

## РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Горбачев М.Н., к.т.н.  
Институт общей энергетики НАН Украины,  
Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 56,  
Тел. (044) 441-25-83

*Обговорюються відомий та запропонований і теоретично обґрунтований нетрадиційний аналітичний методи знаходження періодичних рішень, що дозволяють чий описати у замкнутій формі усталені процеси в лінійних радіотехнічних та електричних колах із зосередженими параметрами при живленні негармонійною напругою. Приведено приклад знаходження рішення модельної задачі для лінійного кола четвертого порядку.*

*Обсуждаются известный и предложенный, теоретически обоснованный, нетрадиционный методы нахождения в замкнутом виде периодических решений, описывающих установившиеся процессы в линейных электрических и радиотехнических цепях с сосредоточенными параметрами при воздействии на них негармонических сигналов (напряжений, э.д.с.). Приведен пример решения модельной задачи для линейной цепи четвертого порядка.*

Известно, что задачи нахождения периодических решений, описывающих установившиеся процессы в линейных электрических и радиотехнических цепях 2-го, 3-го и более высоких порядков с постоянными параметрами при входном негармоническом сигнале произвольной формы, имеют большое теоретическое и прикладное значение. К такого рода цепям относятся фильтры низшей и высокой частоты; полосовые и заграждающие фильтры; корректирующие цепи каналов связи; сглаживающие пассивные фильтры и др. Искомые решения задач указанного класса представляют собой частные периодические решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде полного ряда Фурье для функции, описывающей входной сигнал и удовлетворяющей условиям Дирихле. Для нахождения этих решений в радиотехнике и электросвязи применяют метод гармонического синтеза, разработанный А.М. Заездным [1].

Основная трудность гармонического синтеза как обратной задачи по отношению к гармоническому анализу заключается в том, что аналитическая структура сворачиваемых к замкнутому виду рядов заранее неизвестна и для ее отыскания требует применения не только известных, но и поиска новых подходов и способов суммирования бесконечных функциональных тригонометрических рядов. Это объясняется тем, что теория гармонического синтеза разработана значительно слабее по сравнению с теорией гармонического анализа. Однако, несмотря на возросший уровень и программное обеспечение численно-аналитических и численных методов расчета, в теории радиотехнических и электронных цепей по-прежнему представляется актуальным дальнейшее развитие аналитических методов расчета, к которым относятся указанный метод гармонического синтеза и его модификации [1, 2]. Поэтому разработка новых частных и общих способов и приемов для решения задач гармонического синтеза представляет значительный интерес.

В связи с этим предложен и разработан аналитический метод нахождения в замкнутом виде периодических решений, описывающих установившиеся процессы в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при существенно негармонических входных сигналах. Этот метод основан на использовании однозначной связи между частотными свойствами цепей и гармоническим спектром заданного входного сигнала с учетом законов линейных радиотехнических и электрических цепей и является усовершенствованием и дальнейшим развитием известного метода гармонического синтеза [1].

Действительно, решение задач указанного класса по методу А.М. Заездного связано с выполнением значительного объема громоздких и трудоемких математических преобразований, вычислением корней характеристического уравнения и составлением вспомогательной функции и ее производных, необходимых для нахождения частных (периодических) решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений специального вида (1):

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = F(x), \quad (1)$$

у которых правая часть  $F(x)$  является не усеченным рядом Фурье, а содержит бесконечный спектр гармоник, что существенно ограничивает применение этого метода для цепей выше второго – третьего порядков.

Усовершенствованный метод гармонического синтеза (УМГС) позволяет значительно упростить процедуру нахождения периодических решений для указанного класса задач по сравнению с методом А.М. Заездного [1]. Это можно показать следующим образом. Предположим, что на вход некоторой линейной цепи подан негармонический сигнал в виде напряжения или э.д.с.  $e(x)$ , представимый в виде полного ряда Фурье:

$$e(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad (2)$$

где  $x = \omega t$ ,  $\omega$  - круговая частота основной гармоники;  $t$  - текущая координата времени;  $\alpha_0$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  - коэффициенты Фурье.

