МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. Б. Білоцерківський

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Харків 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. Б. Білоцерківський

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Практикум

для студентів спеціальності
076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 30.01.2018

Харків
НТУ «ХПІ»
2018

УДК 534.1
Б 78

Рецензенти:
В.О. Шведун, канд. екон. наук, с.н.с., Національний університет цивільного захисту України;
І.А. Федоренко, докт. екон. наук, проф. НТУ «ХПІ»

Б 78 **Білоцерківський О. Б.** Теорія ймовірностей і математична статистика : практикум для студентів спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» / О. Б. Білоцерківський. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – 170 с.

ISBN

Практикум містить основи теорії ймовірностей і математичної статистики, включаючи випадкові події, елементи комбінаторики, визначення імовірностей та теореми про них, випадкові величини, їх закони розподілу, системи випадкових величин, функції випадкових величин, граничні теореми теорії ймовірностей, елементи математичної статистики, емпіричні та теоретичні функції розподілу, точкові та інтервальні оцінки, критерії згоди Пірсона та Колмогорова, метод найменших квадратів. Наведено розв'язання типових задач і варіанти індивідуальних домашніх завдань із вказівками до них.

Призначено для студентів спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність».

Іл. 19. Табл. 81. Бібліогр. 12 назв.

УДК 534.1
ISBN

ВСТУП

Дисципліна «Теорія ймовірностей і математична статистика» лежить в основі викладу ряду спеціальних дисциплін і є невід'ємною складовою частиною фундаментальної підготовки майбутніх фахівців з усіх галузей знань. Застосування теоретико-ймовірнісних і статистичних методів, які дають змогу аналізувати, синтезувати і прогнозувати складні економічні процеси, в теперішній час стає все більш актуальним. Це обумовлює необхідність вивчення економістами методів теорії ймовірностей і математичної статистики.

У даному практикумі розглянуто основи теорії ймовірностей і математичної статистики, включаючи випадкові події, елементи комбінаторики, визначення імовірностей та теореми про них, випадкові величини, їх закони розподілу, системи випадкових величин, функції випадкових величин, граничні теореми теорії ймовірностей, елементи математичної статистики, емпіричні та теоретичні функції розподілу, точкові та інтервальні оцінки, критерії згоди Пірсона та Колмогорова, метод найменших квадратів. Наведено розв'язання типових задач і варіанти індивідуальних домашніх завдань із вказівками до них. Варіанти завдань слід вибирати за номером прізвища студента в журналі групи. Також практикум містить контрольні запитання для перевірки знань студентів.

Цей практикум розрахований на студентів спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», що вивчають курс «Теорія ймовірностей і математична статистика». Він також буде корисний для студентів інших економічних спеціальностей.

ТЕМА 1. СКЛАДАННЯ ПОВНОЇ ГРУПИ ПОДІЙ ЩОДО ІСПИТУ. СУМА ТА ДОБУТОК ПОДІЙ, ОПИС ПРОТИЛЕЖНОЇ ПОДІЇ

Сума подій. Подія A називається ***сумою*** подій B і C, тобто $A = B + C$, або $A = B \bigcup C$, якщо при випробуванні відбувається принаймні одна із цих подій. Множину елементарних подій, що становлять подію A, дістають об'єднанням множин елементарних подій, що становлять події B і C. Аналогічно визначається сума n ($n > 2$) подій.

Добуток подій. Подія A називається ***добутком*** подій B і C, тобто $A = BC$, або $A = B \bigcap C$, якщо в результаті випробування відбуваються як подія B, так і подія C. Множина елементарних подій, що становлять подію A, визначається як перетин множин, що становлять події B і C. Аналогічно визначається добуток n ($n > 2$) подій.

Події B і C у даному випробуванні називаються ***несумісними***, якщо відповідні їм множини елементарних подій не містять однакових елементів: $B \bigcap C = V$. Це означає, що коли одна з подій відбулась, друга подія відбутись не може.

Події B і C називаються ***рівноможливими*** у даному випробуванні, якщо є підстава вважати, що жодна з них не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ у даному випробуванні утворюють ***повну групу подій***, якщо вони несумісні і в результаті випробування неодмінно відбудеться принаймні одна з них, а отже, їхня сума є достовірною подією: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = U$.

Події A і $\overline{A}$ називаються ***протилежними***, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій, тобто $A \bigcap \overline{A} = V$ і $A \bigcup \overline{A} = U$.

Приклад 1.1. Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події:

1) A – герб випаде двічі;

2) B – герб випаде не менш як тричі.

Розв'язання. Шуканий простір елементарних подій:

$\Omega = \{ГГГГ, ГГГР, ГГРГ, ГРГГ, РРГГ, ГГРР, ГРРГ, ГРГР, РГРГ, РРГГ, РГГР, ГРРР, РГРР, РРГР, РРРГ, РРРР\}$;

1) A = {ГГРР, РРГГ, ГРГР, РГРГ, ГРРГ, РГГР};

2) B = {ГГГГ, ГГГР, ГГРГ, ГРГГ, РГГГ}.

Приклад 1.2. Провести операції об'єднання, перетину та віднімання над числовими множинами:

A = {1; 3; 5; 7; 9}, B = {1; 2; 3; 4; 5}, C = {2; 4; 6; 8; 10}.

Розв'язання. $A \bigcup B$ = {1; 2; 3; 4; 5; 7; 9};

$A \bigcup C$ = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10};

$A \bigcap C$ = {Θ}; $A \bigcap B$ = {1; 3; 5};

$A - B$ = {7; 9}; $B - A$ = {2; 4};

$A - C$ ={1; 3; 5; 7; 9}.

Приклад 1.3. Задано множину цілих чисел Ώ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}. Навмання з неї беруть одне число.

Побудувати випадкові події: 1) A − узяте число, кратне 2; 2) B − 3.

Визначити $A \bigcup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Розв'язання. 1) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}; 2) B = {3, 6, 9, 12, 15}.

Звідси дістаємо:

$A \bigcup B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} ∪ {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15};

$A \cap B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} ∩ {3, 6, 9, 12, 15} = {6, 12};

$A \setminus B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} \ {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 4, 8, 10, 14}.

Приклад 1.4. Партія складається з деталей 1-го, 2-го і 3-го ґатунку, а також бракованих. Деталі ретельно перемішані. Із партії навмання беруть одну деталь. Застосувавши очевидні позначення, розглянемо події: $A_1 = \{1; 2\}$; $A_2 = \{1; 3\}$; $B_1 = \{2; 3\}$; $B_2 = \{2; \text{Бр}\}$. Яка з подій B_i утворює з подіями A_1 і A_2 повну групу?

Розв'язання. Згідно з означенням для повної групи подій має виконуватись співвідношення $A_1 \bigcup A_2 \bigcup B_i = U$. Достовірній події відповідає весь простір елементарних подій Ω.

У розглядуваному випробуванні простір Ω складається з чотирьох елементарних подій: деталь може бути 1-го, 2-го, 3-го ґатунку або бракованою, тобто $\Omega = \{1; 2; 3; \text{Бр}\}$. Знайдемо множину елементарних подій для суми подій A_1 і A_2. Утворюючи об'єднання множин елементарних подій, до нього включають елементарні події відповідних подій, причому однакові елементарні події беруть один раз. Отже, $A_1 \cup A_2 = \{1; 2; 3\}$. Для того щоб доповнити цю множину до Ω, потрібно додати до суми подій подію B_2, оскільки множина її елементарних подій містить $\omega_i = \{\text{Бр}\}$.

Приклад 1.5. Довести тотожності:

а) $(A + C)(B + C) = AB + C$; б) $AC – B = AC − BC$.

Розв'язання. а) $(A + C)(B + C) = AB + CB + AC + CC = AB + C(A + B) + C = AB + C(A + B) + C\Omega = AB + C(A + B + \Omega) = AB + C\Omega = AB + C$;

б) $AC - B = AC\overline{B} = CA\overline{B} = C(A - B) = CA - CB = AC - BC.$

Завдання 1

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачі, наведені в таблиці.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Задача	4	2	1	6	3	5	1	3	2	5

1. Нехай A і B − сумісні події, що спостерігаються в експерименті. Показати, що події $A + B$ можна розкласти на суму несумісних подій такими способами:

а) $A + B = A + (B - AB)$; б) $A + B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$; в) $A + B = A + B\overline{A}$.

Вказівка: доведення провести аналітично.

2. Довести тотожності:

а) $(A + B)(A + \overline{B}) = A$; б) $(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B}) = AB$;

в) $(A - B) + (A - C) = A - BC$.

3. Щодо кожної з груп подій відповісти на запитання:

а) чи становлять вони повну групу подій; якщо ні, то доповнити до повної групи; б) чи є вони несумісними; в) чи є вони рівноможливими?

1) Дослід: відповідь на іспиті. Події: A_1 = {оцінка «незадовільно» або «задовільно»}; A_2 ={оцінка «задовільно» або «добре»}; A_3 = { оцінка «добре» або «відмінно»}.

2) Дослід: відповідь на іспиті. Події: B_1 = {оцінка «задовільно»}; B_2 = = {оцінка «добре»}; B_3 = {оцінка «відмінно»}.

3) Дослід: кидання гральної кістки. Події: C_1 = {випало 2 або 3 очки}; C_2 = {випало 3 або 4 очки}; C_3 = {випало 4 або 5 очок}.

4) Дослід: експлуатація двох не зв'язаних між собою приладів.

Події: D_1 = {жоден прилад не вийшов з ладу}; D_2 = {один прилад вийшов з ладу, другий − ні}; D_3 = {обидва прилади вийшли з ладу}.

4. Для кожної з наведених подій скласти протилежні події:

1) Студент на іспиті відповідає на два запитання. Події: A_1 = {відповіді на обидва запитання правильні}; A_2 = { відповідь хоч би на одне запитання правильна}; A_3 = {відповіді неправильні}.

2) Передаються п'ять повідомлень по каналу зв'язку. Події: B_1 = {не менше двох повідомлень передано правильно}; B_2 = {рівно два повідомлення передано правильно}; B_3 = {менше двох повідомлень передано правильно}; B_4 = {не більше двох повідомлень передано правильно}; B_5 = {більше двох повідомлень передано правильно}; B_6 = {хоча б одне повідомлення передане правильно}; B_7 = {усі повідомлення передані правильно}; B_8 = {усі повідомлення передані неправильно}.

3) Робиться 10 пострілів по мішені. Події: C_1 ={немає жодного попадання}; C_2 = {є одне попадання}; C_3 = {є 10 попадань}.

5. Нехай A, B, C − три події, що спостерігаються в експерименті. Виразити за допомогою операцій над подіями такі події:

1) D_1 = {відбудеться рівно одна подія}; 2) D_2 = {відбудеться рівно дві}; 3) D_3 = {відбудеться рівно три}; 4) D_4 = {не відбудеться жодної}; 5) E_1 = {відбудеться хоча б одна}; 6) E_2 = {відбудеться хоча б дві}; 7) E_3 = {хоча б одна не відбудеться}.

6. Адміністратор спостерігає за роботою чотирьох касових апаратів у торговому залі. Кожен з них може за час роботи або відмовити, або не відмовити. Розглядаються події: A = {відмовив рівно один з 4-х апаратів}; B = {відмовив хоча б один з 4-х апаратів}; C = {відмовили не менше двох з 4-х апаратів}; D ={відмовили рівно два з 4-х апаратів}; E = {відмовили рівно три з 4-х апаратів}; F = {відмовили рівно чотири апарати}; G = {жоден апарат не відмовив}.

Указати, яким подіям дорівнюють події: 1) $A + B$; 2) AB; 3) $B + C$; 4) BC; 5) $D + E + F$; 6) BF; 7) CF; 8) BG; 9) DE; 10) $G + A + C$.

ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ: ОСНОВНІ ПРАВИЛА, СПОЛУЧЕННЯ, ПЕРЕСТАВЛЕННЯ, РОЗМІЩЕННЯ. СХЕМИ ВИБІРКИ З ПОВТОРЕННЯМ. ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛ КОМБІНАТОРИКИ

2.1. Елементи комбінаторики: основні правила та формули

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає задачі вибору елементів із заданих множин і розміщення їх за певними правилами.

Основні правила комбінаторики

Правило множення. Припустимо потрібно зробити одне за іншим k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію – n_2 способами і так далі, k-ту дію − n_k способами, то всі k дій у вказаному порядку можуть бути виконані числом

$$N = n_1 n_2 ... n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i \text{ способів.} \tag{2.1}$$

Приклад 2.1. У конкурсі на кращий проект економічного розвитку деякої галузі виробництва беруть участь 16 колективів. Скількома способами можуть бути розподілені між ними перше, друге і третє місця?

Розв’язання. У конкурсі беруть участь 16 колективів, отже, перше місце може бути розподілено $n_1 = 16$ способами, друге місце − $n_2 = 15$, третє $n_3 =$ $= 14$. Тоді, за правилом множення, число способів розподілу призових місць серед 16 колективів: $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$.

Правило суми. Припустимо потрібно зробити одну з k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію − n_2 способами і так далі, k-ту дію − n_k способами, то будь-яка одна з k дій може бути виконана числом

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i \text{ способів.} \tag{2.2}$$

Приклад 2.2. Скільки існує способів придбати касовий апарат, якщо у продажу є 5 видів різних касових апаратів виробництва Японії, 4 − виробництва США, 3 − виробництва Англії і 2 −України.

Розв’язання. Для придбання апарата спочатку потрібно вибрати країну-виробника, тобто виконати одну з 4 дій ($k = 4$). Першу дію можна виконати 5 способами ($n_1 = 5$ − вибрано Японію), другу − 4 ($n_2 = 4$ − вибрані США), третю − 3 ($n_3 = 3$ − вибрано Англію), четверту − 2 ($n_4 = 2$ – вибрано Україну). Тоді відповідно до правила суми число способів придбати касовий апарат буде: $N = n_1 +$ $+ n_2 + n_3 + n_4 = 5 + 4 + 3 + 2 = 14$.

Правила розв'язування задач комбінаторики

При розв'язуванні комбінаторних задач перш за все потрібно відповісти на такі запитання:

1. Що є основною множиною?

2. Чи повторюються елементи основної множини? Якщо повторюються, маємо схеми з повторенням, а немає − без нього.

3. Що вибирається? Вся множина, її частина або декілька частин? При виборі всієї множини маємо перестановку, частини − розміщення або сполучення, декількох частин − розбиття.

4. Чи відновлюється початкова множина після вибірки елемента? Або, іншими словами, чи допускається багатократна вибірка одного і того ж елемента? Від відповіді на це питання залежить вибір схеми розміщення або сполучення з повторенням.

5. Чи впорядковуються елементи вибірки (вибірок)? При впорядкуванні маємо перестановку або розміщення, а без нього − сполучення або розбиття.

Формули комбінаторики: сполучення, перестановка, розміщення

Сполучення. Сполученнями з n елементів по $m (0 \le m \le n)$ називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом.

Кількість таких множин

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.3}$$

Приклад 2.3. Підприємство випускає 25 найменувань продукції. Скільки існує способів обрати 3 різних найменування продукції для презентації на виставці.

Розв'язання. Елементами множини Ω є найменування продукції. Обрані 3 найменування являють собою неупорядковану підмножину Ω_3. Схема вибору – вибір без повторень. Тоді число N способів вибору дорівнює

$$N = C_{25}^{3} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{22!\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{3!22!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3} = 23\cdot 4\cdot 25 = 2300.$$

Перестановка. Перестановками з n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення.

Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots (n-1)\cdot n, \qquad (2.4)$$

де n набуває лише цілих невід'ємних значень.

Оскільки $n! = n\cdot(n-1)!$, то при $n = 1$ маємо

$$1! = 0!$$

Отже, $\qquad 0! = 1.$

Приклад 2.4. До білетної каси одночасно підійшли 5 осіб. Скільки існує способів скласти з них чергу.

Розв'язання. Черга – це упорядкована множина, число N способів скласти чергу дорівнює $N = P_n = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$

Розміщення. Розміщенням із n елементів по m $(0 \le m \le n)$ називаються такі впорядковані множини, кожна з яких містить m елементів і які різняться між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots (n-m+1). \qquad (2.5)$$

Приклад 2.5. Скільки може бути складено різних трьох знакових кодів із десяти цифр від 0 до 9, якщо цифри в коді не повторюються.

Розв'язання. Код являє собою упорядковану 3-елементну підмножину, обрану з 10-елементної множини Ω = {0, 1, …, 9}. Число N можливих кодів, що складаються з різних цифр,

$$N = A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720.$$

2.2. Схеми вибірки з повторенням

Сполученням з повторенням з n елементів по $m(0 \le m \le n)$ називається m-елементна неупорядкована підмножина Ω_m, в якій елементи можуть повторюватися.

Число сполучень з n елементів по m з повторенням позначається f_n^m і обчислюється за формулою

$$f_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}. \tag{2.6}$$

Приклад 2.6. Кожна кістка доміно є комбінацією з двох чисел від 0 до 6. Скільки різних кісток містить гра?

Розв'язання. Кожна кістка складається з двох полів, точки на полі визначають число, отже, кістку можна розглядати як неупорядковану 2-елементну підмножину Ω_2, елементи якої обрані з 7 елементів множини $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Поля на кістці можуть визначатися і однаковими числами, тобто елементи Ω_2 можуть повторюватися. Тоді число N різних кісток у грі

$$f_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_{81}^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 6!} = 28.$$

Перестановками з повторенням називають такі впорядковані множини, що складаються з однакових, але по-різному розташованих елементів, причому деякі елементи множини є однаковими.

Число перестановок n-елементної множини з повторенням позначається

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... k_m!}. \tag{2.7}$$

Приклад 2.7. Підприємство для маркування своєї продукції використовує товарний знак, що складається з 4 смуг, дві з яких червоного кольору, одна − жовтого і одна − синього. Скільки різних товарних знаків може бути складено з таким маркуванням?

Розв'язання. Товарний знак – це упорядкована множина, що складається з 4 елементів, серед яких два повторюються, тобто маємо n = 4, k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1. Число N різних товарних знаків буде

$$N = P_4(2,1,1) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12.$$

Розміщенням з повторенням із n елементів по m називають таку впорядковану m-*елементну* підмножину Ω_m, елементи якої можуть повторюватися.

Число розміщень з n елементів по m з повторенням позначається $A_n^{m(\text{повт})}$ і обчислюється за формулою

$$A_n^{m(\text{повт})} = \underbrace{n \cdot n \cdot ...n}_{m} = n^m. \qquad (2.8)$$

Приклад 2.8. Скільки може бути складено різних тризначених кодів з десяти цифр від 0 до 9, якщо цифри в коді можуть повторюватися.

Розв'язання. Код описується упорядкованою 3-елементною підмножиною з елементами, що повторюються і складаються з множини $\Omega = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Число N кодів $N = A_{10}^{3(\text{повт})} = 10^3 = 1000$.

Розбиття множин на групи. Розбиттям множин на групи називають подання n-елементної множини Ω у вигляді суми m підмножин Ω_{ki} ($i = \overline{1, m}$), що попарно не перетинаються та містять відповідно k_i елементів, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Число способів, якими можна Ω розбити на Ω_{ki}, позначається $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ і обчислюється за формулою

$$C_n(k_1,..,k_m) = \frac{n!}{k_1!\cdot ...k_m!}. \qquad (2.9)$$

Приклад 2.9. Скільки існує способів розселити в гуртожитку 8 студентів по 3 кімнатах: одномісну, тримісну та чотиримісну?

Розв'язання. Тут $n = 8$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$. Число N способів розселення

$$N = C_8(1,3,4) = \frac{8!}{1!\cdot 3!4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4!} = 5\cdot 7\cdot 8 = 280.$$

2.3. Обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики

Класичне визначення ймовірності

Імовірністю випадкової події *A* називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \le m \le n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.10)$$

Приклад 2.10. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер

Я, І, Р, Е, О, Т.

Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово

Т	Е	О	Р	І	Я

?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω)

$$n = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, $m = 1$. Позначивши розглядувану подію через B, дістанемо:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Приклад 2.11. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо

1	9	7	3

Розв'язання. Кількість елементарних подій множини Ω буде $n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1, 9, 7, 3, дорівнює одиниці ($m = 1$). Позначимо цю випадкову подію через B. Тоді

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024}.$$

Приклад 2.12. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю знаходитися в працездатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Розв'язання. Оскільки кожний верстат-автомат може знаходитися у двох несумісних станах − працездатному або непрацездатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію − із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

$$m = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{2^{10}} = \frac{120}{2^{10}}.$$

Приклад 2.13. У шухляді міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта бракованими. Навмання із шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A − усі чотири деталі виявляються стандартними;

B − усі чотири деталі виявляються бракованими;

D − із чотирьох деталей виявляться дві стандартні та дві браковані.

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій множини Ω

$$n = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 3\cdot 6} = 210;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A,

$$m_1 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі B,

$$m_2 = C_4^4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі D,

$$m_3 = C_6^2\,C_4^2 = 15\cdot 6 = 90.$$

Обчислимо ймовірності цих подій:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{630} = \frac{3}{112} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14};$$

$$P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210};$$

$$P(D)=\frac{m_3}{n}=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 2.14. 1 вересня на першому курсі БФ−факультету заплановано за розкладом три лекції з 10 різних предметів. Студент, що не встиг ознайомитися з розкладом, намагається його вгадати. Яка ймовірність успіху в даному експерименті, якщо вважати, що будь-який розклад з трьох предметів рівноможливий.

Розв'язання. Студентові необхідно з 10 лекцій, які можуть бути поставлені в розклад, причому в певному порядку, вибрати три. Отже, число всіх можливих результатів випробування дорівнює **числу розміщень** з 10 до 3, тобто

$$n=A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720.$$

Сприятливий же випадок тільки один, тобто m = 1. Шукана ймовірність буде дорівнювати

$$P=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}\approx 0{,}0014.$$

Приклад 2.15. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

Розв'язання. Оскільки кожен з 12 осіб може народитися в будь-якому з 12 місяців року, то число всіх можливих варіантів можна порахувати за формулою **розміщень з повтореннями** (2.8):

$$n=A_n^{m(\text{повт})}=A_{12}^{12(\text{повт})}=12^{12}.$$

Число сприятливих випадків отримаємо, переставляючи місяці народження у цих 12 осіб, тобто

$$m=P_{12}=12!.$$

Тоді шукана ймовірність буде дорівнювати:

$$P=\frac{m}{n}=\frac{12!}{12^{12}}=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}=\frac{1925}{12^7}\approx 0{,}00005372$$

Приклад 2.16. На полиці стоять 15 книг, 5 з яких у палітурці. Беруть навмання три книги. Яка ймовірність того, що всі три книги в палітурці?

Розв'язання. Експеримент полягає в тому, що з 15 книг відбирають 3, причому в якому порядку вони відібрані, не важливо. Отже, число можливих способів вибору дорівнюватиме **числу сполучень** з 15 до 3 (2.3), тобто

$$n = C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{6} = \frac{2730}{6} = 455.$$

Число сприятливих випадків дорівнюватиме числу сполучень з 5 до 3, тобто

$$m = C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10.$$

Імовірність дорівнює $P = \frac{m}{n} = \frac{10}{455} \approx 0{,}022.$

Приклад 2.17. У кондитерській є 6 видів тістечок. Черговий покупець вибив чек на 3 тістечка. Вважаючи, що будь-який набір тістечок, який замовляється, є рівноймовірним, обчислити ймовірність того, що покупець замовив тістечка різних видів.

Розв'язання. Число всіх можливих видів замовлень 3 тістечок дорівнюватиме **числу сполучень з повтореннями (2.6)** з 6 елементів до 3, тобто

$$n = \overline{C}_{6}^{3} = C_{6+3-1}^{3} = C_{8}^{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} = 56.$$

Число сприятливих випадків дорівнюватиме числу поєднань з 6 до 3, тобто

$$m = C_{6}^{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20.\ P = \frac{m}{n} = \frac{20}{56} \approx 0{,}357.$$

Приклад 2.18. Десять приїжджих чоловіків, серед яких Петров і Іванов, розміщуються в готелі в двох тримісних і одному чотиримісному номерах. Яка ймовірність події *А*, яка полягає в тому, що Петров і Іванов потраплять в чотиримісний номер?

Розв'язання. Число всіх можливих розміщень 10 чоловік в двох тримісних і одному чотиримісному номері дорівнює **числу перестановок** з десяти елементів, серед яких 3 першого виду, 3 другого і 4 третього, тобто

$$n = \overline{P}_{10}(3;3;4) = \frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 4!} = 4200.$$

Після того як Іванов і Петров будуть розміщені в чотиримісному номері, інші 8 чоловік повинні бути розміщені в двох тримісних і в чотиримісному номері на двох вільних місцях, що залишилися. Це можна буде зробити таким чином:

$$m = \overline{P}_8(3;3;2) = \frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = 560.$$

Імовірність дорівнює $P = \dfrac{m}{n} = \dfrac{560}{4200} \approx 0{,}133.$

Завдання 2

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачі, наведені в таблиці.

Задача	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
2	12	14	16	18	20	19	17	15	13	11
3	26	27	28	29	30	25	24	23	22	21
4	31	33	35	31	36	33	35	36	34	32

1. Скільки словників необхідно видати, щоб можна було безпосередньо виконати переклади з будь-якої з 5 мов: української, російської, англійської, німецької і французької – на будь-яку іншу з цих 5 мов?

2. Скільки існує способів розсадити 6 відвідувачів кафе: а) за круглий стіл; б) за стійку бару.

3. Є 5 сигнальних фішок різного забарвлення для маркування товарів. Скільки видів товару можна промаркувати, якщо для маркування використовувати: а) 2 фішки з 5; б) 3 фішки з 5; в) 4 фішки з 5; г) різну кількість фішок.

4. Для маркування товару є сигнальні фішки трьох різних кольорів, кількість фішок кожного кольору не обмежена. Маркування можуть складатися з однієї, двох або трьох фішок, причому колір фішок у маркуванні може бути і однаковий. Скільки різних маркувань можна скласти з наявних фішок?

5. Три фінінспектори перевіряють 6 фірм. Скількома способами це можна зробити, якщо перевірку однієї фірми проводить один інспектор, і кожен інспектор може перевірити тільки дві фірми?

6. Скільки букв українського алфавіту може бути передано азбукою «Морзе», що складається з точок і тире, якщо для передачі однієї букви відводити: а) рівно 4 позиції; б) не більше 4 позицій; в) рівно 5 позицій.

7. Номер автомобіля складається з 2-х букв латинського алфавіту і тризначного числа. Скільки існує автомобільних номерів?

8. У навчальній групі 25 студентів. Скільки існує способів розбити групу на 3 підгрупи по 7, 8, і 10 осіб для проведення лабораторних занять?

9. Скільки різних шестизначних шифрів можна отримати з цифр числа 1223344556, якщо цифри в шифрі можуть повторюватися?

10. 8 осіб повинні сісти в 2 автомобілі, причому в кожному повинно бути не менше 3 осіб. Скількома способами вони можуть це зробити?

11. У змаганнях на першість країни з футболу беруть участь 12 команд. Скількома способами можуть бути розподілені між командами золота, срібна і бронзова медалі?

12. Скільки існує способів провести недільний вечір, якщо вибирати між відвідинами театру, дискотеки, ресторану, кінотеатру, вважаючи, що територіально зручно розташовано 5 театрів, 4 дискотеки, 6 ресторанів і 3 кінотеатри?

13. Для складання прапорів використовуються смуги п'яти різних кольорів. Скільки різних трисмугових прапорів можна скласти, комбінуючи кольори смуг? Розглянути випадки: а) колір смуг на прапорі різний; б) колір смуг може повторюватися. (Прапори зі смугами однакових, але по-різному розташованих кольорів вважаються різними).

14. Фірма купила чотири різні партії товару. Скількома способами можна розподілити ці партії серед 12 фірмових магазинів так, щоб жоден магазин не отримав більше однієї партії нового товару?

15. Скількома способами можна розставити на вітрині 9 різних експонатів товару так, щоб поряд стояли: 1) два; 2) три; 3) чотири визначених експонати?

16. Скільки існує варіантів опитування 11 студентів на одному занятті, якщо жоден з них не буде опитаний двічі та на занятті може бути опитано будь-яку кількість студентів, причому порядок опитування неважливий?

17. Скількома способами можна групу з 12 осіб розбити на дві підгрупи, в одній з яких повинно бути не більше п'яти, а в іншій − не більше десяти осіб?

18. Скількома способами 3 різних види робіт T_1, T_2, T_3 можна розподілити між 15 виконавцями, якщо: а) ніхто з виконавців не повинен виконувати більше однієї роботи; б) роботу T_1 повинна отримати певна особа?

19. У приміському електропоїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розподілити для перевірки бригаду з 4 контролерів, якщо всі контролери повинні почати перевірку одночасно і в різних вагонах?

20. У бригаді 9 осіб. Скільки можна утворити різних ланок зі складу бригади за умови, що в ланку входить не менше двох робочих?

21. Скільки існує різних ідентифікаційних кодів, які складаються з п'яти цифр, якщо перша цифра не дорівнює нулю?

22. Менеджерові потрібно зі свого офісу потрапити на ділову зустріч у фірмі, відвідавши перед цим підприємство *M*, потім повернутися в офіс, заздалегідь знову побувавши в *N*. Скількома способами він може це зробити, якщо з офісу в *N* можна потрапити трьома шляхами, а з *N* у фірму ведуть 4 шляхи?

23. Скількома способами можна розставити на стоянці 7 різних автомобілів в один ряд, якщо два певні автомобілі: а) повинні стояти поряд; б) не повинні стояти поряд?

24. Скількома способами можна вибрати чотиризначне число, в десятковому записі якого немає нуля?

25. Скількома способами з 10 спортсменів можна відібрати команду з 6 осіб?

26. Скількома способами можна поставити на бібліотечній полиці 3 екземпляри підручника із вищої математики, 2 екземпляри підручника з теорії ймовірностей і один екземпляр підручника з інформатики?

27. Є 5 видів конвертів без марок і 4 види марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для відправлення листа?

28. У одного студента 5 книг, у іншого − 9. Усі книги різні. Скількома способами студенти можуть провести обмін: а) однієї книги на одну; б) двох книг на дві книги?

29. На вершину гори ведуть 5 стежин. Скількома способами турист може піднятися на гору і потім спуститися з неї, якщо: а) підйом і спуск можуть відбу-

ватися по одній стежині; б) підйом і спуск повинні відбуватися по різних стежинах?

30. На колі вибрано 10 точок. Скільки можна провести хорд з кінцями в цих точках? Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

31. У команду КВК відбирають 5 гравців з 10 претендентів. Скількома способами це можна зробити, якщо два певні претенденти повинні обов'язково увійти до команди?

32. Протягом чотирьох тижнів студенти складають п'ять іспитів, зокрема екзамен з теорії ймовірностей та з інформатики. Скількома способами можна розподілити екзамени за тижнями так, щоб екзамени з теорії ймовірностей і з інформатики не слідували один за одним?

33. Скільки різних буквосполучень можна отримати зі всіх букв слова «економіка»?

34. Скільки різних 10 позиційних кодів можна скласти з шести вертикальних і чотирьох горизонтальних штрихів, якщо на одну позицію поміщати тільки один штрих?

35. Знайти число всіляких буквосполучень з букв слова: а) «сесія», б) «програмування». Скільки таких поєднань, у яких 2 букви: а) «с», б) «р» стоять поряд?

36. Є 20 найменувань товарів. Скількома способами їх можна розподілити по 3 магазинах, якщо відомо, що в перший магазин має бути доставлено 8 найменувань, в другий − 7 найменувань і в третій − 5 найменувань товарів?

ТЕМА 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ КЛАСИЧНОГО, СТАТИСТИЧНОГО І ГЕОМЕТРИЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ

3.1. Класичне означення ймовірності

Імовірністю випадкової події *A* називається відношення кількості елементарних подій *m*, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості *n* рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3.1}$$

Щоб обчислити ймовірність події *A* за цією формулою, потрібно знайти кількість елементарних подій у просторі Ω, а також кількість їх у множині, яка відповідає події *A*.

Приклад 3.1. У магазин надійшло 40 нових телевізорів, серед яких 7 мають приховані дефекти. Навмання відбирається один телевізор для перевірки. Яка ймовірність, що він не має прихованих дефектів?

Розв'язання. Кількість телевізорів, що не мають прихованих дефектів, дорівнює $m = 40 - 7 = 33$. Кількість усіх елементарних результатів усіх телевізорів, що надійшли, дорівнює $n = 40$. Отже, за класичним визначенням імовірності ймовірність того, що відібраний телевізор не має прихованих дефектів (подія *A*), дорівнює $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{33}{40} = 0{,}825.$

Приклад 3.2. Підкидаємо два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок, які випали, дорівнює чотирьом (подія *A*).

Розв'язання. Загальна кількість рівноможливих виходів дорівнює $6 \cdot 6 = 36$ (кожне число, що випало на одному гральному кубику, може бути в парі з усіма числами іншого грального кубика). Серед цих виходів сприяють події *A* тільки три виходи: (1; 3), (3; 1), (2; 2). Відповідно, шукана ймовірність $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Приклад 3.3. У лотереї розігрується 1000 квитків, серед яких 5 виграшних. Визначити ймовірність того, що при покупці одного квитка лотереї буде отримано виграш.

Розв'язання. Елементарною подією цього досліду є купівля квитка. Кожен квиток лотереї неповторюваний, оскільки має свій номер, і куплений квиток не повертається назад. Подія A полягає в тому, що куплено виграшний квиток. При купівлі одного з 1000 квитків всіляких результатів цього досліду буде $n = 1000$, результати утворюють повну групу несумісних подій. Число результатів, сприятливих події A, буде дорівнювати $m = 5$. Тоді ймовірність отримати виграш, купивши один квиток, дорівнює $P(A) = 5/1000 = 0{,}005$.

3.2. Статистичне означення ймовірності

Відносною частотою $W_n(A)$ події A називається відношення числа $k_n(A)$ експериментів, у яких подія A відбулася, до числа n усіх експериментів:

$$W_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}. \qquad (3.2)$$

Статистичною ймовірністю події A називається число $P(A)$, навколо якого коливається відносна частота $W_n(A)$ появи цієї події в довгих серіях експериментів.

Приклад 3.4. За даними статистики, яка була проведена в Швеції, відносна частота народження дівчаток характеризується такими числами (за місяцями року):

січень – 0,486; квітень – 0,471; липень – 0,462; жовтень – 0,491;
лютий – 0,489; травень – 0,478; серпень – 0,484; листопад – 0,482;
березень – 0,49; червень – 0,482; вересень – 0,485; грудень – 0,479.

