УДК 519.7

Ю.М. Андреев, О.К. Морачковский

О ДИНАМИКЕ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Постановка проблемы. Появление систем компьютерной алгебры стимулировало интерес к созданию проблемно-ориентированных комплексов (ПОК) для ПК с целью автоматизации исследований и поиска решений основных задач механики. Основные результаты, полученные в этом направлении, представлены в работах [2-7,11-14], и относятся к дискретным механическим системам, моделируемым системами твердых тел с упругими, диссипативными, кинематическими и геометрическими связями. Вместе с тем, до настоящего времени отсутствует единый подход к проблеме, в основу разработок положены разные принципы аналитической механики [5]. Ввиду специфики аналитических преобразований на ПК, методы, хорошо зарекомендовавшие себя для ручного применения, могут быть плохо пригодными для компьютерного использования, например, уравнения Лагранжа П рода. Классические и оригинальные методы могут давать лучшие результаты ([3, 6]).

В статье представлены алгоритмы аналитических компьютерных представлений и исследований голономных систем многих твердых тел с упругими и диссипативными связями на основе общего вариационного уравнения (принципа Д' Аламбера-Лагранжа). Предложены теория и аналитические алгоритмы для систем компьютерной алгебры и построения ПОК. Описана созданная компьютерная система для ПК, которая оптимально организует входные данные, выводит в аналитическом виде уравнения движения и равновесия, формулирует и решает основные задачи механики указанных систем. Эффективность иллюстрирована примерами.

§1. Аналитическое описание механической системы. Рассмотрим голономную механическую систему, составленную из n тел, каждое имеет массу m_i и главные центральные моменты инерции J_{ix}, J_{iy}, J_{iz}. Скорости центров масс заданы проекциями на оси неподвижной СК, угловые скорости тел - проекциями на главные центральные оси связанных систем координат (СК) ω_{ix}, ω_{iy}, ω_{iz}. Кинетическая энергия системы запишется

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left(v_{C_i x}^2+v_{C_i y}^2+v_{C_i z}^2\right)+\frac{1}{2}\left(J_{ix}\omega_{ix}^2+J_{iy}\omega_{iy}^2+J_{iz}\omega_{iz}^2\right). \tag{1.1}$$

Выберем обобщенные координаты системы, примем заданными зависимости проекций линейных и угловых скоростей в (1.1) от обобщенных координат и скоростей:

$$v_{Ci\xi}=v_{Ci\xi}(q_1,q_2,\ldots,q_s,\dot q_1,\dot q_2,\ldots,\dot q_s,t)=v_{Ci\xi}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t), \tag{1.2}$$

$$\omega_{i\xi}=\omega_{i\xi}(q_1,q_2,\ldots,q_s,\dot q_1,\dot q_2,\ldots,\dot q_s,t)=\omega_{i\xi}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t). \tag{1.3}$$

Здесь: $\mathbf{q}=\{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$ – обобщенные координаты; $\dot{\mathbf{q}}=\{\dot q_1,\dot q_2,\ldots,\dot q_s\}$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы; t – время, ξ принимает последовательно значения x, y, z и обозначает оси координат для проекций. Так как проекции скоростей центров масс можно получить из их координат путем дифференцирования по времени, то выгодно использовать последние как более простые выражения

$$\xi_i = \xi_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = \xi_i(\mathbf{q}, t), \tag{1.4}$$

$$v_{\xi_i} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \xi_i}{\partial t}. \tag{1.5}$$

Аналогично, угловые скорости можно найти по углам поворота как функциям обобщенных координат

$$\varphi_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = \varphi_i(\mathbf{q}, t), \tag{1.6}$$

$$\omega_{iz} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Зависимости вида (1.4), (1.6) в работе [12] названы *структурами*. По аналогии, зависимости (1.2), (1.3), (1.5), (1.7) будем называть *дифференциальными (кинематическими) структурами*. Дополнительно введем следующие объекты: Совокупность *инерционного значения* (I_j) – массы или осевого момента инерции тела и *дифференциальной* или *геометрической структуры* назовем *инерционным элементом механической модели*. При этом структуры могут задаваться некоторым параметром k_j – *координатой инерционного элемента* в виде (1.2)-(1.4), (1.6). Тогда (1.1) можно записать как полусумму произведений характеристик на квадраты кинематических структур инерционных элементов

