Оптимізація багатокрокових управлінських процесів в економіці із застосуванням методу динамічного програмування. Конспект лекції з курсу «Сучасні проблеми і методи математичного комп’ютерного моделювання в економіці і менеджменті»для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальностей 6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг», 6.030507 «Інтелектуальна власність» / уклад. О.Є. Скворчевський. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – 16 с.

Укладач О.Є. Скворчевський

Рецензент ________________

Кафедра організації виробництва та управління персоналом

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

ОПТИМІЗАЦІЯ БАГАТОКРОКОВИХ УПРАВЛІНСЬКИХ ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Конспект лекції

з курсу «Сучасні проблеми і методи математичного комп’ютерного моделювання в економіці і менеджменті»

для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальностей
6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства»,
6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг»,
6.030507 «Інтелектуальна власність»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № __ від _____ 2014 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2014

Вступ

Окрім методів лінійного та нелінійного програмування, які пристосовані для одномоментного прийняття оптимальних планових рішень в складних економічних умовах, на практиці існує значна кількість задач, що мають багатокрокову структуру. Метод оптимізації, призначений для управління операціями в яких процес прийняття управлінських рішень має бути розділений на етапи (кроки) отримав назву динамічне програмування. Початок розвитку динамічного програмування відноситься до 50-х років XX ст. Саме в цей час основні ідеї динамічного програмування були запропоновані американським математиком Річардом Белманом.

Слово «динамічне» вказує, як правило, на присутність фактору часу в даній задачі. І дійсно декомпозиція задач динамічного програмування на кроки відбувається, як правило, за певними відрізками часу. Однак далеко не завжди управлінські кроки в цих задачах визначаються часом.

Метод динамічного програмування має багато практичних напрямків застосування серед яких потрібно виділити наступні: розробка правил управління запасами, що встановлюють момент поповнення запасів та розмір замовлення, розробка принципів календарного планування виробництва та вирівнювання зайнятості в умовах нестабільного попиту на продукцію, розподіл дефіцитних капітальних вкладень між можливими новими напрямками їх використання, створення календарних планів поточного та капітального ремонтів складного обладнання та його заміни, при розробці довгострокових правил заміни основних фондів тощо.

Цінність методу динамічного програмування полає в можливості покрокового планування складним економічних та техніко-економічних заходів. Причому тут потрібно звернути увагу на наступне. Кожний із етапів (кроків) проекту може давати незначний економічний ефект (або й зовсім його не давати), але оптимальне управління усім комплексом кроків, як правило, дає значний економічний ефект. Це досягається завдяки застосуванню основних принципів та ідей, що покладені в одному динамічного програмування.

1. Сутність динамічного програмування

В економіці та менеджменті зустрічаються задачі, в яких процес прийняття управлінських рішень носить багатокрокову структуру, наприклад, оптимальне за деяким критерієм розподілення капіталовкладень у підприємство чи декілька пов'язаних підприємств протягом кількох років, задачі планування діяльності економічного об'єкта (підприємства, галузі, тощо) з урахуванням змін з часом потреб у продукції, що виробляється. Хоча слово «динамічне» вказує на присутність фактора часу (причому час, як правило, приймається дискретним) у задачах, проте динамічне програмування може бути застосовано і до «статичних» задач, як наприклад, деякі задачі розподілення ресурсів. Основи динамічного програмування були запропоновані американським математиком *Річардом Белманом* у 40-50-х роках XX ст.

Динамічне програмування – розділ прикладної математики, розробляючий теорію та методи знаходження оптимальних за деяким критерієм багатокрокових керуючих впливів.