Знайти статистичну ймовірність народження дівчинки.

Розв'язання. Середнє арифметичне значення цих частот дорівнює 0,482. Це число і приймається за ймовірність народження дівчинки.

Приклад 3.5. Метеорологічні спостереження протягом 10 років в деякій місцевості показали, що число дощових днів у липні в різні роки дорівнювало: 2; 4; 3; 2; 4; 3; 2; 3; 5; 3. Визначити ймовірність того, що будь-який певний день липня буде дощовим.

Розв'язання. Подія A полягає в тому, що в певний день липня, наприклад, 10 липня, піде дощ. Видана статистика не містить інформації про те, в яких конкретно дні липня йшов дощ, тому можна вважати, що всі дні рівноможливі для цієї події. Хай один рік − це одна серія випробувань з 31 одного дня. Всього серій 10. Відносні частоти серій дорівнюють: 2/31 ≈ 0,065, 4/31 ≈ 0,129, 3/31 ≈ 0,097, 2/31 ≈ 0,065, 4/31 ≈ 0,129, 3/31 ≈ 0,097, 2/31 ≈ 0,065, 3/31 ≈ 0,097, 5/31 ≈ 0,161, 3/31 ≈ 0,097.

Частоти різні, але спостерігається їх групування біля числа 0,1. Це число і можна прийняти за ймовірність події A. Якщо за одну серію випробувань прийняти всі дні липня за десять років, то статистична ймовірність події A буде дорівнювати

$$\frac{2+4+3+2+4+3+3+3+5+3}{10\cdot 31}=\frac{31}{310}=0{,}1.$$

Приклад 3.6. У результаті соціологічного опитування тисячі осіб було визначено, що за кандидата А проголосують 428 виборців, за кандидата Б – 501 виборець, а решта електорату не визначилася. Знайти ймовірність того, що виборець проголосує за кандидата Б, і визначити орієнтовану кількість виборців, які проголосують за нього, якщо весь електорат 70 млн осіб, а з них візьмуть участь у виборах 70 %.

Розв'язання. За означенням статистичної ймовірності

$$P(\text{Б})\approx W_n(\text{Б})=\frac{501}{1000}=0{,}501,$$

де $P(\text{Б})$ − ймовірність того, що виборець проголосує за кандидата Б.

У виборах візьмуть участь $n=70\cdot 0{,}7=49$ млн виборців. Кількість $k_n(\text{Б})$ виборців, які, ймовірно, проголосують за кандидата Б, визначимо за допомогою формули (3.1)

$$k_n(\text{Б})=nW_n(\text{Б})=49\cdot 0{,}501=24{,}5 \text{ млн виборців.}$$

3.3. Геометричне означення ймовірності

Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A − як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \qquad (3.3)$$

При цьому вважатимемо, що ймовірність попадання в деяку частину геометричного образу пропорційна до міри цієї його частини.

Приклад 3.7 (Задача про зустріч). Дві особи домовилися про зустріч на заданому проміжку часу ε. Особа, що прийшла першою, чекає протягом часу $a < \varepsilon$. Яка ймовірність зустрічі?

Розв'язання. За множину елементарних подій візьмемо квадрат зі стороною ε і точками (x; y), що зображують час зустрічі. Тоді $0 \le x \le \varepsilon$, $0 \le y \le \varepsilon$. Сприятливі наслідки утворюють точки, для яких $|y - x| = a$. Тобто точки смуги між прямими $y = x + a$, $y = x - a$. Площа цієї смуги $S = \varepsilon^2 - (\varepsilon - a)^2$. Тоді шукана ймовірність визначається так:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{s}{s_0} = \frac{\varepsilon^2 - (\varepsilon - a)^2}{\varepsilon^2} = 1 - \left(\frac{\varepsilon - a}{\varepsilon}\right)^2.$$

Приклад 3.8. Усередину кола радіусом R навмання кинута точка.

Знайти ймовірність того, що точка буде всередині вписаного в коло квадрата. Припускають, що ймовірність влучення точки в цю частину кола пропорційна площі цієї частини і не залежить від розташування щодо кола.

Розв'язання

Нехай

$$S_{\text{к}} = \pi R^2,\ S_{\text{кв}} = a^2,$$

де $a = R\sqrt{2}$, тобто $S_{\text{кв}} = 2R^2$.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Приклад 3.9. Рекламні оголошення розвішені з інтервалом в 10 м уздовж торгового ряду. Широта огляду в деякого покупця становить 3 м. Яка ймовірність того, що він не помітить рекламу, якщо він рухається перпендикулярно торговому ряду і перетнути ряд може в будь-якій точці?

Розв'язання. Ділянку торгового ряду, розташовану між двома оголошеннями, можна подати як відрізок прямої AB.

$$\underline{A \qquad C \qquad D \qquad B}$$

Тоді для того щоб покупець помітив оголошення, він повинен пройти через відрізки прямих *AC* або *DB*, що дорівнюють 3 м. Якщо ж він перетне торговий ряд в одній з точок відрізка *CD*, довжина якого 4 м, то він не помітить реклами. Ймовірність цієї події буде

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{L_{CD}}{L_{AB}} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Завдання 3

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачі, наведені в таблиці.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Завдання 1	1	3	5	7	8	6	4	2	1	2
Завдання 2	9	15	13	11	12	14	16	10	15	16
Завдання 3	17	21	19	22	24	20	23	18	19	20
Завдання 4	29	31	27	26	25	28	32	30	26	25

1. Лотерея випущена на загальну суму n грн. Ціна одного квитка r грн. Цінні виграші потрапляють на m квитків. Визначити ймовірність виграшу на один квиток.

2. 1 вересня на одному з навчальних потоків БФ-факультету за розкладом мають бути три заняття з різних предметів. Усього на потоці в цьому семестрі вивчається 10 предметів. Студент, що не встиг ознайомитися з розкладом, намагається його вгадати. Яка ймовірність успіху цього досліду, якщо вважати, що будь-який розклад з трьох предметів рівноможливий?

3. На складі торгової фірми знаходяться однотипні товари, виготовлені різними фірмами, з них: a товарів виготовлені фірмою «*Philips*», b товарів − фірмою «*LG*», c товарів − фірмою «*Sony*». При ревізії на складі проглядають один за іншим усі наявні товари і відзначають місця їх виготовлення. Знайти ймовірність того, що при цьому: а) першим з'явиться товар фірми «*LG*»; б) товар фірми «*Philips*» з'явиться раніше, ніж товар фірми «*Sony*»; в) з m проглянутих товарів k: ($k \le c$) будуть фірми «*Sony*»; г) з m проглянутих товарів усі m ($m \le b$) будуть фірми «*Philips*».

4. На книжковій полиці у випадковому порядку розставлено 20 книг, серед них двотомник Л. Толстого «Війна і мир». Припускаючи, що різні розташування книг рівноймовірні, знайти ймовірність того, що обидва томи будуть розташовані поряд.

5. На круглій полиці, що обертається, розставлено 10 відеокасет, серед них два відеофільми з Р. Гіром у головній ролі. Припускаючи, що різні розташування касет рівноймовірні, знайти ймовірність того, що обидва фільми з Р. Гіром стоятимуть поряд.

6. У майстерні з ремонту взуття 20 пар взуття за недбалості приймальника виявилися перемішаними. Для ремонту майстер випадковим чином вибирає 10 штук взуття. Знайти ймовірність того, що серед вибраного взуття: а) немає пари; б) рівно одна пара.

7. У коробці 100 канцелярських кнопок, з них 10 % − браковані. Навмання узяли 10 кнопок. Знайти ймовірність того, що серед них: а) немає бракованих; б) рівно одна бракована; в) рівно дві браковані.

8. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

9. З колоди в 36 карт вийнято три карти. Яка ймовірність того, що: 1) дві з них бубнової масті; 2) дві з них однієї масті; 3) хоч би одна з них бубнової масті; 4) хоч би одна з них − туз?

10. В урні є 10 куль: 3 білих, 2 червоних і 5 чорних. З урни навмання виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що ця куля: а) біла; б) чорна; в) не біла; г) біла або червона; д) не чорна.

11. Кинуто три монети. Знайти ймовірність, що випадуть: а) два герби; б) три герби; в) герб не випаде.

12. Гральна кістка кидається один раз. Яка ймовірність того, що випаде: а) парне число очок; б) 4 очки; в) не більше 3 очок.

13. В урні 3 білих і 7 чорних куль. Навмання витягнули 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони будуть різного кольору?

14. Яка ймовірність того, що у вибраному навмання тризначному номері дві цифри однакові, а третя відрізняється від них?

15. Повна колода карт (52 карти) ділиться випадковим чином на дві рівні частини. Знайти ймовірність того, що: а) у кожній частині опиниться по два ту-

зи; б) в одній з частин не буде жодного туза; в) у одній з частин буде рівно один туз.

16. Картка лотереї містить 49 номерів. Для участі в лотереї необхідно купити картку, відзначити в ній 6 номерів і картку здати. При розіграші тиражу лотереї визначається 6 номерів, що виграли, з 49. Знайти ймовірність подій: $A_i = \{$правильно вгадані i виграшних номерів із 6$\}$, якщо $i = 3, 4, 5, 6$.

17. У картотеці 20 перенумерованих карток. Навмання виймають одну за іншою і номери записують. Яка ймовірність того, що номери йтимуть: а) у природному порядку: 1, 2, …, 20; б) у зворотному порядку: 20, 19, ..., 1.

18. Розв'язати попередню задачу за умови, що кожна картка після виймання і запису номера кладеться назад і перемішується з останніми.

19. У розіграші першості з баскетболу беруть участь 18 команд, з яких випадковим чином формуються дві групи по 9 команд у кожній. Серед учасників змагань є 5 команд екстракласу. Знайти ймовірність того, що: а) всі команди екстракласу потраплять в одну групу; б) дві команди екстракласу потраплять в одну групу, а три – в іншу.

20. Забарвлений куб розпиляний на 1000 кубиків однакового розміру. Отримані кубики ретельно перемішані. Визначити ймовірність того, що кубик, який витягнутий навмання, матиме: а) одну; б) дві; в) три; г) жодної забарвленої грані.

21. Яка ймовірність з'єднатися з потрібним абонентом, набравши навмання шестизначний телефонний номер, що складається з різних цифр? Як зміниться ця імовірність, якщо: а) навмання набрано тільки три забуті цифри; б) якщо цифри номера можуть повторюватися?

22. З чотирьох букв розрізної азбуки складено слово «ріпа». Дитина, яка не вміє читати, розсипала ці букви і зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що в неї вийде слово «парі».

23. В умовах попереднього задачі, яка ймовірність того, що зі слова «дзвін», що розсипалося, буде складено знову слово «дзвін»?

24. Дитина, граючи шістьма картками, на яких написані букви: М, Л, К, О, О, О, склала слово «МОЛОКО». Яка ймовірність того, що вона не вміє читати? Якою буде ймовірність цієї події, якщо дитина грає десятьма картками з буквами: М, М, Т, Т, А, А, А, К, И, Е і складає слово «МАТЕМАТИКА»?

25. У кондитерській є 7 видів тістечок. Покупець вибив чек на 4 тістечка. Вважаючи, що будь-який набір тістечок рівноймовірний, обчислити ймовірність того, що покупець замовив: а) тістечка одного виду; б) тістечка різних видів; в) по два тістечка різних видів.

26. Для участі в телепередачі про університет необхідно вибрати 5 студентів. Студенти вибираються випадковим чином з переможців студентських олімпіад, яких в університеті 15 осіб, серед них 4 − студенти першого і другого курсів, 6 третьокурсників і 5 старшокурсників. Знайти ймовірність того, що: а) будуть вибрані одні третьокурсники; б) всі першокурсники і другокурсники братимуть участь у передачі; в) у передачі братимуть участь тільки старшокурсники; г) жоден третьокурсник не потрапить на передачу; д) будуть вибрані: два студенти молодших курсів, один студент третього курсу, 2 студенти старших курсів.

27. Яка ймовірність того, що в групі з 30 студентів у двох дні народження збігаються?

28. У будинку 7 поверхів. На першому в ліфт входять 3 людини. Кожен з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що: 1) всі вийдуть на четвертому поверсі; 2) всі вийдуть одночасно на будь-якому з поверхів.

29. У групі 30 чоловік, з яких 6 відмінників. Група для проходження практики випадковим чином розбита на дві рівні підгрупи. Яка ймовірність того, що в кожній підгрупі по три відмінники?

30. При випробуванні партії приладів відносна частота придатних приладів виявилася рівною 0,9. Знайти число придатних приладів, якщо всього було перевірено 200 приладів.

31. При стрілянині була отримана частота попадання 0,6. Скільки було зроблено пострілів, якщо отримано 12 промахів?

32. Відділ технічного контролю виявив 6 бракованих деталей в партії з випадково відібраних 60 деталей. Знайти відносну частоту появи браку.

ТЕМА 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ОСНОВНИХ ТЕОРЕМ: ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теореми додавання ймовірностей

Нехай подія A є сумою двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C несумісні, то $P(A) = P(B \bigcup C) = P(B) + P(C)$;

б) якщо події B і C сумісні, то $P(A) = P(B \bigcup C) = P(B) + P(C) - P(B \bigcap C)$.

Події B і C називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. У протилежному випадку події називаються ***незалежними***. Імовірність події C, визначена за умови, що подія B відбулася, називається ***умовною*** і позначається $P(C/B)$.

Теореми множення ймовірностей

Нехай подія A є добутком двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C незалежні, то $P(A) = P(B \bigcap C) = P(B) \cdot P(C)$;

б) якщо події B і C залежні, то $P(A) = P(B \bigcap C) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Ці теореми справджуються й для добутку n ($n > 2$) подій.

Імовірність настання принаймні однієї події

Нехай у результаті випробування можуть відбутися n подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Потрібно знайти ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з них. Позначимо цю подію літерою A. Тоді протилежною буде подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що в результаті випробування одночасно настали протилежні події: $\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Знайдемо ймовірність події A через імовірність протилежної події: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i})$.

Правила розв'язування задач на обчислення імовірності складних подій:

1) позначити буквами всі події, про які йдеться в умові задачі;
2) з'ясувати, сумісні або несумісні позначені події, залежні вони або

незалежні;

3) виразити складну подію, про яку йде мова в питанні задачі, через позначені події;

4) вибрати формулу для обчислення потрібної ймовірності.

Приклад 4.1. З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого ґатунку. Імовірність того, що обраний виріб виявиться вищого ґатунку, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів виявиться: а) тільки один виріб вищого ґатунку; б) тільки два вироби вищого ґатунку; в) усі три вироби вищого ґатунку.

Розв'язання. Позначимо події:

A_1 = {перший виріб вищого ґатунку};

A_2 = {другий виріб вищого ґатунку} *сумісні, незалежні*;

A_3 = {третій виріб вищого ґатунку};

$P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}8$; $P(A_3) = 0{,}8$.

а) A = {тільки один виріб із трьох вищого ґатунку}:

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3;$$

$$P(A) = 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}096.$$

б) B = {тільки два вироби з трьох вищого ґатунку}:

$$B = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3;$$

$$P(B) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}384.$$

в) C = {всі три вироби вищого ґатунку}:

$$C = A_1A_2A_3;$$

$$P(C) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}512.$$

Приклад 4.2. Студент вивчив 20 питань з 30. Для здачі заліку необхідно відповісти хоч би на два запитання з трьох заданих. Яка ймовірність того, що студент здасть залік?

Розв'язання. Позначимо події:

A_1 = {студент відповів на перше питання};

A_2 = {студент відповів на друге питання} *сумісні, залежні*;

A_3 = {студент відповів на третє питання};

$$P(A_1) = \frac{20}{30};\ P(A_2) = \frac{19}{29};\ P(A_3) = \frac{18}{28};$$

A = {студент здасть залік}.

Побудуємо подію: $A = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3$. Доданки в цьому виразі сумісні. Запишемо цю подію інакше, щоб доданки були несумісні: $A = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$. Тоді будемо мати за теоремою додавання несумісних подій і за теоремою добутку залежних подій:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(\overline{A}_3/A_1A_2) + P(A_1)P(\overline{A}_2/A_1)P(A_3/A_1\overline{A_2}) +$$
$$+ P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1)P(A_3/\overline{A}_1A_2) + P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) =$$
$$= \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{10}{28} + \frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{19}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{20}{29}\cdot\frac{19}{28} + \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{18}{28} = \frac{152}{203}.$$

Приклад 4.3. На трьох етапах підготовки приладу до роботи ймовірності появи незалежних один від одного затримок відповідно дорівнюють 0,1; 0,06; 0,05. Яка ймовірність підготовки приладу до роботи без затримок?

Розв'язання. Позначимо події:

A_1 = {затримка на першому етапі};

A_2 = {затримка на другому етапі} *сумісні, незалежні*;

A_3 = {затримка на третьому етапі};

$P(A_1) = 0{,}1$; $P(A_2) = 0{,}06$; $P(A_3) = 0{,}05$;

A = {підготовка проведена без затримки}.

Тоді $A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ і за теоремою про добуток незалежних подій $P(A) = 0{,}9\cdot0{,}94\cdot0{,}95 = 0{,}8037$.

Приклад 4.4. Проводиться спостереження за групою, що складається з трьох однакових об'єктів. Імовірність виявлення першого, другого і третього об'єктів відповідно дорівнює 0,6; 0,8 і 0,7. Знайти ймовірність того, що виявлений хоч би один об'єкт.

Розв'язання. Позначимо події:

A_1 = {виявлений перший об'єкт}; $P(A_1) = 0{,}6$;

A_2 = {виявлений другий об'єкт}; $P(A_2) = 0{,}8$ *сумісні, незалежні*;

A_3 = {виявлений третій об'єкт}; $P(A_3) = 0{,}7$;

A = {виявлений хоч би один об'єкт}.

Тоді $A = A_1 + A_2 + A_3$.

За формулою обчислення імовірності появи хоча б однієї події

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}4\cdot0{,}2\cdot0{,}3 = 0{,}944.$$

Приклад 4.5. Над виготовленням виробу працює троє робочих. Якість виробу при передачі наступному робочому не перевіряється. Імовірність того, що перший, другий і третій робочий допустять брак відповідно дорівнює 0,2; 0,15; 0,1. Знайти ймовірність виготовлення виробу без браку.

Розв'язання. Позначимо події:

A_1 = {перший робочий допустив брак}; $P(A_1) = 0{,}2$;

A_2 = {другий робочий допустив брак}; $P(A_2) = 0{,}15$ *сумісні, незалежні*;

A_3 = {третій робочий допустив брак}; $P(A_3) = 0{,}1$;

A ={отриманий виріб без браку}.

Тоді $A = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$.

$P(\overline{A}_1) = 0{,}8; P(\overline{A}_2) = 0{,}85; P(\overline{A}_3) = 0{,}9$ і $P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}9 = 0{,}612.$

Приклад 4.6. Партія містить дванадцять стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) не менш як дві стандартні;
2) усі три нестандартні;
3) принаймні одна стандартна.

Розв'язання. 1) Нехай подія A − «серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні». Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 − «серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна» і A_2 − «усі три взяті деталі стандартні». Події A_1 і A_2 несумісні, тому маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності.

$$n = C_{16}^3 = 560;\ m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264;\ m_2 = C_{12}^3 = 220.$$

Отже, $P(A) = \dfrac{484}{560} \approx 0{,}864.$

2) Подія B − «усі три взяті деталі нестандартні». Цю подію можна подати як добуток трьох подій $B_i\ (i = 1,2,3)$, де i-та деталь нестандартна, $B = \bigcap_{i=1}^{3} B_i$. Умовою задачі не задано, що деталі беруться з поверненням. Отже, взяти три деталі разом − це те саме, що брати їх по одній без повернення, а тому події залежні. Згідно з цим імовірність події B обчислюємо так:

$$P(B)=P\left(\bigcap_{i=1}^{3}B_i\right)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)\cdot P(B_3/B_1\cap B_2)=\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}\approx 0{,}007.$$

3) Подія C − «із трьох деталей принаймні одна стандартна». Протилежна подія $\overline{C}$ − «усі три деталі нестандартні». Імовірність цієї події щойно знайдено: $P(\overline{C})=P(B)$. Остаточно маємо: $P(C)=1-P(\overline{C})\approx 1-0{,}007=0{,}993$.

Приклад 4.7. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга − із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя − із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) тільки одна стандартна;
2) тільки дві стандартні.

Розв'язання. Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3, які полягають відповідно в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партії, виявилась стандартною.

1) Подія A − «тільки одна з трьох деталей виявилась стандартною». Цю подію можна подати так: $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup$ $\cup\,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Групи подій, сумою яких є подія A, несумісні між собою, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події A обчислимо так:

$$P(A)=\frac{10}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{5}=\frac{133}{1235}\approx 0{,}108.$$

2) Подія B − «тільки дві деталі із трьох виявились стандартними». Подамо цю подію через події A_1, A_2, A_3 та протилежні до них:

$$B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3.$$

Подію B подано як суму несумісних груп подій. У кожній групі події незалежні. Знайдемо ймовірність події B:

$$P(B)=\frac{10}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{1}{5}+\frac{10}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{5}=\frac{490}{1235}\approx 0{,}397.$$

Приклад 4.8. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому − 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

Розв'язання. Позначимо події: A − «на підприємстві в першу зміну перевозитимуться вантажі»; A_1 − «для перевезення вантажів прибув автомобіль із першого автогосподарства»; A_2 − «для перевезення вантажів прибув автомобіль із другого автогосподарства». Тоді $A = A_1 \cup A_2$. Події A_1 і A_2 сумісні, тому $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. Очевидно, що події A_1 і A_2 незалежні і $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Остаточно дістаємо:

$$P(A) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88.$$

Приклад 4.9. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

Розв'язання. Позначимо події: A − «прилад працює протягом заданого часу»; B_1 − «перший вузол працює»; B_2 − «другий вузол працює»; B_3 − «третій вузол працює». Подія A настає, якщо працюють перший та другий вузли, або перший та третій вузли, або всі три вузли разом. Звідси: $A = B_1 \cap (B_2 \cup B_3)$. За умовою задачі маємо, що події B_1 і $(B_2 \cup B_3)$ незалежні, а події B_2 і B_3 − сумісні. Тому

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cap (B_2 \cup B_3)) = P(B_1) \cdot P(B_2 \cup B_3) = \\ &= P(B_1) \cdot (P(B_2) + P(B_3) - P(B_2 \cap B_3)) = \\ &= P(B_1) \cdot (P(B_2) + P(B_3) - P(B_2) \cdot P(B_3)) = \\ &= 0{,}8 \cdot (0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6) = 0{,}704. \end{aligned}$$

Під час обчислення враховано, що умовою задачі задані ймовірності протилежних подій.

ТЕМА 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ, ФОРМУЛИ БАЄСА

Нехай подія *A* може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій B_i (i = 1, 2,…, n), які утворюють повну групу. Тоді ймовірність події *A* подається формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i), \tag{5.1}$$

де $P(B_i)$ – імовірність події B_i; $P(A/B_i)$ – умовні ймовірності настання події A.

Наведена залежність називається **формулою повної ймовірності**.

Знову розглянемо події $B_i (i = 1, 2, ..., n),$ які утворюють повну групу подій і попарно несумісні. Ці події називатимемо **гіпотезами**. Подія *A* може відбутись одночасно з деякою із подій B_i. Відомі ймовірності подій B_i та умовні ймовірності того, що подія *A* відбудеться. Відомо, що в результаті випробування подія *A* відбулась. Потрібно з огляду на це переоцінити ймовірності гіпотез B_i. Для цього застосовують **формулу Баєса**:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}, (i = 1, 2, ..., n). \tag{5.2}$$

Приклад 5.1. Маємо *N* партій деталей по n_i деталей у кожній. Відомо, що серед n_i деталей m_i стандартних $(i = 1,2,..., N)$. Із навмання взятої партії беремо одну деталь. Знайти ймовірність того, що вибрана деталь:

а) стандартна; б) нестандартна.

Розв'язання. Позначимо події: $B_i (i = 1,2,..., N)$ – «деталь узято з *i*-ї партії»; *A* – «узята деталь стандартна». Події B_i попарно несумісні й утворюють повну групу. Подія *A* може настати одночасно з деякою подією B_i. Задача розв'язується за формулою повної ймовірності:

$$P(B_i) = \frac{1}{N},$$

$$P(A/B_i) = \frac{m_i}{n_i}, (i = 1, 2, ..., N).$$

$$P(A) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{n_i}.$$

Імовірність події $\overline{A}$ можна визначити відніманням від одиниці ймовірності події *A*, яку щойно знайдено.

Приклад 5.2. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий – з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання. Позначимо події: B_1 – «деталь виготовлено на першому верстаті»; B_2 – «деталь виготовлено на другому верстаті»; *A* – «вибрана деталь стандартна». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу, що ж до події *A*, то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій. Умовні ймовірності настання події *A* відомі. Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, знаходимо $P(B_1) = 0{,}75$, $P(B_2) = 0{,}25$. За формулою повної ймовірності маємо: $P(A) = 0{,}75 \cdot 0{,}85 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}8375$.

Приклад 5.3. У продаж надійшли однотипні вироби з трьох заводів. Продукція першого заводу містить 20 % виробів з дефектом, другого – 8 % і третього – 15 %. Яка ймовірність придбати виріб з дефектом, якщо в магазин надійшло 30 % виробів першого заводу, 50 % виробів другого заводу і 20 % – третього?

Розв'язання. Позначимо події:

H_1 ={виріб вироблений першим заводом}, $P(H_1) = 0{,}3$;

H_2 ={виріб вироблений другим заводом}, $P(H_2) = 0{,}5$;

H_3 ={виріб вироблений третім заводом}, $P(H_3) = 0{,}2$;

A = {куплений виріб має дефект}.

$$P(A/H_1) = 0{,}2;\ P(A/H_2) = 0{,}08;\ P_{H3}(A/H_3) = 0{,}15.$$

Імовірність події *A* можна обчислити за формулою повної ймовірності:

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}08 + 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}13$.

Приклад 5.4. У групі з 12 студентів, що прийшли на іспит, 3 підготовлені відмінно, 4 – добре, 3 – посередньо і 2 – погано. У квитках 20 запитань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 питань, добре підготовлений – на 16, посередньо – на 10 і погано підготовлений – на 5. Обчислити ймовірність того, що навмання викликаний студент відповість на поставлене питання.

Розв'язання. Позначимо події:

H_1 = {викликаний відмінник} $P(H_1) = 1/4$;

H_2 = {викликаний добре успішний} $P(H_2) = 1/3$;

H_3 = {викликаний посередньо успішний} $P(H_3) = 1/4$;

H_4 = {викликаний погано успішний} $P(H_4) = 1/6$;

A = {студент відповість на поставлене запитання}.

$$P(A/H_1) = 1; \; P(A/H_2) = \frac{16}{20} = 0{,}8; \; P(A/H_3) = \frac{10}{20} = 0{,}5;$$

$$P(A/H_4) = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

За формулою повної ймовірності знаходимо:

$$P(A) = \frac{1}{4}1 + \frac{1}{3}0{,}8 + \frac{1}{4}0{,}5 + \frac{1}{6}0{,}25 = \frac{4{,}1}{6} \approx 0{,}683.$$

Приклад 5.5. За умови задачі 5.4 визначити ймовірність того, що студент, який відповів на поставлене запитання, був підготовлений посередньо.

Розв'язання. Оскільки подія A відбулася (студент відповів на поставлене запитання), то ймовірність події H_3 зміниться і може бути обчислена за формулою Баєса:

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}5}{0{,}683} = 0{,}183.$$

Приклад 5.6. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45 %, а другий – 55 % деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого – 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

Розв'язання. Позначимо події: B_1 – «деталь перевіряв перший контролер»; B_2 – «деталь перевіряв другий контролер»; A – «виявлено браковану деталь». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу. Подія A відбулась одночасно з однією із цих подій, імовірності яких потрібно переоцінити. Застосуємо формулу Баєса.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{j=1}^{2} P(B_j)P(A/B_j)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}15}{0{,}45 \cdot 0{,}15 + 0{,}55 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}551;$$

$$P(B_2/A) = 1 - P(B_1/A) = 1 - 0{,}551 = 0{,}449.$$

Отже, більш імовірно, що помилки припустився перший контролер.

Приклад 5.7. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Розв'язання. Позначимо події: B_1 – «перший виріб узято з першої партії»; B_2 – «перший виріб узято з другої партії»; A – «перший узятий виріб стандартний»; C – «другий узятий виріб стандартний». За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність події A:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{23} = \frac{587}{874}.$$

За формулою Баєса обчислюємо умовні ймовірності $P(B_1/A)$ і $P(B_2/A)$:

$$P(B_1/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} : \frac{587}{874} = \frac{115}{229}; \; P(B_2/A) = 1 - \frac{115}{229} = \frac{114}{229}.$$

Імовірність події C знаходимо за формулою

$$P(C/A) = P(B_1/A)P(C/A \cap B_1) + P(B_2/A)P(C/A \cap B_2).$$

Умовні ймовірності такі: $P(C/A \cap B_1) = \frac{7}{9}$, $P(C/A \cap B_2) = \frac{17}{22}$.

Отже, $P(C/A) = \frac{115}{229} \cdot \frac{7}{9} + \frac{114}{229} \cdot \frac{17}{22} \approx 0{,}775.$

Приклад 5.8. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,55; а до другого – 0,45. Імовірність того, що виріб буде визнаний стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Виріб при перевірці визнаний стандартним. Знайти ймовірність того, що його перевірив другий товарознавець.

Розв'язання. Позначимо події:

H_1 ={виріб перевірив перший товарознавець}, $P(H_1) = 0{,}55$;

H_2 ={виріб перевірив другий товарознавець}, $P(H_2) = 0{,}45$;

A = {виріб визнаний стандартним};

$$P(A/H_1) = 0{,}9;\ P(A/H_2) = 0{,}98.$$

Оскільки подія A відбулася, то ймовірність $P(H_2/A)$ можна обчислити за формулою Баєса: $P(H_2/A) = \dfrac{0{,}45 \cdot 0{,}98}{0{,}55 \cdot 0{,}9 + 0{,}45 \cdot 0{,}98} = 0{,}48.$

Завдання 4, 5

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачі, наведені в таблиці.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Завдання 1	1	6	3	5	7	4	8	2	3	7
Завдання 2	10	12	14	16	15	13	11	9	12	15
Завдання 3	17	19	21	23	24	22	20	18	21	23
Завдання 4	25	29	26	28	27	29	28	30	28	26

1. На деякому підприємстві 96 % виробів визнаються придатними. З кожної сотні придатних виробів у середньому 75 виявляється першого ґатунку. Знайти ймовірність того, що виріб, виготовлений на цьому підприємстві, виявиться першого ґатунку.

2. За позикою щорічно розігруються 6 основних тиражів і один додатковий, що відбувається після основного п'ятого. З 100000 серій в кожному основному тиражі виграють 170 серій, а в кожному додатковому − 230 серій. Знайти ймовірність виграшу на одну облігацію за перші десять років: а) в основному тиражі; б) у додатковому тиражі; в) у будь-якому тиражі.

3. Багаторічні спостереження, що проводилися в деякому районі, показали, що з 100 000 дітей, які досягли десятирічного віку, до 40 років доживає в середньому 82 277, а до 70 років − 37977. Знайти ймовірність того, що якщо людина досягне сорокалітнього віку, то вона доживе до 70 років.

4. З 10 квитків лотереї виграшних два. Визначити ймовірність того, що серед узятих навмання 5 квитків: а) один виграшний; б) хоча б один виграшний.

5. Будівельна фірма з імовірністю 0,6 може укласти контракт на будівництво будівлі. Згідно з контрактом замовник може провести оплату одним з 3-х способів: 1) одноразово; 2) рівними частинами протягом року; 3) з відстроченням платежу на два роки. Ймовірності того, що оплата буде проведена першим, другим або третім способами відповідно дорівнюють: 0,2; 0,35; 0,4. Визначити ймовірність того, що фірма: а) отримає оплату; б) отримає оплату не пізніше, ніж через рік; в) не отримає оплату.

6. Виробнича фірма ухвалила рішення про створення інвестиційного фонду. З цією метою вона повинна протягом трьох років вносити до банку певні суми. Ймовірність того, що потрібні суми будуть внесені до 1-го, 2-го і 3-го року відповідно дорівнюють: 0,6; 0,4; 0,5. Знайти ймовірність того, що інвестиційний фонд буде створений.

7. Робітник обслуговує 3 верстати. Ймовірність того, що протягом години верстат не потребує уваги робітника, дорівнює для першого верстата 0,9, для другого 0,8 і для третього 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом години жоден верстат не потребує до себе уваги робітника.

8. Виточується деталь у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Деталь вважається придатною, якщо довжина кожного з ребер відхиляється від заданих розмірів не більше ніж на 0,01 мм. Імовірність відхилень, що перевищують 0,01 мм, становить: за довжиною 0,08; за шириною 0,12; за висотою 0,1 мм. Знайти ймовірність непридатності деталі.

9. Імовірність для виробів деякого виробництва задовольняти стандарту дорівнює 0,96. Пропонується спрощена схема випробувань, що дає позитивний результат з імовірністю 0,98 для виробів, що задовольняють вимоги стандарту, і 0,05 для виробів, які йому не задовольняють. Яка ймовірність того, що виріб, який витримав випробування, задовольняє вимоги стандарту?

10. Монету кидають доти, поки не з'явиться два герби підряд або дві решки. Знайти ймовірність того, що знадобиться не більше трьох кидків.

11. Страхова компанія встановила, що в середньому один з 1000 векселів не підлягає оплаті і обов'язково є простроченим. Так само відомо, що один вексель зі 100, які підлягають оплаті, прострочений. Компанія отримала прострочений вексель. Яка ймовірність того, що він не підлягає оплаті?

12. На залізничну станцію надходить потяг із 20 вагонів, що направляються на різні адреси. На першу адресу прямує 5, на другу – 7, а на третю – 8 вагонів відповідно. Вагони в потязі розташовані довільно. Всі місця вагонів рівноймовірні. Знайти ймовірність того, що всі вагони, які направляються на одну і ту ж адресу, стоятимуть поряд.

