мережі, що має й інші назви – відображення, що самоорганізується, Кохонена, топологічно зберігаюче перетворення та карти ознак Кохонена, що самоорганізуються, була запропонована Кохоненом у 1982 році. Відмінна риса цієї мережі – відображати вхідну інформацію, зберігаючи відношення сусідніх вхідних елементів, тобто зберігаючи її топологічну структуру. Ця властивість характерна мозку, але використовується лише в деяких нейронних мережах, хоча вона часто буває необхідною при встановленні характеру взаємозв'язків, які людським оком важко вловлюються. У цьому випадку можливе застосування відображення Кохонена, що дозволяє від важко сприйманих людським зором взаємозв'язків елементів перейти, наприклад, до впорядкованого розташування елементів на прямокутній, гексагональній або будь-який іншій відповідній сітці. Це широко використовується для перетворення багатовимірних вихідних даних в одно- або двовимірні карти ознак Кохонена (або карти Кохонена, що самоорганізуються).

Розглянемо інший можливий ефективний випадок застосування перетворення Кохонена. Є безліч об'єктів, частина з яких дуже схожа одна

на одну, а інша їх частина не схожа або схожа відносно. Необхідно виконати класифікацію таким чином, щоб було наочно видно, яким образом групуються об'єкти й наскільки вони близькі або далекі один від одного.

Можливе також застосування відображення Кохонена для перетворення багатовимірних вихідних даних в одно- або двовимірні "карти ознак Кохонена", які можна розглядати як результат передобробки для інших нейронних мереж.

Структура мережі Кохонена наведена на рис. 5.1.

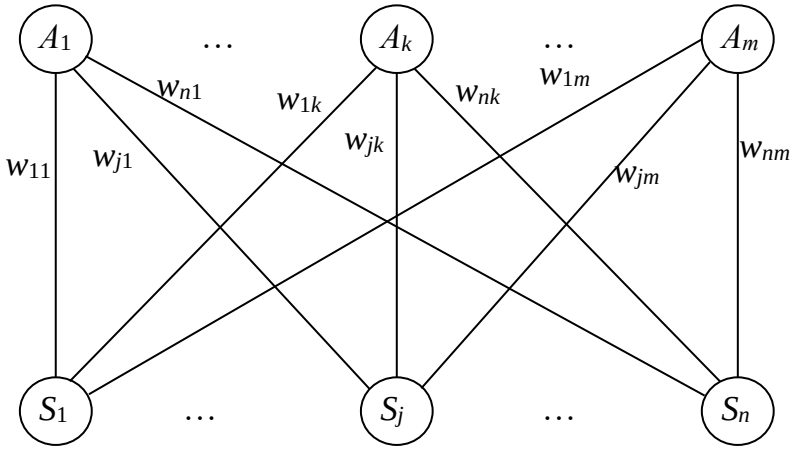



Рис. 5.1. Мережа Кохонена

Мережа має два шари нейронів. Нейрони першого шару сприймають вхідну інформацію у вигляді *n*-мірних безперервних векторів та передають її *A*-нейронам, які впорядковані в одно- або двовимірному масиві як елементи деяких кластерів. Під час процесу самоорганізації при пред'явленні вектора деякого вхідного зображення виділяється *A*-елемент кластера, що у сенсі мінімуму заданої відстані (наприклад, квадрата евклідової відстані) найбільше відповідає цьому вхідному вектору. Цей виділений або перемігший елемент та його найближчі сусіди (або в термінах топології – покриття елемента) за заданим правилом змінюють свої ваги, щоб ще краще відповідати вхідному вектору, тобто елемент переможець та його покриття в деякому сенсі близькі до вхідного вектора й прагнуть цю близькість збільшити.

Приклад покриття елемента $A_j$ для одновимірного випадку наведено на рис. 5.2, а для двовимірного випадку – на рис. 5.3.

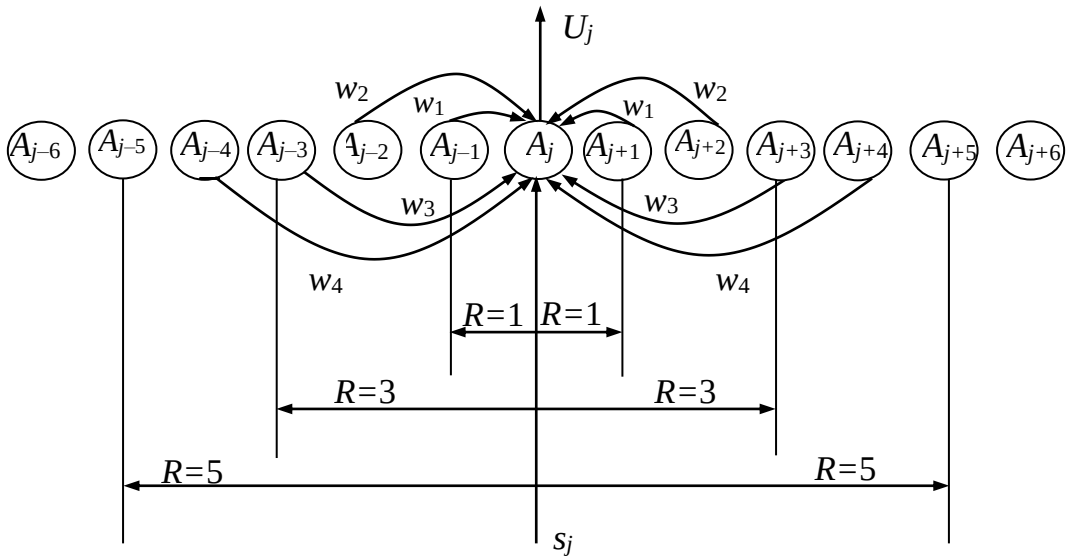



Рис. 5.2. Схема взаємодії нейронів у одновимірному випадку

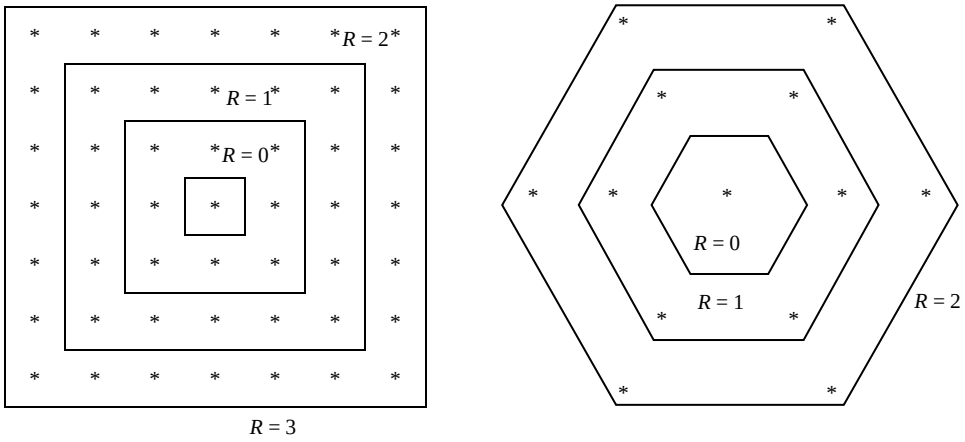



Рис. 5.3. Топологія оточення нейрона у двовимірному випадку

На рис. 5.2 покриття елемента $A_j$ з радіусом $R = 1$ включає, крім $A_j$, усього два елементи: $A_{j-1}$ та $A_{j+1}$, а покриття з $R = 5$ – десять елементів: $A_{j-5}$, ..., $A_{j-1}$, $A_{j+1}$, ..., $A_{j+5}$. У двовимірному випадку (рис. 5.3) при прямокутних ґратах та $R = 1$ у покриття входять вісім елементів, найближчих до виділеного, а у випадку гексагональних ґрат – шість. Перемігші елементи, що розташовані близько до краю ґрат, мають менше число найближчих сусідів, відсутні сусіди в процесі функціонування мережі просто ігноруються.

### *5.2.2. Алгоритм навчання мережі Кохонена*

***Крок 1***. Ініціюються ваги $w_{jk}$ $(j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m})$ зв'язків мережі випадковими числами з інтервалу [0, 1]. Задається множина, що визначає топологічну близькість елементів, і навчальний коефіцієнт $\alpha$.

***Крок 2***. Поки не виконуються умови зупину, реалізуються кроки 3 – 9 алгоритму.

***Крок 3.*** Для кожного вхідного вектора $S^p=(s_1^p,\ ...,\ s_n^p),\ p=\overline{1,L}$ виконуються кроки 4 – 6.

***Крок 4.*** Для кожного нейрона $A_j$ обчислюється відстань

$$D(A_j)=\sum_{i=1}^{n}(w_{ij}-s_i^p)^2.$$

***Крок 5.*** Визначається нейрон $A_j$, для якого відстань $D(A_j)$ мінімальна.

***Крок 6***. Для всіх $A$-елементів у межах заданого околу $R$ елемента $A_j$ та для всіх $i$ виконується зміна ваг зв'язків:

$$w_{ij}(new)=w_{ij}(old)+\alpha(s_i^p-w_{ij}(old)),\quad i=\overline{1,n}.$$

***Крок 7.*** Модифікується навчальний коефіцієнт $\alpha$.

***Крок 8.*** Зменшується радіус топологічної близькості як функція часу.

***Крок 9.*** Перевіряються умови зупину.

***Крок 10.*** Зупин.

***Зауваження 5.1.*** Розглянемо деякі можливі альтернативні зміни в структурі алгоритму.

Вихідним вагам у наведеному алгоритмі задаються випадкові значення. Однак якщо є деяка апріорна інформація про розташування або розподіл кластерів, що стосується конкретної досліджуваної проблеми, то її можна й бажано врахувати у вихідних вагах зв'язків нейронів.

Можливі структури алгоритму з різними законами зміни радіуса $R$ околу найближчих елементів, проте кожного разу радіус повинен зменшуватися в міру прогресу процесу кластеризації. Аналогічно навчальний коефіцієнт $\alpha$ повинен бути спадною функцією часу або

періодів навчання. Кохонен показав, що лінійного зменшення $\alpha$ досить для практичних додатків, однак сам процес навчання мережі може бути досить тривалим.

Можливими умовами закінчення ітераційного процесу можуть бути: задане число ітерацій (пред'явлень вхідної множини зображень) або зменшення навчального коефіцієнта $\alpha$ до наперед заданого значення, або зміни величин елементів матриці ваг між двома ітераціями, що менші від заданого значення $\varepsilon$ й т. д.

***Приклад 5.1.*** Застосування перетворення Кохонена, що самоорганізується, для кластеризації чотирьох векторів (0 0 0 1), (0 0 1 1), (1 0 0 0), (1 1 0 0 ) на два класи.

Оскільки вектори 4-мірні, то число вхідних *S*-нейронів дорівнює 4, а оскільки задано два класи, то $m = 2$ та число *A*-нейронів дорівнює 2. Звідси також виходить, що покриття нейронів складається тільки із самого нейрона, тобто радіус околу нейронів *R* дорівнює нулю. Припустимо, що навчальний коефіцієнт $\alpha$ змінюється як функція часу:

$$\alpha(t+1) = k\alpha(t),$$

де $k = 0{,}5$ та $\alpha(0) = 0{,}6$.

Використовуємо наведений вище алгоритм для розв’язання данної задачі кластеризації.

***Крок 1.*** Ініціюється матриця $M_q$ ваг зв'язків випадково обраними числами з інтервалу [0, 1]:

$$\begin{vmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix}.$$

Ініціюється радіус та навчальний коефіцієнт: $R = 0$, $\alpha = 0{,}6$.

Задаються умови закінчення ітераційного процесу: процес закінчується, якщо виконуються вісім нерівностей:

$$\left| a_{ij}^{q} - a_{ij}^{q-1} \right| \le 0{,}0005, \quad i = \overline{1,4}, \ j = \overline{1,2}, \tag{5.1}$$

де $a_{ij}^{q}, a_{ij}^{q-1}$ – елементи матриці ваг $M_q$ після завершення поточної й попередньої ітерацій.

***Крок 2.*** Починаються обчислення, що реалізують кроки 3 – 9 алгоритму.

***Крок 3.*** Для першого вектора $S^1$ = (0 0 0 1) виконуються кроки 4 – 6.

***Крок 4.*** Для нейронів $A_1$ і $A_2$ обчислюються відстані:

$$D(A_1) = (0{,}7 - 0)^2 + (0{,}4 - 0)^2 + (0{,}5 - 0)^2 + (0{,}2 - 1)^2 = 1{,}54,$$
$$D(A_2) = (0{,}6 - 0)^2 + (0{,}1 - 0)^2 + (0{,}5 - 0)^2 + (0{,}9 - 1)^2 = 0{,}63.$$

***Крок 5.*** Визначається, що $D(A_1) > D(A_2)$, а отже, нейрон $A_2$ є переможцем.

***Крок 6.*** Обчислюються нові ваги перемігшого нейрона $A_2$:

$$w_{i2}(new) = w_{i2}(old) + 0{,}6(S_i^1 - w_{i2}(old)) = 0{,}4w_{i2}(old) + 0{,}6S_i^1.$$

Після розрахунків виходить нова матриця ваг:

$$\begin{vmatrix} 0{,}7 & 0{,}24 \\ 0.4 & 0{,}04 \\ 0{,}5 & 0{,}20 \\ 0{,}2 & 0{,}96 \end{vmatrix}.$$

***Крок 3.*** Для другого вектора $S^2$ = (0 0 1 1) виконуються кроки 4 – 6.

***Крок 4.*** Для нейронів $A_1$ і $A_2$ обчислюються відстані:

$$D(A_1) = (0{,}7 - 0)^2 + (0{,}4 - 0)^2 + (0{,}5 - 1)^2 + (0{,}2 - 1)^2 = 1{,}54,$$
$$D(A_2) = (0{,}24 - 0)^2 + (0{,}04 - 0)^2 + (0{,}2 - 0\ )^2 + (0{,}96 - 1)^2 = 0{,}70.$$

***Крок 5.*** Визначається, що нейрон $A_2$ є переможцем.

***Крок 6.*** Адаптуються ваги зв'язків перемігшого нейрона й виходить матриця ваг з новим другим стовпцем:

$$\begin{vmatrix} 0,7 & 0,096 \\ 0,4 & 0,016 \\ 0,5 & 0,680 \\ 0,2 & 0,984 \end{vmatrix}.$$

***Крок 3.*** Для третього вектора $S^3 = (1\ 0\ 0\ 0)$ виконуються кроки 4 – 6.

***Крок 4.*** Для нейронів $A_1$ і $A_2$ обчислюються відстані:

$$D(A_1) = (0,7 - 1)^2 + (0,4 - 0)^2 + (0,5 - 0)^2 + (0,2 - 0)^2 = 0,54,$$
$$D(A_2) = (0,096 - 1)^2 + (0,016 - 0)^2 + (0,680 - 0)^2 + (0,984 - 0)^2 = 1,888.$$

***Крок 5.*** Визначається, що нейрон $A_1$ є переможцем.

***Крок 6.*** Адаптуються ваги зв'язків перемігшого нейрона й виходить матриця ваг з новим першим стовпцем:

$$\begin{vmatrix} 0,880 & 0,096 \\ 0,160 & 0,016 \\ 0,200 & 0,680 \\ 0,080 & 0,984 \end{vmatrix}.$$

***Крок 3.*** Для четвертого вектора $S^4 = (1\ 1\ 0\ 0)$ виконуються кроки 4 – 6.

***Крок 4.*** Обчислюються відстані:

$$D(A_1) = (0,880 - 1)^2 + (0,160 - 1)^2 + (0,200 - 0)^2 + (0,080 - 0)^2 = 0,766,$$
$$D(A_2) = (0,096 - 1)^2 + (0,016 - 1)^2 + (0,680 - 0)^2 + (0,984 - 0)^2 = 3,216.$$

***Крок 5.*** Визначається, що переможцем є нейрон $A_1$.

***Крок 6.*** Адаптуються ваги зв'язків перемігшого нейрона й виходить нова матриця ваг:

$$\begin{vmatrix} 0,952 & 0,096 \\ 0,664 & 0,016 \\ 0,080 & 0,680 \\ 0,032 & 0,984 \end{vmatrix}.$$

***Крок 7.*** Модифікується навчальний коефіцієнт $\alpha$:

$$\alpha(t = 1) = 0{,}5 \cdot \alpha(t = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3.$$

***Крок 8.*** Оскільки $R = 0$, то цей крок не виконується.

***Крок 9.*** Перевіряються умови зупину, й оскільки вони не виконуються, то здійснюється перехід на крок 2 алгоритму (у противному випадку – зупин).