2. Постановка задачі динамічного програмування

Для вирішення задачі динамічного програмування використовуються такі позначення:

N – число кроків;

$\bar{x}_{(k-1)} = (x_{1(k-1)}, x_{2(k-1)}, \dots, x_{n(k-1)})$ – вектор, описуючий стан системи на k-му кроці;

$\bar{x}_0$ – початковий стан на першому кроці;

$\bar{x}_N$ – кінцевий стан на останньому N-му кроці;

X_k – область допустимих станів на k-му кроці;

$\bar{u}_k = (u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{mk})$ – вектор керуючих впливів на k-му кроці, що забезпечує перехід системи зі стану $\bar{x}_{k-1}$ у стан $\bar{x}_k$;

U_k – область допустимих керуючих впливів на k-му кроці;

W_k – величина виграшу, отриманого у результаті реалізації k-го кроку;

S – загальний виграш за N кроків;

$\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \dots, \bar{u}_N^*)$ – матриця оптимальної статегії керування або оптимальний керуючий вплив за N кроків;

$S_{k+1}(\bar{x}_k)$ – максимальний виграш, отриманий при переході з будь - якого стану $\bar{x}_k$ в кінцевий стан $\bar{x}_N$ при оптимальній стратегії керування, починаючи з $(k+1)$-го кроку;

$S_1(\bar{x}_0)$ – максимальний виграш, отриманий за кроків при переході системи із початкового стану $\bar{x}_0$ у кінцевий стан $\bar{x}_N$ при реалізації оптимальної стратегії керування $\bar{u}^*$.

Метод динамічного програмування базується на умовах відсутності наслідків і адитивності цільової функції.

Умова відсутності наслідків полягає в тому, що стан $\bar{x}_k$, у який перейшла система за один k-й крок, залежить від попереднього стану системи $\bar{x}_{k-1}$ і обраного вектора керуючого впливу $\bar{u}_k$, але не залежить від того, яким чином система перейшла зі стану $\bar{x}_{k-1}$ в стан $\bar{x}_k$, тобто справедливою є наступна залежність:

$$\bar{x}_k = f_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{1}$$

Рівняння (1) часто називають *рівнянням стану системи*.

Іншим аспектом умови відсутності наслідків є те, що величина виграшу W_k залежить від попереднього стану системи $\bar{x}_{k-1}$ і вибраного керуючого впливу $\bar{u}_k$, тобто:

$$W_k = f_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{2}$$

Величину виграшу W_k також називають цільовою функцією k-го кроку.

Умова адитивності цільової функції задачі полягає в тому, що загальний виграш S за N кроків дорівнює сумі виграшів на кожному кроці, тобто розраховується за формулою:

$$S = \sum_{k=1}^{N} W_k = \sum_{k=1}^{N} z_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{3}$$

Під *адитивністю* потрібно розуміти властивість величини, яка полягає у тому, що значення цієї величини, яке відповідає цілому об'єкту, дорівнює сумі значень величин, що відповідають його частинам. Найбільш простим прикладом адитивної величини в економіці є гроші.

Оптимальною стратегією керування $\bar{u}^*$ називається сукупність керуючих впливів $(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \ldots, \bar{u}_N^*)$, у результаті реалізації яких система за N кроків переходить із початкового стану $\bar{x}_0$ у кінцевий стан $\bar{x}_N$ за траєкторією при реалізації якої загальний виграш S приймає найбільше значення.

Траєкторія системи – послідовність $(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_N)$ станів системи за N кроків.

Умова відсутності наслідків дозволяє сформулювати принцип оптимальності Белмана.

Принцип оптимальності Белмана полягає в тому, що яким би не був допустимий стан системи $\bar{x}_{k-1} \in X_{k-1}$ перед черговим i-м кроком, потрібно обирати допустимий керуючий вплив $\bar{u}_k \in U_k$ на цьому кроці так, щоб сума виграшу W_k на k-му кроці і виграшів на всіх наступних кроках була максимальною:

$$S_k(\bar{x}_{k-1}) = \max_{\bar{u}_k} \{W_k + S_{k+1}(x_k)\}, \tag{4}$$

$$S_k(\bar{x}_{k-1}) = \max_{\bar{u}_k} \{z_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k) + S_{k+1}(x_k)\}. \tag{5}$$

Рівняння (4) отримало назву *основного рекурентного співвідношення Белмана*, також його називають основним функціональним рівнянням динамічного програмування.