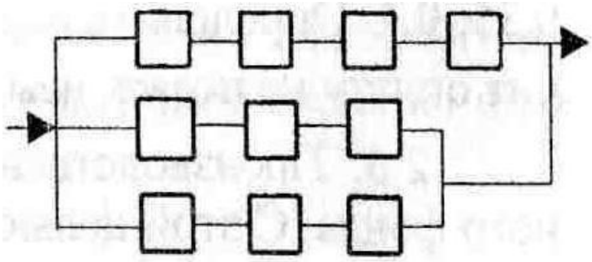
13. У партії з 10 деталей 4 дефектних. Для контролю беруть 4. Якщо серед них опиниться більше 2 дефектних, то вся партія бракується. Знайти ймовірність того, що вся партія буде забракована.

14. Студент вивчив 20 питань з 30. Для здачі заліку необхідно відповісти хоча б на два питання з трьох заданих. Яка ймовірність того, що він здасть залік?

15. На полиці бібліотеки розташовані 20 книг. 7 з них – підручники з теорії ймовірностей. Знайти ймовірність того, що: а) з трьох виданих книг не менше двох – підручники з теорії ймовірностей; б) хоча б одна видана книга – підручник з теорії ймовірностей.

16. У лотереї 25 квитків, з яких 6 – виграшних. Яка ймовірність отримання виграшу, маючи 3 квитки? (Подумайте, що означає виграш?)

17. Система, що фіксує процес ціноутворення, наведена на схемі. Імовірність виходу з ладу кожного елемента дорівнює 0,1. Знайти ймовірність: а) безвідмовної роботи системи; б) виходу системи з ладу.



18. П'яти радіостанціям дозволено працювати на семи радіохвилях. Вибір хвилі проводиться випадково. Знайти ймовірність того, що при роботі всіх п'яти радіостанцій будуть використані різні хвилі.

19. З повного набору кісток доміно (28) вибирають 5. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б 2 шестірки.

20. Є дві партії деталей по 12 і 10 штук, причому в кожній партії один виріб бракований. Виріб, узятий навмання з першої партії, перекладений в другу, після чого вибирається навмання виріб з другої партії. Знайти ймовірність витягання бракованого виробу з другої партії.

21. Для контролю продукції з трьох партій деталей узята для випробування одна деталь. Наскільки велика ймовірність виявлення бракованої продукції, якщо в одній партії 2/3 деталі браковані, а в двох інших − всі доброякісні?

22. Характеристика матеріалу, взятого для виготовлення продукції з імовірністю 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 і 0,9, може знаходитися в шести різних інтервалах. Залежно від властивостей матеріалу ймовірності отримання першосортної продукції відповідно дорівнює: 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 і 0,2. Визначити ймовірність отримання першосортної продукції.

23. Для посіву заготовлено насіння пшениці першого сорту, змішане з невеликою кількістю домішок зерен другого, третього і четвертого сортів. Імовірності того, що навмання узяте зерно опиниться того або іншого сорту відомі і дорівнюють відповідно: 1 сорту − 0,96; 2 сорту − 0,01; 3 сорту − 0,02; 4 сорту − 0,01. Імовірність того, що із зерна виростить колос, який містить не менше 50 зерен, дорівнює: 0,50 для зерна 1-го сорту, 0,15 для зерна 2-го сорту, 0,20 для зерна 3-го сорту і 0,05 для зерна 4-го сорту. Знайти ймовірність того, що колос матиме не менше 50 зерен.

24. Імовірність того, що в деякому виробництві виріб задовольняє вимоги стандарту, дорівнює 0,96. Пропонується спрощена схема випробувань, яка для виробів, що задовольняють вимоги стандарту, дає позитивний результат з імовірністю 0,98, а для виробів, що їх не задовольняють − лише з імовірністю 0,05. Яка ймовірність того, що виріб, який двічі витримав спрощене випробування, задовольняє вимоги стандарту?

25. З першої урни взято кулю і опущено в другу, в якій є 1 біла і 1 чорна кулі. Після цього з другої урни навмання витягнута 1 куля. Яка ймовірність, що вона біла?

26. З першої урни, що містить 1 кулю, узято кулю і опущено в другу, в якій є 1 біла і 1 чорна кулі. Після цього з другої урни навмання витягнуто 1 кулю. Вона виявилася білою. Якого кольору куля була в першій урні найімовірніше?

27. Є дві партії деталей по 10 і 15 штук, причому в кожній партії один виріб бракований. Виріб, узятий навмання з першої партії, перекладений в другу, після чого вибирається навмання виріб з другої партії. Знайти ймовірність витягання бракованого виробу з другої партії.

28. Агентство зі страхування автомобілів розділяє водіїв за трьома класами: клас H_1 (мало ризикує), клас H_2 (середньо ризикує), клас H_3 (сильно ризикує). Агентство припускає, що зі всіх водіїв, які застрахували автомобілі, 30 % належить до класу H_1, 50 % – до класу H_2 і 20 % – до класу H_3. Імовірність того, що протягом року водій класу H_1 потрапив хоча б в одну аварію дорівнює 0,01, для водія класу H_2 ця імовірність дорівнює 0,02, а для водія класу H_3 – 0,08. Водій А страхує свою машину і протягом року потрапляє в аварію. Яка ймовірність того, що він належить до класу H_1? До класів H_2 або H_3?

29. З двох близнят першим народився хлопчик. Яка ймовірність того, що другим народиться теж хлопчик, якщо серед близнят імовірність народження 2 хлопчиків і 2 дівчаток відповідно дорівнює p і q, а для різностатевих близнят імовірність народитися першим для обох статей однакова?

30. Відомо, що 96 % продукції, яка випускається заводом, відповідає стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з імовірністю 0,98 і нестандартну з імовірністю 0,05. Визначити ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, відповідає стандарту.

ТЕМА 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СХЕМИ ІСПИТІВ БЕРНУЛЛІ. ПРИКЛАДИ РОБОТИ З ФОРМУЛАМИ ЛАПЛАСА І ПУАССОНА

6.1. Розв'язання задач за допомогою схеми іспитів Бернуллі

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p та q, то їх називають **експериментами за схемою Бернуллі**. У кожному експерименті випадкова подія з ймовірністю p відбувається, а з ймовірністю q – не відбувається, тобто $p + q = 1$.

Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі – 2^n елементарних події.

Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з'явиться m разів, знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (6.1)$$

Зауваження 1. Ймовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A з'явиться від m_i до m_j разів, обчислюється так:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{m!}{m! \cdot (n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (6.2)$$

Зауваження 2. У багатьох випадках треба знаходити найбільш ймовірне значення m_0 числа m появ події A. Це значення m визначається співвідношеннями:

$$np - q \le m_0 \le np + q \quad \text{або} \quad (n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p. \qquad (6.3)$$

Число m_0 повинно бути цілим. Якщо $(n + 1)p$ – ціле число, тоді найбільше значення ймовірність має при двох числах:

$$m_1 = (n + 1)p - 1 \text{ та } m_2 = (n + 1)p.$$

Приклад 6.1. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі 0,6. Знайти ймовірність трьох влучень при п'яти пострілах.

Розв'язання

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{2!\,3!} 0{,}6^3 (1 - 0{,}6)^2 = 0{,}3456 \approx 0{,}35.$$

Приклад 6.2. Митний пост дає статистичну оцінку того, що 20 % усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 5 осіб, то яка ймовірність того, що 3 з них не задекларували весь товар?

Розв'язання. Позначимо через A подію, що навмання вибрана особа не задекларувала весь товар, $P(A) = 0,2$. Задача задовольняє умови формули Бернуллі (6.1): $n = 5$, $m = 3$, $p = 0,2$:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot (1-0,2)^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 10 \cdot 0,008 \cdot 0,64 = 0,0512.$$

Приклад 6.3. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти імовірність того, що:

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовлять не менше двох блоків.

Розв'язання. Позначимо за подію A відмову блока. Тоді ймовірність події A за умовою прикладу буде $P(A) = p = 1 - 0,8 = 0,2$, тому $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. Згідно з умовою задачі $n = 10$. Використовуючи формулу Бернуллі (6.1) та зауваження 1 (6.2), одержимо:

а) $P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = C_{10}^2 \cdot (0.2)^2 \cdot (0.8)^8 = 0.202$;

б) $P_{10}(1 < m \leq 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 (0.2)^0 \cdot (0.8)^{10} = 0.8926$;

в) $P_{10}(2 \leq m \leq 10) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1)) = 1 - (C_{10}^0 (0,2) \cdot (0,8))^{10} + C_{10}^1 (0.2)^1 \cdot (0.8)^9) = 0,6244$.

Приклад 6.4. У разі дотримання певної технології 90 % усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого ґатунку. Знайти найімовірніше число виробів найвищого ґатунку в партії з 200 штук.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 200$; $p = 0,9$; $q = 1 - p = 0,1$.

Використовуючи зауваження 2 (6.3), дістаємо:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

$$200 \cdot 0,9 - 0,1 \leq m_0 \leq 200 \cdot 0,9 + 0,9$$

$$179,9 \leq m_0 \leq 180,9$$

Отже, найімовірніше число виробів першого ґатунку серед 200 дорівнює 180.

6.2. Приклади роботи з формулами Лапласа і Пуассона

Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m пов'язане з певними труднощами. Щоб уникнути їх, застосовують асимптотичні формули, що випливають з локальної та інтегральної теорем Муавра − Лапласа.

6.2.1. Локальна теорема Муавра −Лапласа

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p\,(0 < p < 1)$, то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A настане m разів, подається такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{6.4}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається *функцією Гаусса*. Функція Гаусса протабульована (табл. Д 1.1),

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{6.5}$$

Тут x є рівномірно обмеженою величиною відносно n і m.

Приклад 6.5. Ймовірність виготовлення деталі першого ґатунку на даному верстаті дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 100 деталей буде 55 деталей першого ґатунку.

Розв'язання

$$p = 0{,}6 > 0{,}5;\ npq = 100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 24 > 10.$$

Отже, формулу Муавра − Лапласа у цьому випадку використовувати можна.

$$P_{100}(55) = \frac{1}{\sqrt{24}}\varphi(x) = \left\{ x = \frac{m - np}{\sqrt{24}} = \frac{55 - 100 \cdot 0{,}6}{\sqrt{24}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}}\varphi\left(\frac{55 - 100 \cdot 0{,}6}{\sqrt{24}}\right) = \frac{0{,}2371}{\sqrt{24}} \approx 0{,}04835.$$

Точна формула Бернуллі

$$P_{100}(55) = 0{,}04781.$$

Похибка менше 1 %.

Приклад 6.6. Фабрика випускає 75 % виробів 1-го ґатунку. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) виробів 1-го ґатунку виявиться 290 шт.;

2) 300 шт.;

3) 320 шт.

Розв'язання. За умовою задачі маємо:

$n = 400$; $p = 0{,}75$; $q = 0{,}25$; $m = 290$; 300; 320.

1) $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{75} \approx 8{,}7$; $np = 400 \cdot 0{,}75 = 300$;

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{290 - 300}{8{,}7} = -1{,}15;$$

$$P_{400}(290) \approx \frac{\varphi(-1{,}15)}{8{,}7} = \frac{\varphi(1{,}15)}{8{,}7} = \frac{0{,}2059}{8{,}7} \approx 0{,}0237;$$

2) $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{300 - 300}{8{,}7} = 0$;

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(0)}{8{,}7} = \frac{0{,}3989}{8{,}7} \approx 0{,}046;$$

3) $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{320 - 300}{8{,}7} = \dfrac{20}{8{,}7} \approx 2{,}3$;

$$P_{400}(320) \approx \frac{\varphi(2{,}3)}{8{,}7} \approx \frac{0{,}0283}{8{,}7} \approx 0{,}0033.$$

Приклад 6.7. Імовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть із цієї кількості зернин, та обчислити ймовірність цього числа.

Розв'язання. За умовою задачі:

$$n = 700, \; p = 0{,}9, \; q = 0{,}1;$$

$$np - q \le m_0 \le np + p \to 700 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 700 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \to$$

$$\to 729{,}9 \le m_0 \le 630{,}9 \to m_0 = 630.$$

Отже, шукане число $m_0 = 630$.

Відповідна ймовірність буде така:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{63} \approx 7{,}94;$$
$$np = 700 \cdot 0{,}9 = 630;$$
$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{630 - 630}{7{,}94} = 0;$$
$$P_{700}(630) \approx \frac{\varphi(0)}{7{,}94} = \frac{0{,}3989}{7{,}94} \approx 0{,}05.$$

6.2.1. Інтегральна теорема Лапласа

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p\,(0 < p < 1)$, то для великих значень n імовірність появи випадкової події від m_i до m_j разів обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i), \tag{6.6}$$

де $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}}$, $x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ є *функцією Лапласа*, яка протабульована (табл. Д 1.1).

Приклад 6.8. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Імовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей.

Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде:

1) від 720 до 780 шт.; 2) від 740 до 790 шт.?

Розв'язання. За умовою задачі:

$n = 800;\ p = 0{,}95;\ q = 0{,}05;\ 720 \le m \le 780; 740 \le m \le 790;$

$\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05} = \sqrt{38} \approx 6{,}2, \quad np = 800 \cdot 0{,}95 = 760.$

1) $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{780 - 760}{6{,}2} = \dfrac{20}{6{,}2} \approx 3{,}23;$

$x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{720 - 760}{6{,}2} = -\dfrac{40}{6{,}2} \approx -6{,}5;$

$$P_{800}(720 \le m \le 780) \approx \Phi(3{,}23) - \Phi(-6{,}5) = \Phi(3{,}23) + \Phi(6{,}5) =$$
$$= 0{,}49931 + 0{,}5 = 0{,}99931;$$

2) $$x_j = \frac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \frac{790 - 760}{6{,}2} \approx 4{,}84;$$

$$x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{740 - 760}{6{,}2} = -\frac{20}{6{,}2} \approx -3{,}23;$$

$$P_{800} = (740 \le m \le 790) \approx \Phi(4{,}84) - \Phi(-3{,}23) = \Phi(4{,}84) + \Phi(3{,}23) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}49931 = 0{,}99931.$$

Приклад 6.9. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу. Імовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить:

1) не більш як 380 шт.;

2) не менш як 390 шт.

Розв'язання. За умовою задачі:

$n = 500;\ p = 0{,}8;\ q = 0{,}2;\ 0 \le m \le 380;\ 390 \le m \le 500;$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{80} \approx 8{,}9, \quad np = 500 \cdot 0{,}8 = 400.$$

1) $$x_j = \frac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3809 - 400}{8{,}9} = -\frac{380 - 400}{8{,}9} = -\frac{20}{8{,}9} \approx -2{,}25;$$

$$x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 400}{8{,}9} \approx -45;$$

$$P_{500} = (0 \le m \le 380) \approx \Phi(-2{,}25) - \Phi(-45) = \Phi(4{,}5) - \Phi(2{,}25) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}4881 = 0{,}0119.$$

2) $$x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{390 - 400}{8{,}9} = -\frac{10}{8{,}9} \approx -1{,}12;$$

$$x_j = \frac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 400}{8{,}9} = \frac{100}{8{,}9} \approx 11{,}23;$$

$$P_{500}(390 \le m \le 400) \approx \Phi(11{,}23) - \Phi(-1{,}12) = \Phi(11{,}23) + \Phi(1{,}12) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}3686 = 0{,}8686.$$

6.2.3. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність асимптотичних формул для великих значень n − числа повторних незалежних експериментів за схемою Бернуллі − знижується з наближенням p до нуля. Тому при $n \to \infty,\ p \to 0$ за умови $np = a = \text{const}$ імовірність появи випадкової події m разів $(0 \le m \le n)$ обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} \mathrm{e}^{-a}, \tag{6.7}$$

яка називається *формулою Пуассона*.

Із (6.7) випливає:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} P_n(m) = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \tag{6.8}$$

$$P_n(0 \le m \le n) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^{a} = 1.$$

І справді, це підтверджується ще й тим, що події $0 \le m \le n$ утворюють повну групу.

Функція $P_n(m)$ визначається за табл. Д 1.2, за заданим m і обчисленим значенням $a = np$.

Приклад 6.10. Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю p = 0,002. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи; 2) від трьох до шести.

Розв'язання. За умовою задачі маємо n = 1000; p = 0,002; m = 3; $3 \le m \le 6$. Оскільки n велике, а p − мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо формули (6.7) і (6.8). Для цього обчислимо значення параметра

$$a = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2.$$

1) $P_{1000}(3) \approx 0{,}18044.$

2) $P_{1000}(3 \le m \le 6) = P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) + P_{1000}(6) =$

$= 0{,}180447 + 0{,}168031 + 0{,}100819 + 0{,}050409 + 0{,}021604 = 0{,}52131.$

Приклад 6.11. Імовірність того, що під час епідемії грипу мешканець міста захворіє на цю хворобу, становить у середньому 0,3 %. Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних 300 мешканців міста хворих на грип виявиться:

1) 5 осіб; 2) не більш як 3 особи.

Розв'язання. За умовою: p = 0,003; n = 300; m = 5; $0 \le m \le 3$.

Обчислюємо значення параметра $a = np = 300 \cdot 0{,}003 = 0{,}9$.

1) $P_{300}(5) \approx 0{,}002001$.

2) $P_{300}(0 \le m \le 3) = P_{300}(0) + P_{300}(1) + P_{300}(2) + P_{300}(3) =$

$= 0{,}40657 + 0{,}365913 + 0{,}164661 + 0{,}049398 = 0{,}996542.$

Завдання 6

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачі, наведені в таблиці.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Задача 1	1	3	5	7	9	10	8	6	4	2
Задача 2	11	16	12	17	13	18	14	13	15	11

1. На контроль надійшла партія деталей з цеху. Відомо, що 5 % всіх деталей не задовольняє стандарту. Яке найімовірніше число нестандартних деталей в партії з 1000 штук? Яка ймовірність цього числа? Яка ймовірність того, що в партії буде хоча б одна нестандартна деталь? Яка ймовірність того, що в партії буде не більше 20 нестандартних деталей? Яка ймовірність того, що в партії буде не менше 20 нестандартних деталей? Яка ймовірність того, що в партії буде від 20 до 40 стандартних деталей?

2. Імовірність перевитрати води за добу деяким районом міста дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за 7 діб перевитрата води буде: 1) не більше ніж у дві доби; 2) не менше ніж у шість діб; 3) не більше ніж у п'ять діб; 4) не менше ніж у дві доби і не більше ніж у чотири; 5) менше ніж у чотири доби; 6) більше ніж у дві доби. Знайти найімовірніше число доби, за яку буде перевитрата води.

3. Проводиться соціологічне опитування певної групи населення. Опиту-

вана людина з імовірністю 0,3 може виявитися студентом, з імовірністю 0,4 − службовцем, з імовірністю 0,1 − бізнесменом, і з імовірністю 0,2 − пенсіонером. Вибирається навмання група з шести осіб. Знайти ймовірність таких подій: A = = {у складі групи не менше чотирьох службовців}; B = {у складі групи хоча б один бізнесмен}; C = {у складі групи рівне число службовців і студентів}; D = = {у складі групи не більше двох пенсіонерів}.

4. Десять освітлювальних лампочок для освітлення вітрини магазина ввімкнено в коло послідовно. Ймовірність того, що лампочка перегорить при підвищенні напруги в мережі, однакова для будь-якої лампочки і дорівнює 0,1.

1) Визначити ймовірність розриву кола при підвищенні напруги в мережі.

2) Обчислити ймовірність розриву кола при числі лампочок, рівному двадцяти. У якому колі (з 10 або з 20 лампочок) імовірність відмови вища?

3) Як зміниться ця ймовірність, якщо ймовірність для будь-якої лампочки перегоріти зменшиться в два рази?

5. Пристрій складається з 8 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмов кожного з елементів за час T однакові і дорівнюють 0,2. Знайти ймовірність відмови приладу, якщо для цього достатньо, щоб відмовили хоча б три елементи з восьми.

6. Ймовірність того, що покупцеві необхідне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що при 10000 покупцях частка тих, яким потрібне взуття цього розміру, відхилиться від імовірності 0,2 не більше ніж на 0,005?

7. Статистикою встановлено, що з 1000 дітей, які народилися, в середньому народжується 485 дівчаток і 515 хлопчиків. У сім'ї 5 дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) 3 дівчинки; б) не більше 3 дівчаток.

8. Гравець виграє 7 копійок при появі 6 очок на гральній кістці і платить 1 копійку в інших випадках. Знайти ймовірність того, що його виграш становитиме від 16 до 30 грн після 8000 кидань кістки.

9. У страховому товаристві застраховано 10000 осіб одного віку і однієї соціальної групи. Ймовірність смерті протягом року для кожної особи дорівнює 0,006. Кожен застрахований вносить 1 січня 12 грн страхових, і у разі його смерті родичі отримують від товариства 1000 грн. Чому дорівнює ймовірність того, що: а) товариство потерпить збитки; б) товариство отримає прибуток, не менший 40000, 60000, 80000 грн?

10. Імовірність виграшу в деякій лотереї на один квиток дорівнює 1/5. Припускаючи, що виграші на різні квитки незалежні, визначити число квитків n, які потрібно купити, щоб імовірність отримання хоча б одного виграшу була не менше: 1) 0,65; 2) 0,9; 3) 0,99. Обчислити ймовірність виграшу у всіх цих випадках.

11. На одній друкарській сторінці 2400 знаків. При наборі тексту ймовірність спотворення одного знака дорівнює 1/100. Знайти наближене значення того, що на сторінці: 1) не менше двох друкарських помилок; 2) не більше двох друкарських помилок; 3) не менше однієї і не більше чотирьох друкарських помилок. Знайти найімовірніше число друкарських помилок на сторінці.

12. Два рівносильних шахісти домовилися зіграти матч з $2n$ результативних партій. Партії, зіграні внічию, не зараховуються, і передбачається, що кожен з учасників може виграти партію з імовірністю 0,5. Переможцем матчу вважається той, хто виграв у більшому числі партій. У якому матчі більше шансів виграти будь-якому з учасників: у матчі з 8 результативних партій або з 12?

13. Дослід полягає в тому, що з колоди в 32 карти (починаючи з сімок і вище) навмання і з поверненням витягується 10 карт, причому кожного разу записується результат витягання. Дослід повторили 4 рази. Знайти ймовірність таких подій: A ={хоч би один раз отримано не менше 7 карт однієї масті}; B = {рівно двічі отримано набори, що не містять будь-якої однієї масті}; C = {рівно один раз отримано набір, що не містить дам, тузів і королів}; D = {хоч би один раз отримано набір, що містить чотири тузи}.

14. Комп'ютер складається з 2000 елементів. Імовірність відмови одного елемента протягом одного року роботи дорівнює 0,0005 і не залежить від стану інших елементів. Яка ймовірність відмови за рік: 1) двох елементів; 2) не менше двох елементів; 3) не менш одного і не більше трьох елементів?

15. Імовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей неперевіреними виявляться від 70 до 100.

16. Імовірність виходу з ладу виробу за час випробувань на надійність 0,1. Яка ймовірність, що за час випробувань 100 виробів вийдуть з ладу:

а) не менше 5 виробів, б) не більше 5 виробів, в) від 5 до 10 виробів?

17. Радіоапаратура складається з 1000 транзисторів. Імовірність відмови одного транзистора протягом одного року роботи дорівнює 0,001 і не залежить від стану інших елементів. Яка ймовірність відмови трьох і не менше трьох транзисторів за рік?

18. Імовірність появи події при одному досліді дорівнює 0,3. З якою імовірністю можна стверджувати, що частота цієї події при 100 дослідах лежатиме в межах від 0,2 до 0,4?

ТЕМА 7. СКЛАДАННЯ РЯДІВ РОЗПОДІЛУ, ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ТА ЇХ ГРАФІКІВ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ. ОБЧИСЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ, ДИСПЕРСІЇ, СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОГО ВІДХИЛЕННЯ

7.1. Складання рядів розподілу, функції розподілу та їх графіків для дискретної випадкової величини

Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають *законом розподілу випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного багатокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини X, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм імовірностей:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Оскільки випадкові події $(X = x_j)$ і $(X = x_m)$ є між собою несумісними $((X = x_i) \cap (X = x_m) = \varnothing,\ i \neq m;\ i,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ і утворюють повну групу $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k}(X = x_j) = \text{'}\Omega\right)$, то необхідною є така умова:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{k} p_i = 1. \qquad (7.1)$$

Рівність (7.1) називають *умовою нормування* для дискретної випадкової величини X. Наведену таблицю називають **рядом розподілу**.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають **функцією розподілу ймовірностей**:

$$F(x) = P(X < x) \qquad (7.2)$$

величина може набути значення, меншого за x.

Розглянемо **властивості $F(x)$:**

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Із другої властивості $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [a; b]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \quad (7.3)$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

3. Якщо $X \in (-\infty; \infty)$, виконуються два поданих далі співвідношення.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

Приклад 7.1. Для вивчення рівня зарплати робітників обстежено 5 приватних підприємств. Імовірність того, що на кожному з них зарплата вища середнього рівня забезпеченості, дорівнює 0,6. Побудувати ряд розподілу і багатокутник розподілу випадкової величини X − числа підприємств, на яких зарплата вища середнього рівня забезпеченості.

Розв'язання. Можливими значеннями випадкової величини X є $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$. Імовірність цих значень за формулою Бернуллі при $p = 0,6$, $q = 1 - 0,6 = 0,4$ відповідно дорівнюють:

$$P(X = 0) = P_5(0) = C_3^0 \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^3 = 0,0102,$$
$$P(X = 1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^4 = 0,0768,$$
$$P(X = 2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^3 = 0,2304,$$
$$P(X = 3) = P_5(3) = C_5^3 \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^2 = 0,3456,$$
$$P(X = 4) = P_5(4) = C_5^4 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^1 = 0,2592,$$
$$P(X = 5) = P_5(5) = C_5^5 \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^0 = 0,0778.$$

Ряд розподілу величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

Умова $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ виконана:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}01 + 0{,}076 + 0{,}23 + 0{,}345 + 0{,}259 + 0{,}0778 = 1.$$

Багатокутник розподілу зображений на рис. 7.1:

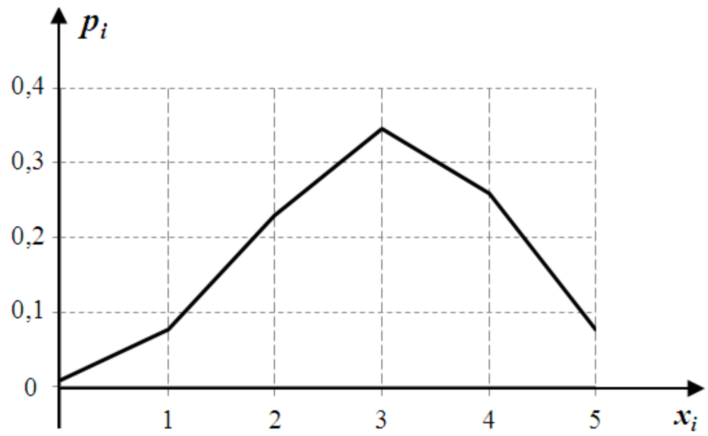


Рисунок 7.1

Приклад 7.2. Проводяться три незалежні дослідження оборотності засобів підприємства. Ймовірність помилки при кожному дослідженні дорівнює 0,4. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X − числа помилок.

Розв'язання. Можливими значеннями випадкової величини X будуть: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Імовірність цих значень визначимо за формулою Бернуллі $P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1 - p)^{n-k}$, де $n = 3$, $k = 0, 3$. Одержимо $P(X = 0) = 0{,}216$, $P(X = 1) = 0{,}432$, $P(X = 2) = 0{,}288$, $P(X = 3) = 0{,}064$.

Ряд розподілу:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Перевірка: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1.$

Функція розподілу та її графік (рис. 7.2).

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0 \\ 0{,}216,\ 0<x\le 1 \\ 0{,}648,\ 1<x\le 2. \\ 0{,}936,\ 2<x\le 3 \\ 1,\ x>3 \end{cases}$$

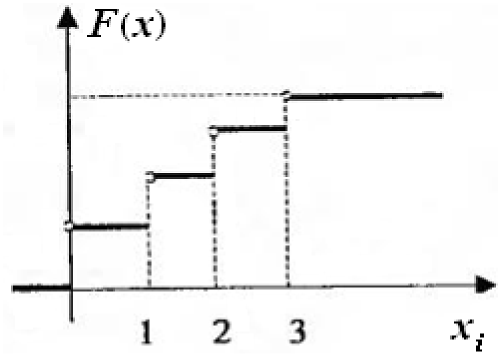


Рисунок 7.2

Приклад 7.3. Ймовірність здачі в запланований термін для кожного з трьох будинків, що будуються, є однаковою і дорівнює 0,9. Необхідно:

1) побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількість будинків, які здано в експлуатацію в запланований термін;

2) визначити ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон [2,5; 3,5), тобто ймовірність $P(2{,}5 \le X < 3{,}5)$.

Розв'язання. Випадкова величина X – кількість будинків, зданих в експлуатацію в запланований термін – може набувати значень 0, 1, 2 або 3.

1) За умовами прикладу

$n = 3$ − загальна кількість експериментів (кількість будинків);

$p = 0{,}9$ − ймовірність побудови кожного будинку в запланований термін;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Тоді ймовірності p_i ($i = 0, 1, 2, 3$) того, що з 3 будинків у запланований термін буде здано рівно 0, 1, 2 або 3 визначаються за допомогою **формули Бернуллі**:

$$p_0 = P(X=0) = P_3(0) = C_0^3 p^0 q^{3-0} = 1\cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001;$$

$$p_1 = P(X=1) = P_3(1) = C_1^3 p^1 q^{3-1} = 1\cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027;$$

$$p_2 = P(X = 2) = P_3(2) = C_2^3 p^2 q^{3-2} = 1 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}243;$$

$$p_3 = P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}729.$$

Ряд розподілу випадкової величини *X* набуває вигляду

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Перевіримо критерій слушності побудови закону розподілу (рівність одиниці суми значень імовірностей у другому рядку ряду розподілу), тобто умову нормування за формулою (7.1):

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1.$$

Побудуємо **багатокутник розподілу** (рис. 7.3).

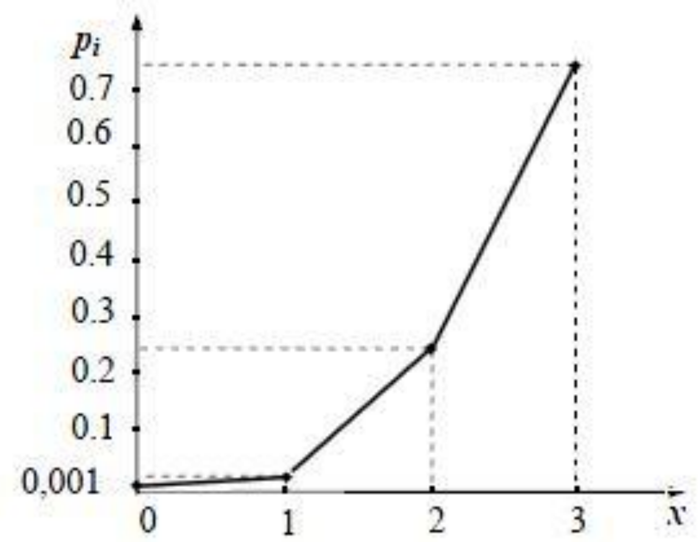


Рисунок 7.3

Побудуємо інтегральну функцію $F(x)$ випадкової величини *X*.

При побудові графіка $F(x)$ вісь абсцис можливими значеннями випадкової величини розбивається на $(n + 1)$ діапазон, у кожному з таких діапазонів функції $F(x)$ має постійне значення:

$x \le 0 \quad F(x) = P(X < 0) = 0;$

$0 < x \le 1 \;\; F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}001;$

$1 < x \le 2 \;\; F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}001 + 0{,}027 = 0{,}028;$

$2 < x \le 3$

$F(x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}028 + 0{,}243 = 0{,}271;$

$3 < x \le +\infty$

$F(x) = P(X > 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}271 + 0{,}729 = 1.$

Таким чином, *аналітичний запис* функції розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ 0{,}001, \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 0{,}028, \text{ при } 1 < x \le 2; \\ 0{,}271, \text{ при } 2 < x \le 3; \\ 1, \text{ при } 3 < x \le +\infty. \end{cases}$$

На рис. 7.4 зображений *графік* інтегральної функції розподілу, що побудована відповідно до її аналітичного запису.

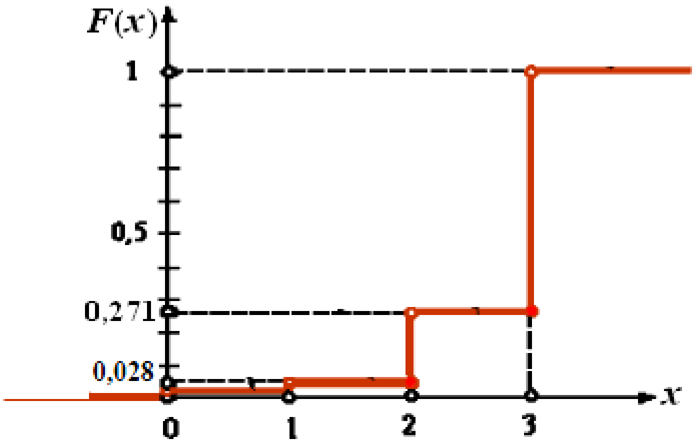


Рисунок 7.4

2) Визначимо ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон [2,5; 3,5). У даному випадку a = 2,5, а b = 3,5.

Підставляючи у формулу (7.3) значення аргументу інтегральної функції і обчислюючи значення інтегральної функції на межах заданого діапазону, одержуємо шуканий результат:

$P(2{,}5 \le X < 3{,}5) = F(b) - F(a) = F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - 0{,}271 = 0{,}729.$

Шукана ймовірність і значення інтегральної функції $F(x)$ легко визначаються за графіком інтегральної функції (див. рис. 7.5).