Аналогічно першій виконуються друга й наступна ітерації алгоритму. У результаті цих ітерацій маємо такі матриці ваг $M_q$ $(q = \overline{1,9})$:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0{,}9760 & 0{,}0470 \\ 0{,}6250 & 0{,}0080 \\ 0{,}0330 & 0{,}6330 \\ 0{,}0150 & 0{,}9920 \end{vmatrix}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 0{,}982 & 0{,}034 \\ 0{,}601 & 0{,}006 \\ 0{,}028 & 0{,}607 \\ 0{,}011 & 0{,}994 \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$M_8 = \begin{vmatrix} 0{,}98642 & 0{,}02516 \\ 0{,}57916 & 0{,}00448 \\ 0{,}02080 & 0{,}58263 \\ 0{,}00882 & 0{,}99562 \end{vmatrix}, \qquad M_9 = \begin{vmatrix} 0{,}98648 & 0{,}02504 \\ 0{,}57879 & 0{,}00448 \\ 0{,}02070 & 0{,}58224 \\ 0{,}00878 & 0{,}99564 \end{vmatrix}.$$

Після виконання дев'ятої ітерації виконуються умови зупину (5.1) і алгоритм припиняє свою роботу.

Для векторів (0 0 0 1), (0 0 1 1), (1 0 0 0), (1 1 0 0), у силу того, що для кожного із двох класів тільки один з одиничних компонентів є в обох представниках класу, а інший – тільки в одному із двох, при цьому інші компоненти векторів нульові, ідеальна матриця $M_u$ ваг має вигляд

$$M_u = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Якщо порівнювати елементи $w_{21}$, $w_{32}$ матриць $M_u$ й $M_9$, то максимальна погрішність елементів, отриманих у результаті ітераційної процедури, становить 16,5 %. Така відносно велика погрішність

розрахунків пояснюється занадто швидкою зміною навчального коефіцієнта α. Збільшимо у виразі $\alpha(t+1) = k\alpha(t)$ коефіцієнт $k$ з 0,5 до 0,75 і повторимо весь ітераційний процес при тих же вихідних даних та умовах закінчення ітерацій. У результаті одержимо, що число ітерацій до виконання умов зупину зросте з дев'яти до сімнадцяти, а погрішність визначення елементів $w_{21}$, $w_{32}$ матриці ваг зменшиться до 8 %:

$$M_1' = \begin{vmatrix} 0{,}952 & 0{,}096 \\ 0{,}664 & 0{,}016 \\ 0{,}080 & 0{,}680 \\ 0{,}032 & 0{,}984 \end{vmatrix}, \quad M_2' = \begin{vmatrix} 0{,}98548 & 0{,}02904 \\ 0{,}65086 & 0{,}00484 \\ 0{,}02420 & 0{,}65570 \\ 0{,}00968 & 0{,}99516 \end{vmatrix}, \quad M_3' = \begin{vmatrix} 0{,}99363 & 0{,}01275 \\ 0{,}62316 & 0{,}00213 \\ 0{,}01061 & 0{,}62529 \\ 0{,}00425 & 0{,}99787 \end{vmatrix},$$

……,

$$M_{16}' = \begin{vmatrix} 0{,}99930 & 0{,}00141 \\ 0{,}54003 & 0{,}00024 \\ 0{,}01173 & 0{,}54022 \\ 0{,}00046 & 0{,}99976 \end{vmatrix}, \quad M_{17}' = \begin{vmatrix} 0{,}99931 & 0{,}00139 \\ 0{,}53957 & 0{,}00024 \\ 0{,}01159 & 0{,}53975 \\ 0{,}00046 & 0{,}99976 \end{vmatrix}.$$

Із зіставлення елементів матриць $M_9$ і $M_{17}'$ виходить, що покращилися не тільки елементи $w_{21}$, $w_{32}$, але й всі інші компоненти матриці. При збільшенні числа ітерацій до 70 вдається одержати погрішність елементів $w_{21}$, $w_{32}$ у межах одного відсотка.

### 5.3. Індивідуальні завдання

1. Виконати кластеризацію дев'яти двійкових векторів за допомогою нейронної мережі Кохонена на три класи. Двійкові вектори одержати в такий спосіб.

Записати своє прізвище, ім'я та по батькові. Вибрати із цих трьох слів слово з найбільшим числом букв (якщо два або всі слова мають однакове найбільше число букв, то вибирається одне з них). Закодувати голосні й приголосні букви цього слова відповідно одиницями й нулями. Отриманий двійковий код стане першим вектором ($v_1$) з дев'яти векторів, кластеризацію яких необхідно виконати за допомогою нейронної мережі Кохонена. Другий і третій вектори ($v_2, v_3$) одержати з вектора $v_1$ шляхом інверсії відповідно другого й третього розряду вектора $v_1$. Потім аналогічним чином закодувати нулями й одиницями букви наступних двох

слів. Якщо отримані двійкові вектори $(v_4, v_5)$ коротші від векторів $v_1, v_2, v_3$, то їхню довжину слід збільшити до довжини цих векторів, додаючи ліворуч або праворуч необхідне число двійкових розрядів. Вектори $v_6, v_7$ й $v_8, v_9$ одержати відповідно з векторів $v_4, v_5$ шляхом інверсії відповідно другого й третього розрядів цих векторів.

2. Розробити архітектуру нейронної мережі для ваших вхідних векторів.

3. Обґрунтувати попередній вибір параметрів $\alpha$ і $R$, ваг зв'язків нейронної мережі для вашого випадку.

4. Дослідити працездатність мережі при різних значеннях $\alpha$.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

# ДВОНАПРАВЛЕНА АСОЦІАТИВНА ПАМ'ЯТЬ

## 6.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи з нейронною мережею двонаправленої асоціативної пам'яті.

## 6.2. Короткі відомості з теорії

### *6.2.1. Двонаправлена асоціативна пам'ять на двійкових елементах*

Будь-яка нейронна мережа може розглядатися як асоціативна пам'ять, якщо збережені у вагах її зв'язків зображення є атракторами, оскільки будь-яке вхідне зображення, що потрапило в область притягання атрактора, може бути використане для відтворення збереженої інформації. Подібна пам'ять вже аналізувалась у лабораторній роботі, присвяченій мережам Хопфілда. Мережі Хопфілда дозволяють по зашумлених або неповних зображеннях відновлювати збереження, тобто виправляти й доповнювати вхідні зображення, але не асоціювати їх з іншими образами. Отже, мережі Хопфілда володіють тільки автоасоціативною пам'яттю. Це пояснюється однорівневою структурою мережі, у якій вхідні та вихідні зображення з'являються на виходах тих самих елементів.

Двонаправлена асоціативна пам'ять (*bidirectional associative memory, BAM*) на двійкових елементах була запропонована Коско у 1988 році. Архітектура мережі наведена на рис. 6.1.

Мережа складається із двох шарів нейронів, зв'язаних парами двонаправлених зважених зв'язків. Зображення (або $n$-мірні чи $m$-мірні вхідні вектори) можуть подаватися відповідно на входи $X$- або $Y$-елементів. При цьому не передбачається подача зображень на обидва шари елементів одночасно. Якщо вагова матриця для сигналів, що посилаються з $X$-шару елементів у $Y$-шар, є

$$W = \begin{vmatrix} w_{11} \dots w_{1k} \dots w_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{j1} \dots w_{jk} \dots w_{jm} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{n1} \dots w_{nk} \dots w_{nm} \end{vmatrix}, \qquad (6.1)$$

то вагова матриця для сигналів від *Y*-елементів у *X*-шар має вигляд

$$W_1 = W^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} w_{11} \dots w_{1j} \dots w_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{k1} \dots w_{kj} \dots w_{kn} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{m1} \dots w_{mj} \dots w_{mn} \end{vmatrix}.$$

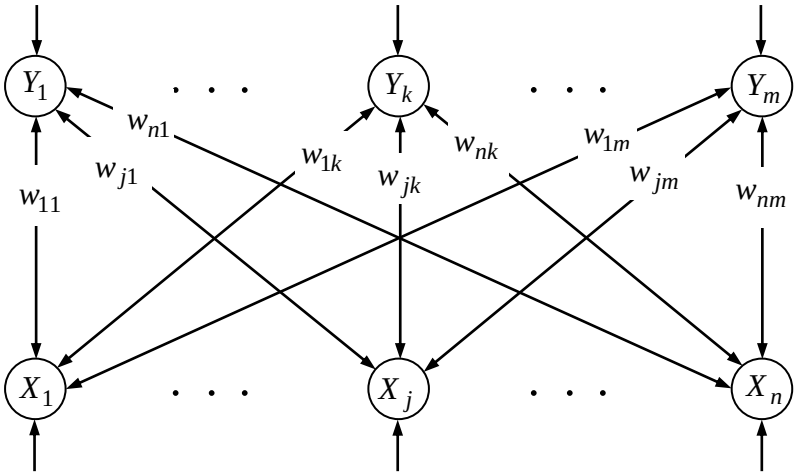



Рис. 6.1. Двонаправлена асоціативна пам’ять

Деякі автори для того щоб підкреслити особливості двонаправленої асоціативної пам'яті (ДАП) – подібність до мереж Хопфілда, двошаровість та можливість збільшення числа шарів мережі – використовують інше графічне подання архітектури (рис. 6.2).

Недолік цього графічного подання ДАП полягає у тому, що тут шари нейронів перебувають у нерівноправному положенні, й створюється видимість, що мережа може реагувати тільки при пред'явленні зображень на шар *X*-елементів. Однак ДАП реагує на вхід кожного шару – як *X*-шар,

так і *Y*-шар елементів може бути вхідним та вихідним, тобто на рис. 6.2 або повинні бути додані мережні входи для *Y*-нейронів й мережні виходи для *X*-елементів, або має бути зроблено застереження, що ця структура відповідає функціонуванню мережі при подачі вхідного зображення на шар *X*-елементів.

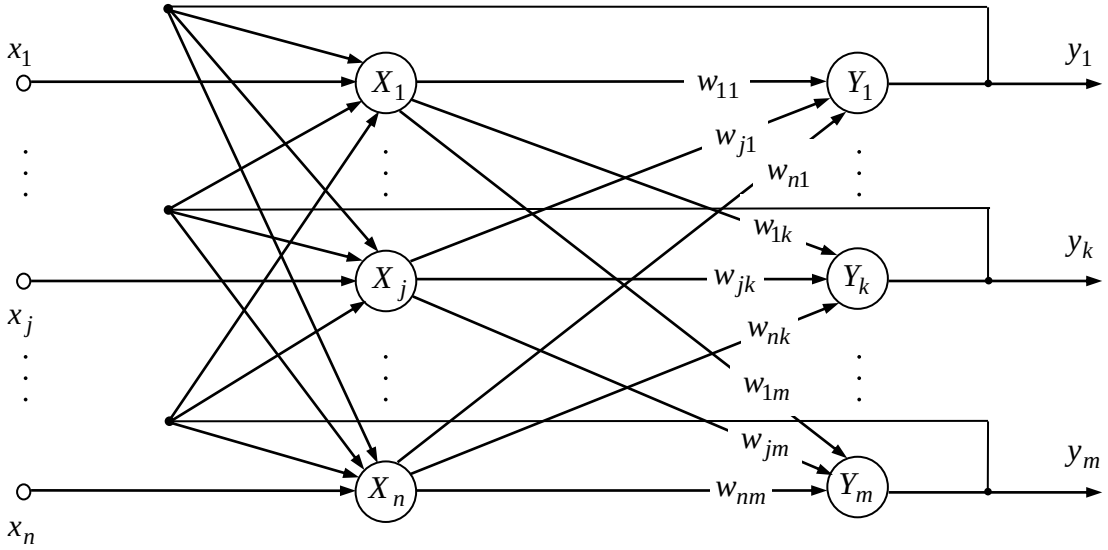



Рис. 6.2. Структура, яка відображає функціонування ДАП при подачі зображень на *X*-шар елементів

Мережа здатна запам'ятовувати пари асоційованих один з одним образів $S^p = (s_1^p, ..., s_n^p)$, $T^p = (t_1^p, ..., t_m^p)$ з деяких заданих множин образів $S = \{S^1, ..., S^p, ..., S^L\}$, $T = \{T^1, ..., T^p, ..., T^L\}$, де $L$ – число асоційованих пар.

Існують різні варіанти ДАП: бінарний, біполярний та безперервний. Двійкові форми ДАП (бінарна й біполярна) тісно взаємозалежні. Процес навчання ДАП з бінарними нейронами полягає у попередньому настроюванні ваг зв'язків між *X*- та *Y*-нейронами (елементів матриці $W = \left| w_{ij} \right|$) відповідно до формули

$$w_{ij} = \sum_{p=1}^{L} (2S_i^p - 1)(2t_i^p - 1), \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}. \tag{6.2}$$

Для біполярних нейронів елементи матриці (6.1) визначаються виразом

$$w_{ij} = \sum_{p=1}^{L} S_i^p t_i^p, \quad i = \overline{1,n}, \ \ j = \overline{1,m}. \tag{6.3}$$

Динаміка двонаправленої асоціативної пам'яті є ітераційною. Процес зміни вихідних сигналів нейронів кожного шару ДАП здійснюється синхронно на початку ітерації, при цьому сигнали посилають із шару в шар послідовно, а не одночасно в обох напрямках. При бінарних вхідних векторах вихідні сигнали *X*- та *Y*-нейронів визначаються функціями активації $f_p(U_{\text{вх}.p})$:

$$U_{\text{вих}.p}(t+1) = \begin{cases} 1, \ \text{якщо}\, U_{\text{вх}.p}(t) > 0, \\ U_{\text{вих}.p}(t), \ \text{якщо}\ U_{\text{вх}.p}(t) = 0, \\ 0, \ \text{якщо}\ U_{\text{вх}.p}(t) < 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

де $U_{\text{вих}.p}(t+1)$ – вихідний сигнал *p*-го ($p$ = 1, …, $n$, $n$ + 1, …, $n + m$) бінарного елемента в момент часу $t$ + 1; $U_{\text{вх}.p}(t)$ – вхідний сигнал *p*-го елемента в момент часу $t$.

Для біполярних вхідних векторів функції активації $f_p(U_{\text{вх}.p})$ для елементів *X*- та *Y*-шару задаються виразом

$$U_{\text{вих}.p}(t+1) = \begin{cases} 1, \ \text{якщо}\ U_{\text{вх}.p}(t) > \theta_p, \\ U_{\text{вих}.p}(t), \ \text{якщо}\ U_{\text{вх}.p}(t) = \theta_p, \\ -1, \ \text{якщо}\ U_{\text{вх}.p}(t) < \theta_p, \end{cases} \tag{6.5}$$

де $\theta_p$ – поріг *p*-го елемента ДАП, $p$ = 1, ..., $n$, $n$ + 1, ..., $n + m$.

З виразів (6.4), (6.5) виходить, що якщо вхідний сигнал елемента точно дорівнює його пороговому значенню, то функція активації залишає на виході нейрона попереднє значення вихідного сигналу. У зв'язку із цим початкова активація нейронів зазвичай відбувається нульовими вхідними сигналами. Функціонування мережі може починатися із завдання зображення (вхідних сигналів) для кожного із шарів ДАП. Опишемо алгоритм роботи двійкової мережі при першому пред'явленні зображення $S^k$ шару *X*-елементів.

### *6.2.2. Алгоритм функціонування ДАП*

***Крок 1.*** Ініціюються ваги зв'язків, визначені за допомогою співвідношень (6.2) або (6.3), для множини з $L$ пар асоційованих один з одним двійкових зображень $(S^p, T^p)$, $p = \overline{1, L}$. Задається початковий час $t = 0$. Ініціюються нульовими вхідними сигналами всі нейрони ДАП:

$$U_{\text{вх.}Xi}(0) = 0, \;\; U_{\text{вих.}Xi}(0) = f_i(U_{\text{вх.}Xi}) = 0, \;\; i = \overline{1, n},$$
$$U_{\text{вх.}Yj}(0) = 0, \;\; U_{\text{вих.}Yj}(0) = f_j(U_{\text{вх.}Yj}) = 0, \;\; j = \overline{1, m}.$$

***Крок 2.*** Для заданого зображення $S^k = (s_1^k, \ldots, s_n^k)$ виконуються кроки 3 – 7.

***Крок 3.*** Задаються вхідні сигнали нейронів $X$-шару:

$$U_{\text{вх.}Xi}(0) = s_i^k, \;\; i = \overline{1, n}.$$

Задається час $t = t + 1$ та обчислюються вихідні сигнали $X$-елементів:

$$U_{\text{вих.}Xi}(t+1) = f_i(U_{\text{вх.}Xi}(t)), \;\; i = \overline{1, n}.$$

***Крок 4.*** Доти, поки не встановляться вихідні сигнали всіх $X$- та $Y$-нейронів, виконуються кроки 5 – 7 алгоритму.

***Крок 5.*** Адаптується активність елементів $Y$-шару. Обчислюються вхідні та вихідні сигнали $Y$-елементів:

$$U_{\text{вх.}Yj}(t+1) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} U_{\text{вих.}Xi}(t+1), \;\; j = \overline{1, m},$$
$$U_{\text{вих.}Yj}(i+2) = f_j(U_{\text{вх.}Yj}(t+1)), \;\; j = \overline{1, m}.$$

Вихідні сигнали $Y$-нейронів посилають на входи елементів $X$-шару.