Обчислення в динамічному програмуванні виконуються рекурентно в тому сенсі, що вихідна задача розбивається на декілька більш простих підзадач. Потім оптимальне рішення однієї підзадачі використовується у якості вихідних даних для наступної підзадачі. Вирішивши останню підзадачу ми отримуємо оптимальне рішення вихідної задачі.

Рекурентним співвідношенням називають співвідношення, за допомогою яких нові значення змінних знаходять через попередні значення цих та інших змінних, знайдених на одній чи декількох попередніх ітераціях. Система рекурентних співвідношень має бути повною, тобто вказувати процедури обчислення всіх змінних за допомогою лише їх попередніх значень, даних задачі та констант. Рекурентні співвідношення можуть визначати умови формування скалярних величин, векторів, матриць, а також будь-яких математичних об'єктів, наприклад множин.

Важливо підкреслити, що максимальний виграш, отриманий при переході з передостаннього $\bar{x}_{N-1}$ в кінцевий $\bar{x}_N$ стан буде визначатися залежністю:

$$S_N^*(\bar{x}_{k-1}) = \max_{\bar{u}_N}\{z_N(\bar{x}_{N-1}, \bar{u}_N)\}. \qquad (6)$$

Рівняння (6) означає, що керуючий вплив $\bar{u}_N$ на останньому кроці визначається лише за максимальним виграшем на цьому кроці.

Оптимально спланувавши останній крок N можна перейти до оптимального планування передостаннього $(N-1)$ кроку, потім до кроку $(N-2)$ і т.д., поки не буде знайдена величина максимального виграшу $S_1(\bar{x}_0)$, отриманого за N кроків при переході системи з початкового $\bar{x}_0$ в кінцевий стан $\bar{x}_N$ при реалізації оптимальної стратегії керування $\bar{u}^*$. Тому на <u>першому етапі</u> процес динамічного програмування розгортається від кінця до початку.

Однак для визначення максимального виграшу на останньому кроці необхідно знати вектор стану системи на $(N-1)$-му кроці $\bar{x}_{N-1}$, невідомий на першому етапі рішення. Очевидно, що потрібно розглянути всю область допустимих станів X_{N-1}, на $(N-1)$-му кроці та визначити такий стан, при якому виграш на N-му кроці буде максимальним. Таким чином, вибір оптимального керуючого впливу $\bar{u}_N$ буде залежати від $\bar{x}_{N-1}$. Величина $\bar{u}_N^*(\bar{x}_{N-1})$ отримала назву умовно оптимального керуючого впливу на N-му кроці.

Визначивши $\bar{u}_N^*(\bar{x}_{N-1})$ можна перейти до $(N-1)$-го кроку, на якому визначити $\bar{u}_{N-1}^*(\bar{x}_{N-2})$ за залежністю:

$$S_{N-1}^*(\bar{x}_{N-2}) = \max_{\bar{u}_{N-1}^*}\left\{z_{N-1}^*(\bar{x}_{N-2}, \bar{u}_{N-1}^*) + S_N^*(\bar{x}_{N-1})\right\} \qquad (7)$$

У загальному випадку *умовно оптимальний керуючий вплив* $\bar{u}_k^*(\bar{x}_{k-1})$ *на k-му кроці* визначається за залежністю:

$$S_k^*(\bar{x}_{k-1}) = \max_{\bar{u}_k^*}\left\{z_k^*(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k^*) + S_{k+1}^*(\bar{x}_k)\right\} \qquad (8)$$

Таким чином у результаті першого етапу рішення задачі динамічного програмування отримують дві послідовності функцій:

1. умовні екстремуми (максимуми) $S_k^*(\bar{x}_{k-1})$;

2. умовно оптимальні керуючі впливи $\bar{u}_k^*(\bar{x}_{k-1})$.

