

Прикл. механика. – 1994. – 30, № 1. – С. 18-25. 6. Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца // Медицина и ... – 2004. – №1(10). – С. 23-31. 7. Кантор Б.Я., Яблучанский Н.И., Мисюра Е.Ю. Исследование НДС толстостенной гиперупругой эллипсоидальной оболочки с относительно жесткими включениями (модель левого желудочка сердца) // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ». Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. – № 31. – С. 106-117. 8. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

Поступила в редакцию 29.04.2005

УДК 539.3

А.М. НАЗАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук, **Б.Е. ПАНЧЕНКО**, канд. физ.-мат. наук, **А.М. ЛОЖКИН**, Сумской государственной университет

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ВОЛН С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Розглядається задача дифракції пружних хвиль на циліндричній порожнині. Задача зведена до розв'язання сингулярних рівнянь, що реалізується чисельно. Приведено залежності напруг на границі порожнини від динамічних, механічних і геометричних характеристик.

The problem of elastic waves diffraction on a cylindrical space is dealt with. The problem is brought to solving singular equations, which are calculated numerically. Dependence of the space boundary voltage on dynamic, mechanical and geometrical characteristics are presented.

1. Введение. Современные конструкции работают в условиях не только статических, но и динамических нагрузок. Для практики представляет интерес исследование концентрации напряжений вблизи различного рода препятствий в условиях динамического нагружения.

Проблема дифракции плоских гармонических волн на цилиндрических неоднородностях изучалась многими авторами. В [1] использован метод разложения в ряд по собственным функциям. В [2] построены интегральные представления для упругих потенциалов, через которые выражаются компоненты вектора перемещений и тензора напряжений.

В настоящей работе развивается методика, предложенная в [3], где основной характеристикой напряженно-деформированного состояния выступает вектор перемещений.

2. Математическая модель. Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечный вдоль оси OZ полый цилиндр, поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова. Пусть из бесконечности набегают на цилиндр монохроматическая P -волна (P -случай)

$$U_1^{(0)} = 0, \quad U_2^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_1 y}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1)$$

или *SV*-волна (*SV*-случай)

$$U_1^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_2 y}, \quad U_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2)$$

Здесь c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн, ω – частота колебаний, t – время, λ и μ – постоянные Ляме, ρ – плотность среды, i – мнимая единица ($i^2 = -1$), зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия приходящей волны с цилиндрической полостью возникает сложное волновое поле. Амплитуды отраженных продольной и поперечной волн перемещений будем обозначать U_1 и U_2 . Тогда общее поле амплитуд перемещений равно

$$U = U_1^{(0)} + U_1, \quad V = U_2^{(0)} + U_2. \quad (3)$$

В случае установившихся волновых движений амплитудные значения компонент вектора перемещений удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений U и V формулами ($z = x + iy, \bar{z} = x - iy$)

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \tau_{22} &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial \bar{z}} \right), \\ \tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U - iV)}{\partial z}, \quad \tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12} = -4\mu \frac{\partial(U + iV)}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть L – некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим через S_1 и S_2 амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на L . Тогда в произвольной точке кривой $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12})e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12})e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где φ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью Ox .

На границе тела представляют интерес распределения компонент тензора амплитуд напряжений $\tau_{s_0}, \tau_{n_0}, \tau_{n_0 s_0}$, которые будем находить по формулам

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \tau_{s_0} = (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_{n_0}, \quad (7)$$

$$\tau_{n_0 s_0} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0.$$

Запишем интегральные представления амплитуд перемещений возмущенного поля, исходя из которых будем решать поставленную задачу дифракции. Они имеют вид (суммирование по k)

$$\begin{aligned} U_m(x, y) &= \int_L U_m^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds, \\ \tau_{mn}(x, y) &= \int_L \tau_{mn}^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds, \quad m, n, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $f_k(s)$ – неизвестные функции, $U_m^{(k)}$ – функции Грина, представляющие собой амплитуды перемещений в среде при действии гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ и направленной вдоль оси Ox ($k = 1$) или Oy ($k = 2$). С учетом условий излучения на бесконечности для них получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} + iU_2^{(1)} &= U_1^{(2)} - iU_2^{(2)} = d \left(\frac{\chi}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right), \\ U_1^{(1)} - iU_2^{(1)} &= \frac{d}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22}, \quad U_1^{(2)} + iU_2^{(2)} = \frac{d}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22}, \\ d &= \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \quad \chi = 3 - 4\nu, \quad c = \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2, \\ z - \zeta &= r e^{i\alpha}, \quad \Phi_{kj} = \frac{\gamma_1^k H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $H_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля 1-го рода j -го порядка.