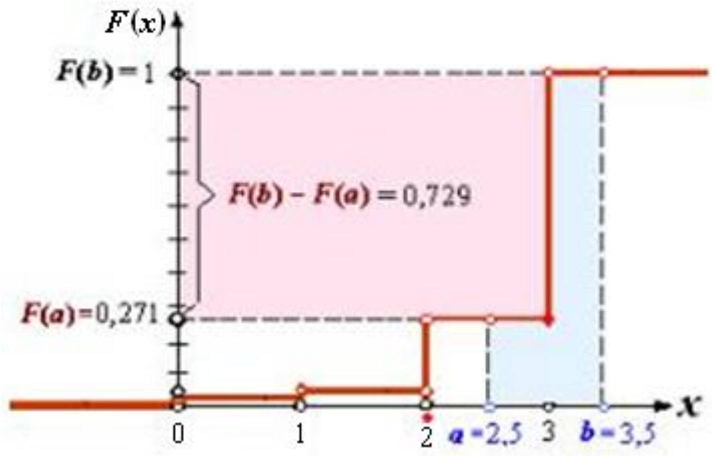


Рисунок 7.5

7.2. Обчислення математичного сподівання, дисперсії, середнього квадратичного відхилення

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеної на дискретному просторі **Ω**, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \, . \tag{7.4}$$

Якщо **Ω** − обмежена множина, то

$$M(X) = \sum_{s=1}^{n} x_i p_i \, . \tag{7.5}$$

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2 . \tag{7.6}$$

Для дискретної випадкової величини X дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i , \tag{7.7}$$

або

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X) . \tag{7.8}$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (7.9)$$

Приклад 7.4. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	–4	–2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4\cdot 0{,}1 - 2\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}1 =$$
$$= -0{,}4 - 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}9.$$

Згідно з (7.8) маємо: $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i p_i\right)^2.$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^{\;2} p_i = 16\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}1 + 36\cdot 0{,}1 =$$
$$= 1{,}6 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 3{,}6 = 8{,}7;$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}8.$$

Завдання 7

Дискретна випадкова величина задана законом розподілу в табличній формі і задано значення x_0. Необхідно:

- ✓ записати вираз для функції розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
- ✓ знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення;
- ✓ обчислити імовірність $P(X \le x_0)$.

Варіант 1

$x_0 = 0.$

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Варіант 2

$x_0 = 4.$

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

Варіант 3

$x_0 = 2.$

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,15	0,15

Варіант 4

$x_0 = 0.$

x_i	–0,1	0	0,2	0,5	1
p_i	0,1	0,2	0,4	0,15	0,15

Варіант 5

$x_0 = -0{,}2.$

x_i	–0,2	–0,1	0,2	0,4	0,8
p_i	0,12	0,18	0,35	0,25	0,1

Варіант 6

$x_0 = 0{,}2.$

x_i	–0,3	–0,1	0	0,2	0,4
p_i	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1

Варіант 7

$x_0 = 0.$

x_i	0,2	0,4	1	1,2	1,5
p_i	0,12	0,18	0,34	0,26	0,1

Варіант 8

$x_0 = 0.$

x_i	-2	-1	0,2	0,4	0,8
p_i	0,12	0,18	0,34	0,26	0,1

Варіант 9

$x_0 = 1$

x_i	$-2{,}4$	-1	0	1	1,5
p_i	0,14	0,16	0,36	0,24	0,1

Варіант 10

$x_0 = 3.$

x_i	2	3	3,5	4,5	5
p_i	0,09	0,16	0,3	0,25	0,2

ТЕМА 8. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ, ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ, ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

8.1. Функція розподілу

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають **функцією розподілу ймовірностей:**

$$F(x) = P(X < x). \tag{8.1}$$

Розглянемо **властивості $F(x)$:**

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Із другої властивості $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{8.2}$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

Отже, для неперервної випадкової величини X виконуються такі рівності:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta). \tag{8.3}$$

3. Якщо $X \in (-\infty; \infty)$, виконуються два подані далі співвідношення.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

Оскільки подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від $-\infty$, то така подія є неможливою ($\varnothing$).

2) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

Із цих двох співвідношень випливає висновок: якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку $[a; b]$, то

$$F(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \le a;$$

$$F(x) = 1 \quad \text{для} \quad x > b. \tag{8.4}$$

Приклад 8.1. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{(x+3)^2}{49}, & -3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Побудувати графік функції $F(x)$ і обчислити $P(-1 < X < 2)$.

Розв'язання. Функцію $F(x)$ графічно зображено на рис. 8.1.

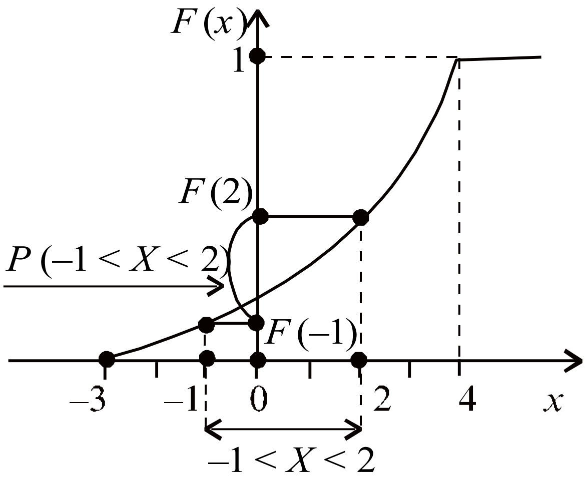


Рисунок 8.1

Використовуючи (8.2), обчислимо

$$P(-1<X<2)=F(2)-F(-1)=\left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=2}-\left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=-1}=$$

$$=\frac{25}{49}-\frac{4}{49}=\frac{21}{49}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 8.2. Функція розподілу ймовірностей має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ ax+b, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Знайти значення сталих a і b, побудувати графік $F(x)$. Обчислити $P(1 < X < 4)$.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$ (8.4) маємо:

$$\begin{cases} -2a+b=0 \\ 5a+b=1 \end{cases} \rightarrow a=\frac{1}{7}, \quad b=\frac{2}{7}.$$

Коли $a=\frac{1}{7}, b=\frac{2}{7},$ функція розподілу ймовірностей набуває вигляду

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{x+2}{7}, & -2 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 8.2.

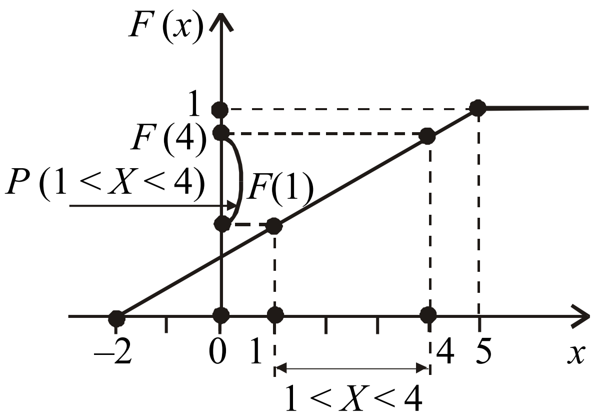


Рисунок 8.2

Обчислюємо ймовірність події $1 < X < 4$:

$$P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}.$$

8.2. Щільність розподілу

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{8.5}$$

звідки $dF(x) = f(x)dx.$

Для операцій диференціювання і інтегрування доцільно застосовувати формули з додатку 3.

Властивості щільності розподілу:

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{8.6}$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку $[a; b]$, то умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1. \tag{8.7}$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{8.8}$$

Залежність (8.8) можна подати так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dF(x) = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha).$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{8.9}$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу $[a; b]$, то

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx. \tag{8.10}$$

Приклад 8.3. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0 < X < 2)$, скориставшись (8.2) і (8.8).

Розв'язання

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{3}{64}(x+1)^2, & -1 < x \le 3; \\ 0, & x < 3. \end{cases}$$

Графіки функцій $F(x)$, $f(x)$ зображено на рис. 8.3 і 8.4 відповідно.

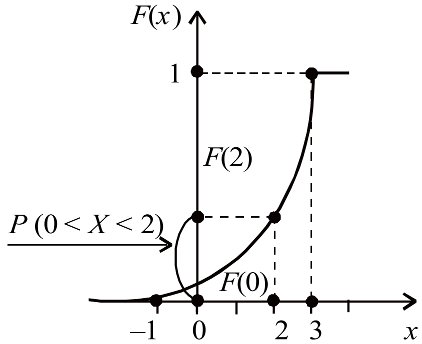


Рисунок 8.3

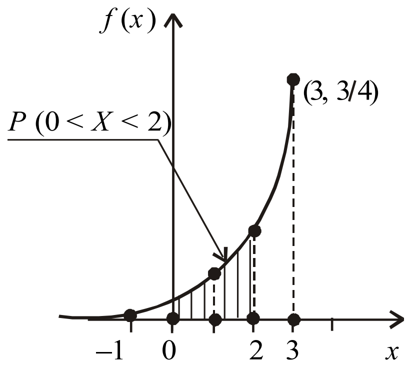


Рисунок 8.4

Імовірність події $0 < X < 2$ обчислимо за (8.2):

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32},$$

далі згідно із (8.8) маємо

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{64}\,(x+1)^2\,dx = \frac{3}{64}\int_0^2 (x+1)^2 dx = \frac{3}{64}\,\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}.$$

Приклад 8.4. За заданою щільністю ймовірностей маємо:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ a\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Знайти значення сталої a та функцію $F(x)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

Розв'язання. Значення сталої a визначаємо з умови нормування (8.7):

$$\int_{-2}^{7} f(x)dx = 1 \to \int_{-2}^{7} a\sqrt{x+2}\,dx = 1 \to a\int_{-2}^{7} \sqrt{x+2}\,dx = 1 \to a = \frac{1}{\int_{-2}^{7} \sqrt{x+2}\,dx}.$$

Тут $\int_{-2}^{7} \sqrt{x+2}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{7} = \frac{2}{3}(\sqrt{9^3} - \sqrt{0}) = \frac{2}{3}27 = 18.$

Отже,

$$a = \frac{1}{18}.$$

При знайденому значенні a щільність імовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей визначається так:

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(x)dx = \int_{-2}^{x}\frac{1}{18}\sqrt{x+2}\,\,dx = \frac{1}{18}\int_{-2}^{x}\sqrt{x+2}\,\,dx = \frac{1}{18}\left.\frac{(x+2)^3}{\frac{3}{2}}\right|_{-2}^{x} =$$

$$= \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{x} = \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 8.5 і 8.6.

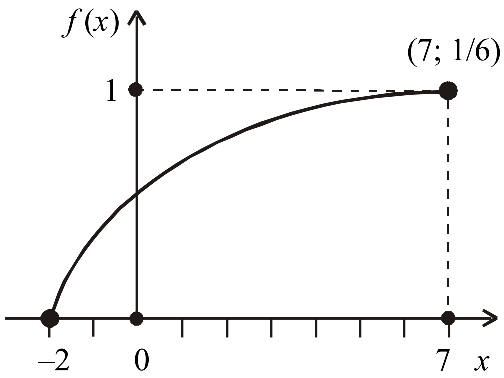


Рисунок 8.5

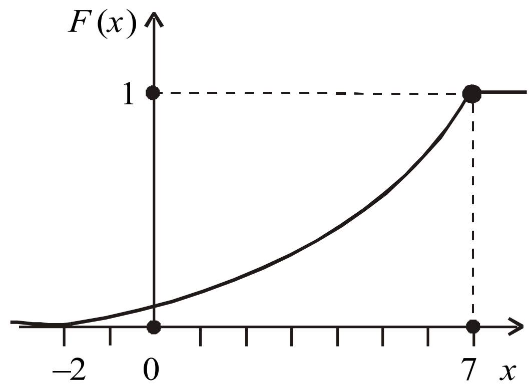


Рисунок 8.6

8.3. Числові характеристики

1) Математичне сподівання

Математичним сподіванням випадкової величини *X*, визначеною на неперервному просторі **Ω**, називається величина

$$M(X) = \int\limits_{\Omega} x\, f(x)dx. \qquad (8.11)$$

Якщо **Ω** = (–∞; ∞), то

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx. \qquad (8.12)$$

Якщо **Ω** = [*a*; *b*], то

$$M(X) = \int\limits_{a}^{в} x\, f(x)dx. \qquad (8.13)$$

Приклад 8.5. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}, & -1 < x \le 7; \\ 0, & x > 7 \end{cases}$$

обчислити *M*(*X*).

Розв'язання. Згідно з (8.13) маємо:

$$M(X) = \int\limits_{-1}^{7} x\, f(x)dx = \int\limits_{-1}^{7} x \frac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}\ dx = \frac{1}{12}\int\limits_{-1}^{7} x\sqrt[3]{x+1}\ dx =$$

$$=\begin{vmatrix} x+1=z^3 & \\ x=z^3-1 & \to \ -1\le x\le 7 \\ dx=3z^2dz & \quad 0\le z\le 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{12}\int_0^2 (z^3-1)\ z\ 3z^2dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 (z^6-z^3)dz=\frac{1}{4}(\int_0^2 z^6dz-\int_0^2 z^3dz)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{z^7}{7}\bigg|_0^2-\frac{z^4}{4}\bigg|_0^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{128}{7}-4\right)=\frac{1}{4}\ \frac{128-28}{7}=\frac{100}{28}=\frac{25}{7};$$

$$M(X)=\frac{25}{7}.$$

2) Мода та медіана випадкової величини

Модою дискретної випадкової величини *X* називають її найбільш імовірне значення.

Модою неперервної випадкової величини *X* називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

$$f\,(\text{Mo}) = \max.$$

Модою неперервної випадкової величини *X* називають те її можливе значення, якому відповідає локальний максимум щільності розподілу.

$$f\,'(x)=0.$$

Медіаною (Ме) неперервної випадкової величини *X* називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій:

$$P(-\infty<X<\text{Me})=P(\text{Me}<X<\infty)\to F(\text{Me})-F(-\infty)=F(\infty)-F(\text{Me})\to$$

$$\to F(\text{Me})=1-F(\text{Me})\to 2F(\text{Me})=1\to$$

$$\to F\,(\text{Me})=0{,}5. \qquad (8.14)$$

Для **неперервної випадкової величини** медіана визначається з умови:

$$\int_{-\infty}^{\text{Me}} f\,(x)dx=\frac{1}{2}.$$

Приклад 8.6. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ a\ (x+2)(x-4), & -2 < x \le 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$, Мо.

Розв'язання

За умовою нормування маємо:

$$a = \frac{1}{\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx} \quad \to \int_{-2}^{4} x^2 dx - 2\int_{-2}^{4} xdx - 8\int_{-2}^{4} dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{4} - x^2\Big|_{-2}^{4} - 8x\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= \frac{64+8}{3} - (16-4) - 8(4+2) = 24 - 12 - 48 = -36 \to a = -\frac{1}{36}.$$

Щільність імовірностей зі знайденим a матиме вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{(4-x)(x+2)}{36}, & -2 < x < 4; \\ 0, & x \ge 4. \end{cases}$$

Графік $f(x)$ зображено на рис. 8.7.

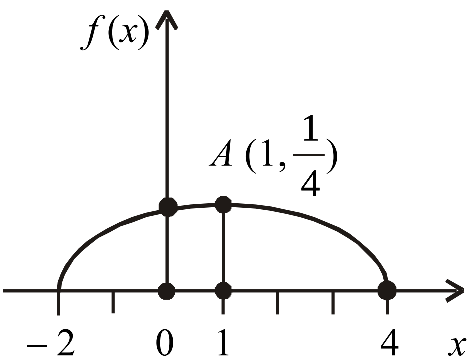


Рисунок 8.7

Згідно з рис. 8.7 маємо $f(1) = \max$. Отже, Мо = 1.

Визначаємо Ме:

$$F(x)=\int_{-2}^{x} f(x)dx=\frac{1}{36}\int_{-2}^{x}(4-x)(x+2)dx=$$

$$=\frac{1}{36}\int_{-2}^{x}(8+2x-x^2)dx=\frac{1}{36}\left(\int_{-2}^{x}8dx+\int_{-2}^{x}2xdx-\int_{-2}^{x}x^2dx\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\left(8x\Big|_{-2}^{x}+x^2\Big|_{-2}^{x}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{x}\right)=\frac{1}{36}\left(8x+16+x^2-4-\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\left(\frac{24x+36+3x^2-x^3-8}{3}\right)=\frac{28+24x+3x^2-x^3}{108}.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{28+24x+3x^2-x^3}{108}, & -2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Для визначення Me застосовуємо рівняння (8.14):

$$F(\mathrm{Me})=\frac{1}{2}\quad\to\quad\frac{28+24\mathrm{Me}+3\mathrm{Me}^2-\mathrm{Me}^3}{108}=\frac{1}{2}\quad\to$$

$$\to \mathrm{Me}^3-3\mathrm{Me}^2-24\mathrm{Me}+26=0\to \mathrm{Me}=1.$$

Me можна знайти, скориставшись щільністю ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{Me}} f(x)dx=\int_{\mathrm{Me}}^{\infty} f(x)dx, \qquad (8.15)$$

або при $X\in[a;\,b]$:

$$\int_{a}^{\mathrm{Me}} f(x)dx=\int_{\mathrm{Me}}^{b} f(x)dx. \qquad (8.16)$$

Отже, Me – це можливе значення випадкової величини X, причому таке, що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині X = Me, поділяє площу фігури, яка обмежена функцією $f(x)$, на дві рівні частини.

3) Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X)=M(X-M(X))^2. \qquad (8.17)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \tag{8.18}$$

Якщо $X \in [a;\ b]$,

то
$$D(X) = \int_{a}^{ъ} (x - M(X))^2 f(x)dx. \tag{8.19}$$

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \tag{8.20}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X). \tag{8.21}$$

Якщо $X \in [a;\ b]$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - M^2(X).$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{8.22}$$

Приклад 8.7. Задано щільність імовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Обчислити $D(X)$; $\sigma(X)$. Знайти Mo, Me.

Розв'язання

$$M(X) = \int_0^{\pi} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, \quad du = dx \\ \sin dx = dv \rightarrow \\ \rightarrow v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos x dx = \frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\sin x\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{-\pi\cos\pi + 0\cos 0}{2} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{2};\ M(X) = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X^2) = \int_0^{\pi} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2, \quad du = 2xdx \\ \sin xdx = dv \to \\ \to v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos xdx \right) = \begin{vmatrix} u = x, \quad du = dx \\ \cos dx = dv \\ v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin xdx \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi} \right)\right] = \frac{1}{2}(\pi^2 - 2) = \frac{\pi^2 - 2}{2};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{\pi^2 - 2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi^2 - 4 - \pi^2}{4} = \frac{\pi^2 - 4}{4};$$

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 4}{4};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{2}.$$

Графік $f(x)$ зображено на рис. 8.8.

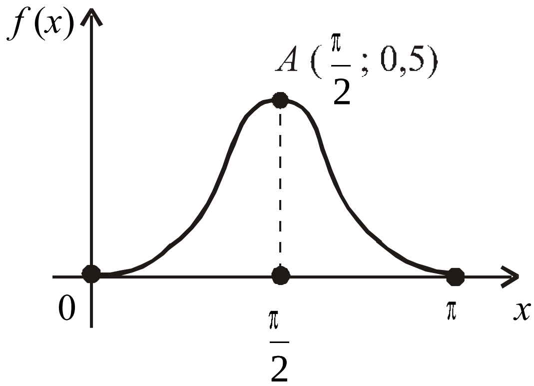


Рисунок 8.8

Оскільки $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 0{,}5$ є максимальним значенням, то $\text{Mo} = \frac{\pi}{2}$.

Знаходимо $F(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{2} \sin dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^x = \frac{1-\cos x}{2}$.

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0 < x \ge \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

$$F(\mathrm{Me}) = \frac{1-\cos \mathrm{Me}}{2} = \frac{1}{2} \quad \to \quad \cos \mathrm{Me} = 0 \to \mathrm{Me} = \frac{\pi}{2}.$$

Завдання 8

Щільність імовірностей неперервної випадкової величини $f(x)$ задана з точністю до множника. Необхідно:

- ✓ знайти нормувальний множник *k*, побудувати графік щільності ймовірностей;
- ✓ записати вираз для функції розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
- ✓ знайти математичне сподівання m_x і дисперсію σ_x^2;
- ✓ обчислити ймовірність $P(x_1 \le X \le x_2)$.

Варіант 1

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ kx, 0 < x \le 1, \\ 0, 1 < x \end{cases}$$

$x_1 = 0{,}5;\ x_2 = 1{,}5.$

Варіант 2

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ kx, 0 < x \le 2, \\ 0, 2 < x \end{cases}$$

$x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 2{,}5.$

Варіант 6

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 2 \\ k, 2 < x \le 4, \\ 0, 4 < x \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ x_2 = 5{,}5.$

Варіант 7

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ kx, 0 < x \le 1, \\ 0, 1 < x \end{cases}$$

$x_1 = 0{,}5;\ x_2 = 2{,}5.$

Варіант 3

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ k\left(x-\dfrac{1}{2}\right), 1<x\le 2,\\ 0,\ 2<x\end{cases}$$

$x_1=1{,}6;\ x_2=3{,}5.$

Варіант 4

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 2\\ k(x-1),\ 0<x\le 1,\\ 0,\ 4<x\end{cases}$$

$x_1=3{,}5;\ x_2=6{,}5.$

Варіант 5

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ kx^2,\ 0<x\le 1,\\ 0,1<x\end{cases}$$

$x_1=0{,}5;\ x_2=2{,}5.$

Варіант 8

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ kx,\ 0<x\le 2,\\ 0,\ 2<x\end{cases}$$

$x_1=0{,}5;\ x_2=2{,}5.$

Варіант 9

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 2\\ k(x-1),\ 2<x\le 4,\\ 0,\ 4<x\end{cases}$$

$x_1=3{,}5;\ x_2=6{,}5.$

Варіант 10

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ kx,\ 0<x\le 1,\\ 0,1<x\end{cases}$$

$x_1=0{,}5;\ x_2=1{,}5.$

ТЕМА 9. ВИВЕДЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ПОЧАТКОВИМИ ТА ЦЕНТРАЛЬНИМИ МОМЕНТАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ДІЙ І ОПЕРАТОРОМ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ. ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ АСИМЕТРІЇ ТА ЕКСЦЕСУ

9.1. Початкові та центральні моменти

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k) \quad (k = 1, 2, 3, ...). \tag{9.1}$$

Коли $k = 1$, $\nu_1 = M(X)$; коли $k = 2$, $\nu_2 = M(X^2)$ і т. д.

Для дискретної випадкової величини X

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i; \tag{9.2}$$

для неперервної

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx. \tag{9.3}$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$\nu_k = \int_{a}^{b} x^k f(x)dx. \tag{9.4}$$

Центральним моментом k-го порядку називається математичне сподівання від $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k \quad (k = 1, 2, 3, ...). \tag{9.5}$$

Коли $k = 1$, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$;

коли $k = 2$, $\mu_2 = M(X - M(X)^2 = D(X)$;

коли $k = 3$, $\mu_3 = M(X - M(X))^3$;

коли $k = 4$, $\mu_4 = M(X - M(X))^4$.

Для дискретної випадкової величини

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i; \tag{9.6}$$

для неперервної

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)dx. \tag{9.7}$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$\mu_k = \int_{a}^{b} (x - M(X))^k f(x)dx. \tag{9.8}$$

Центральний момент k-го порядку можна виразити через початкові моменти:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3;\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4. \tag{9.9}$$

9.2. Асиметрія і ексцес

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\mu_3 = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно $M(X)$. Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину − *коефіцієнт асиметрії*:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{9.10}$$

Центральний момент четвертого порядку використовується для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність або гостровершинність щільності ймовірності $f(x)$. *Ексцес* обчислюється за формулою

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{9.11}$$

Зауважимо, що число 3 віднімається, тому що для центрального закону розподілу, так званого нормального закону, виконується рівність:

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3. \text{ Отже, } Es = 0.$$

Для наочності при різних значеннях As, Es графіки $f(x)$ зображені на рис. 9.1 і 9.2 відповідно.

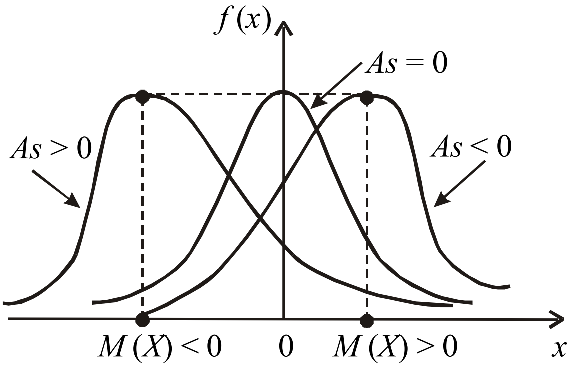


Рисунок 9.1

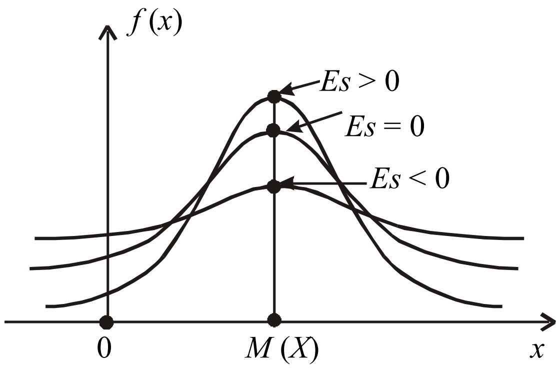


Рисунок 9.2

Приклад 9.1. За заданим законом розподілу ймовірностей

x_i	–8	–4	–1	1	4	8
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

Обчислити *As*, *Es*.

***Розв'язання*.** Скориставшись (9.6), (9.10) і (9.11), дістанемо:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -8\cdot 0{,}1-4\cdot 0{,}2-1\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}1=$$
$$=-0{,}8-0{,}8-0{,}2+0{,}2+0{,}8+0{,}8=0;$$

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 64\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2+64\cdot 0{,}1=$$
$$=6{,}4+3{,}2+0{,}2+0{,}2+3{,}2+6{,}4=19{,}6;$$

$$\mu_3=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^3=\sum_{i=1}^{6} x_i^3 p_i=-512\cdot 0{,}1-64\cdot 0{,}2-1\cdot 0{,}2+$$
$$+1{,}0\cdot 2+64\cdot 0{,}2+512\cdot 0{,}1=-512-12{,}8-0{,}2+0{,}2+12{,}8+51{,}2=0.$$

Оскільки $\mu_3 = 0$, то й $As = 0$;

$$\mu_4=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^4 p_i=\sum_{i=1}^{6} x_i^4\, p_i=$$
$$=4096\cdot 0{,}1+256\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+256\cdot 0{,}2+4096\cdot 0{,}1=$$
$$=409{,}6+51{,}2+0{,}2+0{,}2+51{,}2+409{,}6=922;$$

$$Es=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{922}{384{,}6}-3=2{,}397-3=-0{,}603.$$

Приклад 9.2. Динамікою курсу долара на біржових торгах протягом 2 місяців 2000 року є випадкова величина X, що характеризується щільністю розподілу: $f(x)=\begin{cases}0{,}5x, & x\in(0{,}2)\\ 0, & x\notin(0{,}2)\end{cases}$. Знайти моду, медіану, асиметрію і ексцес X.

Розв'язання. Моди цього розподілу немає, оскільки $f'(x)=0{,}5\neq 0$ для всіх $x\in(0{,}2)$ і екстремум не існує. Медіана визначається з умови $\frac{1}{2}\int\limits_0^{\text{Me}} x dx=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\text{Me}^2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow \text{Me}=\sqrt{2}.$

Математичне сподівання $m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\cdot xdx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$

За формулою (9.3) знайдемо початкові моменти:

$$\nu_1=m_x=\frac{4}{3};\ \ \nu_2=\int\limits_0^2 x^2\frac{x}{2}dx=2;\ \ \nu_3=\int\limits_0^2 x^3\frac{x}{2}dx=\frac{16}{5};\ \ \nu_4=\int\limits_0^2 x^4\frac{x}{2}dx=\frac{16}{3}.$$

Для визначення центральних моментів застосуємо формули (9.9), що виражають центральні моменти через початкові:

$$\mu_1=0,\ \mu_2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9},\ \mu_3=\frac{16}{5}-3\frac{4}{3}\cdot 2+2\frac{64}{27}=-\frac{8}{135},$$

$$\mu_4=\frac{16}{3}-4\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{5}+6\frac{16}{9}2-3\frac{256}{81}=\frac{16}{135}.$$

Тоді: $As=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3}=-0{,}566,\ Es=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3=2{,}4-3=-0{,}6.$

Приклад 9.3. Задано щільність імовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{3}{4}x(2-x), & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Обчислити As, Es.

Розв'язання

$$M(X)=\int\limits_0^2 x\,f(x)dx=\int\limits_0^2 x\frac{3}{4}x(2-x)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2(2x^2-x^3)\,dx=\frac{3}{4}(2\int_0^2 x^2dx-\int_0^2 x^3dx)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2-\frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}-4\right)=\frac{3}{4}\,\frac{16-12}{3}=1.$$

$$\mu_3=\int_0^2(x-M(X))^3 f(x)\,dx=\int_0^2(x-1)^3\,\frac{3}{4}(2x-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2(x-1)^3(2x-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\int_0^2(x^3-3x^2+3x-1\right)(2x-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\int_0^2(5x^4-9x^3+7x^2-2x-x^5)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\left(5\int_0^2 x^4dx-9\int_0^2 x^3dx+7\int_0^2 x^2dx-2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^5dx\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(5\frac{x^5}{5}\Big|_0^2-\frac{9}{4}x^4\Big|_0^2+\frac{7}{3}x^3\Big|_0^2-2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2-\frac{x^6}{6}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(x^5\Big|_0^2-\frac{9}{4}x^4\Big|_0^2+\frac{7}{3}x^3\Big|_0^2-x^2\Big|_0^2-\frac{x^6}{6}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(32-36+\frac{56}{3}-4-\frac{32}{3}\right)=\frac{3}{4}(-8+8)=0.$$

Оскільки $\mu_3 = 0$, то і $As = 0$. Отже, можливі значення випадкової величини X симетрично розподілені відносно $M(X) = 1$. Для обчислення Es необхідно знайти μ_4 і σ.

$$\mu_4=\int_0^2(x-M(X))^4 f(x)dx=\int_0^2(x-1)^4\,\frac{3}{4}(2x-x^2)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2\ (x^4-4x^3+6x^2-4x+1)(2x-x^2)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2(6x^5-14x^4+16x^3-9x^2+2x-x^6)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\left(6\int_0^2 x^5dx-14\int_0^2 x^4dx+16\int_0^2 x^3dx+16\int_0^2 x^3dx-9\int_0^2 x^2dx+2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^6dx\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(x^6\Big|_0^2-\frac{14}{5}x^5\Big|_0^2+4x^4\Big|_0^2-3x^3\Big|_0^2+x^2\Big|_0^2-\frac{x^7}{7}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(64-\frac{448}{5}+64-24+4-\frac{128}{7}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(108-\frac{448}{5}-\frac{128}{7}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{3780-3776}{35}\right)=\frac{3}{35};$$

$$M(X^2)=\int_0^2 x^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2\frac{3}{4}(2x-x^2)dx=\frac{3}{4}\int_0^2(2x^3-x^4)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\left(2\int_0^2 x^3\,dx-\int_0^2 x^4\,dx\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x^4\Big|_0^2-\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right)=\frac{3}{4}\left(8-\frac{32}{5}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{40-32}{5}\right)=\frac{6}{5};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$Es=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{\frac{6}{5}}{\frac{1}{25}}-3=30-3=27.$$

Завдання 9

Для щільностей імовірностей неперервних випадкових величин із завдання 8 з урахуванням знайденого нормувального множника *k* визначити медіану, асиметрію та ексцес.

ТЕМА 10. ТИПИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Для дослідження законів розподілу цілочислових випадкових величин використовують **імовірнісну твірну функцію**. Імовірнісною твірною функцією називають збіжний степеневий ряд вигляду:

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\; p_k = p_0 + xp_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + \ldots + x_m p_m + \ldots \,. \quad (10.1)$$

$$M(X)=A'(1)\,. \quad (10.2)$$

$$D(X)=A''(1)+A'(1)-(A'(1))^2\,. \quad (10.3)$$

10.1. Біноміальний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_k = P(X=k)=C_n^k\, p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, 3, ..., n. \quad (10.4)$$

У табличній формі цей закон набуває такого вигляду:

$X = x_k = k$	0	1	2	3	...	n
$P_k = P(X=k)=C_n^k\, p^k q^{n-k}$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$	...	p^n

При перевірці виконання умови нормування використовується формула біному Ньютона, тому закон розподілу називають *біноміальним*:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, p^k q^{n-k} = (q+p)^n = 1.$$

Побудуємо ймовірнісну твірну функцію для цього закону

$$A(X)=\sum_{k=0}^{n} x^k\, p_k = \sum_{k=0}^{n} x^k C_n^k\, p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(px)^k q^{n-k} = (q+px)^n\,.$$

Отже, імовірнісна твірна функція для біноміального закону

$$A(X)=(q+px)^n\,. \quad (10.5)$$

Знайдемо основні числові характеристики для цього закону:

1. $M(X) = A'(1) = [(q + px)^n]'_{X=1} = [np(q + px)^{n-1}]'_{X=1} = np(q + p) = np;$

$$(p + q = 1),$$

$$M(X) = np. \qquad (10.6)$$

2. $A''(1) = [np(q + px)^{n-1}]'_{X=1} = [n(n-1)(q + px)^{n-2}p^2]'_{X=1} =$

$= n(n-1)(q + p)p^2 = n(n-1)p^2; A''(1) = n(n-1)p^2;$

$$D(X) = A'' + A'(1) - (A'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 +$$

$$+ np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1 - p) = npq;$$

$$D(X) = npq; \qquad (10.7)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \qquad (10.8)$$

Приклад 10.1. У партії однотипних деталей стандартні становлять 95 %. Навмання з партії беруть 400 деталей. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X − числа появи стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу ймовірностей, яка може набувати значення

$$X = k = 0, 1, 2, ..., 400.$$

Імовірності можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі: $P_k = P(X = k) = C_{400}^k p^k q^{400-k}$, де p = 0,95 − імовірність появи стандартної деталі, $q = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ − імовірність появи нестандартної деталі.

Згідно з (10.6), (10.7), (10.8) маємо:

$$M(X) = np = 400 \cdot 0{,}95 = 380;$$

$$D(X) = npq = 400 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 19;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{19} \approx 4{,}36.$$

Приклад 10.2. У кожному із 100 контейнерів міститься по 80 виробів першого ґатунку, а решта 20 − браковані. Із кожного контейнера навмання беруть по одному виробу. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X − числа появи виробів першого ґатунку серед 100 навмання взятих.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу. Із умови задачі маємо:

$$n = 100,\ p = 0{,}8,\ q = 0{,}2,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 100.$$

За формулами (10.6), (10.7), (10.8) дістаємо:

$$M(X) = np = 100 \cdot 0{,}8 = 80;$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{16} = 4.$$

10.2. Пуассонівський закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

$$P_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a},\ k = 0, 1, 2, 3, ..., n, \qquad (10.9)$$

Тобто обчислюється за формулою Пуассона, де $a = np$. У табличній формі цей закон розподілу буде такий:

$X = k$	0	1	2	3	…	n
$P = P(X = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{1}{2!}a^2e^{-a}$	$\frac{1}{3!}a^3e^{-a}$	…	$\frac{1}{n!}a^ne^{-a}$

$$\sum P_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}e^{a} = e^0 = 1.$$

Умова нормування виконується.