Зазначені функції у безперервних моделях отримують аналітично, а дискретних задачах (більшість задач динамічного програмування) – у табличній формі.

Після виконання першого етапу, *визначення умовно оптимальних за даним критерієм керуючих впливів*, переходять до другого етапу – *визначення безумовно оптимальних керуючих впливів*.

При визначеному початковому стані $\bar{x}_0$ на першому кроці визначають максимальний виграш $S_1(\bar{x}_0)$:

$$S_1(\bar{x}_0) = \max_{\bar{u}_1}\{z_1(\bar{x}_0, \bar{u}_1) + S_2(x_1)\}. \qquad (9)$$

Потім *безумовний оптимальний керуючий вплив* по ланці:

$$\bar{x}_0 \to \bar{u}_1 \to \bar{x}_1 \to \bar{u}_2 \to \ldots \to \bar{x}_{N-1} \to \bar{u}_N \to \bar{x}_N, \qquad (10)$$

Таким чином, з двох етапів рішення задач динамічного програмування найбільш важливим і трудомістким є визначення умовно оптимальних за даним критерієм керуючих впливів. На другому етапі (визначення безумовно оптимальних керуючих впливів) фактично залишається лише визначити матрицю оптимальної стратегії керування $\bar{u}^* = (\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, ..., \bar{u}_N^*)$ за N кроків за обрахованими на першому етапі варіантами.

3. Загальна схема застосування методу динамічного програмування

Побудова моделі та застосування методу динамічного програмування для рішення задачі можуть бути розділені на такі етапи:

1. вибір способу ділення процесу управління на кроки;

2. вибір параметрів вектора $\bar{x}_{(k-1)} = (x_{1(k-1)}, x_{2(k-1)}, ..., x_{n(k-1)})$, що описує стан системи на k-му кроці, а також вектора керуючих впливів $\bar{u}_k = (u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{mk})$ на k-му кроці;

3. запис рівняння стану (1) для конкретної задачі, виходячи з її економічного змісту;

4. введення цільових функцій k-го кроку (функції виграшів на k-му кроці) та сумарної цільової функції задачі;

5. введення умовного екстремуму $S_k^*(\bar{x}_{k-1})$ та умовно оптимального керуючого впливу $\bar{u}_k^*(\bar{x}_{k-1})$ на k-му кроці;

6. запис рівняння Белмана для останнього $S_N^*(\bar{x}_{k-1})$ та інших $S_k^*(\bar{x}_{k-1})$ кроків;

7. послідовне рішення рівняння Белмана (умовна оптимізація) та отримання двох послідовностей функцій $S_k^*(\bar{x}_{k-1})$ та $\bar{u}_k^*(\bar{x}_{k-1})$;

8. після виконання умовної оптимізації отримання оптимального рішення для конкретного початкового стану $\bar{x}_0$ $S_{\max} = S_1^*(\bar{x}_0)$, а далі по ланці (10) матрицю оптимальної стратегії керування.

Окрім розглянутого вище методу «зворотної прогонки», існує метод «прямої прогонки».

4. Задача оптимального розподілення інвестицій між підприємствами протягом N років

Постановка задачі

Інвестиційний фонд планує вкласти кошти в загальному обсязі $x_0 = 10000$ у.о. в два підприємства на 4 роки. Кошти u вкладені у 1-е

підприємство на початку року, дають у кінці року прибуток у розмірі $f_1(u) = 0{,}6 \cdot u$ та повертаються у розмірі $q_1(u) = 0{,}7 \cdot u$. Аналогічно для 2-го підприємства функція прибутку дорівнює $f_2(u) = 0{,}5 \cdot u$, а функція повернення коштів $q_2(u) = 0{,}8 \cdot u$. В кінці року всі повернені кошти заново перерозподіляються між 1-м та 2-м підприємством, нові кошти не надходять, а отриманий прибуток у виробництво не вкладається.