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\mu} I_j \dot{k}_j^2 , \tag{1.8}$$

где μ – число инерционных элементов модели. Описание инерционных свойств механической системы списком инерционных элементов способно отражать широкий класс систем, позволяет легко варьировать состав и структуру их моделей. Выгодным для исследований оказывается раздельное задание инерционных и геометрических (кинематических) характеристик системы.

Для сил и пар, действующих на тела и точки системы, вводится объект – *силовой элемент* [12], также как совокупность *характеристики* и *координаты*. *Характеристикой силового элемента* для описания силы принимается ее проекция на виртуальное перемещение точки ее приложения. *Характеристикой* - для пары будем считать проекцию ее момента на ось, вдоль которой направлена вариация угла поворота тела. *Координатами* назовем параметры, вариации которых задают указанные виртуальные перемещения. Для силы - это будет декартовая координата точки приложения ее, для пары - угол поворота тела. Виртуальная работа силы (пары) определится суммой произведений характеристик силовых элементов на вариации их координат:

$$\delta A_{F_i} = \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i, \qquad \delta A_{M_i} = M_{ix}\delta\varphi_{ix} + M_{iy}\delta\varphi_{iy} + M_{iz}\delta\varphi_{iz}. \tag{1.9}$$

В общем виде, обозначая P_j – характеристики, ρ_j - координаты, p – число силовых элементов, запишем

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^{p} P_i \delta\rho_i \ . \tag{1.10}$$

Выражения (1.9) рассматриваются совместно с геометрическими структурами вида (1.4) для сил и (1.6) для пар, позволяющие определить вариации координат в выражениях (1.9). При невозможности задать структуры вида (1.6) явно, можно задать кинематические структуры вида (1.7), а выражения (1.9) для пар получить с помощью тождества Лагранжа, так что

$$\delta A_{M_i} = \vec{M}_i \delta\vec{\varphi}_i = \vec{M}_i \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial\vec{\varphi}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \vec{M}_i \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial\vec{\omega}_i}{\partial\dot{q}_k} \delta q_k .$$

Для описания сил упругости и диссипации механических систем введем объекты - *упругий* и *диссипативный* элемент, представляя их как подмножества силовых элементов. Виртуальные работы этих сил легко записать так:

$$\delta A^{у} = \sum_{i=1}^{c} C_i \gamma_i \delta\gamma_i ; \qquad \delta A^{д} = \sum_{i=1}^{d} D_i \dot{\beta}_i \delta\beta_i .$$

Здесь C_i, D_i – коэффициенты жесткости и диссипации – *характеристики*, γ_i, β_i – деформации упругих и скорости диссипативных элементов - *координаты упругих и диссипативных элементов*, *c*, *d* – число упругих и диссипативных элементов в системе, соответственно.

Принятое выше описание инерционных и силовых свойств механической системы положено в основу создания ПОК, позволяющего за счет использования специализированной системы компьютерной алгебры оптимально организовать входные сведения о механической системе, строить уравнения движения и равновесия, формулировать и решать основные задачи механики для широкого класса механических систем.

§2. Математическое моделирование на ПК. Система компьютерной алгебры, способная вычислить необходимые производные от кинетической энергии, полученной по формуле (1.8), построит уравнения движения в форме уравнений Лагранжа II рода, так как обобщенные силы можно найти, используя выражение (1.10)

$$Q_k = \sum_{i=1}^{p} P_i \frac{\partial\rho_i}{\partial q_k} . \tag{2.1}$$

Однако вычисление кинетической энергии системы, взятие производных от нее в левой части требует относительно больших усилий, поэтому более широкое распространение получили ПОК, основанные на других подходах теоретической и аналитической механики ([1-7, 11-14]). В данной статье обобщается направление, связанное с реализацией в ПОК более универсального принципа Д'аламбера-Лагранжа, разработанное ранее в работах [12, 2] для плоских механизмов, на класс систем с пространственным движением звеньев.