***Крок 6.*** Адаптується активність елементів $X$-шару. Обчислюються вхідні та вихідні сигнали $X$-елементів:

$$U_{\text{вх.}Xi}(t+2) = \sum_{j=1}^{m} w_{ji} U_{\text{вих.}Yj}(t+2),\ i = \overline{1,n},$$

$$U_{\text{вих.}Xi}(t+3) = f_i(U_{\text{вх.}Xi}(t+2)),\ i = \overline{1,n}.$$

Вихідні сигнали *X*-нейронів посилаються на входи елементів *Y*-шару.

***Крок 7.*** Перевіряється тест на збіжність. Порівнюються вихідні сигнали *X*-нейронів $U_{\text{вих.}Xi}(t+3)$ та $U_{\text{вих.}Xi}(t+1),\ i = \overline{1,n}$, а також *Y*-нейронів $U_{\text{вих.}Yj}(t+2)$ та $U_{\text{вих.}Yj}(t),\ j = \overline{1,m}$, отримані на поточній та попередній ітераціях. Якщо не виконується хоча б одна з $(n + m)$ рівностей

$$U_{\text{вих.}Xi}(t+3) = U_{\text{вих.}Xi}(t+1),\quad i = \overline{1,n},\quad U_{\text{вих.}Yj}(t+2) = U_{\text{вих.}Yj}(t),\quad j = \overline{1,m},$$

то здійснюється перехід до кроку 5 алгоритму, інакше – перехід до кроку 8.

***Крок 8.*** Зупин.

***Приклад 6.1.*** Розглянемо використання ДАП з біполярними нейронами для запам'ятовування двох пар асоційованих зображень $(S^1,\ t^1),\quad (S^2,\ t^2)$ (рис. 6.3). Нумерація елементів зображень наведена на рис. 6.4.

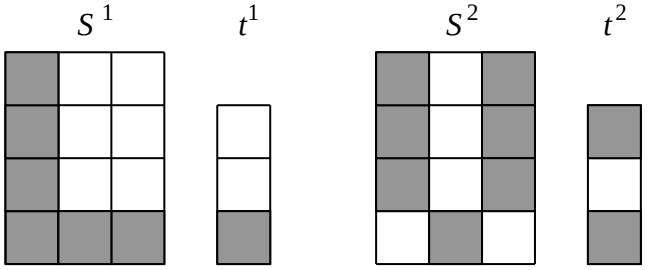



Рис. 6.3. Пари асоційованих зображень

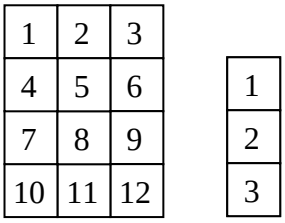



Рис. 6.4. Нумерація елементів зображень

У векторній формі зображення $S^1,\ t^1,\ S^2,\ t^2$ мають вигляд

$$S^1 = (1,-1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1),\ \ t^1 = (-1,-1,1),$$
$$S^2 = (1,-1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,1,-1),\ \ t^2 = (1,-1,1).$$

Нехай зображення $S^1$, $S^2$ пред'являються на входи *X*-елементів, а зображення $t^1$, $t^2$ – на входи нейронів *Y*-шару, тоді число елементів *X*-шару повинне дорівнювати дванадцяти ($n$ = 12), а *Y*-шару – трьом ($m$ = 3). Використовуючи векторне подання зображень та співвідношення (6.3), розрахуємо елементи матриць $W$ та $W^{\mathrm{T}}$. Для ваг $w_{11}$ та $w_{12}$ маємо

$$w_{11} = \sum_{p=1}^{2} S_1^p t_1^p = S_1^1 t_1^1 + S_1^2 t_1^2 = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0,$$

$$w_{12} = \sum_{p=1}^{2} S_1^p t_2^p = S_1^1 t_2^1 + S_1^2 t_2^2 = 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) = -2.$$

Аналогічно розраховуються й інші елементи матриць $W$ та $W^{\mathrm{T}}$. У результаті одержимо

$$W = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad W^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для вхідного зображення $S^1$, асоційованого з вектором $t^1$, маємо

$$((U_{\text{вх}.Y1}(S^1),\ (U_{\text{вх}.Y2}(S^1),\ (U_{\text{вх}.Y3}(S^1)) = S^1 W =$$
$$= (1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1,\ 1,\ 1)W = (-10, -14,\ 14),$$

тобто $U_{\text{вх}.Y1}(S^1) = -10,\ U_{\text{вх}.Y2}(S^1) = -14,\ U_{\text{вх}.Y3}(S^1) = 14$.

Використовуючи функцію активації (6.5) біполярних нейронів при нульовому порозі, визначимо фактичний вектор $t^{1\phi}$ вихідних сигналів *Y*-нейронів:

$$t^{1\phi} = (U_{\text{вих}.Y1}(S^1),\ U_{\text{вих}.Y2}(S^1),\ U_{\text{вих}.Y3}(S^1)) = (-1, -1,\ 1) = t^1.$$

Подаючи вектор $t^1$ на входи *Y*-нейронів, одержимо вектор сигналів

$$(U_{\text{вх}.X1}(t^1),\ U_{\text{вх}.X2}(t^1),\ ...,\ U_{\text{вх}.X12}(t^1)) = t^1 W^{\text{т}} = (-1, -1,\ 1) W^{\text{т}} =$$
$$= (4, -4, -2,\ 4, -4, -2,\ 4, -4, -2,\ 2,\ 4,\ 2).$$

При нульових порогах *X*-елементів за допомогою функції активації (6.5) розраховуємо вектор $S^{1\phi}$ вихідних сигналів нейронів *X*-шару:

$$S^{1\phi} = (1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1,\ 1,\ 1) = S^1.$$

Аналогічно для зображення $S^2$ одержимо

$$((U_{\text{вх}.Y1}(S^2),\ (U_{\text{вх}.Y2}(S^2),\ (U_{\text{вх}.Y3}(S^2)) = S^2 W =$$
$$= (1, -1,\ 1,\ 1, -1,\ 1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1) W = (10, -14,\ 14),$$
$$t^{2\phi} = (U_{\text{вих}.Y1}(S^2),\ U_{\text{вих}.Y2}(S^2),\ U_{\text{вих}.Y3}(S^2)) = (1, -1,\ 1) = t^2,$$

де $t^{2\phi}$ – фактичний вектор вихідних сигналів *Y*-елементів при пред'явленні на входи *X*-шару нейронів зображення $S^2$. Неважко перевірити, що при вхідному векторі $t^2$ на виході нейронів *X*-шару ДАП з'явиться зображення $S^2$. Таким чином, мережа правильно визначає асоційовані вектори для кожного з розглянутих векторів $S^1,\ t^1,\ S^2,\ t^2$.

ДАП має гарну здатність до узагальнень та може правильно відтворювати асоційовані вектори при пред'явленні на її входи зашумлених зображень. Пред'явимо мережі послідовно зображення $S^{11}$ та $S^{21}$ (рис. 6.5), що є перекрученими описами зображень $S^1,\ S^2$ (рис. 6.3).

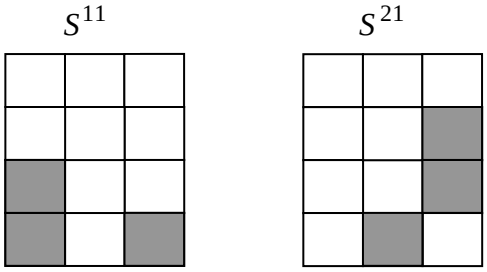



Рис. 6.5. Зображення $S^{11},\ S^{21}$

Після пред'явлення зображень $S^{11}$ та $S^{21}$ неважко одержати

$$((U_{\text{вх}.Y1}(S^{11}),\ (U_{\text{вх}.Y2}(S^{11}),\ (U_{\text{вх}.Y3}(S^{11})) = S^{11}W =$$
$$= (-1,-1,-1,\ -1,-1,-1,\ 1,-1,-1,\ 1,-1,\ 1)W = (-10,-2,\ 2),$$
$$t(S^{11}) = (U_{\text{вих}.Y1}(S^{11}),\ U_{\text{вих}.Y2}(S^{11}),\ U_{\text{вих}.Y3}(S^{11})) = (-1,-1,\ 1) = t^1,$$
$$((U_{\text{вх}.Y1}(S^{21}),\ (U_{\text{вх}.Y2}(S^{21}),\ (U_{\text{вх}.Y3}(S^{21})) = S^{21}W =$$
$$= (-1,-1,-1,\ -1,-1,\ 1,-1,-1,\ 1,-1,\ 1,-1)W = (8,-2,\ 2),$$
$$t(S^{21}) = (U_{\text{вих}.Y1}(S^{21}),\ U_{\text{вих}.Y2}(S^{21}),\ U_{\text{вих}.Y3}(S^{21})) = (1,-1,\ 1) = t^2.$$

Таким чином, мережа правильно визначає асоційовані вектори, хоча в першому зображенні змінено три елементи із дванадцяти або 25 % компонентів зображення, а в другому – 33 % перекручених елементів. Подібним чином мережа поводиться й при пред'явленні перекручених векторів шару *Y*-нейронів. Нехай, наприклад, мережі послідовно пред'являються вектори $t^{11} = (-1,\ -1,\ 0)$ та $t^{21} = (1,\ 0,\ 1)$. У результаті аналогічних обчислень одержимо

$$(U_{\text{вх}.X1}(t^{11}),\ U_{\text{вх}.X2}(t^{11}),\ ...,\ U_{\text{вх}.X12}(t^{11})) = t^{11}W^{\text{т}} = (-1,-1,\ 1)W^{\text{т}} =$$
$$= (2,-2,-2,\ 2,-2,-2,\ 2,-2,-2,\ 2,\ 2,\ 2),$$
$$S(t^{11}) = (1,-1,-1,\ 1,-1,-1,\ 1,-1,-1,\ 1,\ 1,\ 1) = S^1,$$
$$(U_{\text{вх}.X1}(t^{21}),\ U_{\text{вх}.X2}(t^{21}),\ ...,\ U_{\text{вх}.X12}(t^{21})) = t^{21}W^{\text{т}} = (1,\ 0,\ 1)W^{\text{т}} =$$
$$= (2,-2,\ 2,\ 2,-2,\ 2,\ 2,-2,\ 2,-2,\ 2,-2),$$
$$S(t^{21}) = (1,-1,\ 1,\ 1,-1,\ 1,\ 1,-1,\ 1,-1,\ 1,-1) = S^2,$$

тобто й у цих випадках мережа правильно визначає асоційовані вектори.

### *6.2.3. Оцінка ємності двонаправленої асоціативної пам'яті*

Як й інші нейронні мережі, ДАП має обмеження на максимальну кількість інформації, що запам’ятовується. Якщо ця межа перевищена, то мережа може виробляти невірні асоціації. Оцінки, наведені в роботі Коско, обмежують число асоціацій, що запам'ятовуються розглянутою ДАП, числом $m$ нейронів у меншому шарі при спеціальному кодуванні зображень, що максимізують ємність пам'яті. Це кодування передбачає одержання кожного із зображень, що запам'ятовуються, з однаковими (або тими, що відрізняються не більш, ніж на одиницю) числами біполярних компонентів з різними знаками. Більш точні оцінки істотно зменшують ємність пам'яті нейромережі. Для $N$ випадків обраних та оптимально закодованих векторів, кожний з яких повинен бути відновлюваним, у загальному випадку необхідне виконання нерівності

$$N < m/(4\log_2 m). \qquad (6.6)$$

При заміні вимоги відновлення кожного з $N$ запам’ятованних образів більш слабким – відновлюються всі запам'ятовані вектори за винятком їхньої незначної частини, число $N$ може бути збільшене у два рази:

$$N < m/(2\log_2 m). \qquad (6.7)$$

Якщо, наприклад, $m$ = 1024, то число зображень, що запам'ятовуються, за співвідношенням (6.6) не повинне перевищувати 25, а за нерівністю (6.7) – 51. Таким чином, розглянута ДАП може запам'ятовувати досить обмежене число асоціацій.

***Зауваження 6.1.*** Для конкретних асоційованих пар зображень нерівності (6.6), (6.7) можуть давати досить занижені оцінки. Наприклад, з нерівності (6.6) для $m$ = 3 маємо $N < 1$, а з нерівності (6.7) виходить, що $N < 2$, однак приклад 6.1 переконливо показує, що ДАП із трьома нейронами в меншому шарі запам'ятовує й відновлює дві асоціації або чотири зображення, що наведені на рис. 6.3. У розглянутому прикладі ємність ДАП невелика. Вже при трьох парах зображень, що запам'ятовуються, (рис. 6.6) нейронна мережа не здатна відновлювати без помилок все, що вона запам’ятала.

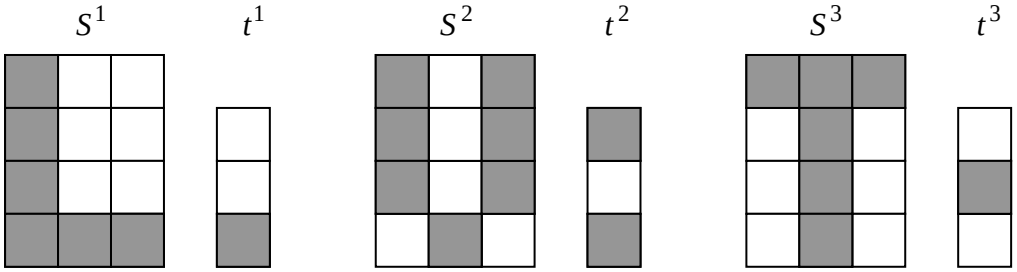



Рис. 6.6. Пари асоційованих зображень

***Приклад 6.2.*** Збільшимо число пар зображень прикладу 6.1, що запам'ятовуються, до трьох (рис. 6.6) та дослідимо можливості ДАП відновлювати асоційовані компоненти.