Потрібно розподілити кошти $x_0 = 10000$ у.о. між двома підприємствами на 4 роки таким чином, щоб сумарний прибуток від обох підприємств протягом 4-х років був максимальним.

Рішення задачі:

1. Процес розподілення коштів між двома підприємствами розгортається в часі протягом 4-х років. Управлінські рішення приймаються на початку кожного року. Відповідно кількість кроків буде 4, а їх номер буде співпадати з номером року, про який приймається рішення щодо розподілення коштів між двома підприємствами.

2. Керована система – два підприємства, а процес керування полягає в розподіленні коштів між підприємствами у кожному році. В даному випадку стан системи характеризує не вектор, а лише одна скалярна величина $x_{(k-1)}$ – кількість коштів, що підлягають розподілу між підприємствами на початку k-го року. На перший погляд вектор керуючих впливів на k-му кроці складається із двох елементів:

$$u_k = (u_{1k}, u_{2k}), \qquad (11)$$

де u_{1k} – кількість коштів, виділених 1-му підприємству на початку k-го року;

u_{2k} – кількість коштів, виділених 2-му підприємству на початку k-го року.

Однак усі кошти $x_{(k-1)}$ підлягають розподіленню між двома підприємствами, тому $u_{2k} = x_{(k-1)} - u_{1k}$. Тоді керуючий вплив на k-му кроці потрібно характеризувати не вектором (11), а скалярною величиною u_{1k}, яку далі будемо називати просто u_k.

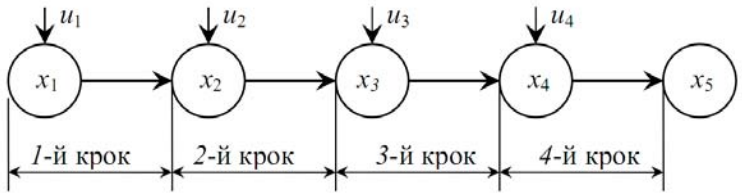

Рисунок 1 – Схема процесу керування системою з 2-х підприємств протягом 4-х років

3. Рівняння стану системи в даному випадку матиме вигляд:

$$x_k = q_1(u_k) + q_2(x_{(k-1)} - u_k), \tag{12}$$

або

$$x_k = 0{,}7 \cdot u_k + 0{,}8 \cdot (x_{(k-1)} - u_k) = 0{,}8 \cdot x_{(k-1)} - 0{,}1 \cdot u_k. \tag{13}$$

Рівняння характеризує повернення коштів наприкінці k-го кроку.

4. Цільова функція k-го кроку матиме вигляд:

$$W_k = f_1(u_k) + f_2(x_{(k-1)} - u_k), \tag{14}$$

або

$$W_k = 0{,}6 \cdot u_k + 0{,}5 \cdot (x_{(k-1)} - u_k) = 0{,}5 \cdot x_{(k-1)} + 0{,}1 \cdot u_k. \tag{15}$$

Тоді, виходячи із умови адитивності, сумарну цільову функцію задачі можна записати у вигляді:

$$S = \sum_{k=1}^{4} W_k = \sum_{k=1}^{4} (0{,}5 \cdot x_{(k-1)} + 0{,}1 \cdot u_k). \tag{16}$$

Економічним змістом цільової функції (16) буде сумарний прибуток за 4 роки.

5. Нехай $S_k^*(x_{k-1})$ – умовно оптимальний прибуток за $[N-(k+1)]$ років, починаючи з k-го року включно, за умови подальшого оптимального розподілу наявних на початок k-го року кошти x_{k-1}.