Побудуємо ймовірну твірну функцію для цього закону:

$$A(X) = \sum_{k=0}^{n}x^k p_k = \sum_{k=0}^{n}x^k\frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{(ax)^k}{k} = e^{-a}e^{ax} = e^{a(x-1)}.$$

Отже,

$$A(X) = e^{a(x-1)}. \qquad (10.10)$$

Скориставшись (10.2), (10.3), дістанемо вирази для $M(X)$, $D(X)$:

1. $M(X) = A'(1) = (e^{a(x-1)})'_{X=1} = (ae^{a(x-1)})_{X=1} = a$;

$$M(X) = a = np. \qquad (10.11)$$

2. $A''(1) = (ae^{a(x-1)})'_{X=1} = (a^2 e^{a(x-1)})_{X=1} = a^2$;

$D(X) = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2 = a^2 + a - a^2 = a$;

$$P(X) = a; \tag{10.12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{a}\,. \tag{10.13}$$

Отже, для Пуассонівського закону розподілу ймовірностей $M(X) = D(X) = a$.

Приклад 10.3. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що мікроелемент вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,004. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X − числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисловою, що має пуассонівський закон розподілу − імовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона, яка є асимптотичною щодо формули Бернуллі для великих значень n і малих значень p, так званих малоймовірних випадкових подій.

За умовою задачі маємо:

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4;$$

$$D(X) = M(X) = np = 4;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{4} = 2.$$

Приклад 10.4. У деякому населеному пункті маємо 0,1 % дальтоніків. Навмання вибирають 5000 мешканців цього населеного пункту. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X − числа дальтоніків, яких буде виявлено серед 5000 навмання вибраних мешканців.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу. Із умови задачі: $n = 5000$, $p = 0{,}0001$. Згідно з (10.11), (10.12), (10.13) дістаємо:

$$M(X) = np = 5000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}5;$$

$$D(X) = M(X) = np = 0{,}5;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71.$$

10.3. Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}. \qquad (10.14)$$

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей відбувається за таких обставин: нехай задано деяку множину однотипних елементів, число яких дорівнює n; з них n_1 елементів мають, наприклад, ознаку A (колір, стандартність), а решта $n-n_1$ елементів − ознаку B; коли із цієї множини навмання беруть m елементів, число елементів k з ознакою A (або B), що трапляється серед m навмання взятих елементів, буде цілочисловою випадковою величиною з гіпергеометричним законом розподілу.

У табличній формі запису цей закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	...	m
$P_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}$	$\frac{C_{n-n_1}^{m}}{C_n^m}$	$\frac{C_{n_1}^{1} C_{n-n_1}^{m-1}}{C_n^m}$	$\frac{C_{n_2}^{2} C_{n-n_2}^{m-2}}{C_n^m}$	...	$\frac{C_{n-n_1}^{m}}{C_n^m}$

При цьому $m \le n$.

Умова нормування $\sum_{k=0}^{m} P_k = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k} = 1.$

Залежно від умови задачі найменше значення може становити $m = 0$, 1, 2, 3, ..., $m - 1$.

Числові характеристики цього закону обчислюються за наведеними далі формулами:

1. $M(X) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^{m} k C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k}$. (10.15)

2. $D(X) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^{m} k^2 C_{n_1}^{k} C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X)$. (10.16)

3. $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^{m} k^2 C_{n_1}^{m} C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X)}$. (10.17)

Приклад 10.5. В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть m деталей. Побудувати закони розподілу цілочислової випадкової величини X − числа появи стандартних деталей серед m навмання взятих і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо: 1) $m = 3$; 2) $m = 4$; 3) $m = 5$; 4) $m = 7$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (10.14), побудуємо гіпергеометричні закони розподілу:

1. $m = 3$; $n_1 = 7$; $n - n_1 = 3$; $k = 0, 1, 2, 3$.

У табличній формі гіпергеометричний закон подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	3
$P_k = P(X = k) = \dfrac{C_7^k C_3^{3-k}}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3}$

або

k	0	1	2	3
$P_k = \dfrac{C_7^k C_3^k}{120}$	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{21}{120}$	$\dfrac{63}{120}$	$\dfrac{35}{120}$

$$\sum P_k = \frac{1+21+63+35}{120} = \frac{120}{120} = 1.$$

1) $M(X) = \sum k p_k = 0\,\dfrac{1}{120} + 1\,\dfrac{21}{120} + 2\,\dfrac{63}{120} + 3\,\dfrac{35}{120} = \dfrac{21+126+105}{120} = \dfrac{252}{120} = 2{,}1;$

2) $M(X^2) = \sum k^2 p_k = 0\,\dfrac{1}{120} + 1\,\dfrac{21}{120} + 4\,\dfrac{63}{120} + 9\,\dfrac{35}{120} = \dfrac{21+252+315}{120} =$

$= \dfrac{588}{120} = 4{,}9;\ D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 4{,}9 - (2{,}1)^2 = 4{,}9 - 4{,}41 = 0{,}49;$

3) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$

2. $m = 4$; $n_1 = 7$; $n - n_1 = 3$; $k = 1, 2, 3, 4$.

У табличній формі закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	1	2	3	4
$P_k = P(X = k) = \dfrac{C_7^k c_3^{4-k}}{c_{10}^4}$	$\dfrac{C_7^1 C_3^3}{C_{10}^4}$	$\dfrac{C_7^2 C_3^2}{C_{10}^4}$	$\dfrac{C_7^3 C_3^1}{C_{10}^4}$	$\dfrac{C_7^4 C_3^{10}}{C_{10}^4}$

або

k	1	2	3	4
$P_k = \dfrac{C_7^k C_3^{4-k}}{210}$	$\dfrac{7}{210}$	$\dfrac{63}{210}$	$\dfrac{105}{210}$	$\dfrac{35}{210}$

$$\sum P_k = \frac{7+63+105+35}{210} = \frac{210}{210} = 1.$$

1) $M(X) = \sum kp_k = 1\dfrac{7}{210} + 2\dfrac{63}{210} + 3\dfrac{105}{210} + 4\dfrac{35}{210} =$

$$= \frac{7+126+315+140}{210} = \frac{588}{210} = 2{,}8;$$

2) $M(X^2) = \sum k^2 p_k = 1\dfrac{7}{210} + 4\dfrac{63}{210} + 9\dfrac{105}{210} + 16\dfrac{35}{210} =$

$$= \frac{7+252+945+560}{210} = \frac{1764}{210} = 8{,}4;$$

3) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75.$

3. $m = 5$; $n_1 = 7$; $n = 3$; $k = 2, 3, 4, 5$.

У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	2	3	4	5
$P_k = P(X = k) = \dfrac{C_7^k C_3^{5-k}}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^2 C_3^3}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^3 C_3^2}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^4 C_3^1}{C_{10}^5}$	$\dfrac{C_7^5 C_3^0}{C_{10}^5}$

або

k	2	3	4	5
$P_k = \dfrac{C_7^k C_3^{5-k}}{252}$	$\dfrac{21}{252}$	$\dfrac{105}{252}$	$\dfrac{105}{252}$	$\dfrac{21}{252}$

1) $M(X) = \sum kp_k = 2\dfrac{21}{252} + 3\dfrac{105}{252} + 4\dfrac{105}{252} + 5\dfrac{21}{252} =$

$$= \frac{42+315+420+105}{252} = \frac{882}{252} = 3{,}5;$$

2) $M(X^2) = \sum k^2 p_k = 4\dfrac{21}{252} + 9\dfrac{105}{252} + 16\dfrac{105}{252} + 25\dfrac{21}{252} =$

$$= \frac{84+945+1680+525}{252} = \frac{3234}{2252} = 12{,}83;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 12{,}83 - (3{,}5)^2 = 12{,}83 - 12{,}25 = 0{,}58.$$

3) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}58} \approx 0{,}76$.

4. m = 7; n_1 = 7; $n - n_1$ = 3; k = 4, 5, 6, 7.

У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	4	5	6	7
$P_k = P(X = k) = \dfrac{C_7^k C_3^{7-k}}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^4 C_3^3}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^5 C_3^2}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^6 C_3^1}{C_{10}^7}$	$\dfrac{C_7^7 C_3^0}{C_{10}^7}$

або

k	4	5	6	7
$P_k = \dfrac{C_7^k C_3^{7-k}}{C_{10}^7}$	$\dfrac{35}{120}$	$\dfrac{63}{120}$	$\dfrac{21}{120}$	$\dfrac{1}{120}$

$$\sum P_k = \frac{21+105+105+21}{252} = \frac{252}{252} = 1.$$

1) $M(X) = \sum kp_k = 4\dfrac{35}{120} + 5\dfrac{63}{120} + 6\dfrac{21}{120} + 7\dfrac{1}{120} =$

$$= \frac{140+315+126+7}{120} = \frac{588}{120} = 4{,}5;$$

2) $M(X^2) = \sum k^2 p_k = 16\dfrac{35}{12} + 25\dfrac{63}{120} + 36\dfrac{21}{120} + 49\dfrac{1}{120} = \dfrac{2942}{120} \approx 24{,}52$;

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 24{,}52 - (4{,}5)^2 = 24{,}52 - 20{,}25 = 4{,}27;$$

3) $\sigma(X) = \sqrt{4{,}27} \approx 2{,}1$.

Завдання 10

Варіант 1. Три конкуруючі фірми працюють незалежна одна від одної. Імовірність збанкрутіти для кожної з них дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу випадкової величини X − числа збанкрутілих фірм. Знайти математичне сподівання і дисперсію X.

Варіант 2. У групі 20 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання відібрано 5 студентів. Знайти закон розподілу і побудувати функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X − числа відмінників серед відібраних студентів. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення X.

Варіант 3. На телефонну станцію протягом години надходить в середньому 30 викликів. Знайти ймовірність того, що протягом хвилини надходить не більше двох викликів.

Варіант 4. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X − числа появ «герба» при двох кидках монети. Побудувати функцію розподілу.

Варіант 5. У партії 20 % нестандартних деталей. З них навмання відібрано 5 деталей. Необхідно: а) записати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X − числа нестандартних деталей серед п'яти відібраних; б) побудувати багатокутник розподілу; в) знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

Варіант 6. Знайти середнє число X − бракованих виробів у партії виробів, якщо ймовірність того, що в цій партії міститься хоча б один бракований виріб, дорівнює 0,95. Передбачається, що число бракованих виробів розподілене за законом Пуассона.

Варіант 7. Три конкуруючі фірми працюють незалежно одна від одної. Імовірність збанкрутіти для кожної з них дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу випадкової величини X − числа збанкрутілих фірм. Знайти математичне сподівання і дисперсію X.

Варіант 8. У групі 25 студентів, серед яких 10 відмінників. За списком навмання відібрано 6 студентів. Знайти закон розподілу і побудувати функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X − числа відмінників серед відібраних студентів. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення X.

Варіант 9. У кожному із 100 контейнерів міститься по 65 виробів першого ґатунку, а решта 35 − браковані. Із кожного контейнера навмання беруть по одному виробу. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X − числа появи виробів першого ґатунку серед 100 навмання взятих.

Варіант 10. У ящику міститься 12 однотипних деталей, із них 8 стандартних, а решта є бракованими. Із ящика навмання беруть 5 деталей. Побудувати закони розподілу цілочислової випадкової величини X − числа появи стандартних деталей серед навмання взятих і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

ТЕМА 11. ТИПИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

11.1. Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина X підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі (a, b), якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in(a;b) \\ 1/(b-a), & x\notin a;b. \end{cases} \qquad (11.1)$$

Функція розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b. \\ 1, & x>b. \end{cases} \qquad (11.2)$$

Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та ймовірність попадання X у заданий інтервал значень (α, β) відповідно дорівнюють:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma_x=\frac{b-a}{2\sqrt{3}};\ P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \quad (11.3)$$

Приклад 11.1. Ціна поділки вимірювального приладу дорівнює 0,1. Покази округляють до найближчого цілого ділення. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка, яка перевищує 0,02.

Розв'язання. Помилку округлення можна розглядати як випадкову величину X, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими поділками. У даній задачі довжина інтервалу, в якому розміщені можливі значення X, дорівнює 0,1, звідси: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{0{,}1}=10, & x\in(0;0{,}1) \\ 0, & x\notin(0;0{,}1). \end{cases}$

Очевидно, що помилка перевищить 0,02, якщо $0{,}02 < X < 0{,}08$. Імовірність $P(0{,}02<X<0{,}08)=\int\limits_{0{,}02}^{0{,}08}10dx=0{,}6.$

11.2. Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим (експоненціальним) законом, якщо її щільність імовірності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{11.4}$$

Функція розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{11.5}$$

Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та ймовірність попадання X у заданий інтервал значень (α, β) відповідно дорівнюють:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2};\ \sigma_x = \frac{1}{\lambda};\ P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \tag{11.6}$$

Приклад 11.2. Випадкова величина T − час безвідмовної роботи телевізора − має показниковий розподіл. Визначити ймовірність того, що час безвідмовної роботи телевізора буде не менше 600 годин, якщо середній час роботи його 400 годин.

Розв'язання. За умовою задачі математичне сподівання випадкової величини T дорівнює 400 годин. Шукана ймовірність

$$P(T \geq 600) = 1 - P(T < 600) = 1 - F(600) = 1 - (1 - e^{-600/400}) = e^{-1,5} \approx 0,2231.$$

11.3. Нормальний розподіл

Неперервна випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{11.7}$$

де a – математичне сподівання; σ – середнє квадратичне відхилення X.

Функція розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{11.8}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ − функція Лапласа або інтеграл імовірностей.

Імовірність попадання X у заданий інтервал значень (α, β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (11.9)$$

Асиметрія, ексцес, мода і медіана нормального розподілу відповідно дорівнюють:

$$As = 0;\ Es = 0;\ \text{Mo} = a;\ \text{Me} = a, \quad (11.10)$$

де $a = M(X)$.

Приклад 11.3. Помилка вимірювання довжини платформи станції метро підпорядкована нормальному закону. Математичне сподівання цієї помилки дорівнює 5 см, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 10 см. Знайти ймовірність того, що вимірюване значення довжини платформи відхилятиметься від істинного не більше ніж на 20 см.

Розв'язання. Розв'язок задачі зводиться до визначення імовірності попадання випадкової величини X (помилка вимірювання) з математичним сподіванням a = 5 см і середнім квадратичним відхиленням σ = 10 см в інтервал значень (−20, 20). За формулою ймовірності попадання X у заданий інтервал:

$$P(-20 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-20-5}{10}\right) = \Phi(1{,}5) + \Phi(2{,}5) = 0{,}4332 + 0{,}4938 = 0{,}927.$$

Приклад 11.4. Довести, що параметр a нормальної щільності розподілу випадкової величини X є математичним сподіванням X.

Доведення. За визначенням $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$. Для нормального розподілу одержимо:

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| z = \frac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma z + a \Rightarrow dx = \sigma dz \right| =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = a,$$

оскільки $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0$, а інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$.

Завдання 11

Варіант 1. Знайти математичне сподівання, дисперсію, асиметрію та ексцес випадкової величини *X*, що підкоряється показниковому розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Варіант 2. Задано щільність імовірності випадкової величини $f(x)=\begin{cases}Cxe^{-2x^2}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. Знайти коефіцієнт *C*, медіану, моду і математичне сподівання цього розподілу.

Варіант 3. Випадкова величина *X* розподілена нормально з математичним сподіванням a = 10 і середнім квадратичним відхиленням σ = 5. Знайти моду, медіану, а також інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, у який з імовірністю 0,9973 потрапить величина *X* у результаті випробування.

Варіант 4. Задано щільність імовірності випадкової величини $f(x)=\begin{cases}ae^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. Знайти коефіцієнт a і ймовірність того, що $0\le X\le \ln 2$. Визначити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Варіант 5. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу $f(x)=\begin{cases}Ce^{-\frac{x^2}{8}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Знайти коефіцієнт *C*, медіану, моду і математичне сподівання цього розподілу.

Варіант 6. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу Релєя: $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. Знайти: а) щільність розподілу *f*(*x*) величини *X*; б) імовірність того, що $X\in[\alpha;\beta]$.

Варіант 7. Помилки в обчисленнях, допущені бухгалтером при складанні балансу, розподіляються у відсотках за нормальним законом з параметрами a = 1,5 і σ = 0,01. Написати функцію і щільність розподілу цих помилок та побудувати їх графіки. Знайти моду, медіану. В яких межах містяться помилки обчислень з імовірністю 0,95?

Варіант 8. Випадкова величина *X* рівномірно розподілена на відрізку [1, 3]. Знайти $F(x)$, $f(x)$ і побудувати їх графіки. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та ймовірність події $\{1 < X < 2\}$.

Варіант 9. Знайти математичне сподівання, дисперсію, асиметрію та ексцес випадкової величини *X*, що підкоряється показниковому розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 10. Задано щільність імовірності випадкової величини $f(x) = \begin{cases} Cxe^{-2x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Знайти коефіцієнт *C*, медіану, моду і математичне сподівання цього розподілу.

ТЕМА 12. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ СИСТЕМИ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ. УМОВНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ. ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ

12.1. Закони розподілу системи двох випадкових величин

Приклад 12.1. Передаються два повідомлення, кожне з яких може бути незалежно одне від одного або спотвореним, або не спотвореним. Імовірність події A {повідомлення спотворене} для першого повідомлення дорівнює 0,2, для другого − 0,3. Розглядається система двох випадкових величин (X, Y), що визначаються так:

$X = 0$, якщо перше повідомлення не спотворене, $P(X = 0) = 0,8$;

$X = 1$, якщо перше повідомлення спотворене, $P(X = 1) = 0,2$;

$Y = 0$, якщо друге повідомлення не спотворене, $P(Y = 0) = 0,7$;

$Y = 1$, якщо друге повідомлення спотворене, $P(Y = 1) = 0,3$.

Знайти закон сумісного розподілу системи (X, Y).

Розв'язання. Оскільки випадкові величини, що входять у систему, є дискретними, то закон розподілу має бути виражений у вигляді таблиці. Імовірності p_{ij} визначаються в такий спосіб:

$p_{11} = p(X = 0,\ Y = 0) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$; $p_{12} = p(X = 1,\ Y = 0) = 0,2 \cdot 0,7 =$
$= 0,14$;

$p_{21} = p(X = 0,\ Y = 1) = 0,8 \cdot 03 = 0,24$; $p_{22} = p(X = 1,\ Y =1) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.

Закон розподілу системи (X, Y) має вигляд:

$X = x_i$	$Y = y_j$	
	0	1
0	0,56	0,24
1	0,14	0,06

Приклад 12.2. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y):

$Y = y_i$	$X = x_j$			
	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	0,1*a*	2*a*	0,9*a*	
4,4	2*a*	0,2*a*	1,8*a*	
6,4	1,9*a*	0,8*a*	0,3*a*	
P_{xj}				

Знайти *a*. Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy}; r_{xy}; $P(2,4 \le Y < 6,4;\ 5,2 < X \le 15,2)$.

Розв'язання

Скориставшись умовою нормування, дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P_{ij} = 0,1a + 2a + 0,9a + 2a + 0,2a + 1,8a + 1,9a + 0,8a + 0,3a = 1 \Rightarrow a = 0,1.$$

Зі знайденим *a* закон системи набуває такого вигляду:

$Y = y_i$	$X = x_j$			
	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
P_{xj}	0,4	0,3	0,3	

Основні числові характеристики обчислюємо за формулами:

$$M(X) = \sum_{j=1}^{3} x_j p_{x_j} = 5,2 \cdot 0,4 + 10,2 \cdot 0,3 + 15,2 \cdot 0,3 = 2,08 + 3,06 + 4,56 = 9,7;$$

$$M(X^2) = \sum_{j=1}^{3} x_j^2 p_{x_j} = (5,2)^2\, 0,4 + (10,2)^2\, 0,3 + (15,2)^2\, 0,3 =$$

$$= 10,816 + 31,212 + 69,312 = 111,34;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 111,34 - 94,09 = 17,25;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 4,15;$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i p_{y_i} = 2,4 \cdot 0,3 + 4,4 \cdot 0,4 + 6,4 \cdot 0,3 = 0,72 + 1,76 + 1,92 = 4,4;$$

$$M(Y^2)=\sum_{i=1}^{3} y_i^2\, p_{y_i} = (2{,}4)^2\ 0{,}3 + (4{,}4)^2\ 0{,}4 + (6{,}4)^2\ 0{,}3 =$$

$$= 1{,}728 + 7{,}744 + 12{,}288 = 21{,}76;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 21{,}76 - (4{,}4)^2 = 21{,}76 - 19{,}36 = 2{,}4;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 1{,}55;$$

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} y_i x_j p_{ij} = 2{,}4\cdot 5{,}2\cdot 0{,}01 + 2{,}4\cdot 10{,}2\cdot 0{,}2 + 2{,}4\cdot 15{,}2\cdot 0{,}09 +$$

$$+ 4{,}4\cdot 5{,}2\cdot 0{,}2 + 4{,}4\cdot 10{,}2\cdot 0{,}02 + 4{,}4\cdot 15{,}2\cdot 0{,}18 + 6{,}4\cdot 5{,}2\cdot 0{,}19 +$$

$$+ 6{,}4\cdot 10{,}2\cdot 0{,}08 + 6{,}4\cdot 15{,}2\cdot 0{,}03 = 0{,}1248 + 4{,}896 + 3{,}2832 + 4{,}576 +$$

$$+ 0{,}8976 + 12{,}0384 + 6{,}3232 + 5{,}2224 + 2{,}9184 = 40{,}28;$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)\,M(Y) = 40{,}28 - 9{,}7\cdot 4{,}4 = 40{,}28 - 42{,}68 = 1{,}4.$$

Оскільки $K_{xy} > 0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв'язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-2{,}4}{4{,}15\cdot 1{,}55} \approx 0{,}37.$$

Остаточно маємо:

$P(2{,}4 \le Y < 6{,}4;\ \ 5{,}2 < X \le 15{,}2) = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}18 = 0{,}31.$

Приклад 12.3. Планується діяльність 3-х підприємств на черговий рік. Система (X, Y), де $X = x_i$ − номер підприємства, $Y = y_j$ − розміри вкладень (у тис у.о.), $i = 1, 3$, $j = 1, 2$, задана таблицею:

$X = x_i$	$Y = y_j$	
	3	4
1	0,1	0,2
2	0,1	0,1
3	0,3	0,2

Побудувати закони розподілу складових системи, знайти всі числові характеристики системи.

Розв'язання. Закони розподілу складових системи будуємо у вигляді таблиць, підсумовуючи ймовірність відповідно по рядках (для складової X) або по стовпцях (для складової Y).

$X = x_i$	1	2	3
p_i	0,1 + 0,2 = 0,3	0,1 + 0,1 = 0,2	0,3 + 0,2 = 0,5

Закон розподілу складової X означає, що незалежно від обсягу вкладень перше підприємство матиме вкладення з імовірністю 0,3, друге − з імовірністю 0,2 і третє − з імовірністю 0,5.

Складовій Y відповідає закон розподілу, і це означає, що незалежно від номера підприємства обсяг вкладень може дорівнювати 3 тис у.о. з імовірністю 0,5 або 4 тис у.о з імовірністю 0,5.

$Y = y_j$	3	4
p_j	0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5	0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,5

Для визначення числових характеристик складових скористаємося знайденими законами розподілу X і Y і формулами для визначення числових характеристик дискретних систем:

$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}2;$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}5 - 2{,}2^2 = 0{,}76;$

$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 0{,}87.$

$M(Y) = 3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$ − середній обсяг вкладень;

$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 3^2 \cdot 0{,}5 + 4^2 \cdot 0{,}5 - 3{,}5^2 = 0{,}25;$

$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 0{,}5$ − відхилення від середнього обсягу вкладень.

Зв'язок між номером підприємства і обсягом вкладень:

$K_{xy} = (1 - 2{,}2) \cdot (3 - 3{,}5) \cdot 0{,}1 + (1 - 2{,}2) \cdot (4 - 3{,}5) \cdot 0{,}2 +$
$+ (3 - 2{,}2) \cdot (3 - 3{,}5) \cdot 0{,}3 + (3 - 2{,}2) \cdot (4 - 3{,}5) \cdot 0{,}2 = -0{,}1;$

$$r_{xy} = \frac{-0{,}1}{0{,}87 \cdot 0{,}5} = -0{,}233.$$

Приклад 12.4. Система випадкових величин (X, Y) із невід'ємними складовими має функцію розподілу $F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$). Знайти $f(x, y)$ і $P(1 \le X < 2;\ 2 \le Y < 3)$. Дослідити, чи будуть незалежними величини X і Y, які входять до системи.

Розв'язання. Обчислимо ймовірність за допомогою функції розподілу за наведеною раніше формулою:

$$P(1 \le X < 2;\ 2 \le Y < 3) = F(2,3) - F(1,3) - F(2,2) + F(1,2) = 1 - e^{-2\alpha} -$$
$$- e^{-3\beta} + e^{-2\alpha - 3\beta} - 1 + e^{-\alpha} + e^{-3\beta} - e^{-\alpha - 3\beta} - 1 + e^{-2\alpha} + e^{-2\beta} - e^{-2\alpha - 2\beta} +$$
$$+ 1 - e^{-\alpha} - e^{-2\beta} + e^{-\alpha - 2\beta} = e^{-2\alpha - 3\beta} - e^{-\alpha - 3\beta} - e^{-2\alpha - 2\beta} + e^{-\alpha - 2\beta} =$$
$$= -e^{-\alpha - 3\beta}(-e^{-\alpha} + 1) + e^{-\alpha - 2\beta}(-e^{-\alpha} + 1) = (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-\beta})e^{-\alpha - 2\beta}.$$

Для дослідження незалежності X і Y знайдемо щільність розподілу системи $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \alpha e^{-\alpha x} - \alpha e^{-\alpha x - \beta y};\ f(x, y) = \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y} = \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta y}.$$

Щільність розподілу системи подано як добуток двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Отже, величини, що утворюють систему, незалежні.

12.2. Функція розподілу

Приклад 12.5. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (*X*, *Y*) задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0, y \le 0; \\ 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-2x - 3y}, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Обчислити $P(0 < x < 4,\ 0 < y < 2)$.

Розв'язання. Відповідну графічну схему зображено на рис. 12.1.

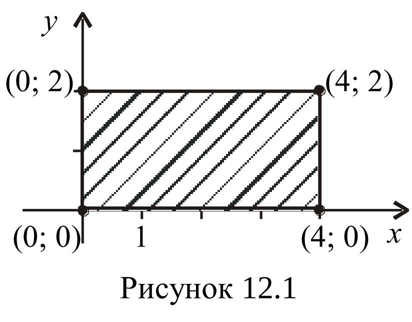


Рисунок 12.1

Далі маємо:

$P(0 < x < 4;\ 0 < y < 2) = F(4;\ 2) + F(0;\ 0) - F(0;\ 2) - F(4;\ 0) = 1 - e^{-8} - e^{-6} + e^{-14}$.

12.3. Умовний закон розподілу

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $X = x_i$ та відповідних їм умовних імовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_i$.

У табличній формі запису умовний закон $X / Y = y_i$ має такий вигляд:

$X = x_j$	x_1	x_2	x_3	…	x_m
$P(X = x_j / Y = y_i) = \dfrac{P((X = x_j) \cap (Y = y_i))}{P(Y = y_i)} = \dfrac{P_{ij}}{P_{y_i}}$	P_{i1} / P_{y1}	P_{i2} / P_{y2}	P_{i3} / P_{y3}	…	P_{im} / P_{ym}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{j=1}^{m} P(X = x_j / Y = y_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = \frac{P_{y_i}}{P_{y_i}} = 1. \quad (\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = P_{y_i}).$$

Числові характеристики для цього закону називають умовними.

Умовне математичне сподівання

$$M(X / Y = y_i) = \sum_{j=1}^{m} x_j P(X = x_j / Y = y_i) = \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{P_{ij}}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} x_j P_{ij}. \qquad (12.1)$$

Умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення обчислюються відповідно за формулами:

$$D(X / Y = y_i) = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 P_{ij} - M^2(X / Y = y_i); \qquad (12.2)$$

$$\sigma(X / Y = y_i) = \sqrt{D(X / Y = y_i)}. \qquad (12.3)$$

Умовним законом розподілу випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини

$Y = y_j$ і відповідних їм умовних імовірностей, обчислених при фіксованому значенні $X = x_i$.

У табличній формі запису умовний закон має такий вигляд:

$Y = y_j$	y_1	y_2	y_3	…	y_m
$P(Y = y_j / X = x_i) = \dfrac{P((Y = y_j) \cap (X = x_i))}{P(X = x_i)} = \dfrac{P_{ij}}{P_{x_i}}$	P_{1j}/P_{x1}	P_{2j}/P_{x2}	P_{3j}/P_{x3}	…	P_{mj}/P_{xm}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{i=1}^{k} P(Y = y_i / X = x_j) = \sum_{i=1}^{k} \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{i=1}^{k} P_{ij} = \frac{P_{x_i}}{P_{x_i}} = 1. \quad (\sum_{i=1}^{k} P_{ij} = P_{x_i}).$$

Умовне математичне сподівання

$$M(Y / X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} y_j P(Y = y_j / X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} y_j \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{i=1}^{k} y_j P_{ij}. \qquad (12.4)$$

Умовна дисперсія

$$D(Y / X = x_i) = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{i=1}^{k} y_j^2 P_{ij} - M^2 (Y / X = x_i). \qquad (12.5)$$

Умовне середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y / X = x_i) = \sqrt{D(Y / X = x_i)}. \qquad (12.6)$$

Приклад 12.6. Задано двовимірний закон розподілу:

$Y = y_i$	$X = x_j$			
	10	20	30	P_{yi}
–6	0,02	0,05	0,03	0,1
–4	0,08	0,15	0,07	0,3
–2	0,2	0,3	0,1	0,6
P_{xj}	0,3	0,5	0,2	

Обчислити $M(X / Y = –4)$; $M(Y / X = 30)$; $\sigma(X / Y = –4)$; $\sigma(Y / X = 30)$.

Розв'язання. Для обчислення $M(X \,/\, Y = -4)$, $M(Y \,/\, X = 30)$ необхідно побудувати відповідні умовні закони розподілу.

Умовний закон розподілу $X \,/\, Y = -4$:

$X = x_j$	10	20	30
$P(X = x_j / Y = -4) = \dfrac{P((X = x_j) \cap (Y = y_i))}{P(Y = -4)} = \dfrac{P_{ij}}{0{,}3}$	0,08/0,3	0,15/0,3	0,07/0,3

$$\sum P(X \,/\, Y = -4) = 0{,}8/0{,}3 + 0{,}15/0{,}3 + 0{,}07/0{,}3 = 1;$$

$$M(X \,/\, Y = -4) = 1/0{,}3\ (10 \cdot 0{,}08 + 20 \cdot 0{,}15 + 30 \cdot 0{,}07) =$$

$$= \frac{1}{0{,}3}\ (0{,}8 + 3 + 2{,}1) = 3{,}2/0{,}3 = 10{,}7;$$

$$M(X^2 \,/\, Y = -4) = 1/0{,}3\ (100 \cdot 0{,}08 + 400 \cdot 0{,}15 + 900 \cdot 0{,}07) =$$

$$= \frac{1}{0{,}3}\ (8 + 60 + 63) = 131/0{,}3 = 1310/3;$$

$$D(X \,/\, Y = -4) = 1310/3 - (32/3)^2 = 1310/3 - 3481/9 = (3930 - 3481)/9 = 449/9;$$

$$\sigma(X \,/\, Y = -4) = (449/9)^{0{,}5} = 1/3(2906)^{0{,}5} = 7{,}1.$$

Умовний закон розподілу $Y \,/\, X = 30$:

$Y = y_j$	–6	–4	–2
$P(Y = y_j \,/\, X = 30) = \dfrac{P((Y = y_j) \cap (X = x_i))}{P(X = 30)} = \dfrac{P_{ij}}{0{,}2}$	0,03/0,2	0,07/0,2	0,1/0,2

$$\sum P\ (Y \,/\, X = 30) = 0{,}03/0{,}2 + 0{,}07/0{,}2 + 0{,}1/0{,}2 = 1;$$

$$M\ (Y \,/\, X = 30) = \frac{1}{0{,}2}\ 1/0{,}2\ (-6 \cdot 0{,}03 - 4 \cdot 0{,}07 - 2 \cdot 0{,}1) =$$

$$= 1/0{,}2\ (-0{,}18 - 0{,}28 - 0{,}2) = -\,0{,}66/0{,}2 = -\,3{,}3;$$

$$M\ (Y^2 \,/\, X = 30) = \frac{1}{0{,}2}\ (36 \cdot 0{,}03 + 16 \cdot 0{,}07 + 4 \cdot 0{,}1)\ 1/0{,}2\ (1{,}08 +$$

$$+ 1{,}12 + 0{,}4) = 2{,}6/0{,}2 = 13;$$

$$D(Y \,/\, X = 30) = 13 - (-3{,}3)^2 = 13 - 10{,}89 = 2{,}11;$$

$$\sigma(Y \,/\, X = -4) = (2{,}11)^{0{,}5} = 1{,}45.$$

12.4. Щільність розподілу

Приклад 12.7. Задано

$f(x, y) = a$, якщо $(x, y) \in \Omega$, $a = \text{const}$;

$f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$,

де $\Omega = (-2 \le x \le 4,\ -3 \le y \le 5)$.

Знайти a і $F(x, y)$. Обчислити $P(-1 < x < 2,\ -2 < y < 3)$.

Розв'язання. Множина Ω зображена на рис. 12.2.