Запишемо асоційовані пари зображень $S^1$ та $t^1$, $S^2$ та $t^2$, $S^3$ та $t^3$ у векторній формі:

$$\begin{aligned} S^1 &= (1,-1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1), \;\; t^1 = (-1,-1,1), \\ S^2 &= (1,-1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1,1,-1), \;\; t^2 = (1,-1,1), \\ S^3 &= (1,1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,\ 1,-1), \;\; t^3 = (-1,1,-1). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Використовуючи векторну форму подання зображень (6.8) та співвідношення (6.3) при $L = 3$, $n = 12$, $m = 3$, розрахуємо елементи матриць $W$ та $W^{\mathrm{T}}$:

$$w_{11} = w_{11}^{\mathrm{T}} = \sum_{p=1}^{3} S_1^p t_1^p = S_1^1 t_1^1 + S_1^2 t_1^2 + S_1^3 t_1^3 = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -1,$$

……..……...……...

$$w_{12,3} = w_{3,12}^{\mathrm{T}} = \sum_{p=1}^{3} S_{12}^p t_3^p = S_{12}^1 t_3^1 + S_{12}^2 t_3^2 + S_{12}^3 t_3^3 = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 1.$$

У результаті одержимо наступні матриці $W$ та $W^{\mathrm{T}}$ вагових коефіцієнтів:

$$W = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad W^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & 3 & -1 & -3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 & -3 & 1 & 3 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для вхідних зображень $S^1$, $S^2$, $S^3$, асоційованих відповідно з векторами $t^1$, $t^2$, $t^3$, визначаємо вхідні та вихідні сигнали біполярних *Y*-нейронів при нульових порогах елементів:

$$((U_{\text{вх}.Y1}(S^1),\ (U_{\text{вх}.Y2}(S^1),\ (U_{\text{вх}.Y3}(S^1)) = S^1W =$$
$$= (1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1,\ 1,\ 1)W = (-6, -18,\ 18),$$
$$t(S^1) = (U_{\text{вих}.Y1}(S^1),\ U_{\text{вих}.Y2}(S^1),\ U_{\text{вих}.Y3}(S^1)) = (-1, -1,\ 1) = t^1,$$
$$((U_{\text{вх}.Y1}(S^2),\ (U_{\text{вх}.Y2}(S^2),\ (U_{\text{вх}.Y3}(S^2)) = S^2W =$$
$$= (1, -1,\ 1,\ 1, -1,\ 1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1)W = (12, -16,\ 16),$$
$$t(S^2) = (U_{\text{вих}.Y1}(S^2),\ U_{\text{вих}.Y2}(S^2),\ U_{\text{вих}.Y3}(S^2)) = (1, -1,\ 1) = t^2,$$
$$((U_{\text{вх}.Y1}(S^3),\ (U_{\text{вх}.Y2}(S^3),\ (U_{\text{вх}.Y3}(S^3)) = S^3W =$$
$$= (1,\ 1,\ 1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1)W = (-12,\ 18, -20),$$
$$t(S^3) = (U_{\text{вих}.Y1}(S^3),\ U_{\text{вих}.Y2}(S^3),\ U_{\text{вих}.Y3}(S^3)) = (-1,\ 1, -1) = t^3.$$

Таким чином, ДАП по пред'явлених зображеннях $S^1$, $S^2$, $S^3$ правильно визначає асоційовані їм зображення $t^1$, $t^2$, $t^3$. Пред'явимо тепер послідовно зображення $t^1$, $t^2$, $t^3$ *Y*-шару елементів та визначимо за допомогою транспонованої матриці ваг $W^{\mathrm{T}}$ вектори вхідних та вихідних сигналів біполярних *X*-нейронів:

$$(U_{\text{вх}.X1}(t^1),\ U_{\text{вх}.X2}(t^1),\ ...,\ U_{\text{вх}.X12}(t^1)) = t^1 W^{\text{т}} = (-1, -1,\ 1)W^{\text{т}} =$$
$$= (3, -5, -3,\ 5, -5, -1,\ 5, -5, -1,\ 3,\ 3,\ 3),$$
$$S(t^1) = (1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1,\ 1,\ 1) = S^1,$$
$$(U_{\text{вх}.X1}(t^2),\ U_{\text{вх}.X2}(t^2),\ ...,\ U_{\text{вх}.X12}(t^2)) = t^2 W^{\text{т}} = (1, -1,\ 1)W^{\text{т}} =$$
$$= (1, -7, -1,\ 7, -7,\ 5,\ 7, -7,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$S(t^2) = (1, -1, -1,\ 1, -1,\ 1,\ 1, -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \neq S^2,$$
$$(U_{\text{вх}.X1}(t^3),\ U_{\text{вх}.X2}(t^3),\ ...,\ U_{\text{вх}.X12}(t^3)) = t^3 W^{\text{т}} = (-1,\ 1, -1)W^{\text{т}} =$$
$$= (-1,\ 7,\ 1, -7,\ 7, -5, -7,\ 7, -5, -1, -1,\ 1),$$
$$S(t^3) = (-1,\ 1,\ 1, -1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1, -1, -1,\ 1) \neq S^3.$$

З виконаних обчислень виходить, що по пред'явлених зображеннях $t^1$, $t^2$, $t^3$ правильно відновлюється тільки одне зображення $S^1$. Два інших виявляються перекрученими (рис. 6.7).

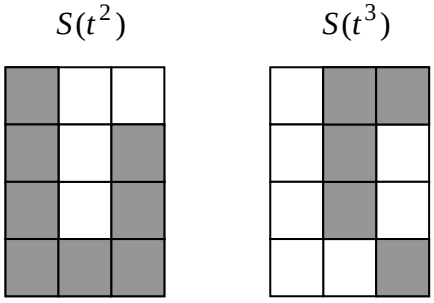



Рис. 6.7. Невдало відновлені
зображення $S^2$, $S^3$

Вимога приблизної рівності чисел додатних та від’ємних біполярних компонентів у кожному із зображень ДАП, що запам'ятовуються, досить істотна й її не можна ігнорувати, тому що це зменшує ємність пам'яті.

Теоретично ємність ДАП може бути збільшена до $2m$ зображень, де $m$ – число нейронів у меншому шарі, якщо для кожного елемента мережі з біполярною функцією активації (6.5) увести свій поріг θ. Така нейромережа одержала назву негомогенної ДАП, на відміну від розглянутої гомогенної ДАП, у якій пороги всіх нейронів беруться такими, що дорівнюють нулю. На жаль, практичне використання негомогенної ДАП такої ємності утруднене через жорсткі обмеження, що накладаються

на зображення, які запам'ятовуються. Якщо ж зображення вибираються випадковим чином, але при цьому кожне з них містить $(4 + \log_2 m)$ додатних біполярних компонентів, а число $N$ асоціацій, що запам'ятовуються, менше $0{,}34m2/(4 + \log_2 m)$, то негомогенна пам'ять може правильно відновлювати до 98 % зображень, що запам'ятовуються. При $m = 1024$ число зображень, що запам'ятовуються, не повинне перевищувати 3636, що на два порядки більше в порівнянні з розглянутою гомогенною ДАП.

Через відсутність загальної теорії та зручних алгоритмів для перекодування довільних наборів векторів, що запам'ятовуються, у вектори з лімітованим числом одиниць, обмеження числа додатних компонентів у вхідних зображеннях є серйозним недоліком негомогенної ДАП. Інший істотний недолік ДАП полягає в тому, що при зашумлених вхідних векторах мережа може відтворювати асоціації, що не відповідають заданим вхідним векторам. Незважаючи на ці недоліки, ДАП, у силу її логічної простоти та зручності реалізації у вигляді надвеликих інтегральних схем, виявляється дуже перспективним класом інтенсивно досліджуваних нейромереж.

### 6.3. Індивідуальні завдання

1. Навчити нейронну мережу ДАП розпізнавання двох асоціацій на основі двох букв вашого імені. Обґрунтувати вибір:
   - числа нейронів мережі;
   - способу кодування елементів чорно-білих зображень;
   - алгоритму навчання мережі.
2. Дослідити працездатність мережі ДАП при пред’явленні на її входи перекручених зображень.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7

# ДИСКРЕТНА НЕЙРОННА МЕРЕЖА АДАПТИВНОЇ РЕЗОНАНСНОЇ ТЕОРІЇ АРТ-1

## 7.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи з дискретною нейронною мережею адаптивної резонансної теорії.

## 7.2. Короткі відомості з теорії

### *7.2.1. Введення в теорію нейронних мереж адаптивного резонансу*

У більшості нейронних мереж, які навчаються методом зворотного поширення, генетичними алгоритмами, у двунаправленої асоціативної пам'яті, мережах Хопфілда та інших дуже часто навчання новому образу, ситуації або асоціації помітно спотворює або навіть знищує плоди попереднього навчання, вимагаючи зміни значної частини ваг зв'язків або повного перенавчання мережі. Щодо цього зазначені нейронні мережі різко відрізняються від мозку людини, що, безупинно обробляючи потоки інформації із зовнішнього середовища, може як модифікувати та уточнювати образи, що зберігаються в пам'яті, так й створювати нові, не знищуючи те, що вже зберігається. Таким чином, мозок людини має високу пластичність до інформації, що надходить, та дозволяє йому сприймати нові образи й уточнювати інформацію, що зберігається, по вже відомих, і в той же час він має й високу стабільність, зберігаючи раніше отримані знання. Неможливість за допомогою вже відомих нейронних мереж вирішити проблему стабільності – пластичності стала однією з основних причин розробки принципово нових конфігурацій нейромереж. Прикладом таких мереж є нейромережі, отримані на основі адаптивної резонансної теорії (*adaptive resonance theory*), розробленої Гроссбергом та Карпентером. Ці мережі у відомій мірі дозволяють вирішувати суперечливі завдання чутливості до нових даних та збереження отриманих знань.

Нейронна мережа адаптивної резонансної теорії (АРТ) відносить вхідне зображення до одного з відомих класів, якщо воно в достатній мірі подібне або резонує із прототипом цього класу. Якщо знайдений прототип

з певною точністю, що задається спеціальним параметром подібності, відповідає вхідному зображенню, то він модифікується, щоб стати більш схожим на пред'явлене зображення. Коли вхідне зображення недостатньо подібне жодному з наявних прототипів, то на його основі створюється новий клас. Це можливо завдяки тому, що мережа має велике число надлишкових або нерозподілених елементів, які не використовуються доти, поки в цьому немає потреби (якщо немає нерозподілених нейронів, то вхідне зображення не викликає реакції мережі). Таким чином, нові образи можуть створювати нові класи, але не можуть спотворити існуючу пам'ять.

Розроблено кілька видів нейромереж на основі адаптивної резонансної теорії, зокрема, мережі АРТ-1 і АРТ-2. АРТ-1 призначена для роботи із двійковими вхідними зображеннями або векторами, а АРТ-2 – для класифікації як двійкових, так й безперервних векторів. Хоча деталі архітектури й алгоритмів роботи для АРТ-1 та АРТ-2 різні, однак вони мають загальну базову архітектуру.

### *7.2.2. Базова архітектура мереж АРТ*

Базова архітектура мереж АРТ включає три групи нейронів: поле $F_1$ вхідних обробних нейронів, що складається із двох шарів елементів; шар нейронів, що розпізнають, та нейрони керування (рис. 7.1).

Поле $F_1$ нейронів складається із двох шарів: вхідного шару $F_a$ та інтерфейсного шару $F_b$. Вхідний шар сприймає пропоновані зображення й передає отриману інформацію нейронам інтерфейсного шару $F_b$ та керуючому нейрону *R*. Кожний елемент інтерфейсного шару $F_b$ пов'язаний з кожним елементом шару *Y*, що розпізнає, двома множинами зважених зв'язків. Сигнали з інтерфейсного шару в шар *Y* передаються зв'язками, що йдуть знизу нагору (з вагами $w_{ij}^1$), а із розпізнавального шару у інтерфейсний – зв'язками, що йдуть зверху до низу (з вагами $w_{ji}^2$). Через наявність великої кількості зв'язків на рис. 7.1 наведено позначення тільки однієї пари зв'язків між інтерфейсними елементами та розпізнавальними елементами.

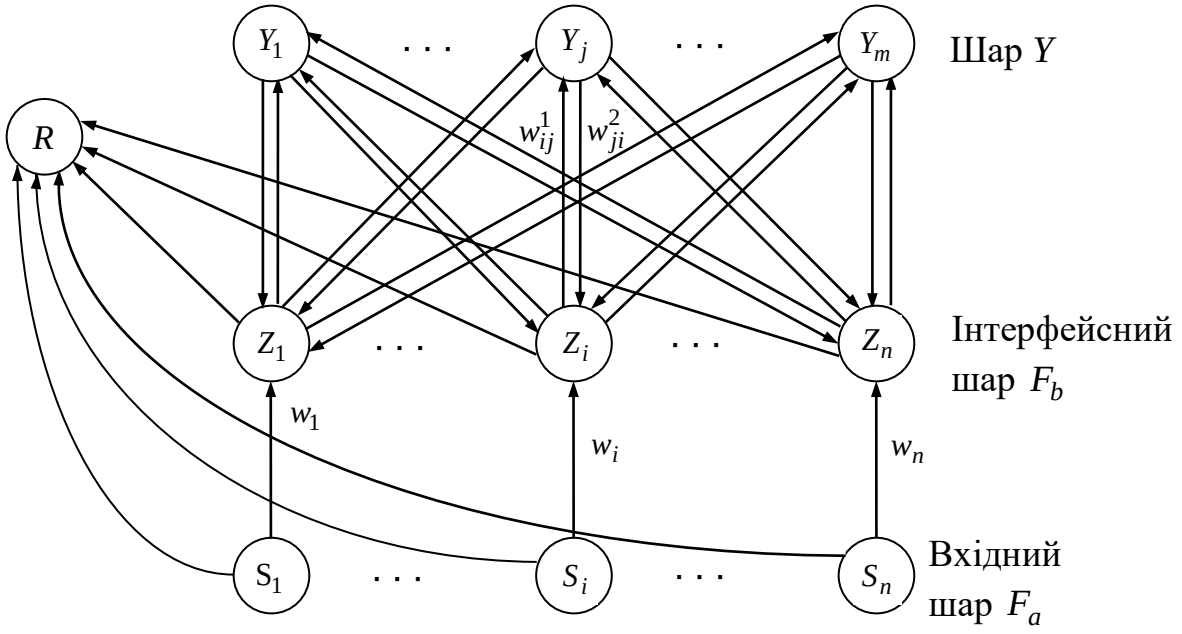



Рис. 7.1. Базова архітектура мережі АРТ

Шар $Y$ є шаром конкуруючих нейронів або нейронів, що змагаються. У будь-який час кожний елемент $Y_j$ $(j = \overline{1,m})$ розпізнавального шару перебуває в одному із трьох станів:

- активному ($U_{\text{вих.}Yj} = d;\ 0 < d < 2$ для АРТ-1);
- неактивному ($U_{\text{вих.}Yj} = 0,$ але здатному брати участь у змаганні);
- загальмованому ($U_{\text{вих.}Yj} = -1$ та не допущеному до змагань при пред'явленні поточного вхідного вектора).

Після пред'явлення вхідного зображення активним залишається тільки один розпізнавальний нейрон всі інші $Y$-елементи мають нульові або негативні вихідні сигнали. Виділений розпізнавальний нейрон допускається до навчання вхідним зображенням тільки у тому випадку, якщо його ваговий вектор зв'язків із шару $Y$ у $F_b$-шар подібний до вхідного вектора. Це рішення приймається за допомогою $R$-нейрона на основі спеціального параметра, що одержав назву параметра подібності, й сигналів, що надходять із вхідного та інтерфейсного шару елементів. Через допоміжні елементи, різні для мереж АРТ-1 та АРТ-2, йде або навчання виділеного розпізнавального $Y$-елемента або його загальмовування з подальшим виключенням із числа нейронів, що змагаються, при повторних пред'явленнях цього ж вхідного зображення, коли виділяються нові кандидати для навчання їх вхідним зображенням.

У найбільш загальному вигляді алгоритм функціонування АРТ можна подати таким чином:

***Крок 1.*** Ініціюються параметри мережі.

***Крок 2.*** Доти, поки не дотримуються умови зупину, виконуються кроки 3 – 10.

***Крок 3.*** Для кожного вхідного вектора або зображення виконуються кроки 4 – 9.

***Крок 4.*** Пред'являється вхідний вектор та обчислюються вихідні сигнали нейронів вхідного шару $F_a$.

***Крок 5.*** Поки не дотримуються умови скидання або повернення до пошуку нового *Y*-нейрона, виконуються кроки 6 – 8.

***Крок 6.*** Шукається незагальмований *Y*-елемент, що має найбільший вихідний сигнал.

***Крок 7.*** Обчислюються вихідні сигнали нейронів інтерфейсного шару $F_b$.

***Крок 8.*** За допомогою параметра подібності перевіряються умови скидання або повернення (вони різні для мереж АРТ-1 та АРТ- 2). Якщо вони виконуються, тоді виділений *Y*-елемент загальмовується та відбувається повернення до кроку 5 алгоритму. Якщо умови скидання не виконуються, тоді виділений кандидат з *Y*-шару допускається до навчання на кроці 9 алгоритму.

***Крок 9.*** Відбувається навчання виділеного *Y*-елемента.

***Крок 10.*** Перевіряються умови зупину. Якщо вони не виконуються, то здійснюється перехід до кроку 2 алгоритму, у противному випадку – перехід до кроку 11 алгоритму.

***Крок 11.*** Зупин.

Хоча мережі АРТ не вимагають появи всіх зображень із однаковою частотою, при їхньому навчанні також використовується поняття епохи (послідовного пред'явлення кожного з навчальних зображень). Процес навчання мереж АРТ може займати багато епох.

Нейронні мережі АРТ – динамічні об'єкти, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь, тому їхнє навчання в загальному випадку досить трудомістке. Однак моделі мереж АРТ можуть бути спрощені, якщо припустити, що зміна вихідних сигналів нейронів відбувається набагато швидше, ніж зміна вагових векторів їхніх зв'язків. Тому в нейромережах теорії адаптивного резонансу можна припускати, що

після виділення для навчання прийнятного *Y*-елемента (після настання резонансу між пред'явленим зображенням та зображенням, що зберігається у пам'яті), вихідні сигнали всіх нейронів залишаються незмінними тривалий період часу, протягом якого відбуваються зміни ваг зв'язків.

