УДК 621.921

М. С. САЗОНОВА, канд. физ.-мат. наук,
Е. Е. ЗАПОРОЖЧЕНКО, канд. физ.-мат наук, Днепропетровск, Украина,
С. Н. ЛАВРИНЕНКО, канд. техн. наук, Харьков, Украина,
А. Г. МАМАЛИС, д-р техн. наук, Афины, Греция

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ МИКРОПРОФИЛЯ ОБРАБОТАННЫХ УЛЬТРАПРЕЦИЗИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

У теперішній час підвищується рівень вимог до метрології параметрів шорсткості, методів контролю, обробки й візуалізації отриманих результатів. Метою даної статті є підвищення точності визначення періодичних складових мікропрофілю оброблених ультрапрецизійних поверхонь за рахунок аналітичного моделювання й одержання розрахункових формул для визначення необхідного числа вимірів основних параметрів шорсткості.

В настоящее повышается уровень требований к метрологии параметров шероховатости, методам контроля, обработки и визуализации полученных результатов. Целью данной статьи является повышение точности определения периодических составляющих микропрофиля обработанных ультрапрецизионных поверхностей за счет аналитического моделирования и получения расчетных формул для определения необходимого числа измерений основных параметров шероховатости.

At the present time the level of requirements to metrology of parametres of a roughness, a quality monitoring, processings and visualisation of the received results is raising. The purpose of given article is increase of accuracy of definition of periodic components of a microprofile of the processed ultraprecision surfaces at the expense of analytical modelling and reception of settlement formulas for definition of necessary number of measurements of key parametres of a roughness.

В настоящее время возникает все больше предпосылок для глубоко изучения корреляционных связей между параметрами шероховатости поверхности, сформированной в процессе ультрапрецизионной лезвийной обработки и функционально-эксплуатационными свойствами готового изделия. При этом повышается уровень требований к метрологии параметров шероховатости, методам контроля, обработки и визуализации полученных результатов. Целью данной статьи является повышение точности определения периодических составляющих микропрофиля обработанных ультрапрецизионных поверхностей за счет аналитического моделирования и получения расчетных формул для определения необходимого числа измерений основных параметров шероховатости.

Важными параметрами шероховатости поверхности являются средний шаг неровностей S_m и средний шаг неровностей по вершинам S микрогеометрического профиля обработанной поверхности.

Известно, что параметры шероховатости, в том числе и шаговые параметры S_m и S, определяются на так называемой базовой длине L, которая зависит от величины микронеровностей. Поскольку параметры S_m и S носят статистический характер, ограниченность трассы измерения приводит к значительному разбросу их значений. В связи с этим задача определения режимов измерений, обеспечивающих получение результата с заданной точностью, является весьма важной.

Для изучения погрешности определения шаговых параметров необходимо располагать следующими статистическими характеристиками этих параметров: математическим ожиданием и дисперсией. Считаем, что шероховатость профиля описывается нормальным стационарным случайным процессом h(x), имеющим математическое ожидание E[h(x)] = 0 и среднее квадратическое отклонение σ. Кроме того, принимаем, что данный случайный процесс имеет непрерывную корреляционную функцию и ее производные. Это обеспечивает непрерывность рассматриваемого случайного процесса и его производных.

Данная модель шероховатости пригодна для описания нерегулярной шероховатости, свойственной большинству финишных операций [1-3].

Для исследования статистических характеристик шаговых параметров воспользуемся особыми точками профиля шероховатости. Согласно [4,9], математическое ожидание особых точек n-го порядка на единицу длины трассы (в которых n-я производная процесса равна нулю, а (n+1)-я отлична от нуля) определяется следующим образом:

$$E\left\{N_{\text{особ}}\right\}=\frac{1}{\pi}\sqrt{-\frac{\rho^{(2n+2)}(0)}{\rho^{2n}(0)}}, \tag{1}$$

где: $\rho^{(2n+2)}(0)$ и $\rho^{2n}(0)$ - соответственно (2n + 2)-я и (2n)-я производные корреляционной функции $\rho(\tau)$ при $\tau=0$.