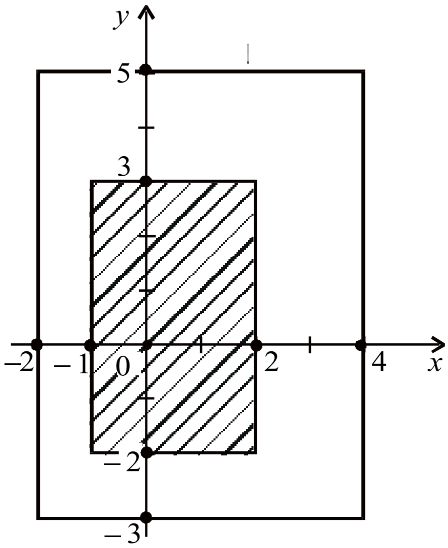


Рисунок 12.2

Для визначення a застосовуємо умову нормування:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = 1 \to \int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-3}^{5} a\,dx\,dy = 1 \to a = \frac{1}{\int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-3}^{5} dx\,dy} = \frac{1}{48},$$

де $\int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-3}^{5} dx\,dy = \int\limits_{-2}^{4} dx \int\limits_{-3}^{5} dy = (x\big|_{-2}^{4})\,(y\big|_{-3}^{5}) = 6 \cdot 8 = 48.$

Отже, маємо

$f(x, y) = 1/48$, якщо $(x, y) \in \Omega$,

$f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$.

При $-2 < x < 4$, $-3 < y < 5$ дістанемо:

$$F(x,y)=\int_{-2}^{x}\int_{-3}^{y} f(x,y)dx\,dy=\int_{-2}^{x}\int_{-3}^{y}\frac{1}{48}dx\,dy=\frac{1}{48}\int_{-2}^{x}\int_{-3}^{y}dx\,dy=\frac{1}{48}(x\big|_{-2}^{x})\,(y\big|_{-3}^{y})=$$

$$=\frac{(x+2)(y+3)}{48}.$$

Якщо $-2 < x < 4$, $y > 5$, то

$$F(x,5)=\frac{(x+2)(5+3)}{48}=\frac{x+2}{6}.$$

Якщо $x > 4$, $-3 < y < 5$, то

$$F(4,y)=\frac{(4+2)(y+3)}{48}=\frac{y+3}{8}.$$

Звідси

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le -2,\ y\le -3; \\ \dfrac{x+2}{6}, & -2<x\le 4,\ y>5; \\ \dfrac{(x+2)(y+3)}{48}, & -2<x\le 4,\ -3<y\le 5; \\ \dfrac{y+3}{8}, & x>4,\ -3<y\le 5; \\ 1, & x>4,\ y>5. \end{cases}$$

$$P(-1<x<2,-2<y<3)=\int_{-1}^{2}\int_{-2}^{3} f(x,y)dx\,dy=\int_{-1}^{2}\int_{-2}^{3}\frac{1}{48}dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{48}\int_{-1}^{2}dx\int_{-2}^{3}dy=\frac{1}{48}(x\big|_{-1}^{2})(y\big|_{-2}^{3})=\frac{1}{48}3\cdot 5=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}.$$

Завдання 12

Двовимірна дискретна випадкова величина (X, Y) задана законом розподілу в табличній формі:

1) заповнити повністю таблицю (знайти ймовірність, якої не вистачає);

2) знайти умовні математичні сподівання $M(Y|X=x_i)$ і $M(X|Y=y_k)$, безумовні математичні сподівання m_x і m_y, дисперсії σ^2_x і σ^2_y, коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Варіант 1

x_i	y_k		
	0	1	2
−0,5	0,12	0,08	0,1
0,5	0,14	0,44	?

Варіант 2

x_i	y_k		
	−1	0	1
−0,4	0,13	0,07	0,1
0,6	0,14	0,44	?

Варіант 3

x_i	y_k		
	−1,4	−0,4	0
−0,3	0,28	0,22	0,1
0,2	0,12	0,1	?

Варіант 4

x_i	y_k		
	1,2	2	2,4
−0,5	0,3	0,2	0,1
0	0,1	0,1	?

Варіант 5

x_i	y_k		
	−1,2	−0,5	0
−0,6	0,12	0,08	0,14
0,4	0,12	0,44	?

Варіант 6

x_i	y_k		
	−2,2	0	1,1
−0,8	0,12	0,08	0,12
0,2	0,1	0,44	?

Варіант 7

x_i	y_k		
	−10	0	10
−5	0,05	0,3	0,15
5	0,2	0,05	?

Варіант 8

x_i	y_k		
	−1	−2	−3
1	0,2	0,1	0,1
2	0,4	0,1	?

Варіант 9

x_i	y_k		
	0	1	2
−0,5	0,12	0,08	0,1
0,5	0,14	0,44	?

Варіант 10

x_i	y_k		
	−1	0	1
−0,4	0,13	0,07	0,1
0,6	0,14	0,44	?

ТЕМА 13. ФУНКЦІЇ ОДНОГО ВИПАДКОВОГО АРГУМЕНТУ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ, ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Приклад 13.1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Знайти закон розподілу функції $Y = 5(X-2)^2 + 3$.

Розв'язання. Складаємо таблицю:

$Y = 5(X-2)^2 + 3$	3	8	23	48
$P(Y = y_i)$	0,3	0,2	0,4	0,1

Оскільки всі отримані значення y_i різні та розташовані в порядку, що зростає, то ця таблиця виражає закон розподілу функції $Y = 5(X-2)^2 + 3$.

Приклад 13.2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	-1	0	1	2	3
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

Знайти закон розподілу функції $Y = X^2 - 1$.

Розв'язання. Складаємо таблицю:

$Y = X^2 - 1$	0	-1	0	3	8
$P(Y = y_i)$	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

Тут є два однакові значення $y = 0$, їм слід відвести один стовпець, а відповідні ймовірності скласти та розташувати стовпці в порядку зростання y_i. Закон розподілу Y матиме вигляд:

$Y = X^2 - 1$	-1	0	3	8
$P(Y = y_i)$	0,1	0,5	0,2	0,2

Приклад 13.3. Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти диференціальну функцію випадкової величини $Y =$ $= X^3 + 2$.

Розв'язання. Оскільки функціональна залежність $Y = X^3 + 2$ монотонна на всій числовій осі, користуємося готовою формулою $g(y) = f(\Psi(y))\,|\Psi'(y)|$, де $\Psi(y)$ − обернена функція функції $y = x^3 + 2$. =>

$x = \sqrt[3]{y-2}$; $\Psi(y) = \sqrt[3]{y-2}$; $\Psi'(y) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(y-2)^2}}$,

отже, $g(y) = \dfrac{1}{3\pi(1+\sqrt[3]{(y-2)^2})} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-2)^2}}$.

Приклад 13.4. Випадкова величина X задана диференціальною функцією $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le x \le 2\pi \\ 0, & x < 0,\ x > 2\pi \end{cases}$. Знайти диференціальну функцію розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \cos X$.

Розв'язання. Функція $Y = \cos X$ на інтервалі $[0, 2\pi]$ не є монотонною. Розіб'ємо цей інтервал на дві частини $[0, \pi)$ і $(\pi, 2\pi]$, у кожній з яких ця функція монотонна. В інтервалі $[0, \pi)$ обернена функція $\Psi_1(y) = \arccos y$, в інтервалі $(\pi, 2\pi]$ $\Psi_2(y) = -\arccos y$. Знайдемо $g(y)$ з рівності:

$$g(y) = f(\Psi_1(y))\,|\Psi_1'(y)| + f(\Psi_2(y))\,|\Psi_2'(y)|.$$

Визначимо похідні обернених функцій

$$\Psi_1'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}; \;\; \Psi_2'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

одержимо $$g(y) = \frac{1}{2\pi}\left|-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Оскільки величина X розташована в інтервалі [0, 2π], то $-1 \le Y \le 1$.

Таким чином, $g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 \le y \le 1 \\ 0, \; y < -1, \; y > 1 \end{cases}.$

Контроль: $\int\limits_{-1}^{1} g(y)dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin 1 = 1.$

Приклад 13.5. Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Y = 1 - 2X^2$.

Розв'язання. Використовуємо готові формули, не обчислюючи попередньо закон розподілу Y:

$$m_y = \sum_{i=1}^{4}(1 - 2x_i^2)p_i = -4{,}6;$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{4}(\varphi(x_i) - m_y)^2 p_i = \sum_{i=1}^{4}(\varphi(x_i))^2 p_i - m_y^2 = 27{,}84.$$

Завдання 13

Задача 13.1. Випадкова величина X задана законом розподілу. Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=\varphi(X)$.

№	Закон розподілу випадкової величини X	Закон розподілу випадкової величини $Y=\varphi(X)$
1	$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ \hline\end{array}$	$Y=\sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)+1$
2	$f(x)=\begin{cases}0{,}5, & -1\le x\le 1\\ 0, & x<-1, x>1\end{cases}$	$Y=e^{x}$
3	$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline p_i & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ \hline\end{array}$	$Y=2^{\lvert x\rvert}$
4	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	$Y=X^3$
5	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$Y=\frac{1}{\lambda}\ln X$
6	$f(x)=\begin{cases}2/\pi, & -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\\ 0, & x<-\frac{\pi}{4}\end{cases}$	$Y=\sin 2X$
7	$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline x_i & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ \hline\end{array}$	$Y=X^2-1$
8	$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$Y=\frac{1}{X}$
9	$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ \hline\end{array}$	$Y=\sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)+1$
10	$f(x)=\begin{cases}0{,}5, & -1\le x\le 1\\ 0, & x<-1, x>1\end{cases}$	$Y=e^{x}$

Задача 13.2. Випадкова величина X задана законом розподілу. Обчислити числові характеристики $M(X)$ і $D(X)$ випадкової величини $Y=\varphi(X)$.

№	Закон розподілу випадкової величини X	Закон розподілу випадкової величини $Y=\varphi(X)$
1	$f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$	$Y = 2X^2 + 3$
2	$f(x)=\begin{cases} \cos x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 0, & x<0,\ x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$Y = \sin X$
3	$f(x)=\begin{cases} 1, & 0{,}5\le x\le 1{,}5 \\ 0, & x<0{,}5,\ x>1{,}5 \end{cases}$	$Y = X^2 - 1$
4	$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 1\le x\le 1 \\ 0, & x<1,\ x>1 \end{cases}$	$Y = \ln X + 1$
5	$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x<0,\ x>1 \end{cases}$	$Y=\sqrt{X}$
6	$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$	$Y = 2X + 1$
7	$f(x)=\begin{cases} 0{,}5, & 2\le x\le 4 \\ 0, & x<2,\ x>4 \end{cases}$	$Y = 3X^2 + 5$
8	$f(x)=\begin{cases} 0{,}5\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 0, & x<-\frac{\pi}{2},\ x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$Y = \sin X$
9	$f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$	$Y = 2X^2 + 3$
10	$f(x)=\begin{cases} \cos x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 0, & x<0,\ x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$Y = \sin X$

ТЕМА 14. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ТЕОРЕМИ ПРО ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Приклад 14.1. Система (X_1, X_2) задана щільністю розподілу $f(x_1, x_2)$; величина Z є добутком випадкових величин X_1 і X_2 : $Z = X_1 \cdot X_2$. Знайти щільність розподілу величини Z.

Розв'язання. Лініями рівня функції $z = x_1 x_2$ є гіперболи $x_2 = \dfrac{z}{x_1}$. Функція розподілу $G(z)$ має вигляд:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{0} \int_{z/x1}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{z/x1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 .$$

Диференціюючи за z, одержимо:

$$g(z) = G'(z) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{z}{x_1}\right) dx_1 + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{z}{x_1}\right) dx_1 .$$

Приклад 14.2. Система (X, Y) задана законом розподілу:

X	Y			
	0	1	2	3
−1	0,01	0,06	0,05	0,04
0	0,04	0,24	0,15	0,07
1	0,05	0,1	0,1	0,09

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання. Знаходимо значення $x_i + y_j$: −1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4.

Можливими значеннями Z є: −1, 0, 1, 2, 3, 4. Обчислюємо відповідні їм імовірності: $P_1 = P(Z = -1) = P(X = -1, Y = 0) = 0{,}01$; $P_2 = P(Z = 0) = P(X = -1, Y = 1) + P(X = 0, Y = 0) = 0{,}06 + 0{,}04 = 0{,}1$.

Шуканий закон розподілу Z має вигляд:

Z	−1	0	1	2	3	4
P	0,01	0,1	0,34	0,29	0,17	0,09

Перевірка: 0,01 + 0,1 + 0,34 + 0,29 + 0,17 + 0,09 = 1.

Приклад 14.2. Система (X, Y) задана щільністю розподілу $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x,y\in D\\ 0, & x,y\notin D\end{cases}$, де D: $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 4\end{cases}$. Обчислити числові характеристики m_z і D_z випадкової величини $Z = 2X^2 - XY$.

Розв'язання. Скористаємося формулами:

$$M[\varphi(x,y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy \text{ і}$$

$$D[\varphi(x,y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x,y)-m_\varphi)^2 f(x,y)dxdy.$$

Одержимо: $m_z=\iint_D(2x^2-xy)\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\int_0^4(2x^2-xy)dy\right)dx=$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(2x^2y-x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 dx=2\int_0^1(x^2-x)dx=\frac{8}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3};$$

$$D_z=\iint_D\left[(2x^2-xy)+\frac{4}{3}\right]^2\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}\iint_D\left[(2x^2+\frac{4}{3})-xy\right]^2dxdy=\frac{88}{27}.$$

Приклад 14.3. Система (X, Y) задана законом розподілу

X	Y	
	1	2
0	0,3	0,1
1	0,2	0,4

Обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Z = X^2 + Y^2$.

Розв'язання. Не визначаючи закон розподілу випадкової величини Z, скористаємося готовими формулами:

$$M[\varphi(x,y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij} = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}4 + 2 = 3{,}1;$$

$$D[\varphi(x,y)] = \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j) - m_\varphi]^2 p_{ij} = 1 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}4 - 3{,}1^2 =$$
$$= 12{,}7 - 9{,}61 = 3{,}09.$$

Теореми про числові характеристики

Теореми про математичні сподівання

1) $M[C] = C$.
2) $M[CX] = C\,M[X]$.
3) $M[X_1 + \ldots + X_n] = M[X_1] + \ldots + M[X_n]$.
4) $M\left[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i M[X_i] + b.$
5) Якщо випадкові величини $X_1, \ldots, X_n$ незалежні, то $M[X_1, \ldots, X_n] =$ $= M[X_1] \cdot \ldots \cdot M[X_n]$.

Теореми про дисперсії

1) $D[C] = 0$.
2) $D[CX] = C^2 D[X]$.
3) $D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} K_{xixj}$ − кореляційний момент пари випадкових величин X_i і X_j.
4) $D\left[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} C_i C_j K_{xixj}$

Приклад 14.4. Випадкова величина X − кількість автомобілів, що реалізовуються протягом одного дня автомобільним салоном, задається законом розподілу

X	1	2	4	5
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Номінальна вартість одного автомобіля 30 тис у. о. і за кожен день салон має 2 тис у.о. прибутку за рахунок додаткових послуг. Указати середню виручку, що отримується салоном щодня, і її розкид. Щоденна виручка автомобільного салону є випадкова величина $Z = 30X + 2$, і для розв'язання задачі потрібно визначити m_z і D_z.

Розв'язання. Спочатку знайдемо числові характеристики X:

$m_x = 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}1 = 2$ − в середньому продається 2 автомобілі на день;

$D_x = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}1 - 2^2 = 5 - 4 = 1$, $\sigma_x = 1$ − розкид продажу становить 1 автомобіль на день.

На підставі теорем про числові характеристики матимемо:

$m_z = 30m_x + 2 = 30\cdot 2 + 2 = 62$ тис у.о. − середня щоденна виручка;

$D_z = 900D_x = 900\cdot 1 = 900$, $\sigma_z = 30$ тис у.о. − розкид від середньої виручки.

Приклад 14.5. Випадкова величина X задана щільністю розподілу імовірності $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2e^{-2x}, & x \ge 0 \end{cases}$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z = 2X + 3$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ є щільністю показникового закону розподілу, а це означає, що $m_x = 1/2$ і $D_x = 1/4$. Тоді згідно з теоремами про числові характеристики $m_z = 2m_x + 3 = 2\cdot 1/2 + 3 = 4$ і $D_z = 4D_x = 4\cdot 1/4 = 1$.

Приклад 14.6. Випадкові величини X і Y, що характеризують відповідно розширення асортименту продукції, що випускається, і зміну її якості, задані своїми числовими характеристиками $m_x = 2$; $m_y = 1$; $D_x = 2$; $D_y = 1$; $K_{xy} = 1$. Обчислити числові характеристики випадкової величини $Z = 0{,}2X + Y - 0{,}3$, що характеризує коливання прибутку підприємства.

Розв'язання. Згідно з теоремами про числові характеристики матимемо:

$m_z = 0{,}2m_x + m_y - 0{,}3 = 0{,}2\cdot 2 + 1 - 0{,}3 = 1{,}1$;

$D_z = 0{,}2^2\cdot D_x + D_y + 2\cdot 0{,}2\cdot K_{xy} = 0{,}04\cdot 2 + 1 + 0{,}4\cdot 1 = 1{,}48$.

Приклад 14.7. Щільність розподілу ймовірності незалежних випадкових величин X і Y задані формулами:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0{,}5, & 0 < x < 2 \\ 0, & 0 \le x,\, x \ge 2 \end{cases}; \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ e^{-y}, & y \ge 0 \end{cases}.$$

Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z = 3X - 2Y + 5$.

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі (0, 2), це значить, що $m_x = \dfrac{2+0}{2} = 1$; $D_x = \dfrac{(2-0)^2}{12} = \dfrac{1}{3}$. Випадкова величина Y підпорядкована показниковому закону розподілу, отже, $m_y = 1$; $D_y = 1$. Оскільки X і Y незалежні, то $K_{xy} = 0$, і згідно з теоремами про числові характеристики

$$m_z = 3m_x - 2m_y + 5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 5 = 6;$$
$$D_z = 9D_x + 4D_y = 9 \cdot 1/3 + 4 \cdot 1 = 7.$$

Завдання 14

Задача 14.1. Закони розподілу функції двох випадкових величин, числові характеристики

Система (X, Y) рівномірно розподілена в області D, що обмежена прямими лініями, які з'єднують точки A, B, C, D. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$ (попередньо знайти інтегральну функцію $G(z)$). Координати точок A, B, C, D задані в таблиці.

Варіант	*A*	*B*	*C*	*D*
1	(0,0)	(1,0)	(0,2)	(1,2)
2	–	(2,0)	(0,1)	(2,1)
3	(0,0)	(2,0)	(0,2)	(2,2)
4	(0,0)	(1,0)	(1,1)	–
5	(0,0)	(0,1)	(1,1)	–
6	(0,0)	(0,2)	(2,0)	–
7	(0,0)	(0,1)	(2,0)	–
8	(0,0)	(2,0)	(2,2)	(0,2)
9	(0,0)	(1,0)	(0,2)	(1,2)
10	–	(2,0)	(0,1)	(2,1)

Задача 14.2. Теореми про числові характеристики

Випадкові величини X, Y, Z задані своїми числовими характеристиками. Обчислити числові характеристики функцій цих випадкових величин.

Варіант	Числові характеристики аргументів	Функція
1	$m_x = 1$, $D_x = 1$, $m_y = -1$, $D_y = 4$, $r_{xy} = 0{,}5$	$Z = 3X - 2Y + 1$
2	$m_x = 0$, $D_x = 2$, $m_y = 2$, $D_y = 1$, $K_{xy} = -1$	$Z = 2X - 3Y + 4$
3	$m_x = 1$, $D_x = 4$, $m_y = 2$, $D_y = 9$, $r_{xy} = -0{,}2$	$Z = X + 2Y - 1$
4	$m_x = 2$, $D_x = 3$, $m_y = 0$, $D_y = 2$, $K_{xy} = 0{,}5$	$Z = 5X - Y + 1$
5	$m_x = 1$, $D_x = 2$, $m_y = 2$, $D_y = 1$, $K_{xy} = 0{,}5$	$Z = X - Y + 2$
6	$m_x = 3$, $D_x = 4$, $m_y = 0$, $D_y = 2$, $r_{xy} = 0{,}2$	$Z = 2X + 3Y - 4$
7	$m_x = 1$, $D_x = 5$, $m_y = 2$, $D_y = 2$, $r_{xy} = 0{,}5$	$Z = 2X - 3Y + 3$
8	$m_x = 3$, $D_x = 2$, $m_y = 2$, $D_y = 3$, $r_{xy} = -0{,}1$	$Z = Y - X - 5$
9	$m_x = 1$, $D_x = 1$, $m_y = -1$, $D_y = 4$, $r_{xy} = 0{,}5$	$Z = 3X - 2Y + 1$
10	$m_x = 0$, $D_x = 2$, $m_y = 2$, $D_y = 1$, $K_{xy} = -1$	$Z = 2X - 3Y + 4$

ТЕМА 15. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Закон великих чисел: у разі великого числа експериментів, що здійснюються для вивчення певної випадкової події або випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

15.1. Нерівність Чебишова

Якщо випадкова величина *X* має обмежені *M*(*X*); *D*(*X*), то ймовірність відхилення цієї величини від свого математичного сподівання, взятого за абсолютною величиною ε (ε > 0), не перевищуватиме величини: $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Це можна записати так:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (15.1)$$

Приклад 15.1. Ймовірність запізнення пасажира на потяг 0,007. Оцінити ймовірність того, що із 20 000 пасажирів буде від 100 до 180 (включно) тих, що запізнилися.

Розв'язання. Застосуємо нерівність Чебишова (15.1):

$$M(X)=np=20\,000\cdot 0{,}007=140;$$

$$D(X)=npq=140\cdot 0{,}993=130{,}02.$$

Межі допустимих значень симетричні відносно *M*(*X*), ліва – 140 – 40 = = 100, права – 180 – 140 = 40.

$$P\left(\left|X-140\right|<40\right)\geq 1-\frac{130{,}02}{40^2}=1-0{,}09=0{,}91.$$

Приклад 15.2. Середнє споживання електроенергії протягом травня у місті дорівнює 360 000 кВт·год. Необхідно оцінити:

1. Ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 1 000 000 кВт. год.

2. Ту саму ймовірність за умови, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40 000 кВт·год.

Розв'язання. 1. Випадкова величина *X* − споживання електроенергії набуває невід'ємних значень. Математичне сподівання її дорівнює 360 000. Оцінимо ймовірність за допомогою першої форми нерівності Чебишова:

$$P(X \geq 1\,000\,000) \leq \frac{360\,000}{1\,000\,000} = 0{,}36.$$

2. Оцінимо цю саму нерівність, якщо відоме середнє квадратичне відхилення X. Скористаємося другою формою нерівності Чебишова:

$$P(X \geq 1\,000\,000) = 1 - P(X < 1\,000\,000) = 1 - P(0 < X < 1\,000\,000) = 1 -$$

$$- P(-360\,000 < X < -MX < 640\,000) = 1 - P(|X - MX| < 640\,000) \leq 1 - 1 +$$

$$+ \frac{(40\,000)^2}{(640\,000)^2} = \frac{1}{256}.$$

Отже, якщо існує момент другого порядку, оцінка ймовірності істотно менша.

Приклад 15.3. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час T виявиться: а) менше двох; б) не менше двох.

Розв'язання. а) Позначимо через X дискретну випадкову величину – число елементів, що відмовили, за час T. Тоді

$$M(X) = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5;$$

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475.$$

Скористаємося нерівністю Чебишова (15.1).

Підставивши сюди $M(X) = 0{,}5$; $D(X) = 0{,}475$, $\varepsilon = 2$, одержимо

$P(|X - 0{,}5| < 2) \geq 1 - 0{,}475/4 = 0{,}88$.

б) Події $|X - 0{,}5| < 2$ і $|X - 0{,}5| \geq 2$ протилежні, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці. Отже, $P(|X - 0{,}5| \geq 2) \leq 1 - 0{,}88 = 0{,}12$.

Приклад 15.4. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 1/2. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що число X появ події A міститься в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних випробувань.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – числа появ події A в 100 незалежних випробуваннях:

$$M(X) = np = 100 \cdot 0{,}5 = 50;$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 25.$$

Знайдемо максимальну різницю між заданим числом появ події і математичним сподіванням $M(X) = 50$:

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10.$$

Скористаємося нерівністю Чебишова у формі (15.1).

Підставляючи $M(X) = 50$, $D(X) = 25$, $\varepsilon = 10$, одержимо

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - 25/10 = 0{,}75.$$

Приклад 15.5. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0{,}2$.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання і дисперсію величини X:

$$M(X) = 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}54;$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = (0{,}3^2\cdot 0{,}2 + 0{,}6^2\cdot 0{,}8) - 0{,}54^2 = 0{,}0144.$$

Скористаємося нерівністю Чебишова у формі (15.1).

Підставляючи $M(X) = 0{,}54$, $D(X) = 0{,}0144$, $\varepsilon = 0{,}2$, остаточно одержимо $P(|X - 0{,}54| < 0{,}2) \geq 1 - 0{,}0144/0{,}04 = 0{,}64$.

15.2. Теорема Чебишова

Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots X_n$, які мають обмежені $M(X_i)$ ($i = 1,\dots, n$) і дисперсії яких $D(X_i)$ не перевищують деякої сталої C ($C > 0$), тобто $D(X_i) \leq C$. Тоді для будь-якого малого додатного числа ε імовірність відхилення середнього арифметичного цих величин

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

від середнього арифметичного їх математичних сподівань

$$M(\overline{X}) = \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n} = \frac{\sum\limits_{1}^{n} M(X_i)}{n},$$

взятого за абсолютним значенням на величину ε, прямуватиме до одиниці зі збільшенням числа n:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (15.2)$$

Наслідок із теореми Чебишова. Якщо в результаті n спостережень, де n досить велике, одержані випадкові величини X_1, X_2,..., X_n – попарно незалежні з одним і тим же $M(X)$, тобто $M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = a$ і рівномірно обмеженими дисперсіями $D(X_i) \le C$, то середнє арифметичне значення величин, що спостерігаються $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, збігається за ймовірністю до числа a, тобто:

$$P\left(\left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - a \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \delta, \delta = \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}. \quad (15.3)$$

Приклад 15.6. Дисперсія кожної із 2 500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середньої арифметичної цих випадкових величин від середньої арифметичної їх математичних сподівань не перевершує 0,4.

Розв'язання. За формулою (15.3) маємо:

$$n = 2\,500, c = D(X) = 5, \varepsilon = 0{,}4.$$

$$P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < 0{,}4) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{5}{2500 \cdot 0{,}16} = \frac{79}{80}.$$

Приклад 15.7. Унаслідок медичного огляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2 кг більша від середньої маси попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8 кг?

Розв'язання.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1{,}2\right) \geq 1 - \frac{8}{900 \cdot (1{,}2)^2} = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9932;$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1{,}2\right) \approx 0{,}0068.$$

Оскільки ця ймовірність дуже мала, відхилення маси можна вважати невипадковим.

15.3. Теорема Бернуллі

Якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p, то при необмеженому збільшенні числа експериментів $n \to \infty$ імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від імовірності p, взятої за абсолютною величиною на ε (ε > 0) прямуватиме до одиниці зі зростанням n, що можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1. \qquad (15.4)$$

Нерівність Чебишова для теореми Бернуллі матиме такий вигляд:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} \to P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (15.5)$$

Приклад 15.8. Імовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від імовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02.

Розв'язання. За умовою задачі: p = 0,95; q = 0,05; n = 400. На підставі (15.5) дістаємо:

$$P(|W(A)-0{,}95|<0{,}02)\geq 1-\frac{0{,}95\cdot 0{,}05}{400\cdot(0{,}02)^2}=1-0{,}2969=0{,}7031.$$

Приклад 15.9. Скільки необхідно провести експериментів *n*, щоб імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події *W*(*A*) від імовірності *p* = 0,85, взяте за абсолютною величиною, на ε = 0,001, була б не меншою за 0,99.

Розв'язання. Із умови задачі маємо *p* = 0,85; *q* = 0,15; ε = 0,001,

$$P(|W(A)-0{,}85|<0{,}001)=0{,}99.$$

$$n=\frac{pq}{0{,}01\varepsilon^2}=\frac{0{,}85\cdot 0{,}15}{0{,}01\cdot 0{,}001^2}=12450000.$$

15.4. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова)

15.4.1. Характеристичні функції та їх властивості

Для доведення центральної граничної теореми використовуються характеристичні функції.

Розглядається випадкова величина $Y=e^{itX}$, де X − дійсна випадкова величина, закон розподілу якої відомий, t − параметр, а $i=\sqrt{-1}$ − уявна одиниця.

Така випадкова величина називається **комплексною**.

Характеристичною функцією називають математичне сподівання від e^{itX}:

$$\alpha_X(t)=M(Y)=M(e^{itX}). \tag{15.6}$$

Якщо X є дискретною, то

$$\alpha_X(t)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{itx_i}p_i. \tag{15.7}$$

Якщо X є неперервною, то

$$\alpha_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx. \tag{15.8}$$

Основні властивості $\alpha_x(t)$:

1. $\alpha_x(0) = 1$, оскільки в цьому разі ($t = 0$), то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

2. Якщо взяти похідну від $\alpha_x(t)$ по t, то $\alpha'_X(t) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f(x)dx$. Прирівнявши параметр $t = 0$, одержимо

$$\alpha'_X(0) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f(x)dx = i M(X) \to$$

$$\to M(X) = \frac{1}{i}\alpha'_X(0) = -i\,\alpha'_X(0), \qquad (15.9)$$

оскільки $i^2 = -1$.

3. Якщо взяти другу похідну від $\alpha_x(t)$ за параметром і при цьому $t = 0$, то одержимо:

$$\alpha''_X(0) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx} f(x)dx\Big|_{x=0} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = -M(X^2) \to M(X^2) = -\alpha''_X(0).$$

Отже,

$$D(X) = -\alpha''_X(0) - (\alpha'_X(0))^2. \qquad (15.10)$$

4. Якщо випадкові величини Y і X пов'язані співвідношенням $Y = ax + b$, де a і b є сталими, то їх характеристичні функції пов'язані між собою так:

$$\alpha_Y(t) = M(e^{itY}) = M(e^{it(ax+b)}) = e^{itb} M(e^{itax}) = e^{itb}\alpha_X(at).$$

Отже,

$$\alpha_Y(t) = e^{itb}\alpha_X(at). \qquad (15.11)$$

5. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots X_n$ є незалежними і відомі їх характеристичні функції $\alpha_{X_i}(t)$, то для випадкової величини $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ характеристична функція:

$$\alpha_X(t) = M(e^{itX}) = M\left(e^{it\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} M(e^{itx_i}) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{X_i}(t). \qquad (15.12)$$

6. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots X_n$ є незалежними, кожна із них має один і той самий закон розподілу, то характеристична функція для $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\alpha_Y(t)=\alpha_X^n(t). \qquad (15.13)$$

Отже, для нормованого нормального закону розподілу випадкової величини X характеристична функція

$$\alpha_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (15.14)$$

Приклад 15.10. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу N (0; 1). Знайти характеристичну функцію для цього закону.

Розв'язання. Оскільки $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<\infty,$

то $\alpha_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itx}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

через те, що $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$, де $z=x-it$, $dx=dz$.

Отже, для нормованого нормального закону розподілу випадкової величини X характеристична функція $\alpha_X(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

15.4.2. Центральна гранична теорема

Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots X_n$, кожна із яких має один і той самий закон розподілу ймовірностей із $M(X_i)=0$, $\sigma(X)=\sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|$, тоді зі зростанням числа n закон розподілу $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ наближатиметься до нормального.

Приклад 15.11. Кожна із 100 незалежних випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу на проміжку [0; 0,12]. Записати наближено закон розподілу для випадкової величини $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

Розв'язання. Знаходимо числові характеристики для X_i: $M(X_i) = 0{,}06$; $D(X) = 0{,}1$.

Тоді $M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 100 \cdot 0{,}06 = 6.$

$$D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 100 \cdot 0{,}1 = 10.$$

На підставі центральної граничної теореми маємо $f(y) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-6)^2}{20}}, -\infty < x < \infty.$

15.5. Теорема Муавра – Лапласа

У загальному випадку випадкові величини $X_1, X_2, \dots X_n$, що розглядаються в центральній граничній теоремі, можуть мати довільні закони розподілу.

Якщо X_i є дискретними і мають лише два значення: $P(X_i = 0) = q$, $P(X_i = 1) = p$, то приходимо до теореми Муавра − Лапласа, яка є найпростішим випадком центральної граничної теореми.

Якщо здійснюється n незалежних експериментів, у кожному з яких імовірність появи випадкової події A є величиною сталою і дорівнює p, то для інтервалу $[\alpha; \beta)$ справедлива рівність:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (15.15)$$

Приклад 15.12. Завод виготовляє 80 % виробів першого сорту. Навмання вибирають 800 виробів. Яка ймовірність того, що число виробів першого сорту виявиться в межах від 600 до 680 штук?

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $n = 800$; $\alpha = 700$, $\beta = 620$. Обчислимо: $np = 800 \cdot 0{,}8 = 640$; $\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 11{,}3.$

Згідно з $P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)$ дістанемо:

$$P(600 < Y < 680) = \Phi\left(\frac{680-640}{11{,}3}\right) - \left(\frac{600-640}{11{,}3}\right) = \Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{11{,}3}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) = 2\Phi\,(3{,}5) = 2 \cdot 0{,}4499841 = 0{,}999682.$$

Завдання 15

Варіант 1. Випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити $P(|X - M(X)| < 0{,}2)$.

Варіант 2. Випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити $P(|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4})$.

Варіант 3. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити

$P(|X - M(X)| < 0{,}1)$, якщо $D(X) = 0{,}001$.

Варіант 4. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити

$P(|X - M(X)| < 3\sigma)$.

Варіант 5. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити

$P(|X - M(X)| < 0{,}2)$, якщо $D(X) = 0{,}004$.

Варіант 6. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$, $D(X) = 0{,}004$. Користуючись нерівністю Чебишова, знайти ε.

Варіант 7. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$, $D(X) = 0{,}009$. Користуючись нерівністю Чебишова, знайти ε.

Варіант 8. Дано: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$. Оцінити зверху $P(|X - a| \geq 3\sigma)$.

Варіант 9. Прилад складається із 100 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного з них за час *t* дорівнює 0,05. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити:

а) $P(|X - M(X)| < 3)$;

б) $P(|X - M(X)| \geq 3)$, де X – число елементів що відмовили за час *t*.

Варіант 10. В освітлювальну мережу паралельно ввімкнено 20 ламп. Ймовірність того, що протягом часу *t* лампа горітиме, дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити:

а) $P(|X - M(X)| < 3)$;

б) $P(|X - M(X)| \geq 3)$, де X – число ввімкнених ламп за час *t*.