6. Рекурентні співвідношення Белмана почнемо записувати з останнього кроку, тобто для 4-го року:

$$S_4(x_3) = \max_{u_4}(0{,}1 \cdot u_4 + 0{,}5 \cdot x_3). \tag{17}$$

Для 3-го кроку:

$$S_3(x_2) = \max_{u_3}[(0{,}1 \cdot u_3 + 0{,}5 \cdot x_2) + S_4(x_3)]. \tag{18}$$

Для 2-го кроку:

$$S_2(x_1) = \max_{u_2}[(0{,}1 \cdot u_2 + 0{,}5 \cdot x_1) + S_3(x_2)]. \tag{19}$$

Для 1-го кроку:

$$S_1(x_0) = \max_{u_1}[(0{,}1 \cdot u_1 + 0{,}5 \cdot x_0) + S_2(x_1)]. \tag{20}$$

7. Проведемо умовну оптимізацію, послідовно вирішивши рівняння Белмана, починаючи з останнього 4-го кроку. Враховуючи, що $0 \le u_4 \le x_3$ максимальне значення рівняння (17) може бути досягнуто при $u_4 = x_3$. Тоді рівняння (17) матиме вигляд:

$$S_4(x_3) = 0{,}6 \cdot x_3. \tag{21}$$

Враховуючи формулу (21) рекурентне співвідношення Белмана (18) для 3-го кроку можна переписати у вигляді:

$$S_3(x_2) = \max_{u_3}\left[(0{,}1 \cdot u_3 + 0{,}5 \cdot x_2) + 0{,}6 \cdot x_3\right]. \qquad (22)$$

Рівняння стану системи (13) на початку 4-го кроку матиме вигляд:

$$x_3 = 0{,}8 \cdot x_2 - 0{,}1 \cdot u_3. \qquad (23)$$

Тоді співвідношення (22) перепишемо у вигляді:

$$S_3(x_2) = \max_{u_3}\left[(0{,}1 \cdot u_3 + 0{,}5 \cdot x_2) + 0{,}6 \cdot (0{,}8 \cdot x_2 - 0{,}1 \cdot u_3)\right]. \qquad (24)$$

$$S_3(x_2) = \max_{u_3}\left[0{,}04 \cdot u_3 + 0{,}98 \cdot x_2\right]. \qquad (25)$$

Область допустимих значень u_3 має вигляд $0 \le u_3 \le x_2$ тоді (25) прийме найбільше значення при $u_3 = x_2$:

$$S_3(x_2) = 1{,}02 \cdot x_2. \qquad (26)$$

Підставивши (26) в (19) отримаємо рекурентне рівняння Белмана для 2-го кроку:

$$S_2(x_1) = \max_{u_2}\left[(0{,}1 \cdot u_2 + 0{,}5 \cdot x_1) + 1{,}02 \cdot x_2\right]. \qquad (27)$$

Рівняння стану системи (13) на початку 3-го кроку визначається залежністю:

$$x_2 = 0{,}8 \cdot x_1 - 0{,}1 \cdot u_2. \qquad (28)$$

Тоді рекурентне рівняння Белмана для 2-го кроку матиме вигляд:

$$S_2(x_1) = \max_{u_2}\left[(0{,}1 \cdot u_2 + 0{,}5 \cdot x_1) + 1{,}02 \cdot (0{,}8 \cdot x_1 - 0{,}1 \cdot u_2)\right], \qquad (29)$$

або

$$S_2(x_1) = \max_{u_2}\left[1{,}316 \cdot x_1 - 0{,}002 \cdot u_2\right]. \qquad (30)$$

Враховуючи те, що u_2 може змінюватись в межах $0 \le u_2 \le x_1$, максимальне значення виграшу на першому кроці (30) буде досягатися при $u_2 = 0$, та буде дорівнювати:

$$S_2(x_1) = 1{,}316 \cdot x_1. \qquad (31)$$

Аналогічно попереднім розрахункам рекурентне рівняння Белмана для 1-го кроку можна представити у вигляді:

$$S_1(x_0) = \max_{u_1}\left[(0{,}1 \cdot u_1 + 0{,}5 \cdot x_0) + 1{,}316 \cdot x_1\right]. \qquad (32)$$