Покажем возможности эффективной автоматизации основных задач механики голономных систем в рамках принятого здесь похода, за счет использования списков введенных выше объектов – дискретных элементов механической модели. Большинство разработанных на сегодня ПОК с аналитическим построением уравнений движения следует относить к псевдоаналитическим, так как они опираются на векторно-матричное представление уравнений. Векторы и матрицы в них формируются численно, как, например, в работах [4, 7, 13, 3], или с использованием стандартных систем компьютерной алгебры, например, MATHCAD, MATLAB, REDUCE и других, на каждом шаге по времени, что требует дополнительных затрат на организацию вычислений или ввода таких векторов и матриц. Этих недостатков можно избежать за счет создания специальной системы компьютерной алгебры, способной оптимально организовать входные данные, строить уравнения движения и равновесия, формулировать и решать основные задачи механики за счет обработки списков дискретных элементов. Отдельное задание геометрических (кинематических) и инерционных (силовых) характеристик в предлагаемом методе, очень продуктивно, оно позволяет рассматривать физическую и геометрическую структуры модели почти независимо друг от друга. Покажем аналитические алгоритмы для реализации этих идей.

Представим приведенные к центру масс главный вектор и главный момент сил инерции i–го тела:

$$\vec{R}_i^u = -m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} \qquad \vec{M}_i^u = -\left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}_i^{(i)}\right)$$

Здесь m_i – масса, $\vec{r}_{C_i}$ - радиус-вектор центра масс, $\vec{\omega}_i^{(i)}, \vec{\varepsilon}_i^{(i)}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения, $\left[\vec{J}_i\right]$ - тензор инерции для центра масс. Векторы угловой скорости и тензор инерции задаются в главной центральной системе i-го тела, радиус-вектор центра масс – в абсолютной неподвижной СК. Приведем эти векторы к обобщенным координатам

$$-\mathbf{Q}_i^u = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]^T \left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}_i^{(i)}\right). \tag{2.2}$$

Следуя работе [12], заметим, что транспонированные матрицы из (2.2) представляют собой *структурные матрицы* - *геометрическую* - сил инерции $\mathbf{S}_{\vec{R}_i}^u = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\right]$ и *дифференциальную* - моментов сил инерции $\mathbf{S}_{\vec{M}_i}^u = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]$, которые легко определяются аналитически по структурам вида (1.4), (1.3). Введем структурную матрицу сил [12] $\mathbf{S}_P = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}}$ и вектор силовых элементов $\mathbf{P} = \{P_i\}$. Сложим обобщенные силы инерции всех тел, и приравняем полученное выражение обобщенным силам активных сил системы (2.1), получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{ {\mathbf{S}_{\vec{R}_i}^u}^T m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_{C_i} + {\mathbf{S}_{\vec{M}_i}^u}^T \left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot \vec{\omega}_i^{(i)}\right)\right\} = \mathbf{S}_P^T \mathbf{P}. \tag{2.3}$$

Анализ записи уравнения (2.3) показывает, что оно получается обработкой списка инерционных и силовых элементов механической модели. Алгоритм его получения оптимизирован исключением умножений на нули и единицы, использованием ссылок на элементарные функции и переменные, что существенно уменьшает число математических операций при интегрировании.