У АРТ розрізняють два типи навчання: швидке та повільне. Вони відрізняються як теоретичними передумовами, так й своїми робочими характеристиками. У методі швидкого навчання ваги протягом тривалого часу резонансу досягають урівноваженого стану при кожному пред'явленні зображень. Ця форма навчання типова для двійкових нейронних мереж АРТ-1. Вона буде докладно розглянута в наступних підрозділах. У методі повільного навчання має місце істотно більш повільна зміна ваг під час резонансу, в наслідок чого вони не досягають урівноважених значень при кожному пред'явленні вхідних зображень. Цей метод більш властивий нейромережам АРТ-2, хоча теоретично він може застосовуватися (але, практично не застосовується) для навчання й дискретних мереж АРТ-1. Він вимагає великої кількості пред'явлень вхідних зображень, але невеликого обсягу обчислень при кожному пред'явленні.

### *7.2.3. Архітектура нейронних мереж АРТ-1*

Нейронні мережі АРТ-1 розраховані на роботу з бінарними вхідними зображеннями або векторами. Їхня загальна архітектура наведена на рис. 7.2 й відрізняється від базової архітектури мереж АРТ (рис. 7.1) наявністю додаткових елементів $G_1$ та $G_2$, що забезпечують керування процесом навчання. На рис. 7.2, як й на попередньому рисунку, через наявність великої кількості зв'язків між *Z*- та *Y*-шарами елементів наведено позначення тільки однієї узагальненої пари ваг $w_{ij}^1$, $w_{ji}^2$ зв'язків між інтерфейсними нейронами та розпізнавальними нейронами. Більшість зв'язків, наведених на рис. 7.2, є збудливими: від вхідного шару елементів $F_a$ до нейронів *R*, $G_1$, $G_2$ та $F_b$-шару, від нейронів $G_1$, $G_2$ й *R* відповідно до нейронів шарів $F_b$ та *Y*. Гальмуючі сигнали передають тільки множини зв'язків від інтерфейсних елементів до *R*-нейрона та від *Y*-нейронів до елемента $G_1$. Всі зв'язки мережі АРТ-1 передають тільки бінарні сигнали 0 або 1.

Кожний елемент у інтерфейсному або *Y*-шарі мережі АРТ-1 має три джерела вхідних сигналів. Довільний інтерфейсний елемент $Z_i$ $(i = \overline{1,n})$

може одержувати сигнали від елемента $S_i$ вхідного шару, з вершин *Y*-шару й від нейрона $G_1$. Аналогічно елемент $Y_j$ $(j=\overline{1,m})$ може одержувати сигнали від інтерфейсних елементів, нейронів *R* та $G_2$. Для переводу нейронів інтерфейсного або розпізнавального шарів в активний одиничний стан необхідна наявність вхідних збудливих сигналів із двох джерел. Оскільки кожний з розглянутих нейронів має три можливих джерела сигналів, то умова збудження цих нейронів одержала назву "правила два з трьох".

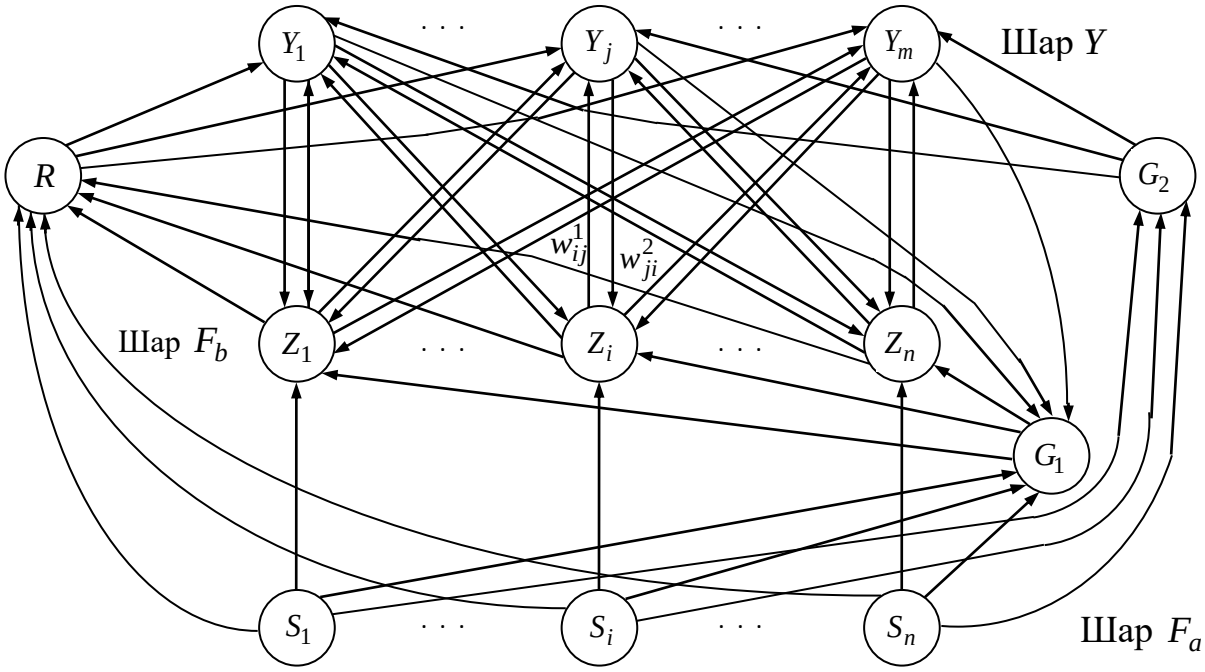



Рис. 7.2. Архітектура нейронної мережі АРТ

У початковому стані нейрони *R*, $G_1$, $G_2$ та вхідний шар $F_a$ мають нульові вихідні сигнали (перебувають у стані "0"). При подачі на входи *S*-елементів бінарних компонентів пропонованого зображення частина з них, що одержали одиничні вхідні сигнали, переходить у стан "1". Збуджувальні сигнали з виходів цих нейронів переходять у стан "1" нейрони $G_1$, $G_2$ та *R*, а також надходять на входи відповідних нейронів інтерфейсного шару. Нейрони інтерфейсного шару, що одержали одиничні сигнали від нейронів вхідного шару й елемента $G_1$, за "правилом два з трьох", переходять у активний стан й посилають свої збуджувальні сигнали по зв'язках з вагами $w_{ij}^1$ на входи нейронів розпізнавального шару.

Нейрони розпізнавального шару переходять в активний стан також за "правилом два з трьох", одержуючи збуджувальні сигнали не тільки від елементів інтерфейсного шару, але й від елемента $G_2$. Після цього в шарі *Y*-нейронів відбувається латеральний процес й виділяється єдиний *Y*-нейрон. Всі нейрони *Y*-шару, крім перемігшого, переходять у стан "0", а перемігший нейрон – у стан "1". Одиничний сигнал перемігшого нейрона загальмовує керуючий нейрон $G_1$, а також надходить по зв'язках з вагами $w_{ji}^2$ на входи елементів інтерфейсного шару. Оскільки елементи інтерфейсного шару підкоряються "правилу два з трьох", то за відсутності збуджувальних сигналів від нейрона $G_1$ у активному стані залишаться тільки ті інтерфейсні елементи, які одержують одиничні сигнали від елемента вхідного шару та від перемігшого нейрона розпізнавального шару.

Гальмуючі сигнали активних елементів інтерфейсного шару надходять на входи *R*-елемента, що також одержує й збуджувальні сигнали від нейронів вхідного шару. Залежно від співвідношення величин збуджуючих та гальмуючих сигналів *R*-елемент переходить або в стан "0", або в стан "1". При нульовому вихідному сигналі *R*-елемента в мережі настає резонанс та відбувається навчання ваг зв'язків перемігшого *Y*-нейрона, а при одиничному вихідному сигналі – перемігший *Y*-нейрон загальмовується й втрачає можливості брати участь у змаганнях при повторних пред'явленнях поточного зображення. Потім у *Y*-шарі йде вибір нового перемігшого нейрона.

### *7.2.4. Алгоритм навчання мереж АРТ-1*

В основу розглянутого алгоритму покладено метод швидкого навчання, який припускає, що ваги перемігшого *Y*-нейрона досягають рівноважних значень при кожному пред'явленні навчального вектора або зображення. Диференціальні рівняння, що описують зміни ваг перемігшого *Y*-елемента (позначеного індексом *J*), у загальному випадку мають вигляд

$$\frac{dw_{iJ}^1}{dt} = A_1[-E_{ij}w_{iJ}^1 + U_{вих.Zi}], \quad \frac{dw_{Ji}^2}{dt} = A_2[-E_{ji}w_{Ji}^2 + U_{вих.Zi}], \qquad (7.1)$$

де $w_{iJ}^1$ – вага зв'язку від елемента $Z_i$ до перемігшого елемента $Y_J$; $w_{Ji}^2$ – вага зв'язку від елемента $Y_J$ до елемента $Z_i$; $t$ – час; $A_1, A_2$ – постійні коефіцієнти; $E_{ij}, E_{ji}$ – визначувані функції; $U_{\text{вих}.Zi}$ – вихідний сигнал *i*-го *Z*-нейрона.

Функція $E_{ij}$ в першому диференціальному рівнянні (7.1) задається прямо пропорційно нормі вектора вихідних сигналів нейронів інтерфейсного шару:

$$E_{ij} = U_{\text{вих}.Zi} + L^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} U_{\text{вих}.Zk}, \tag{7.2}$$

де $L$ – додатна константа й $L = A_1 / K$, а норма вектора визначається як сума його компонентів.

З урахуванням співвідношення (7.2) перше рівняння (7.1) перетвориться до вигляду

$$\frac{dw_{iJ}^1}{dt} = KL\left[-w_{iJ}^1 U_{\text{вих}.Zi} - w_{iJ}^1 L^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} U_{\text{вих}.Zk} + U_{\text{вих}.Zi}\right]$$

або

$$\frac{dw_{iJ}^1}{dt} = K\left[(1 - w_{iJ}^1)\, L U_{\text{вих}.Zi} - w_{iJ}^1 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} U_{\text{вих}.Zk}\right]. \tag{7.3}$$

Якщо $U_{\text{вих}.Zi} = 0$, то рівняння (7.3) набуває вигляду

$$\frac{dw_{iJ}^1}{dt} = -K w_{iJ}^1 \left\| U_{\text{вых}.Z} \right\|, \tag{7.4}$$

де $\left\| U_{\text{вих}.Z} \right\| = \sum_{k=1,\, k \neq i}^{n} U_{\text{вих}.Zk}$ – норма вектора вихідних сигналів нейронів інтерфейсного шару.

Оскільки в рівноважному стані

$$\frac{dw_{iJ}^1}{dt} = 0, \tag{7.5}$$

то зі співвідношень (7.4) та (7.5) виходить, що

$$w_{iJ}^1 = 0. \tag{7.6}$$

Якщо елемент $Z_i$ активний, тобто $U_{\text{вих.}Zi} = 1$, то $\sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} U_{\text{вих.}Zk} = \| U_{\text{вих.}Z} \| - 1$ та рівняння (7.3) перетворюється до вигляду:

$$\frac{dw_{iJ}^1}{dt} = K[(1 - w_{iJ}^1)\, L - w_{iJ}^1\, (\| U_{\text{вых.}Z} \| - 1)]. \tag{7.7}$$

З рівняння (7.7) за умови (7.5) неважко одержати співвідношення для рівноважних значень ваг

$$w_{iJ}^1 = \frac{L}{L - 1 + \| U_{\text{вих.}Z} \|}. \tag{7.8}$$

Формули (7.6) та (7.8) для рівноважних значень ваг можна об'єднати за допомогою одного виразу

$$w_{iJ}^1 = \frac{L U_{\text{вих.}Zi}}{L - 1 + \| U_{\text{вих.}Z} \|}, \tag{7.9}$$

тому що $U_{\text{вих.}Zi} = 0,$ якщо нейрон $Z_i$ пасивний та $U_{\text{вих.}Zi} = 1,$ якщо нейрон активний.

Вираз для рівноважних ваг $w_{Ji}^2$ $(i = \overline{1,n})$ виходить більш простим, тому що в другому рівнянні (7.1), згідно з даними відомих робіт з теорії АРТ, можна припустити, що $A_2 = E_{ji} = 1$. У зв'язку із цим рівняння перетвориться до вигляду

$$\frac{dw_{Ji}^2}{dt} = -w_{Ji}^2 + U_{\text{вих.}Zi}. \qquad (7.10)$$

Оскільки в рівноважному стані похідна в лівій частині співвідношення (7.10) повинна бути такою, що дорівнює нулю, то маємо

$$w_{Ji}^2 = U_{\text{вих. }Zi}. \qquad (7.11)$$

На основі методу швидкого навчання для нейромереж АРТ-1 може використовуватися наступний алгоритм.

### *7.2.5. Алгоритм навчання нейромереж АРТ-1*

У алгоритмі прийняті такі позначення:

$m$ – максимальне число елементів, що розпізнаються у *Y*-шарі, або максимальне число розпізнаваних класів вхідних зображень;

$n$ – число компонентів у вхідному векторі або зображенні;

$S^k$ – $n$-мірний бінарний вхідний вектор; $k = \overline{1,q}$;

$q$ – число навчальних вхідних векторів;

$U_{\text{вих.}Z}$ – $n$-мірний бінарний вектор вихідних сигналів інтерфейсного шару елементів;

$\| X \|$ – норма вектора $X$;

$w_{ij}^1$ – вага зв'язку від інтерфейсного елемента $Z_i$ $(i = \overline{1,n})$ до елемента $Y_j$ $(j = \overline{1,m})$, діапазон припустимих початкових значень $0 < w_{ij}^1 < \dfrac{1}{L-1+n}$; рекомендоване початкове значення $\dfrac{1}{1+n}$;

$w_{ji}^2$ – вага зв'язку від елемента $Y_j$ $(j = \overline{1,m})$ до елемента $Z_i$ $(i = \overline{1,n})$, рекомендоване початкове значення $w_{ji}^2 = 1$;

$p$ – параметр подібності між пред'явленим вектором та вектором ваг перемігшого нейрона *Y*-шару, діапазон припустимих значень параметра $0 < p \le 1$; рекомендоване значення $p \approx 0{,}9$.

***Крок 1.*** Ініціюються параметри $L$, $p$ й ваги $w_{ij}^1$ та $w_{ji}^2$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$).

***Крок 2.*** Поки не виконуються умови зупину, реалізуються кроки 3 – 14.

***Крок 3.*** Для кожного навчального вхідного вектора $S^k$ ($k=\overline{1,q}$) виконуються кроки 4 – 13.

***Крок 4.*** Задається нульова активація всіх розпізнавальних елементів *Y*-шару: $U_{\text{вих.}Yj}=0,\ j=\overline{1,m}.$ Вхідним навчальним вектором $S^k=(s_1^k,\ ...,\ s_n^k)$ установлюється активація *S*-елементів вхідного шару: $U_{\text{вих.}Si}=s_i^k,\ \ i=\overline{1,n}$.

***Крок 5.*** Обчислюється норма вектора вихідних сигналів вхідного шару:

$$\left\|U_{\text{вих.}S}\right\|=\left\|S^k\right\|=\sum_{i=1}^{n}s_i^k.$$

***Крок 6.*** Формуються вхідні та вихідні сигнали елементів інтерфейсного шару: $U_{\text{вх.}Zi}=U_{\text{вих.}Si},\ \ U_{\text{вих.}Zi}=U_{\text{вх.}Zi},\ \ i=\overline{1,n}$.

***Крок 7.*** Для кожного незагальмованого *Y*-нейрона, тобто у якого вихідний сигнал не дорівнює $-1$, розраховуються його вхідний та вихідний сигнали:

$$\text{якщо } U_{\text{вих.}Yj}\neq -1,\ \text{ то }\ U_{\text{вх.}Yj}=U_{\text{вих.}Yj}=\sum_{i=1}^{n}w_{ij}^1U_{\text{вих.}Zi}.$$

***Крок 8***. Поки не знайдений *Y*-нейрон, ваговий вектор якого при заданому параметрі подібності $p$ відповідає вхідному вектору $S^k$, виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9.*** У *Y*-шарі визначається нейрон $Y_J$, що задовольняє умову $U_{\text{вих.}Y_J}\geq U_{\text{вих.}Yj},\ \ j=\overline{1,m}$. Якщо таких нейронів декілька, то вибирається елемент із найменшим індексом. Якщо $U_{\text{вих.}Y_J}=-1$, то всі елементи загальмовані й вхідне зображення не може бути класифіковане.