Очевидно представления (8) удовлетворяют уравнениям движения (4). Кроме того, за счет выбора функции $U_m^{(k)}$ (9), они выполняют условия излучения на бесконечности, то есть представляют собой расходящиеся волны. Остается удовлетворить граничные условия на контуре полости, которые запишем в виде

$$S_1 \pm iS_2 = 0 \quad \text{на } L. \quad (10)$$

Выпишем необходимые для (10) производные:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(1)} + iU_2^{(1)}) &= e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(2)} - iU_2^{(2)}) = -\frac{d}{8} (\chi \Phi_{31} - 4c \Phi_{11}), \\ e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(1)} - iU_2^{(1)}) &= e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(2)} + iU_2^{(2)}) = \frac{d}{8} \Phi_{31}. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать, что ядро Φ_{11} является непрерывным, а ядро Φ_{31} также, как и ядро Φ_{33} , сингулярно. Имеем

$$\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}, \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r} + F_{33} \quad \text{где } F_{31} \text{ и } F_{33} \text{ – непрерывные функции.}$$

Используя производные (11), можно вычислить ядра интегральных представлений (8) $\tau_{mn}^{(k)}$ – амплитуд тензора напряжений возмущенного поля с помощью формул (5), подставляя в них вместо U и V функции Грина $U_m^{(k)}$. Выделяя в ядрах полученных интегралов сингулярные члены и используя предельные значения интегралов типа Коши [4], приводим граничные условия (10) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f_1(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{11}(s, s_0) + f_2(s)E_{12}(s, s_0))ds &= K_1(s_0), \\ -\frac{1}{2}f_2(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{21}(s, s_0) + f_2(s)E_{22}(s, s_0))ds &= K_2(s_0), \end{aligned} \quad (12)$$

$$E_{11} = h \left(d_1 + \frac{1}{4}d_2F_{31} - d_3\Phi_{11} \right), \quad E_{12} = h \left(-\bar{d}_4 + \left(\frac{1}{4}F_{31} - \frac{\gamma_2^2}{4}\Phi_{11} \right) e^{i(\alpha_0 + \varphi_0)} - \frac{1}{4}F_{33}e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$E_{21} = h \left(d_4 + \left(\frac{1}{4}F_{31} - \frac{\gamma_2^2}{4}\Phi_{11} \right) e^{-i(\alpha_0 + \varphi_0)} - \frac{1}{4}F_{33}e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \quad E_{22} = h \left(-\bar{d}_1 + \frac{1}{4}\bar{d}_2F_{31} - \bar{d}_3\Phi_{11} \right),$$

$$d_1 = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} - \chi \frac{e^{-i\varphi_0}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right), \quad d_2 = e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - \chi e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)},$$

$$d_3 = \frac{\gamma_2^2}{4} e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - ce^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}, \quad d_4 = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0},$$

$$h = \frac{1}{4(1-\nu)}, \quad \zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad K_1(s_0) = S_1^{(0)} + iS_2^{(0)}, \quad K_2(s_0) = S_1^{(0)} - iS_2^{(0)},$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = \frac{\mu\gamma_1\tau}{2} e^{-i\gamma_1\eta_0} [\pm(1-\nu)\cos\varphi_0 + i\nu\sin\varphi_0] \quad \text{в } P\text{-случае,}$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = -i\mu\gamma_2\tau e^{-i\gamma_2\eta_0} e^{\mp i\varphi_0} \quad \text{в } SV\text{-случае.}$$

Здесь \bar{d} – величина, сопряженная к комплексной величине d , ядра E_{11} и E_{22} являются сингулярными, E_{12} и E_{21} – непрерывны. Следовательно, уравнения (12) являются сингулярными интегральными уравнениями 2-го рода.

Численная реализация. Для численной реализации алгоритма в настоящей работе использован метод, теоретически обоснованный в работе [5] и основанный на приближении плотностей интегральных уравнений тригонометрическими многочленами и в последующем точном вычислении интегралов с непрерывными и сингулярными ядрами.

Проведем параметризацию контура L по формулам

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad 0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi.$$

Интерполяционный многочлен для неизвестных плотностей интегральных уравнений (12) имеет вид

$$f(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \sin \frac{N(\beta_k - \beta)}{2} \cdot \frac{1}{g(\beta)}, \quad \beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (13)$$

где $g(\beta) = \operatorname{tg} \frac{\beta_k - \beta}{2}$ в случае четного числа узлов $N = 2n$ и $g(\beta) = \sin \frac{\beta_k - \beta}{2}$ в случае нечетного $N = 2n + 1$.

Подстановка (13) в интегралы с сингулярными ядрами дает

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) R(\beta, \beta_0^m) d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) R(\beta_k, \beta_0^m), \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{N} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

если $R(\beta, \beta_0)$ – непрерывное ядро, и

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0^m}{2} d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \operatorname{ctg} \frac{\beta_k - \beta_0^m}{2}, \quad (15)$$

в случае ядра Гильберта, причем квадратурные формулы (14), (15) имеют место как при четном, так и нечетном числе узлов разбиения контура L .

Отметим, что формула (15) аналогична правилу приближенного вычисления регулярных интегралов (14). По этой причине при численной реализации сингулярных интегралов ядро Гильберта выделять из сингулярного ядра необязательно. В работе как для регулярных, так и для сингулярных интегралов использовалась квадратурная формула (14).