Задача заключается в том, что необходимо найти аналитическое выражение в замкнутом виде для тока  $i(x)$  на входе этой цепи. Если исследуемую цепь представить как некоторый эквивалентный двухполюсник и использовать законы линейных электрических цепей (закон Ома, принцип суперпозиции) и функции входного комплексного сопротивления  $Z(k\omega)$  или входной комплексной проводимости  $Y(k\omega)$  [3], то всегда можно составить выражение для  $k$ -ой гармоники искомого тока в общем виде, а затем представить искомый ток  $i(x)$  также в виде некоторого ряда Фурье, отличающегося от ряда (2):

$$i(x) = i_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx \pm \varphi_k) + b_k \sin(kx \pm \varphi_k)], \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{\alpha_0}{2|Z_0|}; \\ a_k &= \frac{\alpha_k}{|Z_k(k\omega)|}; \\ b_k &= \frac{\beta_k}{|Z_k(k\omega)|}; \end{aligned} \quad (4)$$

$\varphi_k = \varphi(k\omega)$  - фазовые углы между гармониками заданного напряжения  $e(x)$  и искомого тока  $i(x)$  порядка  $k$ . Следовательно, с математической точки зрения задача сводится к суммированию нового ряда Фурье (3).

В общем случае коэффициенты ряда (3) связаны с коэффициентами исходного ряда (2) соотношениями (4). Отсюда следует, что если выполнены условия

$$\begin{aligned} 0 < |Z_k(k\omega)| < \infty, \\ 0 < |Y(k\omega)| < \infty \end{aligned} \quad (5)$$

и порядок  $\lambda$  стремления к нулю коэффициентов ряда (3) больше единицы, то есть

$$|a_k|, |b_k| < \frac{h}{k^\lambda} \text{ и } \lambda > 1, h = \text{const}, \quad (6)$$

то ряд (3) будет сходиться равномерно, что и гарантирует нахождение его суммы в замкнутом виде известными математическими методами [1, 3, 4].

Таким образом, в конечном итоге процедура нахождения частного решения дифференциального уравнения типа (1) с правой частью в виде ряда Фурье (2) для исследуемой цепи заменяется более простой и

доступной процедурой построения преобразованного ряда Фурье (3) и его последующего суммирования с привлечением математических справочников и других справочных материалов. Отметим, что особенность разработанного метода состоит в том, что искомые периодические решения могут быть найдены аналитическим путем в замкнутом виде либо точно, либо приближенно. При этом в последнем случае решение целесообразно находить в виде суммы двух составляющих - основной гармоники или конечного числа низших гармоник, которые всегда можно найти точно, и суммы всех остальных (высших) гармоник, которые можно и в ряде случаев целесообразно находить приближенно. С этой целью находят и используют аппроксимирующие функции  $|\tilde{Z}_k(k\omega)|$  и  $\tilde{\varphi}_k(k\omega)$

для соответствующих точных выражений. В качестве иллюстрации разработанного метода рассмотрен пример решения модельной задачи для указанного класса электрических цепей четвертого порядка.

Постановка задачи заключается в следующем. Необходимо найти периодические решения, описывающие установившиеся негармонические процессы в линейной двухконтурной электрической цепи с магнитной (трансформаторной) связью, применяемой для согласования сопротивления нагрузки и повышения избирательности системы с одновременным расширением ее полосы пропускания. Эта известная схема имеет четвертый порядок и применяется в радиоприемных и радиопередающих устройствах.

Электромагнитные процессы в контурах этой схемы описываются известной системой уравнений:

$$e(t) = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) \cdot dt, \quad (7)$$

$$0 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) \cdot dt, \quad (8)$$

где  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  - электрические параметры элементов соответственно входного и выходного контуров;  $M$  - коэффициент взаимной индукции;  $e(t)$  - входной негармонический сигнал в виде э.д.с. или напряжения.