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали Z-елементів:

$$U_{\text{вих.}Zi} = U_{\text{вих.}Si} w_{Ji}^2 .$$

***Крок 11.*** Обчислюється норма вектора вихідних сигналів інтерфейсного шару:

$$\left\| U_{\text{вих.}Z} \right\| = \sum_{i=1}^{n} U_{\text{вих.}Zi} .$$

***Крок 12.*** Перевіряється умова на можливість навчання виділеного *Y*-нейрона:

$$\text{якщо } \frac{\left\| U_{\text{вих.}Z} \right\|}{\left\| S^k \right\|} < p, \text{ то } U_{\text{вих.}Y_J} = -1,$$

тобто загальмовується елемент $Y_J$ й триває виконання кроку 9 алгоритму;

$$\text{якщо } \frac{\left\| U_{\text{вих.}Z} \right\|}{\left\| S^k \right\|} \geq p, \text{ то здійснюється перехід до кроку 13 алгоритму.}$$

***Крок 13.*** Адаптуються ваги зв'язків елемента $Y_J$ :

$$w_{iJ}^1 = \frac{L U_{\text{вих.}Zi}}{L - 1 + \left\| U_{\text{вих.}Z} \right\|}, \quad w_{Ji}^2 = U_{\text{вих.}Zi}, \quad i = \overline{1, n} .$$

***Крок 14.*** Перевіряються умови зупину. Умовами зупину можуть бути: відсутність змін ваг $w_{ij}^1$, $w_{ji}^2$ мережі, досягнення заданого числа епох й т. д. Якщо умови зупину не виконуються, то здійснюється перехід до кроку 2 алгоритму, інакше – до кроку 15.

***Крок 15.*** Зупин.

## 7.3. Приклади застосування швидкого алгоритму навчання мережі АРТ-1

Розглянемо в деталях застосування описаного алгоритму на простих прикладах.

***Приклад 7.1.*** Використання алгоритму АРТ-1 для класифікації чотирьох векторів $(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$.

Для розв'язання задачі класифікації використовуємо алгоритм АРТ-1 з такими параметрами: $m = 4$ – максимальне число створюваних кластерів; $n = 5$ – розмірність вхідних векторів; $q = 4$ – число вхідних векторів; $p = 0{,}45$ – параметр подібності; $L = 2$ – параметр для адаптації ваг $w_{ij}^1,\ i = \overline{1{,}5},\ j = \overline{1{,}4}$; $w_{ij}^1(t=0) = \dfrac{1}{1+n} = 0{,}167$ – початкові ваги $w_{ij}^1,\ i = \overline{1{,}5},\ j = \overline{1{,}4}$; $w_{ji}^2(t=0) = 1$ – початкові ваги $w_{ji}^2,\ j = \overline{1{,}4},\ i = \overline{1{,}5}$.

Застосування алгоритму дає такі результати.

***Крок 1.*** Ініціюються параметри та початкові ваги зв'язків: $L = 2;\ p = 0{,}45;\ w_{ij}^1(0) = 0{,}166,\ w_{ji}^2(0) = 1,\ i = \overline{1{,}5}$, $j = \overline{1{,}4}$.

***Крок 2.*** Початок обчислень.

***Крок 3.*** Для першого вхідного вектора $S^1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ виконуються кроки 4 – 13.

***Крок 4.*** Задаються вихідні сигнали елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вих.}Yj} = 0,\ \ j = \overline{1{,}4}.$$

Вхідним навчальним вектором $(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ визначаються вихідні сигнали *S*-елементів:

$$U_{\text{вих.}Si} = s_i^k,\ \ i = \overline{1{,}5},$$

$$U_{\text{вих.}S_1} = 1,\ \ U_{\text{вих.}S_2} = 1,\ \ U_{\text{вих.}S_3} = 0,\ \ U_{\text{вих.}S_4} = 0,\ \ U_{\text{вих.}S_5} = 0.$$

***Крок 5.*** Обчислюється норма вектора вихідних сигналів вхідного шару:

$$\left\|U_{\text{вих}.S}\right\| = \sum_{i=1}^{5} U_{\text{вих}.Si} = 2.$$

***Крок 6***. Формуються вектори вхідних та вихідних сигналів елементів інтерфейсного шару:

$$U_{\text{вх}.Z} = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0),\ U_{\text{вих}.Z} = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0).$$

***Крок 7.*** Обчислюються вхідні сигнали для всіх елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вх}.Y_1} = \sum_{i=1}^{5} w_{i1} U_{\text{вих}.Zi} = 0{,}167 \cdot 1 + 0{,}167 \cdot 1 +$$
$$+ 0{,}167 \cdot 0 + 0{,}167 \cdot 0 + 0{,}167 \cdot 0 = 0{,}334,$$
$$U_{\text{вх}.Y_2} = U_{\text{вх}.Y_3} = U_{\text{вх}.Y_4} = U_{\text{вх}.Y_1} = 0{,}334.$$

***Крок 8.*** Поки не знайдений *Y*-нейрон, ваговий вектор якого відповідно до заданого параметра подібності *p* відповідає пред'явленому вектору $(1,1,0,0,0)$, виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9.*** Оскільки всі *Y*-елементи мають однакові вхідні сигнали, то нейроном-переможцем вибирається перший незагальмований *Y*-нейрон: $J = 1.$

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали *Z*-елементів:

$$U_{\text{вих}.Zi} = U_{\text{вих}.Si} w_{Ji}^2.$$

Оскільки $U_{\text{вих}.S} = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ та $w_{Ji}^2 = (1,1,1,1,1)$, то маємо $U_{\text{вих}.Z} = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0).$

***Крок 11.*** Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.Z}$ :

$$\left\|U_{\text{вих}.Z}\right\| = \sum_{i=1}^{5} U_{\text{вих}.Zi} = 2.$$

***Крок 12.*** Перевіряється подібність векторів $S^1 = (1,1,0,0,0)$ та $U_{\text{вих.}Z}$; оскільки $\dfrac{\|U_{\text{вих.}Z}\|}{\|S^1\|} = \dfrac{2}{2} = 1 > p = 0{,}45,$ то на наступному кроці виконується адаптація ваг нейрона $Y_1$.

***Крок 13.*** За допомогою формули (7.9) визначаються рівноважні ваги $w_{i1}^1$:

$$w_{i1}^1 = \frac{LU_{\text{вих.}Zi}}{L-1+\|U_{\text{вих.}Z}\|} = \frac{2U_{\text{вих.}Zi}}{3}, \quad i = \overline{1,5},$$

$$w_{11}^1 = w_{21}^1 = 0{,}667, \quad w_{31} = w_{41} = w_{51} = 0.$$

За допомогою формули (7.11) визначаються рівноважні ваги $w_{1i}^2$: $w_{11}^2 = w_{12}^2 = 1, \quad w_{13}^2 = w_{14}^2 = w_{15}^2 = 0$.

У результаті адаптації ваг одержимо такі вагові матриці:

$$W^1 = \begin{vmatrix} 0{,}667 & 0{,}167 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0{,}667 & 0{,}167 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}167 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}167 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}167 & 0{,}167 & 0{,}167 \end{vmatrix}, \qquad W^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***Крок 3.*** Для другого вхідного вектора $S^2 = (0,0,1,1,0)$ виконуються кроки 4 – 13.

***Крок 4.*** Задаються вихідні сигнали елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вих.}Y} = (U_{\text{вих.}Y_1}, \ \ldots, \ U_{\text{вих.}Y_4}) = (0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Вхідним навчальним вектором $S^2 = (0,0,1,1,0)$ визначаються вихідні сигнали *S*-елементів:

$$U_{\text{вих.}S} = (U_{\text{вих.}S_1}, \ \ldots, \ S_{\text{вих.}S_5}) = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0).$$

***Крок 5.*** Обчислюється норма вектора вихідних сигналів вхідного шару:

$$\left\|U_{\text{вих}.S}\right\| = \sum_{i=1}^{5} U_{\text{вих}.Si} = 2.$$

***Крок 6.*** Визначаються вихідні сигнали елементів інтерфейсного шару: $U_{\text{вих}.Z} = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$.

***Крок 7.*** Обчислюються вхідні сигнали для елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вх}.Y_1} = \sum_{i=1}^{5} w_{i1} U_{\text{вих}.Zi} = 0{,}667 \cdot 0 + 0{,}667 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$U_{\text{вх}.Y_2} = \sum_{i=1}^{5} w_{i2} U_{\text{вих}.Zi} = 0{,}167 \cdot 0 + 0{,}167 \cdot 0 + 0{,}167 \cdot 1 +$$

$$+ 0{,}167 \cdot 1 + 0{,}167 \cdot 0 = 0{,}334,$$

$$U_{\text{вх}.Y_3} = U_{\text{вх}.Y_4} = U_{\text{вх}.Y_2} = 0{,}334.$$

***Крок 8.*** Виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9.*** Оскільки три елементи $Y_2$, $Y_3$, $Y_4$ мають однакові вхідні, а отже, і вихідні сигнали, то нейроном-переможцем вибирається нейрон з меншим номером: $J = 2$.

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали *Z*-елементів:

$$U_{\text{вих}.Zi} = U_{\text{вих}.Si} w_{Ji}^2, \quad U_{\text{вих}.Z} = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0).$$

***Крок 11.*** Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.Z}$:

$$\left\|U_{\text{вих}.Z}\right\| = \sum_{i=1}^{5} U_{\text{вих}.Zi} = 2.$$

***Крок 12.*** Перевіряється подібність векторів $S^2 = (0, 0, 1, 1, 0)$ та $U_{\text{вих}.Z}$:

$$\frac{\|U_{\text{вих}.Z}\|}{\|S^2\|} = \frac{2}{2} = 1 > p.$$

***Крок 13.*** Визначаються рівноважні ваги $w_{i2}^1$ та $w_{2i}^2$:

$$w_{i2}^1 = \frac{LU_{\text{вих}.Zi}}{L-1+\|U_{\text{вих}.Zi}\|} = \frac{2}{3}U_{\text{вих}.Zi}, \quad i = \overline{1,5},$$

$$w_{12}^1 = w_{22}^1 = w_{52}^1 = 0, \quad w_{32}^1 = w_{42}^1 = 0{,}667;$$

$$w_{2i}^2 = U_{\text{вих}.Zi}, \quad i = \overline{1,5},$$

$$w_{21}^2 = w_{22}^2 = w_{25}^2 = 0, \quad w_{23}^2 = w_{24}^2 = 1.$$

У результаті виходять такі вагові матриці:

$$W^1 = \begin{vmatrix} 0{,}667 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0{,}667 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}667 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}667 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \end{vmatrix}, \quad W^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***Крок 3.*** Для третього вхідного вектора $S^3 = (1, 0, 0, 0, 0)$ виконуються кроки 4 – 13.

***Крок 4.*** Задаються вихідні сигнали елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вих}.Y} = (0, 0, 0, 0).$$

Визначаються вихідні сигнали *S*-елементів: $U_{\text{вих}.S} = (1, 0, 0, 0, 0)$.

***Крок 5***. Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.S}$: $\|U_{\text{вих}.S}\| = \sum_{i=1}^{5} U_{\text{вих}.Si} = 1$.

***Крок 6.*** Визначається вектор вихідних сигналів інтерфейсного шару: $U_{\text{вих}.Z} = (1, 0, 0, 0, 0)$.

***Крок 7.*** Обчислюються вхідні сигнали для елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вх}.Y_1} = \sum_{i=1}^{5} w_{i1} U_{\text{вих}.Zi} = 0{,}667, \quad U_{\text{вх}.Y_2} = \sum_{i=1}^{5} w_{i2} U_{\text{вих}.Zi} = 0,$$

$$U_{\text{вх}.Y_3} = U_{\text{вх}.Y_4} = 0{,}167.$$

***Крок 8.*** Виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9.*** Визначається нейрон з максимальним вихідним сигналом: $J = 1$.

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали *Z*-елементів:

$$U_{\text{вих}.Zi} = U_{\text{вих}.Si} w_{Ji}^2, \quad U_{\text{вих}.Z} = (1, 0, 0, 0, 0).$$

***Крок 11.*** Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.Z}$: $\|U_{\text{вих}.Z}\| = 1$.

***Крок 12.*** Перевіряється подібність векторів $S^3 = (1, 0, 0, 0, 0)$ та $U_{\text{вих}.Z}$:

$$\frac{\|U_{\text{вих}.Z}\|}{\|S^3\|} = 1 > p.$$

***Крок 13.*** Визначаються рівноважні ваги $w_{i1}^1$, $w_{1i}^2$:

$$w_{i1}^1 = \frac{L U_{\text{вих}.Zi}}{L - 1 + \|U_{\text{вих}.Zi}\|} = U_{\text{вих}.Zi}, \quad i = \overline{1,5},$$

$$w_{11}^1 = 1,\ w_{21}^1 = w_{31}^1 = w_{41}^1 = w_{51}^1 = 0;$$

$$w_{1i}^2 = U_{\text{вых}.Zi}, \quad w_{12}^2 = 1, \quad w_{12}^2 = w_{13}^2 = w_{14}^2 = w_{15}^2 = 0.$$

У результаті виходять такі вагові матриці:

$$W^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}667 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}667 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \end{vmatrix}, \quad W^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.12)$$

***Крок 3.*** Для четвертого вхідного вектора $S^4 = (0,0,0,1,1)$ виконуються кроки 4 – 13.

У результаті виконання кроків 4 – 12 обчислюється норма вхідного вектора $\left( \left\| S^4 \right\| = 2 \right)$, визначаються вхідні сигнали елементів *Y*-шару ($U_{\text{вх}.Y_1} = 0$, $U_{\text{вх}.Y_2} = 0{,}667$, $U_{\text{вх}.Y_3} = U_{вх.Y_4} = 0{,}334$), визначається нейрон $Y_J$ з максимальним вихідним сигналом $(J = 2)$, розраховується вектор вихідних сигналів *Z*-елементів $(U_{\text{вих}.Z} = (0,0,0,1,0))$ та його норма $\left( \left\| U_{вих.Z} \right\| = 1 \right)$, а потім перевіряється подібність векторів $U_{\text{вих}.Z}$ й $S^4$: $\dfrac{\left\| U_{\text{вих}.Z} \right\|}{\left\| S^4 \right\|} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 > p = 0{,}45$.

***Крок 13.*** Визначаються рівноважні ваги $w_{i2}^1$, $w_{2i}^2$:

$$w_{12}^1 = w_{22}^1 = w_{32}^1 = w_{52}^1 = 0, \quad w_{42}^1 = 1,$$
$$w_{21}^2 = w_{22}^2 = w_{23}^2 = w_{25}^2 = 0, \quad w_{24}^2 = 1.$$

У результаті виходять такі вагові матриці:

$$W^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 1 & 0{,}167 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0{,}167 & 0{,}167 \end{vmatrix}, \quad W^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***Крок 14.*** Перевірка умов зупину. На цьому закінчується перша епоха навчання. Легко переконатися у тому, що друга й наступна епохи не можуть внести в отримані матриці при параметрі подібності $p = 0{,}45$ яких-небудь змін. Тому, якщо як умови зупину використовувати незмінність матриць ваг $W^1$, $W^2$ протягом епохи навчання, алгоритм припинить свою роботу після виконання другої епохи навчання.

***Приклад 7.2.*** Застосуємо алгоритм роботи АРТ-1 для класифікації векторів прикладу 7.1, пропонованих у тому самому порядку, але вже при параметрі подібності $p = 0{,}8$.

Неважко переконатися, що для векторів $S^1=(1,1,0,0,0)$, $S^2=(0,0,1,1,0)$, $S^3=(1,0,0,0,0)$ навчання буде виконуватися так само, як й у прикладі 7.1, та будуть отримані вагові матриці (7.12) прикладу 7.1. Однак після пред'явлення четвертого вхідного вектора $S^4=(0,0,0,1,1)$ виходять результати, що відрізняються від результатів прикладу 7.1.

***Крок 3.*** Для четвертого вхідного вектора $S^4=(0,0,0,1,1)$ виконуються кроки 4 – 13.

***Крок 4.*** Задаються вихідні сигнали елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вих}.Y}=(0,0,0,0),$$

визначаються вихідні сигнали *S*-елементів: $U_{\text{вих}.S}=(0,0,0,1,1)$.