В наших исследованиях ограничимся особыми точками 1-го и 2-го порядка, которыми являются, соответственно, число нулей и число максимумов случайного процесса.

Шаговые параметры S_m и S связаны с числом нулей и максимумов следующими зависимостями:

$$Sm = \frac{1}{n^{+}(0)} \text{ и } S = \frac{1}{m}, \tag{2}$$

где: $n^{+}(0)$ – число положительных нулей на единицу длины; m – число максимумов на единицу длины.

Математическое ожидание числа положительных нулей вытекает как частный случай формулы (1):

$$\mathrm{E}\left\{n^{+}(0)\right\} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\rho''(0)}\,. \tag{3}$$

Проведенные исследования корреляционных функций нерегулярной шероховатости наказывают, что для аппроксимации этих функций могут быть применены следующие выражения [5]:

$$\begin{aligned} &\rho_1(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} \\ &\rho_2(\tau) = (1+\gamma\tau^2) \end{aligned}, \tag{4}$$

где: τ - расстояние между сечениями профиля; α,γ - коэффициенты аппроксимаций.

Для этих аппроксимаций выражения математического ожидания будут, соответственно, следующими:

$$\mathrm{E}_1\left\{n^{+}(0)\right\} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\alpha},\ \mathrm{E}_2\left\{n^{+}(0)\right\} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\gamma}\ . \tag{5}$$

Поскольку коэффициенты корреляционных функций (4) α,γ определяются одинаковыми выражениями, то в дальнейшем будем пользоваться одной формулой.

Для определения математического ожидания параметра S_m используем выражение, дающее математическое ожидание функции у = $x(x_1,x_2\ldots,x_n)$, согласно которому [6]:

$$\mathrm{E}[S_m] = \frac{1}{\mathrm{E}[n+(0)]}\ . \tag{6}$$

Тогда:

$$\mathrm{E}[S_m] = \frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha}}. \tag{7}$$

При вычислении математического ожидания шага по вершинам S вместо h(x) в качестве исходного процесса рассмотрим производную его h'(x)=g(x). Известно, что реализация имеет максимумы, если выполняются следующие условия:

$$h'(x) = g(x) = 0 \quad \text{и} \quad h''(x) = g'(x) < 0\,, \tag{8}$$

т. е. максимумы будем рассматривать как нули процесса g(x) с отрицательной производной.

Тогда из общего выражения (1) получаем, что:

$$\mathrm{E}\left\{n^{+}(0)\right\} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\rho_g''(0)}\ , \tag{9}$$

где: $\rho_g''(0)$ - вторая производная нормированной корреляционной функции процесса g(x) при $\tau = 0$.

Корреляционная функция производной $K_g(\tau)$ определяется следующим образом [7]:

$$\mathrm{K_g}(\tau) = \frac{\delta^2 K_h(\tau)}{\delta\tau^2}\ , \tag{10}$$

где: (τ) - корреляционная функция исходного процесса h(x).

Согласно (10), нормированная корреляционная функция производной $\rho_g(\tau)$ при $\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ будет:

$$\rho_g(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} - 2\alpha\tau e^{-\alpha\tau^2}\ . \tag{11}$$

Дважды продифференцировав выражение (11) и используя выражения (9) и (6), получаем формулу для математического ожидания шага по вершинам:

$$\mathrm{E}[S] = \frac{2\pi}{\sqrt{6\alpha}}\ . \tag{12}$$

Как видно из (7) и (12), с увеличением скорости убывания корреляционной функции математическое ожидание шаговых параметров возрастает.

Для определения дисперсии шаговых параметров воспользуемся формулой, выражающей дисперсию случайной величины через ее второй начальный момент [7]:

$$D\{x\} = \alpha_2(x) - E^2\{x\}\ , \tag{13}$$

где: $\alpha_2(x)$ - второй начальный момент случайной величины.