ТЕМА 16. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

У математичній статистиці методи теорії ймовірності застосовуються для обробки результатів спостережень. Розглянемо одну з основних задач математичної статистики − обробку масиву експериментальних даних. Ця задача включає такі етапи:

- побудова статистичної сукупності;
- точкові оцінки параметрів розподілу;
- інтервальні оцінки параметрів розподілу;
- перевірку статистичної гіпотези.

16.1. Побудова статистичної сукупності

Простим статистичним рядом називається будь-який набір спостережень однієї і тієї ж величини X: $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, де n – число спостережень. Воно може досягати значень декількох десятків або навіть сотень. Тому для подальшої обробки значення x_i групують за інтервалами. Інтервали зазвичай беруть однакової довжини. Чим більше їх число m, тим точніше буде оцінена початкова величина X. З іншого боку, чим менше m, тим простіше будуть обчислення. Компроміс між цими вимогами приводить до того, що зазвичай як m вибирають найближче ціле до $m = \sqrt{n}$.

Статистичною сукупністю називається набір спостережень, згрупованих за інтервалами. Це таблиця з двох рядків або стовпців: у першій − номери інтервалів або їх межі, а в другій − кількість попадань в даний інтервал. Будувати статистичну сукупність зручно на листі паперу в клітку.

Порядок побудови

1. Серед всіх значень x_i знаходимо мінімальне і максимальне. Для зручності їх можна округляти відповідно в меншу і більшу сторону.

2. Отриманий інтервал $[x_{\min}, x_{\max}]$ розбиваємо на m ділянок. Знаходимо межі цих ділянок.

3. Внизу листа паперу в клітку проводимо горизонтальну лінію (ось абсцис) і відзначаємо на ній межі ділянок. Оскільки всі ділянки мають однакову довжину, то зручно межі ділянок наносити на лінії сітки листа.

4. Проглядаємо кожне значення статистичного ряду і визначаємо, в яку ділянку воно потрапляє. На цій ділянці проводимо горизонтальну лінію на одну клітинку вище за ось абсцис або вище за попередню лінію, якщо така вже є на даній ділянці.

5. Підраховуємо загальне число клітинок (по висоті) на кожній ділянці. Це і буде число попадань значень ряду в даний інтервал.

Якщо по осі ординат проставити відносні частоти попадань в кожен інтервал n_k / n, то отримана фігура називається ***гістограмою розподілу***. Її вигляд схожий на вигляд графіка щільності розподілу, тому по вигляду гістограми можна судити про закон розподілу X.

Приклад 16.1. Норми отриманого прибутку за n = 25 об'єктами однієї фірми наведені в табл. 16.1. Тут i – номер об'єкту, x_i – значення норми прибутку. Побудувати гістограму розподілу.

Таблиця 16.1

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	0,45769	6	0,81379	11	0,81196	16	0,50909	21	1,01223
2	0,10879	7	0,10119	12	0,96335	17	1,00051	22	0,17809
3	0,51511	8	0,68214	13	0,53105	18	0,26019	23	0,35056
4	0,69373	9	0,62654	14	0,66503	19	0,53882	24	0,45697
5	0,79338	10	0,67179	15	0,45832	20	0,14231	25	0,75811

Розв'язання. Знаходимо $x_{\min} = x_7$ =0,10119; $x_{\max} = x_{21}$ = 1,01223. Округлятимемо їх для зручності: візьмемо за ліву межу 1-го інтервалу a_1 = 0, а праву межу останнього інтервалу 1,02. Число інтервалів розбиття $m = \sqrt{n} = 5$. У таблиці 16.2 в першому стовпці наведено номер інтервалу k, у другому − межі $a_к$ і b_k, у 3-му − кількість попадань в інтервал n_k, а в 4-му − відносна частота. На рис. 16.1 показана гістограма розподілу.

Таблица 16.2

k	$[a_k, b_k]$	n_k	n_k / n
1	[0, 0,204]	4	0,16
2	[0,204, 0,408]	2	0,08
3	[0,408, 0,612]	7	0,28
4	[0,612, 0,816]	9	0,36
5	[0,816, 1,02]	3	0,12

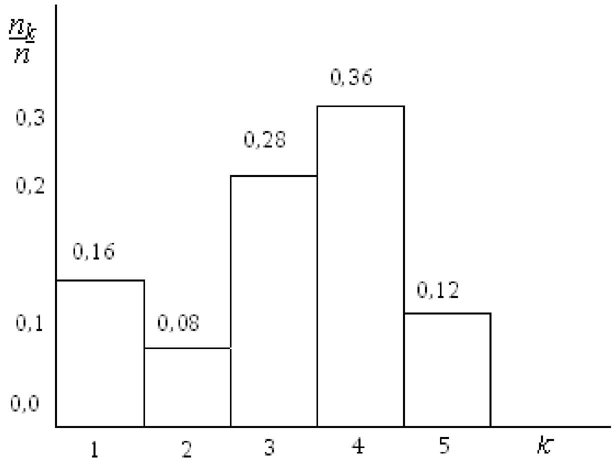


Рисунок 16.1

16.2. Точкові оцінки параметрів розподілу

За даними простого статистичного ряду можна знайти точкові оцінки різних числових характеристик параметрів розподілу. Зазвичай цікавляться *точковими оцінками математичного сподівання m*, дисперсії D*, середнього квадратичного відхилення* σ*. Ці оцінки обчислюються за формулами:

$$m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{16.1}$$

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m^*)^2, \tag{16.2}$$

$$\sigma^* = \sqrt{D^*}. \tag{16.3}$$

Будь-які оцінки повинні задовольняти вимоги *спроможності, незсуненості* і, по можливості, *ефективності.* Ці вимоги означають таке:

1. *Спроможність.* При $n \to \infty$ точкова оцінка повинна збігатися з відповідним генеральним параметром.

2. *Незсуненість.* При кінцевих n математичне сподівання точкової оцінки має дорівнювати відповідному генеральному параметру.

3. *Ефективність.* Серед усіх спроможних і незсунених оцінок слід вибирати таку, яка при кінцевих n має мінімально можливу дисперсію.

Оцінка математичного сподівання m^* (16.1) задовольняє ці вимоги, а оцінка дисперсії D^* (16.2) є зсуненою. Для усунення зсуву її потрібно помножити на $n/(n-1)$. Незсунені оцінки обчислюються:

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{16.4}$$

$$\tilde{D} = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2, \tag{16.5}$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{D}}. \tag{16.6}$$

Точкові оцінки можна обчислювати також для статистичної сукупності. Якщо задана статистична сукупність, то конкретні значення x_i тут вважаються за невідомі, оскільки вони згруповані за інтервалами. Відомі лише межі кожного інтервалу $[a_к, b_k]$ і число попадань в інтервал $n_к$. Тому вважаємо, що значення величини X потрапляють в середину кожного інтервалу $\tilde{x}_k = (a_k + b_k)/2$ з імовірністю, що дорівнює відносній частоті: $p_k = n_k / n$. З урахуванням усунення зсуву точкової оцінки дисперсії формули для обчислення незсунених точкових оцінок статистичного ряду мають вигляд:

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k \tilde{x}_k, \tag{16.7}$$

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n-m}\sum_{k=1}^{m} n_k (\tilde{x}_k - \tilde{m}_k)^2, \tag{16.8}$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}_x}. \tag{16.9}$$

Приклад 16.2. Обчислимо за даними табл. 16.2 незсунені точкові оцінки простого статистичного ряду, використовуючи формули (16.4)–(16.6): $\tilde{m} = 0{,}564$, $\tilde{D} = 0{,}07286$, $\tilde{\sigma} = 0{,}2699$.

Тепер за даними табл. 16.2 знайдемо точкові оцінки статистичної сукупності. Середини інтервалів: $\tilde{x}_1 = 0{,}102$, $\tilde{x}_2 = 0{,}306$, $\tilde{x}_3 = 0{,}51$, $\tilde{x}_4 = 0{,}714$, $\tilde{x} = 0{,}918$. Результат обчислень: $\tilde{m}_x = 0{,}5508$; $\tilde{D}_x = 0{,}079$; $\tilde{\sigma}_x = 0{,}2812$. Деяка різниця оцінок простого статистичного ряду і статистичної сукупності викликана випадковим вибором інтервалів розбиття.

16.3. Інтервальні оцінки параметрів розподілу

Інтервальною оцінкою якого-небудь числового параметра розподілу (математичного сподівання, дисперсії, інших параметрів) називається довірчий інтервал, тобто інтервал з випадковими межами, в який потрапляє відповідний генеральний параметр із заданою довірчою імовірністю p_0. Зазвичай замість довірчої імовірності p_0 задають рівень значущості $p = 1 - p_0$.

При обчисленні інтервальних оцінок передбачається, що початкова випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Для цього випадку знайдені розподіли випадкових величин $\tilde{m}_x, \tilde{D}_x$, що є функціями X. Ці розподіли називаються відповідно t-розподілом Стьюдента і χ^2-розподілом Пірсона. За їх допомогою довірчі інтервали для генеральних математичного сподівання m_x і дисперсії D_x можуть бути знайдені за формулами:

$$\tilde{m}_x - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{p}{2}}(f) \le m_x \le \tilde{m}_x + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{p}{2}}(f), \tag{16.10}$$

$$\frac{f\tilde{D}_x}{\chi^2_{1-\frac{p}{2}}(f)} \le D_x \le \frac{f\tilde{D}_x}{\chi^2_{\frac{p}{2}}(f)}. \tag{16.11}$$

Тут $f = n - 1$ або $f = n - m$ залежно від того, чи використовуються дані простого статистичного ряду або статистичної сукупності; $t_p(f)$ − квантилі t-розподілу Стьюдента (табл. Д 1.3), χ^2_p – квантилі χ^2-розподілу Пірсона (табл. Д 1.4) для відповідних рівнів значущості і f.

Приклад 16.3. Обчислимо для нашого прикладу довірчі інтервальні оцінки математичного сподівання і дисперсії, що відповідають довірчій імовірності $p_0 = 0{,}9$. Скористаємося результатами статистичної сукупності.

Розв'язання. Рівень значущості $p = 1 - p_0 = 0{,}1$; $f = n - m = 20$.

За табл. Д 1.3 знаходимо квантиль t-розподілу Стьюдента $t_{1-p/2}(f) =$ $= t_{0,95}(20) = 1{,}72472$. Обчислюємо за формулою (16.10):

$\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{P}{2}}(f) = \frac{0,275}{\sqrt{20}} 1,72472 = 0,106$; межі довірчого інтервалу для математичного сподівання: 0,5508 – 0,106 = 0,4448; 0,5508 + 0,106 = 0,6568. З довірчою імовірністю p_0 = 0,9 генеральне математичне сподівання лежить в межах: $m_x \in$ [0,4448; 0,6568].

Для оцінки дисперсії знайдемо в табл. Д 1.4 квантилі χ^2-розподілу Пірсона: $\chi^2_{\frac{P}{2}}(20) = \chi^2_{0,95}(20) = 31,41043$. Обчислюємо по (16.11) межі довірчого інтервалу: $\frac{f\tilde{D}_x}{\chi^2_{1-\frac{P}{2}}(f)} = \frac{20 \cdot 0,0756}{31,41043} = 0,0481$; $\frac{f\tilde{D}_x}{\chi^2_{\frac{P}{2}}(f)} = \frac{20 \cdot 0,0756}{10,85081} = 0,1393$.

З довірчою імовірністю p_0 = 0,9 генеральна дисперсія лежить у межах: $D_x \in$ [0,0481; 0,1393].

16.4. Перевірка статистичної гіпотези

Статистичною гіпотезою називається гіпотеза (припущення) про закон розподілу випадкової величини. За даними статистичного ряду можна перевірити статистичну гіпотезу. Розв'язання цієї задачі складається з таких етапів:

- ✓ підбір закону теоретичного розподілу;
- ✓ визначення числових параметрів теоретичного розподілу;
- ✓ перевірка підібраного теоретичного розподілу на збіг з експериментальними даними.

Підбір закону теоретичного розподілу проводиться за гістограмою. Її вигляд схожий на графік щільності розподілу, тому за виглядом гістограми можна вибрати відповідний теоретичний закон розподілу: нормальний, експоненціальний, рівномірний і т.д.

У вираз для щільності теоретичного розподілу входять різні числові параметри. Так, нормальний розподіл залежить від двох параметрів: m і σ, експоненціальний − від одного параметра λ і т.д. Для визначення числових параметрів теоретичного розподілу застосовується принцип максимальної правдоподібності. Згідно з цим принципом параметри теоретичного розподілу потрібно вибирати так, щоб обчислені за ними теоретичні математичне сподівання m_x і дисперсія D_x збіглися з отриманими вибірковими $\tilde{m}_x, \tilde{\sigma}_x$. Так, наприклад, якщо передбачається, що теоретичний розподіл нормальний, то його параметри вибираємо: $m = \tilde{m}_x, \sigma = \tilde{\sigma}_x$. Для експоненціального розподілу вважаємо $\lambda = 1/\tilde{m}_x$; межі рівномірного розподілу a і b знаходимо з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} \tilde{m}_x = \dfrac{a+b}{2}; \\ \tilde{\sigma}_x = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}. \end{cases} \qquad (16.12)$$

Для перевірки підібраного теоретичного розподілу на збіг з експериментальними даними застосовуються різні критерії згоди. Найбільш поширеними серед них є критерії згоди Колмогорова і Пірсона.

У критерії згоди Колмогорова порівнюються між собою теоретична функція розподілу $F(x)$ і вибіркова $\tilde{F}(x)$. Вибіркова функція розподілу є кусково-постійною функцією. Для статистичної сукупності $\tilde{F}(x)$ складається з m сходинок у точках з абсцисами, рівними серединам інтервалів $\tilde{x}_k$. Висота кожної сходинки дорівнює відносній частоті попадання в даний інтервал n_k / n. Для застосування критерію згоди Колмогорова потрібно знайти максимальну за модулем різницю між теоретичною і вибірковою функціями розподілу $d = \max\limits_{\forall x} \left| F(x) - \tilde{F}(x) \right|$. Далі обчислюється величина $\lambda = d\sqrt{m}$, і ця величина порівнюється з квантилем t-розподілу Колмогорова (табл. Д 1.5). Якщо ця величина не дуже велика

$$\lambda \le \lambda_{1-p}, \qquad (16.13)$$

то на рівні значущості p (тобто з довірчою імовірністю $p_0 = 1 - p$) можна вважати, що теоретичний розподіл підібраний правильно. Якщо ж ця нерівність порушується, то статистичну гіпотезу, що перевіряється, потрібно відкинути: вона суперечить результатам експерименту. Зазвичай при застосуванні критерію згоди Колмогорова беруть «жорсткі» (тобто великі) рівні значущості: $p = 0{,}2$ або $p = 0{,}3$.

У χ^2-критерії згоди Пірсона порівнюється з критичним значенням відносна сума квадратів відхилень досвідченого числа попадань у кожен інтервал n_k від теоретичного їх числа np_k, де p_k − імовірність попадання величини X в k-й інтервал: $p_k = F(b_k) - F(a_k)$. Теоретичний розподіл можна вважати підібраним правильно на рівні значущості p, якщо виконуватиметься нерівність

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \le \chi^2_{1-p}(m-3), \qquad (16.14)$$

де $\chi^2_{1-p}(m-3)$ − квантиль χ^2-розподілу Пірсона, що відповідає значенню параметра $f = m - 3$.

При використанні χ^2-критерію Пірсона бажано, щоб усі $np_k \ge 5$, тому за необхідності можна об'єднати декілька крайніх інтервалів в один (при цьому зменшиться k). Потрібно також брати для першого інтервалу $a_1 = -\infty$, а для останнього $b_m = +\infty$.

Приклад 16.4. Доберемо теоретичний розподіл для нашого прикладу і перевіримо правильність підбору за допомогою критеріїв згоди Колмогорова і Пірсона.

Розв'язання. Вигляд гістограми розподілу (рис. 16.1) дозволяє припустити, що, можливо, розподіл початкової величини X є нормальним. Параметри теоретичного розподілу вибираємо виходячи з принципу максимальної правдоподібності: $m = 0{,}5508$; $\sigma = 0{,}2812$.

Для застосування ***критерію згоди Колмогорова*** знайдемо максимальну різницю між теоретичною і вибірковою функціями розподілу. Оскільки $\widetilde{F}(x)$ − кусково-постійна функція, то зрозуміло, що $\max\limits_{\forall x}\left|F(x) - \widetilde{F}(x)\right|$ може досягатися тільки в точках стрибків $\widetilde{F}(x)$, тобто в серединах інтервалів $\widetilde{x}_k$. Обчислимо значення $F(x)$ і $\widetilde{F}(x)$ в точках $\widetilde{x}_k$ (табл. 16.3). Теоретична функція нормального розподілу $F(x)$ обчислюється за допомогою інтеграла Лапласа (табл. Д 1.1): обчислюємо $u = (x - m) / \sigma$, знаходимо за таблицями $\Phi(u)$, і тоді $F(x) = \Phi(u) + 0{,}5$.

Таблица 16.3

k	$\tilde{x}_k$	$F(\tilde{x}_k)$	$\tilde{F}(\tilde{x}_k - 0)$	$\tilde{F}(\tilde{x}_k + 0)$
1	0,102	0,055	0	0,16
2	0,306	0,192	0,16	0,24
3	0,510	0,5	0,24	0,52
4	0,714	0,719	0,52	0,88
5	0,918	0,9	0,88	1

Максимальна за модулем різниця між теоретичною і вибірковою функціями розподілу досягається на 3-му інтервалі між $F(\tilde{x}_k)$ і $\tilde{F}(\tilde{x}_k - 0)$ і дорівнює d = 0,26. Величина $\lambda = d\sqrt{m} = 0{,}581$. Порівняємо цю величину з квантилями λ-розподілу Колмогорова (табл. Д 1.5). Виберемо рівень значущості p = 0,3. Для нього λ_{1-p} = 0,97. Оскільки λ = 0,581 < λ_{1-p} = 0,97, то на рівні значущості p = 0,3 можна прийняти гіпотезу про нормальний розподіл досліджуваної випадкової величини.

Перевіримо тепер гіпотезу про нормальний розподіл X за допомогою ***критерію згоди Пірсона***. Зведемо результати обчислень в таблицю 16.4. Тут у 1-му стовпці − номер інтервалу; у 2-му − його межі; у 3-му − теоретична ймовірність попадання X в k-й інтервал: $p_k = F(b_k) - F(a_k)$, вона обчислюється за допомогою інтеграла Лапласа; у 4-му − найімовірніше число попадань в інтервал np_k і в 5-му − їх досвідчене число n_k. В останньому рядку для контролю підраховуються суми елементів стовпців. Сума ймовірностей має дорівнювати 1, а сума теоретичних і емпіричних чисел попадань в інтервали − загальному числу дослідів n.

Таблица 16.4

k	$[a_k, b_k]$	p_k	np_k	n_k
1	$[-\infty, 0{,}204]$	0,109	2,73	4
2	[0,204, 0,408]	0,196	4,89	2
3	[0,408, 0,612]	0,282	7,05	7
4	[0,612, 0,816]	0,239	5,98	9
5	$[0{,}816, +\infty]$	0,174	4,35	3
Σ		1	25	25

Обчислимо тепер відносну суму квадратів різниць n_k і np_k: $\sum_{k=1}^{m}\frac{(n_k-np_k)^2}{np_k}=4{,}24.$ Виберемо рівень значущості p = 0,1, оскільки в таблиці Д 1.4 є квантилі для цього значення. Квантиль χ^2-розподілу Пірсона $\chi^2_{1-p}(2)=4{,}60517.$ Оскільки 4,24 < 4,60517, то на рівні значущості p = 0,1 можна прийняти гіпотезу про нормальність X, оскільки відхилення теоретичного числа потраплянь від емпіричного є незначним.

Завдання 16

Для заданого простого статистичного ряду з 50 значень:

- ✓ побудувати статистичну сукупність і гістограму;
- ✓ знайти точкові оцінки математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення;
- ✓ на рівні значущості p = 0,1 знайти інтервальні оцінки для m_x і D_x;
- ✓ добрати теоретичний розподіл і його параметри;
- ✓ перевірити правильність підбору за λ-критерієм Колмогорова на рівні значущості p = 0,2 і за критерієм Пірсона на рівні значущості p = 0,1.

Варіант 1

0,09660613	0,08419847	0,23932824	0,11871773	0,10636346
0,00151910	0,11924561	0,19048133	0,52211282	0,18433321
0,28231251	0,27695469	0,05995975	0,19510636	0,04920299
0,22857343	0,20314453	0,00558038	0,69134921	0,58191214
0,27307378	0,08704231	0,34278878	0,14288860	0,02861018
0,40477128	0,03877748	0,05033742	0,00788252	0,00355785
0,07267155	0,19713518	0,43831865	0,11277615	0,37343311
0,24592553	0,20478204	0,44006968	0,39615475	0,28645553
0,34851684	0,30071170	0,48849760	0,17845424	0,28561403
0,10022191	0,23268828	0,11748919	0,06791704	0,03517651

Варіант 2

0,85972704	0,22426804	0,64053674	0,73694307	1,42895909
0,33816902	2,78036007	1,59011071	0,00489903	0,07144899
0,79360158	0,89402238	0,97904959	0,35895016	0,99967819
0,25160869	0,76516767	0,16795933	0,34121746	0,13139327
0,62244800	0,59672391	2,65397040	0,74287804	0,44535844
0,16471227	0,66217127	0,34555942	0,14014286	0,53431196
0,12455694	1,04749303	0,49147862	0,32859480	0,27654144
0,00777285	0,35894981	0,10123014	0,19049959	0,62867451
0,31073445	0,95437371	0,11006284	1,29109357	1,37800159
0,66571304	0,81532406	0,10242850	0,44261743	0,13006961

Варіант 3

−0,75434890	−3,50558337	−1,30942895	0,96185688	0,71346803
3,87510710	−2,11138267	−3,91708223	−0,12477987	2,47554556
3,28072026	−3,72981201	0,27401337	−3,70644602	−0,04639007
3,74160469	0,45143207	−0,50415375	−2,48100639	4,24982822
0,29100361	−2,12714150	−2,01672359	−1,02062133	1,81441675
3,14681119	−0,15726240	0,11939123	1,56604470	5,37043714
0,86208872	−2,78153369	2,86242818	0,02982024	0,32538297
−1,71755427	1,62451886	1,04376002	0,16531274	−0,78598644
−2,48492701	1,44479481	0,55813202	1,12661397	−0,38900565
−4,84978654	−0,12684640	−1,85846073	−0,76218072	−0,37013039

Варіант 4

2,70263914	3,07374062	3,59928585	0,90287492	1,22010237
0,07402082	0,73831486	2,31110928	1,77876712	1,98422726
0,38899817	2,87444053	0,20960041	−0,26677270	0,91787631
2,13041077	3,59382167	−0,04512567	2,32961098	0,90683608
0,28418195	−0,51755934	1,96195863	3,97514566	0,84581290
2,15992604	1,34599058	3,95539226	3,89907290	0,40978563
−0,01973806	2,33102802	3,02300803	3,63279034	−0,45804027
3,41310560	2,89415135	0,92273777	1,27509782	2,15517315
0,01788158	3,09401237	3,76560369	1,86808943	1,09754065
2,56515775	0,15654988	1,17010143	4,10261591	3,08782452

Варіант 5

2,94436974	0,76474916	0,56879056	2,98906286	3,01138222
1,82281121	2,52816317	1,02628453	1,32957976	0,78184680
0,72745460	0,36158031	1,95228349	1,87656197	0,57087551
2,23823463	0,37366285	1,84773134	2,15490076	0,65358327
1,37572047	2,58111312	3,14127619	0,79265752	1,34403787
1,75873241	2,07502965	2,89246174	1,52098984	2,34130649
2,45705448	1,20046302	0,49854370	3,15872002	1,60639272
3,11305582	2,70080705	1,52114271	2,83134294	0,69857278
1,06462175	2,67657866	2,39563846	2,99792444	0,38691170
0,51450819	2,53533961	0,45518229	1,33752552	2,17569340

Варіант 6

2,57080550	0,60208179	0,36612333	0,17794201	3,58253982
1,92248159	1,72482019	2,02865685	2,55788579	2,26398595
0,93108046	1,14142584	3,36540550	0,85436672	3,67674667
3,83292746	2,52908906	3,24728090	2,04973433	1,86324503
3,40843279	2,92307506	2,96082073	0,37167988	2,41628512
3,11405580	1,04623112	1,85481306	0,60283255	0,74701419
3,48084676	0,71223344	2,95864804	0,91414857	0,58396029
1,70698843	3,22226780	1,00262735	3,05931123	3,86508955
2,73248727	3,31757300	3,36114722	3,38185451	1,73739069
1,07452672	3,09604270	1,11068869	2,12394199	2,34199292

Варіант 7

0,13261768	−4,37706162	−2,17794530	−4,60603785	2,67292200
−0,48184629	−0,05553624	−1,29925433	0,83425490	−1,22604848
−5,40466077	1,78051301	−4,01313215	0,12283151	1,57349675
−0,53722890	−2,17776790	−2,83846980	−1,55279332	−1,67278188
−1,77042201	0,04941801	−4,33695430	−3,06550354	−1,34121827
4,75063247	3,11334227	−1,32549686	−0,26866442	−1,44902652
1,91473177	−2,09657035	−0,43432779	−0,54378425	−1,49598201
−2,10837193	−5,23676819	−3,83076907	−2,21201104	−4,48940484
−0,11449131	−2,26604242	−2,71525466	0,02293484	2,33813663
1,96510018	−2,36079606	4,06451867	1,47443669	−1,53664286

Варіант 8

1,99439934	2,67300102	1,87989299	1,21900469	1,26670725
3,12424104	2,63013053	1,55184574	2,83764194	2,97429442
2,46106697	3,77322210	1,62377918	3,44455284	0,98663721
1,06892153	2,30453994	3,70383805	3,69795122	0,62128156
2,59546512	3,31490680	1,94357286	0,69354327	1,22851757
3,65569568	1,16652592	2,58347015	2,33528570	2,03167891
1,92025917	3,56273898	3,05415368	1,55637685	2,78346917
3,22117024	1,89637923	3,82487428	2,65281612	3,14155569
2,23610468	2,11908388	2,13549619	2,07376833	0,41451754
0,89094366	1,09448253	0,34316308	2,22112162	2,74661146

Варіант 9

0,43101490	3,04808532	6,45643599	0,00835894	0,63712966
4,67651326	0,34317220	−1,76634032	1,47259807	1,97797079
1,32685405	1,74737355	2,46664299	−0,95157810	3,37768303
0,45198613	3,87884973	−1,63805944	1,80566874	2,68893879
−1,30612891	3,34914268	2,94128006	5,24590711	−1,00177526
5,06115338	1,64890745	4,69917051	0,99471572	4,12883203
2,86704588	−1,68606538	−2,70852724	1,78817400	−1,48451023
1,13312708	3,23291718	2,53912727	3,66708938	−2,87419900
2,49583284	1,05613441	3,46467894	4,84251607	3,30381549
1,57628992	3,24349590	4,57467695	0,70580197	3,76779403

Варіант 10

−2,01822569	−5,57082698	7,66531067	2,11627215	2,23289306
3,46441430	1,01382499	1,15421856	−2,43147568	4,00407917
−2,47807259	−0,14621439	6,08695318	0,98784339	0,34202486
0,18440614	4,26758281	1,32419481	0,99548369	1,90027862
−3,28312552	4,02386855	1,04764103	3,29951566	1,44627146
3,44681020	0,05408037	4,45632376	1,21116680	2,34714432
−1,21230676	−0,45616896	−2,06163402	2,06189674	−3,82810052
1,11848690	3,08297021	1,63158010	2,57535996	3,49449108
−1,70512248	2,83503630	5,52279610	−0,91876820	−1,14635163
−0,47806044	1,29626225	−4,01287357	2,29985017	1,79129433

ТЕМА 17. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Іншим важливим завданням математичної статистики є побудова теоретичної кривої за заданими експериментальними точками. Основою для такої побудови служить **метод найменших квадратів (МНК)**: теоретична крива повинна проходити так, щоб сума квадратів її відхилень від експериментальних точок була мінімальною. Зазвичай вигляд теоретичної кривої відомий: вона задається виходячи з апріорних відомостей про досліджуване явище і залежить від аргументу x і параметрів $b_0, b_1, ..., b_m$. За рахунок варіювання коефіцієнтами $b_0, b_1, ..., b_m$ досягають найкращого наближення кривої до експериментальних точок.

Якщо про вигляд теоретичної кривої нічого невідомо, то найчастіше її беруть у вигляді полінома будь-якого m-го степеня:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m. \tag{17.1}$$

Позначимо експериментальні точки $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), ..., M_n(x_n, y_n)$.

Сума квадратів відхилень має вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x - ... - b_m x^m)^2. \tag{17.2}$$

Знайдемо мінімум цієї функції $L \to \min$. Функція L є квадратичною щодо коефіцієнтів b_k, і вона невід'ємна. Тому в неї існує єдиний локальний екстремум, і він є глобальним мінімумом функції L. Знаходимо цей мінімум, прирівнюючи нулю часткові похідні $\partial L / \partial b_k$. Тоді коефіцієнти знаходяться з розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь МНК:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + ... + b_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + ... + b_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ ... \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + ... + b_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i. \end{cases} \tag{17.3}$$

Приклад 17.1. Побудувати за допомогою МНК теоретичну криву у вигляді параболи 2-го порядку за 9 експериментальними точками, наведеними в таблиці 17.1. Теоретична крива має вигляд (17.1) з m = 2.

Таблиця 17.1

i	x_i	y_i
1	−4,0	32,990
2	−3,0	21,597
3	−2,0	15,150
4	−1,0	7,911
5	0,0	2,473
6	1,0	2,995
7	2,0	2,108
8	3,0	9,612
9	4,0	16,239

Обчислимо за даними таблиці матрицю коефіцієнтів СЛАУ (17.3)

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{9} x_i & \sum_{i=1}^{9} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{9} x_i & \sum_{i=1}^{9} x_i^2 & \sum_{i=1}^{9} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{9} x_i^2 & \sum_{i=1}^{9} x_i^3 & \sum_{i=1}^{9} x_i^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 60 \\ 0 & 60 & 0 \\ 60 & 0 & 708 \end{pmatrix} \tag{17.4}$$

і вектор правих частин

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{9} y_i \\ \sum_{i=1}^{9} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{9} x_i^2 y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111{,}075 \\ -133{,}959 \\ 1148{,}483 \end{pmatrix}. \tag{17.5}$$

Розв’язуючи СЛАР $AB = C$, знаходимо вектор коефіцієнтів:

$$B = \begin{pmatrix} 3{,}51087 \\ -2{,}23265 \\ 1{,}32462 \end{pmatrix}. \tag{17.6}$$

Таким чином, теоретична крива має вигляд

$$y = 3{,}51087 - 2{,}23265x + 1{,}32462x^2. \qquad (17.7)$$

На рис. 17.1 наведено цю криву і показані експериментальні точки.

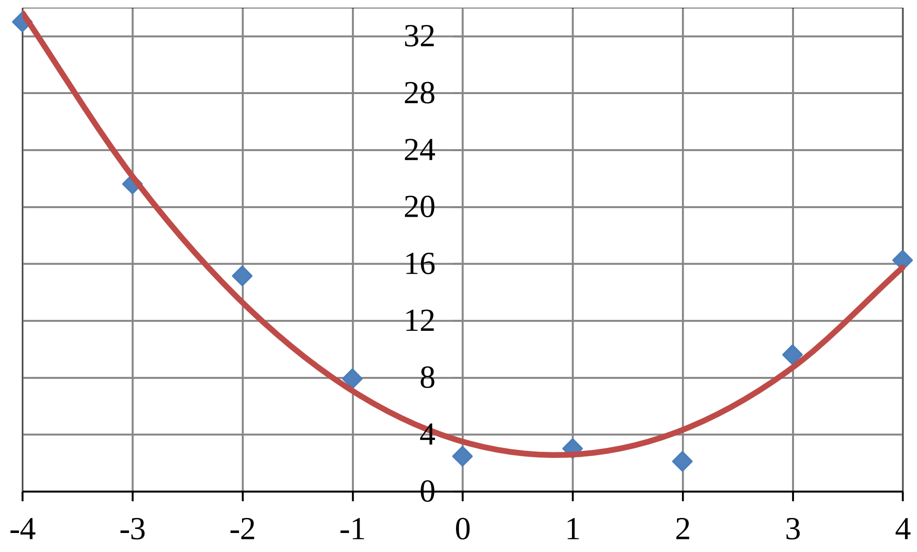


Рисунок 17.1

Завдання 17

За допомогою МНК побудувати теоретичну криву за заданими експериментальними точками, обмежуючись параболою 2-го порядку. Абсциси x_i у всіх варіантах однакові і наведені на початку таблиці.

N	x_k								
	−4,0	−3,0	−2,0	−1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0
1	16,058	7,739	3,769	1,042	2,157	4,501	10,830	19,427	31,16
2	26,705	15,821	10,336	7,475	5,209	7,055	14,391	22,937	33,12
3	−15,867	−7,058	−1,503	1,151	2,562	2,109	0,129	−6,188	−13,7
4	30,913	19,951	10,676	6,218	3,858	5,672	10,817	17,522	28,04
5	−20,609	−10,220	−4,448	0,480	4,673	3,325	1,986	−5,131	−12,5
6	3,065	4,345	6,260	5,367	2,746	0,207	−2,040	−6,715	−8,81
7	13,366	8,406	6,265	4,334	4,065	6,973	8,624	10,351	15,97
8	−0,194	3,466	7,187	7,352	6,354	2,073	−0,639	−7,175	−15,7
9	−23,605	−14,082	−5,445	0,451	2,443	2,132	−0,801	−3,568	−13,1
10	−21,356	−9,982	−0,529	2,870	4,161	−0,733	−6,691	−19,341	−33,2

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що є предметами теорії ймовірностей і математичної статистики? Як вони пов'язані між собою?
2. Розкрийте сутність понять: «експеримент», «подія». У чому полягає їх зв'язок?
3. Які події називають вірогідними, неможливими та випадковими?
4. Класифікуйте випадкові події.
5. Що називають простором елементарних подій?
6. Які випадкові події називаються елементарними та складеними?
7. Як визначають та позначають суму, добуток випадкових подій, повну групу подій?
8. За яких умов випадкові події утворюють повну групу?
9. Наведіть закони для операцій додавання, множення.
10. Що є предметом комбінаторики?
11. Наведіть класифікацію множин.
12. Які множини називають переставленням, розміщенням, комбінаціями? Як позначають та обчислюють їхню кількість?
13. Що називають класичною імовірністю та які її властивості?
14. Як визначають і в яких випадках використовують геометричне та статистичне визначення імовірності?
15. Як визначають та позначають частіть випадкової події?
16. Яка ймовірність називається умовною? Наведіть її властивості.
17. Сформулюйте та запишіть теореми додавання імовірностей сумісних та несумісних подій?
18. Сформулюйте та запишіть теореми множення імовірностей залежних і незалежних випадкових подій.
19. Які умови повинна задовольняти подія, щоб її імовірність можна було знаходити за формулою повної імовірності? Який вигляд має ця формула?
20. Коли застосовують формулу Байєса та як її записують?