***Крок 5.*** Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.S}$: $\|U_{\text{вих}.S}\|=\sum_{i=1}^{5}U_{\text{вих}.Si}=2$.

***Крок 6.*** Визначається вектор вихідних сигналів інтерфейсного шару: $U_{\text{вих}.Z}=(0,0,0,1,1)$.

***Крок 7.*** Обчислюються вхідні сигнали для елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вх}.Y_1}=\sum_{i=1}^{5}w_{i1}U_{\text{вих}.Zi}=0,$$

$$U_{\text{вх}.Y_2}=\sum_{i=1}^{5}w_{i2}U_{\text{вих}.Zi}=0{,}667,$$

$$U_{\text{вх}.Y_3}=U_{\text{вх}.Y_4}=0{,}334.$$

***Крок 8.*** Виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9***. Визначається *Y*-нейрон з максимальним вихідним сигналом: $J=2$.

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали *Z*-елементів:

$$U_{\text{вих}.Zi}=U_{\text{вих}.Si}w_{2i}^2,\quad U_{\text{вих}.Z}=(0,0,0,1,0).$$

***Крок 11.*** Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.Z}$: $\|U_{\text{вих}.Z}\|=1$.

***Крок 12.*** Перевіряється подібність векторів $S^4=(0,0,0,1,1)$ й $U_{\text{вих}.Z}$:

$$\frac{\|U_{\text{вих}.Z}\|}{\|S^4\|} = \frac{1}{2} = 0{,}5 < p = 0{,}8.$$

Оскільки величина відношення норм векторів $U_{\text{вих}.Z}$ й $S^4$ менша від параметра подібності, то нейрон $Y_2$ загальмовується й починається пошук нового нейрона з максимальним вихідним сигналом.

***Крок 8.*** Оскільки не знайдений відповідний *Y*-нейрон для навчання, то виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9.*** Визначається нейрон з вихідним сигналом, що задовольняє умову: $U_{\text{вих}.Y_J} \geq U_{\text{вих}.Yj}$.

Оскільки $U_{\text{вих}.Y_1} = 0,\ U_{\text{вих}.Y_2} = -1,\ U_{\text{вих}.Y_3} = 0{,}334,\ U_{\text{вих}\,Y_4} = 0{,}334,$ то із двох елементів з однаковим максимальним вихідним сигналом вибирається елемент $Y_3$, тому що він має менший індекс, а отже $J = 3$.

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали *Z*-елементів:

$$U_{\text{вих}.Zi} = U_{\text{вих}.Si} w_{3i}^2,\ \ U_{\text{вих}.Z} = (0, 0, 0, 1, 1).$$

***Крок 11.*** Розраховується норма вектора $U_{\text{вих}\,Z}$: $\|U_{\text{вих}.Z}\| = 2$.

***Крок 12.*** Перевіряється подібність векторів $S^4 = (0, 0, 0, 1, 1)$ й $U_{\text{вих}.Z}$:

$$\frac{\|U_{\text{вих}.Z}\|}{\|S^4\|} = 1 > p = 0{,}8.$$

Оскільки відношення норм векторів $U_{\text{вих}.Z}$, $S^4$ перевершує величину параметра подібності, то на наступному кроці визначаються рівноважні ваги.

***Крок 13.*** Визначаються рівноважні ваги $w_{i3}^1, w_{3i}^2$:

$$w_{i3}^1 = \frac{L U_{\text{вих}.Zi}}{L - 1 + \|U_{\text{вих}.Zi}\|} = \frac{2}{3} U_{\text{вих}.Zi},\ \ i = \overline{1, 5},$$

$$w_{13}^1 = w_{23}^1 = w_{33}^1 = 0,\quad w_{43}^1 = w_{53}^1 = 0{,}667,$$

$$w_{3i}^2 = U_{\text{вих}.Zi},\ \ i = \overline{1, 5},$$

$$w_{31}^2 = w_{32}^2 = w_{33}^2 = 0, \quad w_{34}^2 = w_{35}^2 = 1.$$

У результаті виконаних розрахунків виходять такі матриці ваг:

$$W^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}667 & 0 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}667 & 0{,}667 & 0{,}167 \\ 0 & 0 & 0{,}667 & 0{,}167 \end{vmatrix}, \quad W^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***Крок 14.*** Перевірка умов зупину. Нехай як умови зупину використовується незмінність матриць ваг $W^1$, $W^2$ протягом епохи навчання. Оскільки ця умова не виконується, то здійснюють перехід до кроку 2 алгоритму й починають розрахунки другої епохи навчання.

***Крок 2.*** Початок другої епохи роботи алгоритму.

***Крок 3.*** Для першого вхідного вектора $S^1 = (1, 1, 0, 0, 0)$ виконуються кроки 4 – 13.

***Крок 4.*** Задаються вихідні сигнали елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вих}.Y} = (0, 0, 0, 0),$$

визначаються вихідні сигнали *S*-елементів: $U_{\text{вих}.S} = (1, 1, 0, 0, 0)$.

***Крок 5***. Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.S}$: $\|U_{\text{вих}.S}\| = 2$.

***Крок 6.*** Визначається вектор вихідних сигналів інтерфейсного шару:

$$U_{\text{вих}.Z} = (1, 1, 0, 0, 0).$$

***Крок 7.*** Обчислюються вхідні сигнали для елементів *Y*-шару:

$$U_{\text{вх}.Y_1} = \sum_{i=1}^{5} w_{i1} U_{\text{вих}.Zi} = 1, \quad U_{\text{вх}.Y_2} = \sum_{i=1}^{5} w_{i2} U_{\text{вих}.Zi} = 0,$$

$$U_{\text{вх}.Y_3} \sum_{i=1}^{5} w_{i3} U_{\text{вих}.Zi} = 0, \quad U_{\text{вх}.Y_4} \sum_{i=1}^{5} w_{i4} U_{\text{вих}.Zi} = 0{,}334.$$

***Крок 8.*** Виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9.*** Визначається нейрон з максимальним вихідним сигналом: $J = 1.$

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали *Z*-елементів:

$$U_{\text{вих}.Z} = (1, 0, 0, 0, 0).$$

***Крок 11.*** Обчислюється норма вектора $U_{\text{вих}.Z}$: $\|U_{\text{вих}.Z}\| = 1.$

***Крок 12.*** Перевіряється подібність векторів $S^1 = (1, 1, 0, 0, 0)$ й $U_{\text{вих}.Z}$:

$$\frac{\|U_{\text{вих}.Z}\|}{\|S^1\|} = 0{,}5 < p = 0{,}8.$$

Оскільки відношення норм векторів $U_{\text{вих}.Z}$ та $S^1$ менше від параметра подібності, то нейрон $Y_1$ загальмовується й необхідно починати пошук нового нейрона з максимальним вихідним сигналом. Перехід до кроку 8 алгоритму.

***Крок 8.*** Виконуються кроки 9 – 12.

***Крок 9.*** Визначається нейрон з максимальним вихідним сигналом. Оскільки $U_{\text{вих}.Y_1} = -1,\ U_{\text{вих}.Y_2} = U_{\text{вих}.Y_3} = 0,\ U_{\text{вих}.Y_4} = 0{,}334,$ то маємо $J = 4.$

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали *Z*-елементів:

$$U_{\text{вих}.Zi} = (1, 1, 0, 0, 0).$$

***Крок 11.*** Розраховується норма вектора $U_{\text{вих}.Z}$: $\|U_{\text{вих}.Z}\| = 2.$

***Крок 12.*** Перевіряється подібність векторів $U_{\text{вих}.Z}$ й $S^1$. Оскільки

$$\frac{\|U_{\text{вих}.Z}\|}{\|S^1\|} = 1 > p = 0{,}8,$$

то наступним кроком визначаються рівноважні ваги.

***Крок 13.*** Визначаються рівноважні ваги $w_{i4}^1,\ w_{4i}^2$:

$$w_{i4}^1 = \frac{LU_{\text{вих.}Zi}}{L-1+\|U_{\text{вих.}Z}\|} = \frac{2}{3}U_{\text{вих.}Zi}, \quad i=\overline{1,5},$$

$$w_{14}^1 = w_{24}^1 = 0{,}667, \quad w_{34}^1 = w_{44}^1 = w_{54}^1 = 0,$$

$$w_{4i}^2 = U_{\text{вих.}Zi}, \quad i=\overline{1,5},$$

$$w_{41}^2 = w_{42}^2 = 1, \quad w_{43}^2 = w_{44}^2 = w_{45}^2 = 0.$$

У результаті розрахунків виходять такі матриці ваг:

$$W^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}667 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}667 \\ 0 & 0{,}667 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}666 & 0{,}667 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}667 & 0 \end{vmatrix}, \quad W^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, при великому значенні параметра подібності ( $p = 0{,}8$) чотири вхідних вектори породжують чотири кластери. Цей результат залишається незмінним при будь-якому числі епох навчання мережі.

### 7.4. Індивідуальні завдання

1. Виконати кластеризацію дев'яти двійкових векторів за допомогою нейронної мережі АРТ-1 при трьох різних значеннях параметра подібності. Двійкові вектори одержати в такий спосіб: записати своє прізвище, ім'я та по батькові; вибрати із цих слів дев'ять різних букв; закодувати букви 12-розрядними двійковими векторами.

2. Розробити архітектуру нейронної мережі для ваших даних.

3. Обґрунтувати попередній вибір значень параметра подібності *p* та ваг зв'язків нейронної мережі для ваших даних.

4. Дослідити працездатність мережі при різних значеннях *p*.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8

# ДАП НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖАХ АРТ

## 8.1. Мета лабораторної роботи

Отримання й закріплення знань, формування практичних навичок роботи з двонаправленою асоціативною пам'яттю (ДАП), що створена на основі дискретних нейронних мереж адаптивної резонансної теорії.

## 8.2. Короткі відомості з теорії

### *8.2.1. Структура штучної нейронної мережі ДАП*

Схема ДАП, що створена на основі дискретних нейронних мереж адаптивної резонансної теорії (АРТ), зображена на рис. 8.1.

Нейронна мережа ДАП складається із двох однотипних паралельно працюючих модулів, кожний з яких являє собою дискретну нейронну мережу АРТ-1, двох додаткових керуючих нейронів $G_3^1$, $G_3^2$ і проміжного шару нейронів $P_d$ $(d = 1, ..., m)$, елементи якого зв'язані парами двонаправлених зважених зв'язків $H_{jd}^1, Q_{gd}^1$ і $H_{dj}^2, Q_{dg}^2$ $(j = 1, ..., m;\ d = 1, ..., m;\ \ g = 1, ..., m)$ з відповідними до них елементами розпізнавальних шарів $Y_j^1$ і $Y_g^2$ $(j = 1, ..., m;\ g = 1, ..., m)$. Кожний модуль асоціативної нейронної мережі містить у собі шари інтерфейсних елементів $Z_i^1$ і $Z_l^2$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$, нейрони яких пов'язані з відповідними їм елементами сенсорних шарів $S_i^1$ і $S_l^2$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$, парами бінарних двунаправлених зв'язків, шари розпізнавальних елементів $Y_j^1$ і $Y_g^2$ $(j = 1, ..., m;\ g = 1, ..., m)$, нейрони яких пов'язані з кожним з елементів у відповідних до них інтерфейсних $Z_i^1$ і $Z_l^2$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$ шарах парами двонаправлених зважених зв'язків з безперервними ваговими коефіцієнтами $W_{ij}^1, W_{ji}^2$ й $V_{lg}^1, V_{gl}^2$ $(i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m;\ l = 1, ..., k;\ g = 1, ..., m)$ відповідно першого й другого модулів нейронної мережі.

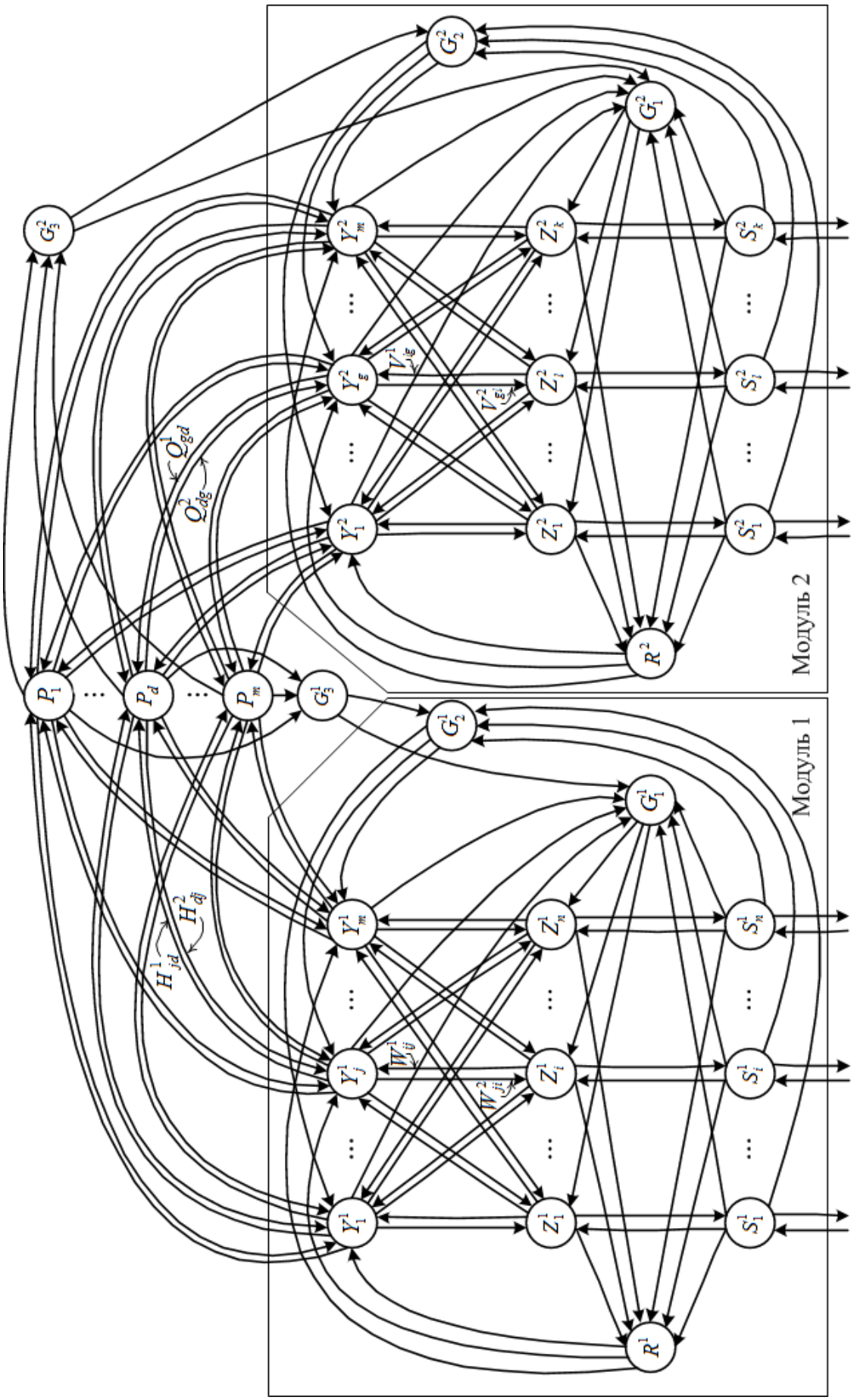



Рис. 1. Схема ДАП розроблена на основі нейронних мереж АРТ-1

Також до складу модулів на основі дискретних нейронних мереж АРТ входять керуючі нейрони $G_1^1, G_2^1, G_1^2, G_2^2$ й вирішуючі нейрони $R^1$ та $R^2$, які зв'язані збудливими й гальмуючими зв'язками з усіма елементами сенсорних $S_i^1$ й $S_l^2$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$, інтерфейсних $Z_i^1$ й $Z_l^2$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$ та розпізнавальних шарів $Y_j^1$ й $Y_g^2$ $(j = 1, ..., m;\ g = 1, ..., m)$ відповідних модулів асоціативної нейронної мережі.

### *8.2.2. Алгоритм навчання двонаправленої асоціативної пам'яті*

Двонаправлена асоціативна пам'ять, функціонує відповідно до двох алгоритмів: навчання й розпізнавання.