В качестве примера рассматривалась среда, содержащая цилиндрическую полость эллиптического поперечного сечения

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (18)$$

На контуре включения проводилось вычисление напряжений

$$\sigma_n = |\tau_{n_0}| / P, \quad \sigma_\beta = |\tau_{s_0}| / P, \quad \sigma_{n\beta} = |\tau_{n_0 s_0}| / P,$$

где компоненты тензора амплитуд напряжений τ_{n_0} , τ_{s_0} , $\tau_{n_0 s_0}$ находились по формулам (7), P – максимальное значение напряжения в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau(\lambda + 2\mu)$ в случае излучения P -волны (1) и $\gamma_2 \tau \mu$ – в случае излучения SV -волны (2).

На рис. 1,2 и 3,4 представлены результаты расчетов напряжения σ_β на контуре эллиптической полости для случаев излучения из бесконечности P -волны ($\gamma_1 a = 1$) и SV -волны ($\gamma_2 a = 1$) соответственно.

Кривые 1,2,3 и 4 на рис. 1, 3 отвечают значениям параметра b/a , равным 0,5; 1,0; 2,0 и 5,0 соответственно, при этом значение коэффициента Пуассона среды $\nu = 0,3$. Расчеты показывают, что в случае $b/a \leq 1$, то есть когда фокусы эллипса находятся на оси, параллельной фронту падающей волны, вблизи точки соскальзывания ($\beta = 90^\circ$) напряжение σ_β имеет локальный максимум, при излучении P -волны и локальный минимум – в случае SV -волны. При значениях $b/a \geq 1$, то есть когда эллиптическая полость вытянута вдоль оси, перпендикулярной фронту падающей волны, с увеличением параметра b/a характер изменения σ_β усложняется, причем число точек максимума и минимума увеличивается.

Кривые 1, 2 и 3 на рис. 2,4 отвечают значениям коэффициента Пуассона среды $\nu = 0,2; 0,3$ и $0,4$ соответственно, при этом значение параметра $b/a = 2$. Видно, что в случае набегания на цилиндр P -волны с увеличением ν напряжение σ_β вблизи теневой ($\beta = 0^\circ$) и лобовой ($\beta = 180^\circ$) точек увеличивается, а вблизи точки соскальзывания ($\beta = 90^\circ$) уменьшается. В случае излучения SV -волны влияние параметра ν на σ_β незначительно.

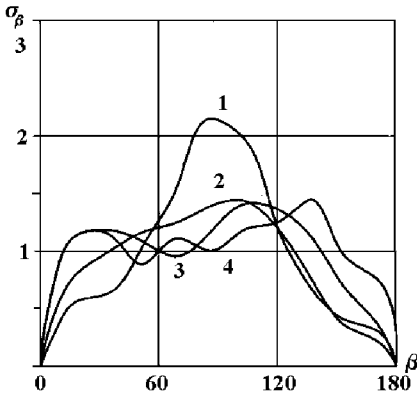


Рисунок 1

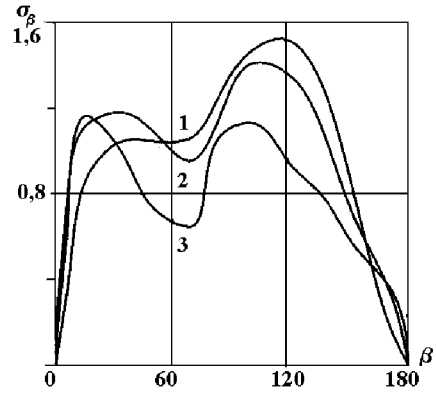


Рисунок 2

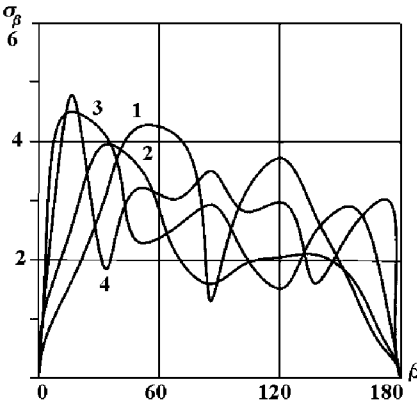


Рисунок 3

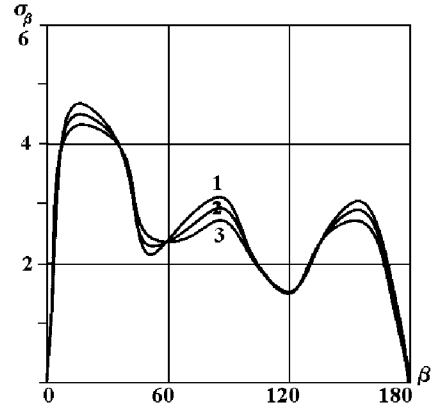


Рисунок 4

Список литературы: 1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев.: Наукова думка, 1978. – 307 с. 2. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119-127. 3. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Дифракция волн сдвига на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения // Динамика и прочность машин. Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1991. – Вып. 52. – С. 38-45. 4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.

Поступила в редакцию 28.06.2004.