21. За якою формулою можна обчислити імовірність появи хоча б однієї з n сумісних подій?

22. Яка послідовність випробувань утворює схему Бернуллі?

23. Запишіть формулу Бернуллі для появи події A: а) m разів; б) від m_i до m_j разів.

24. Як можна знайти найімовірніше значення числа появ події A у схемі Бернуллі?

25. Що називають найімовірнішою кількістю?

26. Коли доцільно застосовувати локальну або інтегральну теореми Лапласа, формулу Пуассона?

27. Як визначаються і які мають властивості функції Гаусса та Лапласа?

28. Що називають випадковою величиною? Коли вона є дискретною або неперервною?

29. З якою метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей? Як він формулюється?

30. Якими способами можна задати закон розподілу дискретної випадкової величини?

31. Що називають інтегральною функцією і коли вона використовується? Наведіть її властивості.

32. Коли застосовуються числові характеристики випадкових величин? Що вони характеризують?

33. За якими формулами обчислюють числові характеристики дискретних випадкових величин?

34. Наведіть основні властивості математичного сподівання та дисперсії дискретної випадкової величини.

35. Що називається диференціальною функцією неперервної випадкові величини? Як вона пов’язана з інтегральною функцією?

36. Які властивості має диференціальна функція неперервної випадкової величини?

37. За якими формулами можна обчислити імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал [$\alpha; \beta$], використовуючи інтегральну або диференціальну функції розподілу?

38. Які числові характеристики існують для неперервних випадкових величин та що характеризує кожна з них?

39. За якими формулами обчислюють числові характеристики неперервних випадкових величин?

40. Укажіть основні закони розподілу дискретної випадкової величини та умови їх використання.

41. Укажіть основні закони розподілу неперервної випадкової величини та їх вигляд.

42. Чому дорівнюють числові характеристики основних законів розподілу дискретних та неперервних випадкових величин?

43. Які закони розподілу застосовуються у задачах статистичного контролю якості?

44. Коли математичне сподівання і дисперсія є однаковими та дорівнюють a?

45. Наведіть граничні випадки застосування законів розподілу Пуассона, біноміального та гіпергеометричного.

46. Що називають функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин? Наведіть її властивості.

47. Як визначається та подається закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин?

48. Що є характеристикою системи неперервних випадкових величин? Які вона має властивості?

49. За якими формулами обчислюють математичне сподівання систем двох дискретних і неперервних випадкових величин?

50. З якою метою застосовують кореляційний момент? Яких він набуває значень та який їх зміст?

51. Що характеризує коефіцієнт кореляції? Наведіть його властивості.

52. Коли випадкові величини називають корельованими та некорельованими?

53. Що є достатньою умовою незалежності випадкових величин?

54. Як визначаються та записуються умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин? Запишіть їх числові характеристики.

55. Як визначаються та записуються умовні закони розподілу системи двох неперервних випадкових величин? Запишіть їх числові характеристики.

56. Розкрийте сутність поняття функції випадкових величин.

57. Як знайти закон розподілу функції $Y = \varphi(X)$, якщо X – дискретна або неперервна випадкова величина?

58. За якими формулами обчислюють числові характеристики функції дискретного та неперервного випадкового аргументу?

59. Як визначають початкові та центральні моменти розподілу?

60. Що називають функцією одного випадкового аргументу?

61. За якими формулами обчислюють числові характеристики функції одного дискретного випадкового аргументу?

62. Як знайти щільність імовірностей функції одного неперервного випадкового аргументу, якщо $\alpha(x)$ є монотонно зростаючою функцією?

63. Наведіть загальну методику знаходження щільності ймовірностей функції одного неперервного випадкового аргументу.

64. Які особливості знаходження диференціальної функції у випадку немонотонної функції?

65. У чому полягає закон великих чисел? Які теореми він об'єднує?

66. З якою метою застосовується нерівність Чебишова?

67. Сформулюйте теорему Чебишова,

68. У чому полягає теорема Бернуллі?

69. Яка випадкова величина називається комплексною? Наведіть її властивості.

70. Сформулюйте центральну граничну теорему.

71. У чому полягає теорема Муавра – Лапласа?

72. Що є предметом математичної статистики?

73. У чому полягають основні задачі математичної статистики?

74. Що називають статистичною, генеральною та вибірковою сукупністю, обсягом цих сукупностей?

75. Які вибірки називають повторними та безповторними?

76. Що є альтернативою вибірки?

77. Що називають простою випадковою вибіркою? Як здійснюється проста випадкова вибірка за допомогою випадкових чисел?

78. У чому полягає необхідна умова застосування вибірки замість генеральної сукупності?

79. Які існують способи відбору у вибірку?

80. Розкрийте сутність поняття статистичного ряду розподілу. Наведіть його класифікацію.

81. Дайте визначення поняттю «варіаційний ряд» і його характеристикам: варіантам і частотам.

82. Як ще називають частоти або відносні частоти варіант?

83. Як визначають та позначають емпіричну функцію розподілу? Які основні властивості цієї функції?

84. Наведіть правила побудови полігону та гістограми частот.

85. Як визначають статистичні оцінки числових характеристик та умови їх незсуваності, ефективності, спроможності?

86. Які статистичні оцінки називають точковими та інтервальними?

87. Наведіть властивості вибіркової середньої.

88. Запишіть формули для визначення степеневої середньої вибірки, середньої квадратичної, середньої гармонічної та середньої геометричної вибірки.

89. Коли застосовуються точкові оцінки та які вони мають властивості?

90. У яких випадках використовують виправлену вибіркову дисперсію і як вона пов'язана з вибірковою дисперсією?

91. Що називають вибірковим середнім квадратичним відхиленням (стандартом)?

92. Розкрийте сутність понять: «довірчий інтервал», «надійність».

93. Які оцінки називаються інтервальними та що вони дозволяють встановити?

94. Який порядок дій знаходження довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини при відомому та невідомому середньому квадратичному відхиленні?

95. Як знайти довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини за «виправленим» вибірковим середнім квадратичним відхиленням?

96. Які гіпотези називають статистичними, основними та альтернативними, простими та складеними?

97. Що таке помилки першого та другого роду перевірки статистичної гіпотези? Який зміст рівня значущості α?

98. Що називають статистичним критерієм, критичною областю та критичною точкою перевірки гіпотези? Який зміст потужності критерію перевірки гіпотези?

99. Дайте визначення поняттю «критерій згоди».

100. Як знаходять теоретичні частоти нормального розподілу для перевірки гіпотези за критерієм згоди Пірсона?

101. У чому полягають умови застосування критерію згоди Пірсона?

102. Як знаходять відношення за критерієм згоди Романовського?

103. Наведіть алгоритм застосування критерію згоди Колмогорова.

104. Як знаходять емпіричні функції розподілу для перевірки гіпотези за критерієм згоди Колмогорова?

105. Маємо криву $Y = f(X, a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Що називають вирівнюванням емпіричних даних вздовж цієї кривої?

106. Яка суть методу найменших квадратів знаходження невідомих параметрів функціональної залежності випадкових величин?

107. Який порядок дій треба виконати при знаходженні параметрів лінійної функції за методом найменших квадратів?

108. У чому полягають особливості застосування методу найменших квадратів при знаходженні параметрів параболічної функціональної залежності?

ДОДАТКИ

Додаток 1. Інтеграл Лапласа і щільність нормального розподілу

Таблиця Д 1.1 – Інтеграл Лапласа Φ(*x*) і щільність нормального розподілу φ(*x*)

x	Φ(*x*)	φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	φ(*x*)
0,00	0,00000	0,39894	0,46	0,17724	0,35889	0,92	032121	0,26129
0,01	0,00399	0,39892	0,47	0,18082	0,35723	0,93	0,32381	0,25888
0,02	0,00798	0,39886	0,48	0,18439	0,35553	0,94	0,32639	0,25647
0,03	0,01197	0,39876	0,49	0,18793	0,35381	0,95	0,32894	0,25406
0,04	0,01595	0,39862	0,50	0,19146	0,35207	0,96	0,33147	0,25164
0,05	0,01994	0,39844	0,51	0,19497	0,35029	0,97	0,33398	0,24923
0,06	0,02392	0,39822	0,52	0,19847	0,34849	0,98	0,33646	0,24681
0,07	0,02790	0,39797	0,53	0,20194	0,34667	0,99	0,33891	0,24439
0,08	0,03188	0,39767	0,54	0,20540	0,34482	1,00	0,34134	0,24197
0,09	0,03586	0,39733	0,55	0,20884	0,34294	1,01	0,34375	0,23955
0,10	0,03983	0,39695	0,56	0,21226	0,34105	1,02	0,34614	0,23713
0,11	0,04380	0,39654	0,57	0,21566	0,33912	1,03	0,34849	0,23471
0,12	0,04776	0,39608	0,58	0,21904	0,33718	1,04	0,35083	0,23230
0,13	0,05172	0,39559	0,59	0,22240	0,33521	1,05	0,35314	0,22988
0,14	0,05567	0,39505	0,60	0,22575	0,33322	1 06	0,35543	0,22747
0,15	0,05962	0,39448	0,61	0,22907	0,33121	1,07	0,35769	0,22506
0,16	0,06356	0,39387	0,62	0,23237	0,32918	1,08	0,35993	0,22265
0,17	0,06749	0,39322	0,63	0,23565	0,32713	1,09	0,36214	0,22025
0,18	0,07142	0,39253	0,64	0,23891	0,32506	1,10	0,36433	0,21785
0,19	0,07535	0,39181	0,65	0,24215	0,32297	1,11	0,36650	0,21546
0,20	0,07926	0,39104	0,66	0,24537	0,32086	1,12	0,36864	0,21307
0,21	0,08317	0,39024	0,67	0,24857	0,31874	1,13	0,37076	0,21069
0,22	0,08706	0,38940	0,68	0,25175	0,31659	1,14	0,37286	0,20831
0,23	0,09095	0,38853	0,69	0,25490	0,31443	1,15	0,37493	0,20594
0,24	0,09483	0,38762	0,70	0,25804	0,31225	1,16	0,37698	0,20357
0,25	0,09871	0,38667	0,71	0,26115	0,31006	1,17	0,37900	0,20121
0,26	0,10257	0,38568	0,72	0,26424	0,30785	1,18	0,38100	0,19886
0,27	0,10642	0,38466	0,73	0,26730	0,30563	1,19	0,38298	0,19652
0,28	0,11026	0,38361	0,74	0,27035	0,30339	1,20	0,38493	0,19419
0,29	0,11409	0,38251	0,75	0,27337	0,30114	1,21	0,38686	0,19186
0,30	0,11791	0,38139	0,76	0,27637	0,29887	1,22	0,38877	0,18954
0,31	0,12172	0,38023	0,77	0,27935	0,29659	1,23	0,39065	0,18724
0,32	0,12552	0,37903	0,78	0,28230	0,29431	1,24	0,39251	0,18494
0,33	0,12930	0,37780	0,79	0,28524	0,29200	1,25	0,39435	0,18265
0,34	0,13307	0,37654	0,80	0,28814	0,28969	1,26	0,39617	0,18037
0,35	0,13683	0,37524	0,81	0,29103	0,28737	1,27	0,39796	0,17810
0,36	0,14058	0,37391	0,82	0,29389	0,28504	1,28	0,39973	0,17585
0,37	0,14431	0,37255	0,83	0,29673	0,28269	1,29	0,40147	0,17360

Продовження табл. Д 1.1

x	Φ(x)	φ(x)	x	Φ(x)	φ(x)	x	Φ(x)	φ(x)
0,38	0,14803	0,37115	0,84	0,29955	0,28034	1,30	0,40320	0,17137
0,39	0,15173	0,36973	0,85	0,30234	0,27798	1,31	0,40490	0,16915
0,40	0,15542	0,36827	0,86	0,30511	0,27562	1,32	0,40658	0,16694
0,41	0,15910	0,36678	0,87	0,30785	0,27324	1,33	0,40824	0,16474
0,42	0,16276	0,36526	0,88	0,31057	0,27086	1,34	0,40988	0,16256
0,43	0,16640	0,36371	0,89	0,31327	0,26848	1,35	0,41149	0,16038
0,44	0,17003	0,36213	0,90	0,31594	0,26609	1,36	0,41309	0,15822
0,45	0,17364	0,36053	0,91	0,31859	0,26369	1,37	0,41466	0,15608
1,38	0,41621	0,15395	1,90	0,47128	0,06562	2,42	0,49224	0,02134
1,39	0,41774	0,15183	1,91	0,47193	0,06438	2,43	0,49245	0,02083
1,40	0,41924	0,14973	1,92	0,47257	0,06316	2,44	0,49266	0,02033
1,41	0,42073	0,14764	1,93	0,47320	0,06195	2,45	0,49286	0,01984
1,42	0,42220	0,14556	1,94	0,47381	0,06077	2,46	0,49305	0,01936
1,43	0,42364	0,14350	1,95	0,47441	0,05959	2,47	0,49324	0,01888
1,44	0,42507	0,14146	1,96	0,47500	0,05844	2,48	0,49343	0,01842
1,45	0,42647	0,13943	1,97	0,47558	0,05730	2,49	0,49361	0,01797
1,46	0,42785	0,13742	1,98	0,47615	0,05618	2,50	0,49379	0,01753
1,47	0,42922	0,13542	1,99	0,47670	0,05508	2,51	0,49396	0,01709
1,48	0,43056	0,13344	2,00	0,47725	0,05399	2,52	0,49413	0,01667
1,49	0,43189	0,13147	2,01	0,47778	0,05292	2,53	0,49430	0,01625
1,50	0,43319	0,12952	2,02	0,47831	0,05186	2,54	0,49446	0,01585
1,51	0,43448	0,12758	2,03	0,47882	0,05082	2,55	0,49461	0,01545
1,52	0,43574	0,12566	2,04	0,47932	0,04980	2,56	0,49477	0,01506
1,53	0,43699	0,12376	2,05	0,47982	0,04879	2,57	0,49492	0,01468
1,54	0,43822	0,12188	2,06	0,48030	0,04780	2,58	0,49506	0,01431
1,55	0,43943	0,12001	2,07	0,48077	0,04682	2,59	0,49520	0,01394
1,56	0,44062	0,11816	2,08	0,48124	0,04586	2,60	0,49534	0,01358
1,57	0,44179	0,11632	2,09	0,48169	0,04491	2,61	0,49547	0,01323
1,58	0,44295	0,11450	2,10	0,48214	0,04398	2,62	0,49560	0,01289
1,59	0,44408	0,11270	2,11	0,48257	0,04307	2,63	0,49573	0,01256
1,60	0,44520	0,11092	2,12	0,48300	0,04217	2,64	0 49585	0,01223
1,61	0,44630	0,10915	2,13	0,48341	0,04128	2,65	0,49598	0,01191
1,62	0,44738	0,10741	2,14	0,48382	0,04041	2,66	0,49609	0,01160
1,63	0,44845	0,10567	2,15	0,48422	0,03955	2,67	0,49621	0,01130
1,64	0,44950	0,10396	2,16	0,48461	0,03871	2,68	0,49632	0,01100
1,65	0,45053	0,10226	2,17	0,48500	0,03788	2,69	0,49643	0,01071
1,66	0,45154	0,10059	2,18	0,48537	0,03706	2,70	0,49653	0,01042
1,67	0,45254	0,09893	2,19	0,48574	0,03626	2,71	0,49664	0,01014
1,68	0,45352	0,09728	2,20	0,48610	0,03547	2,72	0,49674	0,00987
1,69	0,45449	0,09566	2,21	0,48645	0,03470	2,73	0,49683	0,00961
1,70	0,45543	0,09405	2,22	0,48679	0,03394	2,74	0,49693	0,00935
1,71	0,45637	0,09246	2,23	0,48713	0,03319	2,75	0,49702	0,00909
1,72	0,45728	0,09089	2,24	0,48745	0,03246	2,76	0,49711	0,00885
1,73	0,45818	0,08933	2,25	0,48778	0,03174	2,77	0,49720	0,00861

Продовження табл. Д 1.1

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
1,74	0,45907	0,08780	2,26	0,48809	0,03103	2,78	0,49728	0,00837
1,75	0,45994	0,08628	2,27	0,48840	0,03034	2,79	0,49736	0,00814
1,76	0,46080	0,08478	2,28	0,48870	0,02965	2,80	0,49744	0,00792
1,77	0,46164	0,08329	2,29	0,48899	0,02898	2,85	0,49781	0,00687
1,78	0,46246	0,08183	2,30	0,48928	0,02833	2,90	049813	0,00595
1,79	0,46327	0,08038	2,31	0,48956	0,02768	2,95	0,49841	0,00514
1,80	0,46407	0,07895	2,32	0,48983	0,02705	3,00	0,49865	0,00443
1,81	0,46485	0,07754	2,33	0,49010	0,02643	3,10	0,49903	0,00327
1,82	0,46562	0,07614	2,34	0,49036	0,02582	3,20	0,49931	0,00238
1,83	0,46638	0,07477	2,35	0,49061	0,02522	3,30	0,49952	0,00172
1,84	0,46712	0,07341	2,36	0,49086	0,02463	3,40	0,49966	0,00123
1,85	0,46784	0,07206	2,37	0,49111	0,02406	3,50	0,49977	0,00087
1,86	0,46856	0,07074	2,38	0,49134	0,02349	3,60	0,49984	0,00061
1,87	0,46926	0,06943	2,39	0,49158	0,02294	3,80	0,49993	0,00029
1,88	0,46995	0,06814	2,40	0,49180	0,02239	4,00	0,49997	0,00013
1,89	0,47062	0,06687	2,41	0,49202	0,02186	4,50	0,50000	0,00002

Додаток 2. Розподіл Пуассона $P_n(m)$

Таблиця Д 1.2 – Розподіл Пуассона $P_n(m) = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$

m	a								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,065310	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287	347610	359463	365913
2	004524	016375	033337	353626	065816	098786	121663	143785	164661
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757	028388	038343	049398
4	000004	000055	000250	000715	001580	002764	004968	007669	011115
5		000002	000015	000057	000158	000356	000696	001227	002001
6			000001	000004	000013	000036	000081	000164	000300
7					000001	000003	000008	000019	000039
8							000001	000002	000004

Продовження табл. Д 1.2

m	a								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,367879	0,135335	0,49787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	367879	270671	149361	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	183940	270671	224042	146525	084224	044618	022341	010735	004998
3	061313	180447	224042	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	015328	090224	168031	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	003066	036089	100819	156293	175467	160623	127717	091604	060727
6	000511	012030	050409	104196	146223	160623	149003	122138	091090
7	000073	003437	021604	059540	104445	137677	149003	139587	117126
8	000009	000859	008102	029770	065278	103258	130377	138587	131756
9	000001	000191	002701	013231	036266	068838	101405	124077	131756
10		000038	000810	005292	018138	041303	070983	099262	118580
11		000007	000221	001295	008242	022529	045171	072190	097020
12		000001	000055	000642	003434	011264	026350	048127	072765
13			000013	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14			000003	000056	000472	002228	007094	016924	032384
15			000001	000015	000157	000891	003311	009026	019431
16				000004	000049	000334	001448	004513	010930
17				000001	000014	000118	000596	002124	005786
18					000004	000039	000232	000944	002893

Додаток 3. Основні формули диференціального та інтегрального числення

3.1. Основні формули диференціального числення

Правила диференціювання

$c' = 0,$

$(cu)' = cu',$

$(u \pm v)' = u' \pm v',$

де $c = \text{const}$, $u = u(x)$, $v = v(x)$,

$(u \cdot v)' = u'v + uv',$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$

$(f(u))_x' = f_u' \cdot u_x'.$

Основні формули диференціювання

$(u^n)' = nu^{n-1}u', n \in R,$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u},$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u',$

$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u},$

$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$

$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2},$

де $u = u(x)$,

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a},$

$(a^n)' = a^n \ln a \cdot u',$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u',$

$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u},$

$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$

$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$

3.2. Основні формули інтегрального числення

Правила інтегрування

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$
2. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx.$
3. Якщо $x = \varphi(t)$, то $\int f(x)dx = \int f[\varphi(\mathrm{t})] \cdot \varphi'(t)dt.$

Таблиця невизначених інтегралів

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \mathrm{ctg} x dx = \ln \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\ (x < a),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^n dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln \cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ (x > a),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

Формула інтегрування частинами

$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$ де $u(x)$, $v(x)$ – диференціальні функції.

Додаток 4. Квантилі *t*-розподілу Стьюдента $t^2_p(f)$

Таблиця Д 1.3 – Квантилі *t*-розподілу Стьюдента $t^2_p(f)$

f	*p*							
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999	0,9995
1	3,0776	6,3137	12,706	31,820	63,656	127,32	318,30	636,619
2	1,8856	2,9199	4,3026	6,9645	9,9248	14,089	22,327	31,5990
3	1,6377	2,3533	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,214	12,9239
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5975	7,1731	8,61030
5	1,4758	2,0150	2,5705	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,86883
6	1,4397	1,9431	2,4469	3,1426	3,7074	4,3168	5,2076	5,95882
7	1,4149	1,8945	2,3646	2,9979	3,4994	4,0293	4,7852	5,40790
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8964	3,3553	3,8325	4,5007	5,04131
9	1,3830	1,8331	2,2621	2,8214	3,2498	3,6896	4,2968	4,78091
10	1,3721	1,8124	2,2281	2,7637	3,1692	3,5814	4,1437	4,58689
11	1,3634	1,7958	2,2009	2,7180	3,1058	3,4966	4,0247	4,43698
12	1,3562	1,7822	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,31779
13	1,3501	1,7709	2,1603	2,6503	3,0122	3,3724	3,8519	4,22083
14	1,3450	1,7613	2,1447	2,6244	2,9768	3,3257	3,7873	4,14045
15	1,3406	1,7530	2,1314	2,6024	2,9467	3,2860	3,7328	4,07277
16	1,3367	1,7458	2,1199	2,5834	2,9207	3,2519	3,6861	4,01500
17	1,3333	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6457	3,96513
18	1,3303	1,7340	2,1009	2,5523	2,8784	3,1965	3,6104	3,92165
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5394	2,8609	3,1737	3,5794	3,88341
20	1,3253	1,7247	2,0859	2,5279	2,8453	3,1534	3,5518	3,84952
21	1,3231	1,7207	2,0796	2,5176	2,8313	3,1352	3,5271	3,81928
22	1,3212	1,7171	2,0738	2,5083	2,8187	3,1188	3,5049	3,79213
23	1,3194	1,7138	2,0686	2,4998	2,8073	3,1040	3,4849	3,76763
24	1,3178	1,7108	2,0639	2,4921	2,7969	3,0905	3,4667	3,74540
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4501	3,72514
26	1,3149	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,70661
27	1,3137	1,7032	2,0518	2,4726	2,7706	3,0565	3,4210	3,68959
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7632	3,0469	3,4081	3,67391
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7563	3,0380	3,3962	3,65941
30	1,3104	1,6972	2,0422	2,4572	2,7500	3,0298	3,3851	3 64596
40	1,3030	1,6838	2,0210	2,4232	2,7044	2,9711	3,3068	3,55097
50	1,2987	1,6759	2,0085	2,4032	2,6777	2,9369	3,2614	3,49601
60	1,29S8	1,6706	2,0003	2,3901	2,6602	2,9145	3,2317	3,46020
90	1,2910	1,6619	1,9866	2,3685	2,6315	2,8778	3,1832	3,40194
120	1,2886	1,6576	1,9799	2,3578	2,6174	2,8598	3,1595	3,37345
240	1,2850	1,6512	1,9699	2,3419	2,5964	2,8332	3,1245	3,33152
∞	1,2815	1,6448	1,9599	2,3263	2,5758	2,8070	3,0902	3,29053

Додаток 5. Квантилі χ^2-розподілу Пірсона $\chi^2_p(f)$

Таблиця Д 1.4 – Квантилі χ^2-розподілу Пірсона $\chi^2_p(f)$

f	p							
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999	0,9995
1	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944	9,14059	10,8275	12,1156
2	4,60517	5,99146	7,37776	9,21034	10,5966	11,9829	13,8155	15,2018
3	6,25139	7,81473	9,34840	11,3448	12,8381	14,3203	16,2662	17,7300
4	7,77944	9,48773	11,1432	13,2767	14,8602	16,4239	18,4668	19,9973
5	9,23636	11,0705	12,8325	15,0862	16,7496	18,3856	20,5150	22,1053
6	10,6446	12,5915	14,4493	16,8118	18,5475	20,2494	22,4577	24,1028
7	12,0170	14,0671	16,0127	18,4753	20,2777	22,0403	24,3218	26,0178
8	13,3615	15,5073	17,5345	20,0902	21,9549	23,7744	26,1244	27,8680
9	14,6836	16,9189	19,0227	21,6659	23,5893	25,4624	27,8771	29,6658
10	15,9871	18,3070	20,4831	23,2092	25,1881	27,1121	29,5883	31,4198
11	17,2750	19,6751	21,9200	24,7249	26,7568	28,7293	31,2641	33,1366
12	18,5493	21,0260	23,3366	26,2169	28,2995	30,3184	32,9094	34,8212
13	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	29,8194	31,8830	34,5281	36,4777
14	21,0641	23,6847	26,1189	29,1412	31,3193	33,4260	36,1232	38,1094
15	22,3071	24,9957	27,4883	30,5779	32,8013	34,9495	37,6973	39,7187
16	23,5418	26,2962	28,8453	31,9999	34,2671	36,4557	39,2523	41,3080
17	24,7690	27,5871	30,1910	33,4086	35,7184	37,9461	40,7902	42,8792
18	25,9894	28,8693	31,5263	34,8053	37,1564	39,4221	42,3124	44,4337
19	27,2035	30,1435	32,8523	36,1908	38,5822	40,8849	43,8202	45,9731
20	28,4119	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968	42,3356	45,3147	47,4984
21	29,6150	32,6705	35,4788	38,9321	41,4010	43,7751	46,7970	49,0108
22	30,8132	33,9244	36,7807	40,2893	42,7956	45,2041	48,2679	50,5111
23	32,0069	35,1724	38,0756	41,6384	44,1812	46,6234	49,7282	52,0001
24	33,1962	36,4150	39,3640	42,9798	45,5585	48,0336	51,1786	53,4787
25	34,3815	37,6524	40,6464	44,3141	46,9278	49,4354	52,6196	54,9474
26	35,5631	38,8851	41,9231	45,6416	48,2898	50,8291	54,0519	56,4068
27	36,7412	40,1132	43,1945	46,9629	49,6449	52,2152	55,4760	57,8575
28	37,9159	41,3371	44,4607	48,2782	50,9933	53,5943	56,8922	59,3000
29	39,0874	42,5569	45,7222	49,5878	52,3356	54,9666	58,3011	60,7346
30	40,2560	43,7729	46,9792	50,8921	53,6719	56,3325	59,7030	62,1618
40	51,8050	55,7584	59,3417	63,6907	66,7659	69,6991	73,4019	76,0946
50	63,1671	67,5048	71,4202	76,1538	79,4899	82,6640	86,6608	89,5605
60	74,3970	79,0819	83,2976	88,3794	91,9517	95,3440	99,6072	102,694
90	107,559	113,142	118,138	124,130	128,324	132,293	137,266	140,858
120	140,227	146,565	152,214	158,962	163,670	168,114	173,667	177,668
240	268,467	277,136	284,804	293,897	300,197	306,116	313,472	318,745

Продовження табл. Д 1.4

f	p							
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	0,01579	0,00393	0,00098	0,00016	0,00004	0,00001	0,00000	0,00000
2	0,21072	0,10259	0,05064	0,02010	0,01003	0,00501	0,00200	0,00100
3	0,58437	0,35185	0,21580	0,11483	0,07172	0,04494	0,02430	0,01528
4	1,06362	0,71072	0,48442	0,29711	0,20699	0,14487	0,09080	0,06392
5	1,61031	1,14548	0,83121	0,55430	0,41174	0,30748	0,21021	0,15814
6	2,20413	1,63538	1,23734	0,87209	0,67573	0,52657	0,38107	0,29941
7	2,83311	2,16735	1,68987	1,23904	0,98926	0,79447	0,59849	0,48487
8	3,48954	2,73264	2,17973	1,64650	1,34441	1,10426	0,85710	0,71038
9	4,16816	3,32511	2,70039	2,08790	1,73493	1,45014	1,15195	0,97170
10	4,86518	3,94030	3,24697	2,55821	2,15586	1,82740	1,47874	1,26498
11	5,57778	4,57481	3,81575	3,05348	2,60322	2,23214	1,83385	1,58685
12	6,30380	5,22603	4,40379	3,57057	3,07382	2,66118	2,21421	1,93438
13	7,04150	5,89186	5,00875	4,10692	3,56503	3,11188	2,61722	2,30506
14	7,78953	6,57063	5,62873	4,66043	4,07467	3,58202	3,04067	2,69673
15	8,54676	7,26094	6,26214	5,22935	4,60092	4,06973	3,48268	3,10752
16	9,31224	7,96165	6,90766	5,81221	5,14221	4,57341	3,94163	3,53581
17	10,0851	8,67176	7,56419	6,40776	5,69722	5,09167	4,41609	3,98018
18	10,8649	9,39046	8,23075	7,01491	6,26480	5,62334	4,90485	4,43939
19	11,6509	10,1170	8,90652	7,63273	6,84397	6,16736	5,40682	4,91234
20	12,4426	10,8508	9,59078	8,26040	7,43384	6,72282	5,92104	5,39807
21	13,2396	11,5913	10,2829	8,89720	8,03365	7,28892	6,44668	5,89570
22	14,0414	12,3380	10,9823	9,54249	8,64272	7,86493	6,98297	6,40447
23	14,8479	13,0905	11,6885	10,1957	9,26042	8,45021	7,52924	6,92368
24	15,6586	13,8484	12,4011	10,8563	9,88623	9,04418	8,08488	7,45269
25	16,4734	14,6114	13,1197	11,5239	10,5196	9,64633	8,64934	7,99096
26	17,2918	15,3791	13,8439	12,1981	11,1602	10,2561	9,22213	8,53795
27	18,1139	16,1514	14,5733	12,8785	11,8075	10,8733	9,80278	9,09320
28	18,9392	16,9278	15,3078	13,5647	12,4613	11,4973	10,3908	9,65627
29	19,7677	17,7083	16,0470	14,2564	13,1211	12,1278	10,9860	10,2267
30	20,5992	18,4926	16,7907	14,9534	13,7867	12,7646	11,5879	10,8043
40	29,0505	26,5093	24,4330	22,1642	20,7065	19,4171	17,9164	16,9062
50	37,6886	34,7642	32,3573	29,7066	27,9907	26,4635	24,6739	23,4609
60	464588	43,1879	40,4817	37,4848	35,5344	33,7911	31,7383	30,3404
90	73,2949	69,1259	65,6405	61,7376	59,1706	56,8561	54,1044	52,2128
120	100,627	95,7046	91,5675	86,9091	83,8292	81,0408	77,7104	75,4108
240	212,388	205,135	198,980	191,980	187,308	183,047	177,916	174,346

Додаток 6. Квантилі розподілу Колмогорова λ_{1-p}

Таблиця Д 1.5 – Квантилі розподілу Колмогорова λ_{1-p}

p	λ_{1-p}	p	λ_{1-p}	p	λ_{1-p}
0,99	0,44	0,50	0,83	0,15	1,14
0,90	0,57	0,40	0,89	0,10	1,22
0,80	0,64	0,30	0,97	0,05	1,36
0,70	0,71	0,25	1,02	0,02	1,52
0,60	0,77	0,20	1,07	0,01	1,63

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Теорія ймовірностей і математична статистика : текст лекцій / О. Б. Білоцерківський. – Харків : «Друкарня Мадрид», 2016. – 94 с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч.-метод. посіб. до сам. роботи студентів екон. спеціальностей / за ред. Л. С. Тимченко, – Харків : ХДПУ, 1999. – 140 с.

3. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посіб. : у 2-х ч. − Ч. I. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. − Київ : КНЕУ, 2000. − 304 с.

4. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посіб. : у 2-х ч. − Ч. II. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2001. − 336 с.

5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2003. – 479 с.

6. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2003. − 256 с.

7. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика, 5-те видання / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – Київ : Центр навчальн. літ.-ри, 2010. − 424 с.

8. Клименко В. А. Курс лекцій з теорії ймовірностей / В. А. Клименко. – Суми : Сумський державний університет, 2012. – 228 с.

9. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика, Посібник з розв’язування задач : навч. посіб. / Г. І. Кармелюк. – Київ : Центр навчальн. літ.-ри, 2007. − 576 с.

10. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 551 с.

11. Іглін С. П. Теорія ймовірностей та математична статистика на базі MATLAB : навч. посіб. / С. П. Іглін. – Харків : НТУ «ХПІ», 2006. – 612 с.

12. Свешников А. А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных величин / А. А. Свешников. – СПб. : Лань, 2008. – 446 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ Олександр Борисович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Практикум
для студентів спеціальності
076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Відповідальний за випуск проф. Є. М. Шапран

Роботу до видання рекомендував проф. О. М. Гаврись

Редактор О. С. Самініна

План 2018 р. поз. 51
Підп. до друку __.__.18. Формат $60\times 84\, {}^{1}\!/_{16}$. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 9,88.
Наклад 50 прим. Зам № . Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ»,
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
вул. Кирпичова, 2, м. Харків-2, 61002

Віддруковано в ТОВ «Друкарня Мадрид».
61024, Харків, вул. Максиміліанівська, 11. Тел.: (057) 756-53-25