В алгоритмах прийняті такі позначення:

$m$ – максимальне число пар асоціативних зображень;

$n$ – число бінарних компонентів у вхідному векторі першого модуля;

$k$ – число бінарних компонентів у вхідному векторі другого модуля;

$L$ – константа, що перевищує одиницю; рекомендоване значення $L = 2$;

$p_1$, $p_2$ – параметри подібності між вхідним вектором і вектором, що зберігається у вагах зв'язків нейрона, що переміг, відповідно першого й другого модуля мережі; діапазон припустимих значень параметрів: $0 < p_1, p_2 < 1$;

$q$ – число пар асоціативних зображень, що запам'ятовуються;

$W_{ij}^1, V_{lj}^1$ $(i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m; l = 1, ..., k)$ – ваги зв'язків від елементів інтерфейсного шару до елементів розпізнавального шару відповідно першого й другого модуля; діапазон припустимих початкових значень $0 < W_{ij}^1 \le \frac{1}{L - 1 + n}$, $0 < V_{lj}^1 \le \frac{1}{L - 1 + k}$; рекомендовані початкові значення при навчанні $W_{ij}^1 = \frac{1}{1 + n}$, $V_{lj}^1 = \frac{1}{1 + k}$;

$W_{ji}^2, V_{jl}^2$ – ваги зв'язків від елементів розпізнавального шару до елементів інтерфейсного шару відповідно першого й другого модуля; рекомендовані початкові значення при навчанні $W_{ji}^2 = V_{jl}^2 = 1$ $(j = 1, ..., m;\ i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$;

$U_{\text{вих.}Y_j^1}, U_{\text{вих.}Y_j^2}$ $(j = 1, ..., m)$ – вихідні сигнали розпізнавальних елементів відповідно першого й другого модуля нейронної мережі;

$U_{\text{вих.}S_i^1}, U_{\text{вих.}S_l^2}$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$ – вихідні сигнали елементів *S*-шару відповідно першого й другого модуля нейронної мережі;

$U_{\text{вх.}Z_i^1}, U_{\text{вх.}Z_l^2}$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$ – вхідні сигнали елементів інтерфейсного шару відповідно першого й другого модуля нейронної мережі;

$U_{\text{вих.}Z_i^1}, U_{\text{вих.}Z_l^2}$ $(i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k)$ – вихідні сигнали елементів інтерфейсного шару відповідно першого й другого модуля нейронної мережі;

$(S_1^1, S_1^2), (S_2^1, S_2^2), ..., (S_q^1, S_q^2)$ – пари асоціативних зображень, які запам'ятовуються обома модулями нейронної мережі;

$S_r^1 = (S_{r1}^1, ..., S_{rn}^1), S_r^2 = (S_{r1}^2, ..., S_{rk}^2)$, $r = 1, ..., q$ – бінарні вхідні вектори *r*-ї пари асоціативних зображень відповідно для першого й другого модуля нейронної мережі;

$\|X\|$ – норма вектора *X*;

$P_t$ $(t = 1, ..., m)$ – нейрони проміжного шару, які зв'язують два модулі асоціативної нейронної мережі;

$H_{jt}^1, Q_{jt}^1$ $(j = 1, ..., m;\ t = 1, ..., m)$ – ваги зв'язків від елементів розпізнавального шару до елементів проміжного шару відповідно першого й другого модуля нейронної мережі;

$H_{tj}^2, Q_{tj}^2$ $(j = 1, ..., m;\ t = 1, ..., m)$ – ваги зв'язків від елементів проміжного шару до елементів розпізнавального шару, відповідно першого й другого модуля нейронної мережі.

Алгоритм навчання двонаправленої асоціативної пам'яті, припускає виконання наступних кроків:

***Крок 1.*** Ініціюються параметри *L*, $p_1$, $p_2$ і ваги зв'язків $W_{ij}^1$, $W_{ji}^2$, $V_{lj}^1$ и $V_{jl}^2$ $(i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m;\ l = 1, ..., k)$.

***Крок 2.*** Задаються нульові вихідні сигнали всіх розпізнавальних елементів, обох модулів нейронної мережі:

$$U_{\text{вих.}Y_j^1} = 0;\ U_{\text{вих.}Y_j^2} = 0;\ \ j = 1, ..., m.$$

***Крок 3.*** Для кожної пари вхідних зображень $S_r^1 = (S_{r1}^1, ..., S_{rn}^1)$, $S_r^2 = (S_{r1}^2, ..., S_{rk}^2)$, $r = 1, ..., q$ виконуються кроки 4 – 13.

***Крок 4.*** Вхідними векторами $S_r^1$ й $S_r^2$ визначаються вихідні сигнали елементів $S_i^1$ і $S_l^2$ вхідних шарів обох модулів:

$$U_{\text{вих.}S_{ri}^1} = S_{ri}^1;\ U_{\text{вих.}S_{rl}^2} = S_{rl}^2,\ i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k.$$

***Крок 5.*** Обчислюються норми векторів вихідних сигналів нейронів вхідного шару обох модулів:

$$\left\| U_{\text{вих.}S^1} \right\| = \sum_{i=1}^{n} U_{\text{вих. }S_i^1};\quad \left\| U_{\text{вих.}S^2} \right\| = \sum_{l=1}^{k} U_{\text{вих. }S_l^2}.$$

***Крок 6.*** Формуються вхідні й вихідні сигнали елементів інтерфейсних шарів першого й другого модулів нейронної мережі:

$$U_{\text{вх.}Z_i^1} = U_{\text{вих.}S_i^1};\ U_{\text{вх.}Z_l^2} = U_{\text{вих.}S_l^2};\ i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k;$$
$$U_{\text{вих.}Z_i^1} = U_{\text{вх.}Z_i^1};\ U_{\text{вих.}Z_l^2} = U_{\text{вх.}Z_l^2};\ i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k.$$

***Крок 7.*** Для кожного незагальмованого розпізнавального *Y*-нейрона першого й другого модулів нейронної мережі, розраховуються його вихідні сигнали:

$$U_{\text{вих.}Y_j^1} = \sum_{i=1}^{n} W_{ij}^1 U_{\text{вих.}Z_i^1}\text{, якщо } U_{\text{вих.}Y_j^1} \neq -1,\ j = 1, ..., m;$$
$$U_{\text{вих.}Y_j^2} = \sum_{j=1}^{k} V_{lj}^1 U_{\text{вих.}Z_l^2}\text{, якщо } U_{\text{вих.}Y_j^2} \neq -1,\ j = 1, ..., m.$$

***Крок 8.*** Поки не знайдені нейрони-переможці обох модулів, вагові вектори яких відповідно до заданих значень параметрів подібності $p_1$ та $p_2$

відповідають вхідним векторам $S_r^1$ та $S_r^2$, виконуються кроки 9 – 12 (для обох або одного з модулів).

***Крок 9.*** В *Y*-шарах обох модулів визначаються нейрони $Y_{J1}^1$ й $Y_{J2}^2$, що задовольняють умову

$$U_{\text{вих}.Y_{J1}^1} \geq U_{\text{вих}.Y_j^1},\ U_{\text{вих}.Y_{J2}^2} \geq U_{\text{вих}.Y_j^2},\ j=1,...,m.$$

Якщо таких елементів декілька, то вибирається елемент з найменшим індексом. Якщо $U_{\text{вих}.Y_{J1}^1} = -1$ або (й) $U_{\text{вих}.Y_{J2}^2} = -1$, то всі елементи одного з модулів (обох модулів) загальмовані й одне (обидва) вхідне зображення не можна запам'ятати.

***Крок 10.*** Розраховуються вихідні сигнали елементів інтерфейсного шару $Z_i^1$ $(i=1,...,n)$ й $Z_l^2$ $(l=1,...,k)$ відповідно першого й другого модуля нейронної мережі:

$$U_{\text{вих}.Z_i^1} = U_{\text{вих}.S_i^1} W_{J1,i}^2,\ i=1,...,n;\ \ U_{\text{вих}.Z_l^2} = U_{\text{вих}.S_l^2} V_{J2,i}^2,\ l=1,...,k.$$

***Крок 11.*** В обох модулях обчислюються норми векторів вихідних сигналів нейронів інтерфейсного шару:

$$\left\| U_{\text{вих}.Z^1} \right\| = \sum_{i=1}^{n} U_{\text{вих}.Z_i^1};\quad \left\| U_{\text{вих}.Z^2} \right\| = \sum_{l=1}^{k} U_{\text{вих}.Z_l^2}.$$

***Крок 12.*** Перевіряється за параметрами подібності $p_1$ та $p_2$ правильність вибору нейронів-переможців $Y_{J1}^1$ та $Y_{J2}^2$ відповідно першого й другого модуля нейронної мережі. Якщо $p = \dfrac{\left\| U_{\text{вих}.Z^1} \right\|}{\left\| U_{\text{вих}.S^1} \right\|} < p_1$, то умова не виконується і елемент $Y_{J1}^1$ загальмовується: $U_{\text{вих}.Y_{J1}^1} = -1$; здійснюється перехід до кроку 8 алгоритму. Якщо $p \geq p_1$, то умова, що підтверджує правильність вибору нейрона-переможця $Y_{J1}^1$ першого модуля, виконується й здійснюється перехід до наступного кроку алгоритму. При цьому нейрону-переможцю присвоюється одиничне значення вихідного сигналу

$U_{\text{вих.}Y^1_{J1}} = 1$, а всі інші нейрони розпізнавального шару першого модуля переводяться в неактивний стан: $U_{\text{вих.}Y^1_j} = 0,\ j = 1, ..., m,\ j \neq J1.$

Аналогічним чином проводиться перевірка правильного вибору нейрона-переможця $Y^2_{J2}$ другого модуля нейронної мережі.

***Крок 13***. Адаптуються ваги зв'язків елементів $Y^1_{J1}$ та $Y^2_{J2}$:

$$W^1_{iJ} = \frac{LU_{\text{вих.}Z^1_i}}{L-1+\left\|U_{\text{вих.}Z^1_i}\right\|};\ V^1_{lJ} = \frac{LU_{\text{вих.}Z^2_l}}{L-1+\left\|U_{\text{вих.}Z^2_l}\right\|},\ i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k;$$

$$W^2_{Ji} = U_{\text{вих.}Z^1_i};\ V^2_{Jl} = U_{\text{вих.}Z^2_l},\ i = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k.$$

***Крок 14.*** Перевіряється умова закінчення навчання обох модулів мережі; якщо вона не виконуються, то триває навчання одного або обох модулів мережі, у противному випадку здійснюється перехід на наступний крок алгоритму з метою визначення ваг зв'язків нейронів *P*-шару.

***Крок 15.*** Для кожної пари вхідних зображень $(S^1_r, S^2_r),\ r = 1, ..., q$ виконуються кроки 16 – 18.

***Крок 16.*** Вхідними зображеннями $S^1_r, S^2_r$, що подаються відповідно на входи першого й другого модуля нейронної мережі, визначаються нейрони-переможці $Y^1_{J1r}$, $Y^2_{J2r}$ першого й другого модуля мережі.

***Крок 17.*** Визначаються ваги зв'язків між нейроном-переможцем $Y^1_{J1r}$ та елементами *P*-шару:

$$H^1_{J1r,J1r} = H^2_{J1r,J1r} = 1;\ H^1_{J1r,j} = H^2_{J1r,j} = 0,\ j = 1, ..., m,\ j \neq J1r.$$

***Крок 18.*** Визначаються ваги зв'язків між нейроном-переможцем $Y^2_{J2r}$ та елементами *P*-шару:

$$Q^2_{J1r,J2r} = Q^1_{J2r,J1r} = 1;\ Q^2_{J1r,k} = Q^1_{J2r,j} = 0,\ k, j = 1, ..., m;\ k \neq J2r,\ j \neq J1r.$$

***Крок 19.*** Зупин.

### *8.2.3. Алгоритм роботи двонаправленої асоціативної пам'яті у режимі визначення асоціативних зображень*

Алгоритм роботи у режимі визначення асоціативних зображень двонаправленої асоціативної пам'яті передбачає виконання наступних кроків.

***Крок 1.*** Ініціюються параметри $L$, $p_1$, $p_2$ та ваги зв'язків $W_{ij}^1$, $W_{ji}^2$, $V_{lj}^1$, $V_{jl}^2$, $H_{jt}^1$, $H_{tj}^2$, $Q_{jt}^1$, $Q_{tj}^2$ $(i=1,...,n;\ j=1,...,m;\ l=1,...,k;\ t=1,...,m)$.

***Крок 2.*** На вхід одного з модулів мережі подається вхідне зображення. Припустимо, що вхідне зображення $S_r^1$ подається на вхід першого модуля мережі. Тоді аналогічним чином, як і в алгоритмі навчання, визначається нейрон-переможець $Y_{J1r}^1$ першого модуля нейронної мережі.

***Крок 3.*** Визначається нейрон-переможець $Y_{J2r}^2$ другого модуля нейронної мережі. Він виділяється не у результаті змагання між розпізнавальними елементами другого модуля, а за допомогою одиничного сигналу елемента $P_{J1r}$, який, у свою чергу, в активний стан переводиться нейроном-переможцем $Y_{J1r}^1$:

$$U_{\text{вих}.Y_{J2r}^2}=1,\ U_{\text{вих}.Y_j^2}=0,\ \ j=1,...,m,\ j\neq J2r.$$

При цьому вихідному сигналу нейрона-переможця $Y_{J2r}^2$ присвоюється одиничне значення $U_{\text{вих}.Y_{J2}^2}=1$, а всі інші нейрони переводяться в неактивний стан: $U_{\text{вих}.Y_j^2}=0$, $j=1,...,m$, $j\neq J2$.

***Крок 4.*** Розраховуються вихідні сигнали елементів інтерфейсного шару $Z_l^2$ $(l=1,...,k)$ другого модуля нейронної мережі:

$$U_{\text{вих}.Z_l^2}=V_{J2r,l}^2,\ l=1,...,k.$$

***Крок 5.*** Формуються вхідні й вихідні сигнали елементів вхідного шару $S_l^2$ $(l=1,...,k)$ другого модуля нейронної мережі:

$$U_{\text{вх}.S_l^2} = U_{\text{вих}.Z_l^2},\ l = 1, ..., k,$$
$$U_{\text{вих}.S_l^2} = U_{\text{вх}.S_l^2},\ l = 1, ..., k.$$

Отримане на виході другого модуля зображення $S_r^2 = (S_{r1}^2, ..., S_{rk}^2)$, є асоціацією із зображенням $S_r^1 = (S_{r1}^1, ..., S_{rn}^1)$ ($r = 1, ..., q$), що подається на елементи вхідного шару першого модуля нейронної мережі.

***Крок 6.*** Зупин.

## 8.3. Індивідуальні завдання

1. Розробити структуру ДАП, здатну запам'ятовувати три пари асоціативних один з одним зображень, а також відновлювати з пам'яті нейронної мережі асоціативні зображення при надходженні їх на кожний з входів вхідного зображення. Обґрунтувати вибір числа нейронів кожного шару штучної нейронної мережі.

2. Розробити алгоритм програми, що моделює мережу ДАП.

3. Розробити програму, здатну запам'ятовувати та відновлювати зі своєї пам'яті три пари асоціативних один з одним зображень.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Верлань А. Ф. Эволюционные методы компьютерного моделирования / А. Ф. Верлань, В. Д. Дмитриенко, Н. И. Корсунов, В. А. Шорох. – К. : Наук. думка, 1992.

2. Ивахненко А. Г. Непрерывность и дискретность / А. Г. Ивахненко. – К. : Наук. думка, 1990.

**ДЛЯ ПРИМІТОК**

Навчальне видання

ДМИТРІЄНКО Валерій Дмитрович
ЗАКОВОРОТНИЙ Олександр Юрійович
ЛЕОНОВ Сергій Юрійович

# ОСНОВИ НЕЙРОКОМП’ЮТИНГУ

Лабораторний практикум
для студентів денної та заочної форм навчання за напрямком
«Комп’ютерна інженерія» та «Комп’ютерні науки»

Роботу до видання рекомендував *М. Й. Заполовський*
Відповідальний за випуск *С. Ю. Гавриленко*
Редактор *Л. Л. Яковлева*

План 2024р., п. 32
Підп. до друку 11.05.2024. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Папір Copy Paper. Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Обл.-вид. арк. 6,8. Наклад 300 прим. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

---

Віддруковано в друкарні ТОВ "Цифра принт"
на цифровому лазерному комплексі Xerox DocuTech 6135.
Свідоцтво про державну реєстрацію А01 № 432705 від 03.08.2009 р.
61024 Україна, м. Харків, вул. Культури, 22–Б.