Будем искать периодическое решение для тока  $i_1(\omega t)$  первого (входного) контура во временной области методом УМГС полагая, что параметры контуров одинаковы ( $R_1 = R_2 = R$ ;  $L_1 = L_2 = L$ ;  $C_1 = C_2 = C$ ) и, следовательно, равны их резонансные частоты ( $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ) и добротности ( $h_1 = h_2 = h = \frac{\omega_0 L}{R}$ ), а входной сигнал  $e(x)$  имеет форму меандра, описываемого известным рядом Фурье [1]:

$$\frac{4}{\pi} E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad (9)$$

где номер гармоники  $k=2n-1$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\infty$  - числа натурального ряда.

Искомое решение в общем виде можно представить:

$$i_1(nx) = \frac{4}{\pi} E \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin(nx - \varphi_n)}{nZ_{y'}(n)} = \quad (10)$$

$$= \frac{4}{\pi} E \left( \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{R_{y'}}{Z_{y'}^2(n)} \cdot \frac{\sin nx}{n} - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{X_{y'}(n)}{Z_{y'}^2(n)} \cdot \frac{\cos nx}{n} \right)$$

где  $x = \omega t$ ,  $R_{y'} = R(1 + \gamma^2)$ ,  $n = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,

$$\left[ \frac{e^{n_1 x}}{1 + e^{n_1 x}} - \frac{e^{n_2 x}}{1 + e^{n_2 x}} \right];$$

$$X_{y'}(n) = Rh(1 - \gamma^2) \left( n - \frac{1}{n} \right);$$

$$Z_{y'}(n) = R \sqrt{(1 + \gamma^2)^2 + h^2(1 - \gamma^2)^2 \left( n - \frac{1}{n} \right)^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{y'}(n) = h \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \left( n - \frac{1}{n} \right);$$

$$\gamma = \frac{nhk_c}{\sqrt{1 + h^2 \left( n - \frac{1}{n} \right)^2}} = f(n).$$

Опуская промежуточные математические преобразования можно показать, что искомое точное периодическое решение для тока входного (первого) контура имеет следующий окончательный вид:

$$i_1(x) = \frac{E}{R} \frac{1}{h} \frac{1}{(1 - \gamma^2) \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}} \left[ \frac{e^{n_1 x}}{1 + e^{n_1 x}} - \frac{e^{n_2 x}}{1 + e^{n_2 x}} \right], \quad (11)$$

где

$$n_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1},$$

$$n_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1},$$

$$a = \frac{1}{h} \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2}.$$

Отметим, что эффективность применения предложенного приближенного метода возрастает с ростом порядка цепи, например, при исследовании реактивных двухполюсников  $n$ -го порядка [5]; при синтезе реактивных двухполюсников, имеющих вид лестничных схем [3].

Таким образом, рассмотренный усовершенствованный метод гармонического синтеза и приведенный пример решения модельной задачи для линейной цепи 4-го порядка позволяют сделать ряд выводов.

Во-первых, преимущество предложенного метода нахождения в замкнутом виде периодических решений для рассматриваемого класса задач по сравнению с другими методами, заключается, прежде всего, в его доступности и простоте, а также в возможности учета всех гармонических составляющих, адекватных полному спектру возмущающего воздействия, что представляет значительный интерес для исследователей этого класса задач.

Во-вторых, общий вид получаемого периодического решения явно не выражается через корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению исследуемой цепи, поэтому эффективность применения предложенного метода и разработанных на его основе алгоритмов и инженерной методики получения искомых решений и особенно – приближенных решений – возрастает с ростом порядка цепи.

Кроме того, нахождение замкнутого приближенного периодического решения в виде двух составляющих позволяет упростить определение и расчет основных энергетических и спектральных характеристик исследуемых электрических и радиотехнических цепей (коэффициента гармоник, коэффициента искажения и др.).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Заездный А.М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 535 с.
- [2] Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980. – 348 с.
- [3] Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. Изд. 2-е. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 440 с.
- [4] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литер., 1959. – 307 с.
- [5] Ханзел Г.Е. Справочник по расчету фильтров. США, Нью-Йорк, 1969. Пер. с англ. под ред. А.Е. Знаменского. – М.: Советское радио, 1974. – 288 с.

Поступила 13.03.03