Рівняння стану на початку 2-го кроку визначається залежністю:

$$x_1 = 0{,}8 \cdot x_0 - 0{,}1 \cdot u_1. \qquad (33)$$

Тоді рекурентне рівняння Белмана для 1-го кроку (32) матиме вигляд:

$$S_1(x_0) = \max_{u_1}\left[(0{,}1 \cdot u_1 + 0{,}5 \cdot x_0) + 1{,}316 \cdot (0{,}8 \cdot x_0 - 0{,}1 \cdot u_1)\right], \qquad (34)$$

або

$$S_1(x_0) = \max_{u_1}\left[1{,}5528 \cdot x_0 - 0{,}0316 \cdot u_1\right]. \qquad (35)$$

Враховуючи те, що u_1 може змінюватись в межах $0 \le u_1 \le x_0$, максимальне значення (35) буде досягатися при $u_1 = 0$, тобто:

$$S_1(x_0) = 1{,}5528 \cdot x_0. \qquad (36)$$

На цьому етапі умовна оптимізація закінчується.

8. Максимальний прибуток, отриманий від двох підприємств за 4 роки при початково вкладених коштах у розмірі 10000 у.о., буде складати 15528 у.о. за умови розподілення коштів за роками відповідно до табл. 1.

Таблиця 1 – Оптимальне розподілення коштів між двома підприємствами, протягом 4-х років

Підприємство	Рік (крок)			
	1	2	3	4
1	0	0	6400	4480
2	10000	8000	0	0

Табл. 1 є матрицею оптимальної стратегії керування. Для більш складних задач таку матрицю доцільно будувати за допомогою комп’ютера.

СПИСОК ЗАПИТАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Сутність та сфери застосування динамічного програмування.
2. Поняття вектору стану системи та вектору на k-му кроці.
3. Умова відсутності наслідків.
4. Умова адитивності цільової функції.
5. Принцип оптимальності Белмана. Оптимальна стратегія керування.
6. Основне рекурентне співвідношення Белмана.
7. Алгоритми прямої та зворотної прогонки в задачах динамічного програмування.
8. Загальна схема застосування методу динамічного програмування.
9. Рішення задачі оптимального розподілення інвестицій між підприємствами протягом N років.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беллман Р. Динамическое программирование. Перевод с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 401 с.
2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. Перевод с англ. – М.: Наука, 1965. – 459 с.
3. Таха Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 219 с.
4. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б. А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
5. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Экономика», 1975. – 700 с.
6. Венцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 230 с.
7. Bertsekas D. Dynamic programming: Deterministic and stochastic models – Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1987. – 324 p.
8. Dreyfus S., Law A. The art and theory of dynamic programming. – New York.: Academic Press, 1977. – 256 p.
9. Свиридов А.Т. Задачи динамического программирования. Учебное пособие. – Калининград: КГТУ, 2006. – 108 с.
10. Кузьмичов А.І. Математичне програмування в Excel : навч. посіб. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. – К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с.
11. Економіко-математичне моделювання: Навч. посіб., за ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
12. Лугінін О.Є. Економіко-математичне моделювання. Навчальний посібник для ВНЗ / О.Є. Лугінін, В.М. Фомішена – К. Знання, 2011. – 342 с.
13. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. / В.А. Абчук – СПб.: Союз, 1999. – 273 с.

Навчальне видання

ОПТИМІЗАЦІЯ БАГАТОКРОКОВИХ УПРАВЛІНСЬКИХ ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Конспект лекції з курсу «Сучасні проблеми і методи математичного комп’ютерного моделювання в економіці і менеджменті»для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальностей 6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг», 6.030507 «Інтелектуальна власність»

Укладач: СКВОРЧЕВСЬКИЙ Олександр Євгенович

Відповідальний за випуск О.Д. Матросов

Роботу до видання рекомендував М.І. Погорєлов

Редактор ________________

План 2014 р., поз. ____

Підп. до друку __.__.__. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 2,2.
Обл.-вид. арк. 1,41. Наклад 100 пр. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ “ХПІ”.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.