Второй начальный момент числа положительных пересечений на единицу длины согласно [4, 8,10] выражается:

$$E\{[n^+(0)]\} = \frac{1}{4L^2}[E\{n_L(0)\} + 2\int_0^L (L-\tau)F(\tau)d\tau] \ , \qquad (14)$$

где: $E\{n_L(0)\}$ — среднее число нулей реализации на интервале L;

$$\mathrm{F}(\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty \dot{\mathrm{h}}(\mathrm{x}_1)\dot{\mathrm{h}}(\mathrm{x}_2)\mathrm{f}_4(0,\dot{\mathrm{h}}(\mathrm{x}_1),0,\dot{\mathrm{h}}(\mathrm{x}_2))\mathrm{d}\dot{\mathrm{h}}(\mathrm{x}_1)\mathrm{d}\dot{\mathrm{h}}(\mathrm{x}_2)\,. \qquad (15)$$

Подставив (14) в формулу (13), получаем формулу для дисперсии числа положительных нулей реализации h(x) на единицу длины в следующем виде:

$$\mathrm{D}\{\mathrm{n}^+(0)\}=\frac{1}{4\mathrm{L}^2}\left[\mathrm{E}\{\mathrm{n}_\mathrm{L}(0)\}\text{-}\mathrm{E}^2\{\mathrm{n}_\mathrm{L}(0)\}+\frac{2}{\pi^2}\int_0^\mathrm{L}(\mathrm{L}\text{-}\tau)\frac{1\text{+}\mathrm{H}(\tau)\mathrm{arctgH}(\tau)}{1\text{-}\rho^2(\tau)}\sqrt{\mathrm{G}(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]. \ (16)$$

Конкретизируем выражение функции F(τ) для нормального стационарного процесса. Согласно [4,10], функция F(τ) равняется:

$$\mathrm{F}(\tau)=\frac{1\text{+}\mathrm{H}(\tau)\mathrm{arctgH}(\tau)}{\pi^2(1-\rho^2(\tau))}G^{-1/2}(\tau) \qquad (17)$$

где: $\mathrm{G}(\tau)=\left[1\text{-}\rho^2(\tau)\right]\left[\rho''^2(0)-\rho''^2(\tau)\right]+2\left[\rho''(0)-\rho(\tau)\rho''(\tau)\right]\rho'^2(\tau)+\rho'^4(\tau);$

$$\mathrm{H}(\tau)=\frac{\left[1-\rho^2(\tau)\right]\rho''(\tau)+\rho(\tau)\rho'^2(\tau)}{\sqrt{1-\rho^2(\tau)}\sqrt{G(\tau)}}\,. \qquad (18)$$

Используя выражение (17), получаем окончательную формулу для дисперсии числа нулей на единицу длины нормального стационарного процесса:

$$\mathrm{D}\{\mathrm{n}^+(0)\}=\frac{1}{4\mathrm{L}^2}\left[\mathrm{E}\{\mathrm{n}_\mathrm{L}(0)\}\text{-}\mathrm{E}^2\{\mathrm{n}_\mathrm{L}(0)\}+\frac{2}{\pi^2}\int_0^\mathrm{L}(\mathrm{L}\text{-}\tau)\frac{1\text{+}\mathrm{H}(\tau)\mathrm{arctgH}(\tau)}{1\text{-}\rho^2(\tau)}\sqrt{\mathrm{G}(\tau)}\mathrm{d}\tau\right].(19)$$

Даже для простейших дифференцируемых корреляционных функций количественные результаты относительно дисперсии числа нулей не удается получить аналитически, а приходится применять численное интегрирование или приближенные методы расчета.

Пусть корреляционная функция профиля

$$\rho(\tau)=e^{-\alpha\tau^2}$$

Тогда математическое ожидание числа нулей на длине L

$$E\{n_L(0)\}=\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi}L$$

Введем также обозначение $x=\tau\sqrt{\alpha}$. Тогда, выполнив все вычисления, предписываемые формулой (19), получим:

$$D\{n^+(0)\}=\frac{1}{4L^2}\left[\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi}L-\frac{2\alpha}{\pi^2}L^2+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{\alpha}L}\frac{\sqrt{\alpha}L-x}{1-e^{-2x^2}}\left\{\sqrt{G(x)}+\frac{\left[2x^2-(1-e^{-2x^2})\right]e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}\operatorname{arctg}H(x)\right\}dx\right], \quad (20)$$

где: $G(x)=(1-e^{-2x^2})^2-4x^4e^{-2x^2}$,

$$H(x)=\frac{\left[2x^2-(1-e^{-2x^2})\right]e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}G^{-1/2}. \qquad (21)$$

Для реальных трасс измерения шероховатости можно принимать, что $x=\tau\sqrt{\alpha}\geq 10$. Исходя из этого, можно убедиться, что для таких значений x величины G(x) и H(x) принимают приближенно следующие значения:

$$G(x) = 1 \text{ и } H(x) = 0. \qquad (22)$$

Учитывая (22), выражение дисперсии числа нулей можно написать:

$$D\{n^+(0)\}\cong\frac{1}{4L^2}\left[\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi}L-\frac{2\alpha}{\pi^2}L^2+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{\alpha}L}(\sqrt{\alpha}L-x)dx\right]=\frac{\sqrt{2\alpha}}{4\pi}\cdot\frac{1}{L}. \qquad (23)$$

Из формулы (23) видно, что дисперсия числа нулей для измерения изменяется по линейному закону. Такой же вывод получен в работах [4, 12, 13].

В работе [4] указывается, что дисперсия числа нулей изменяется приближенно при помощи следующей зависимости:

$$D\{n^+(0)\}\cong 0{,}114\sqrt{\frac{2\alpha}{4\pi}}\cdot\frac{1}{L}. \qquad (24)$$

Из формулы (23) получаем следующую зависимость для дисперсии:

$$D\{n^+(0)\}\cong 0{,}119\sqrt{\frac{2\alpha}{4\pi}}\cdot\frac{1}{L}. \qquad (25)$$

Сравнивая выражения (24) и (25), видно, что приближенная формула (23) дает несколько завышенное значение дисперсии числа нулей.

Для определения дисперсии шага S_m используем зависимость, (позволяющую определять дисперсию случайной величины y, которая является функцией других случайных величин x_1, x_2, ..., у которых дисперсия известна [6]:

$$D\{y\} \cong \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)D_i+2\sum_{i=j}\frac{\partial f\,\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{cov}(x_i,x_j), \tag{26}$$

где: $\mathrm{cov}(x_i,x_j)$ - корреляционный момент случайных величин x_i,x_j.

В нашем случае, используя (26), получаем:

$$D\{S_m\}=\frac{D\{n^+(0)\}}{E^4\{n^+(0)\}}$$

и, следовательно:

$$D\{S_m\}=0{,}456\frac{1}{L}\text{Ч}\frac{\pi^3\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha}}. \tag{27}$$

Дисперсия шага S_m уменьшается с увеличением трассы измерения.

Для определения дисперсии среднего шага по максимумам S_{max} рассмотрим производную $h'(x)=g(x)$, пересечения которой с нулевым уровнем соответствуют максимумам исходного процесса. В таком случае дисперсия числа максимумов может быть определена по формуле (19). Величины $G(\tau)$ и $H(\tau)$ при корреляционной функции (11) приближенно равняются:

$$G(\tau)\approx 36\alpha^2 \quad \text{и} \quad H(\tau)\approx 0\ . \tag{28}$$

Таким образом, получаем следующее выражение для дисперсии, максимумов на единицу длины:

$$D\{m\}=\frac{1}{4L^2}\left[E\{m_L\}+\frac{2}{\pi^2}\int_0^L(L-\tau)\sqrt{36\alpha^2}d\tau\right]=\frac{\sqrt{6\alpha}}{4\pi}\text{Ч}\frac{1}{L}\ . \tag{29}$$

Учитывая зависимость (26), получаем, что дисперсия шагового параметра определяется по зависимости:

$$D\{S\}=\frac{\sqrt{6}\pi^2}{9\alpha L\sqrt{\alpha}}\ . \tag{30}$$

При определении необходимого числа измерений шаговых параметров S_m и S условимся, что выборочное среднее значение параметров, полученное при экспериментальном определении, асимптотически будет иметь нормальное распределение.

При таких условиях найдем такую величину А, для которой:

$$P(\left|\bar{z}\text{-}E[Z]\right| \leq \Delta)=\beta \quad , \tag{31}$$

где: $\bar{Z}$ - выборочное среднее значение исследуемого параметра; β - доверительная вероятность; Δ - абсолютная погрешность.

Преобразуя выражение (31), согласно [7] получаем необходимое число измерений параметра $\bar{Z}$ при заданной погрешности:

$$n=\frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2}\text{Ч}\frac{D\{Z\}}{E\{Z\}}, \tag{32}$$

где: t_β - табулированная величина, зависящая от β [9]:

$$\varepsilon=\frac{\Delta}{E\{Z\}}$$

Подставив в выражение (32) дисперсию и математическое ожидание, получим необходимое число измерений шаговых параметров:

$$n_{S_m} \cong \frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2}\text{Ч}\frac{\pi}{\sqrt{2\alpha L}} \tag{33}$$

$$n_S \cong \frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2}\text{Ч}\frac{\pi}{\sqrt{6\alpha L}}. \tag{34}$$

Сравнивая формулы (33) и (34), делаем вывод, что параметр S_m требует большего числа измерений, чем S при одной и той же точности, т.к.

$$\frac{n_{S_m}}{n_S} \cong 1{,}7$$

Сравним необходимое число измерений для параметров R_a и Sm при одной и той же погрешности. Для этого используем интервал корреляции, поскольку установлено, что число измерений для параметра R_a пропорционально интервалу корреляции. То есть при корреляционной функции $\rho(\tau)=e^{-\alpha\tau^2}$ интервал корреляции равняется:

$$\tau_k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (35)$$

Используя (35), можно записать формулы необходимого числа измерений параметров R_a и S_m следующим образом:

$$n_{S_m} \cong 0{,}456\frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2}Ч\frac{\pi}{L}Ч\tau_k \qquad (36)$$

$$n_{R_a} \cong 0{,}5\frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2}Ч\frac{1}{L}Ч\tau_k \qquad (37)$$

Сравнивая выражение (36), получаем, что $n_{S_m} \approx 3n_{R_a}$, то есть для определения параметра S_m необходимо измерений в 3 раза больше.

С целью проверки результатов аналитических исследований проведено экспериментальное изучение параметров нерегулярной шероховатости. Для сравнения относительной погрешности параметров R_a , S_m и S при одном и том же количестве базовых длин L была использована методика определения доверительного интервала при помощи закона распределения Стъюдента.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. В результате аналитического моделирования получены формулы для определения необходимого числа измерений основных параметров шероховатости.

2. Сравнение полученных формул показывает, что наибольшее число измерений требует параметр S_m.

Список литературы: **1.** *Миура Тейдзи.* Статистический анализ профилограмм ультрапрецизионных поверхностей. Сеймицу Кикай, J, Soc. Precis. Mech., Japan, 2007, 33, No. 12. **2.** *M. Pesante.* Determination of Surface Roughness Typology by Means of Amplitude Density Curves. CIRP Annals, Vol. XII, 2. **3.** *Williamson I.B.* The Shape of Solid Surfaces. Surface Mechanics. Proceedings of teh ASME Annal Winter Meeting, Los Angeles, Nov.1969. **4.** *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М.: «Наука», 1970. **5.** *Левин А.И., Немировский А.С.* Установление интервалов независимости между значениями отдельных функционалов.// «Измерительная техника», 1970, № 3. **6.** *Смирнов Н.В., Дунин–Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Физматгиз, 1965. **7.** *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: «Наука», 1969. **8.** *Бендат Дж.* Основы теории случайных шумов и ее применение. М.: «Наука», 1965. **9.** *Геранин В. А.* Дисперсия числа выбросов отрезка стационарного гауссовского шума.// «Радиотехника и электроника», 1967, т. 12, вып. 5. **10.** *Суворов Б. М.* Дисперсия числа выбросов нормального шума. // «Радиотехника и электроника», 1971, т. 16, вып. 1.