Уравнение (2.3) для одного движущегося тела примет следующий матричный вид

$$\left[S^u_{\vec{R}_i} \middle| S^u_{\vec{M}_i} \right]^T \left[\begin{matrix} m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} \\ \left(\left[\vec{J}_i \right] \cdot \vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i \right] \cdot \vec{\omega}_i^{(i)} \right) \end{matrix} \right] = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{P} . \tag{2.4}$$

В статье [13] приведены уравнения движения свободного твердого тела, которые отличаются от уравнений (2.4) отсутствием матричного сомножителя слева. «Убрать» матричный сомножитель в левой части уравнения возможно, если не приводить силы и пары сил инерции к обобщенным координатам, а оставить их приведенными к главной центральной СК тела. Тогда и активные силы в правой части не следует приводить к обобщенным координатам $\mathbf{q}$, а привести их к тем же координатам, что и силы инерции. Это эквивалентно умножению (2.4) слева на $\left\{ \left[S^u_{\vec{R}_i} \middle| S^u_{\vec{M}_i} \right]^T \right\}^{-1}$. Анализ показывает, что приведение уравнения (2.4) к указанной СК, по-видимому, действительно, дает его наипростейший вид, к тому же разрешенный относительно старших производных. Для несвободного твердого тела следует воспользоваться принципом «освобождаемости от связей», при этом в число активных сил придется ввести реакции неидеальных связей. Таким образом, вид уравнений динамики твердого тела или системы твердых тел существенно определяется выбором системы обобщенных координат. В любом случае для решения задачи составления уравнений предлагаемым методом требуется выбрать обобщенные координаты и задать инерционные и силовые элементы и их структуры вида (1.3), (1.4).

В динамике манипуляторов наиболее простым алгоритмом считается алгоритм рекурсивного формирования уравнений для каждого звена в отдельности, начиная или от неподвижного тела – стойки, двигаясь к схвату, или, наоборот, двигаясь от схвата к стойке, учитывая силы взаимодействия между звеньями [14]. Применение принципа Д'аламбера-Лагранжа требует в этом случае «освободить» все звенья системы и ввести в рассмотрение силы взаимодействия между ними. Тогда будем иметь $6n$ обобщенных координат, и по спискам инерционных и силовых элементов манипулятора получим их уравнения, у которых будет отсутствовать матричный сомножитель слева. Оказывается в этом случае, что легче ввести в рассмотрение «лишние» силы внутренних реакций соединительных шарниров, чем понижать порядок системы уравнений, приводя их к реальному числу степеней свободы системы путем умножения на матричный сомножитель слева, зависящий от обобщенных координат и скоростей и смешивающий старшие производные. Однако такая система обобщенных координат требует учета дополнительных соотношений для удовлетворения внутренних связей, что выливается в непростую проблему «согласованности» начальных условий.

Следует отметить, что, несмотря на достигнутый здесь уровень автоматизации вывода уравнений динамики, остаются проблемы с записью структур (1.3), (1.4). Их можно решить, опираясь на свойства систем. Например, в [1], для манипуляционных систем дан рекурсивный алгоритм формирования инерционных структур, основанный на модификации метода Денавита-Хартенберга [14]. Недостатком такого представления манипуляционной модели является жесткая привязка обобщенных координат к кинематическим парам, необходимость параллельности аппликат связанных СК осям кинематических пар, невозможность описания разветвленных моделей. Для устранения этих недостатков предлагается другой специальный объект механической модели системы – *твердое тело*. Это совокупность *наименования*, параметров *положения* связанной СК относительно «базовой» системы, *ссылки* на имя тела, с которым связана «базовая» СК, *инерционных параметров* – массы и главных центральных моментов инерции. Параметры положения связанной СК - это последовательность элементарных поворотов и сдвигов «базовой» СК для совмещения ее с СК данного тела. Такая информация о звеньях механической модели, позволяет автоматически получить инерционные члены в уравнениях динамики, что представляет особую трудность в таких задачах.

Радиус-вектор центра масс данного тела в абсолютной СК ($\vec{r}_{C_i}$) и вектор угловой скорости его в проекциях на оси связанной с ним главной центральной СК ($\vec{\omega}_i^{(i)}$) и можно получить по формулам

$$\vec{r}_{C_i} = \vec{r}_{C_{i-1}} + S_{(i-1)}^{(0)} \vec{r}_{C_i}^{(i-1)}; \qquad \vec{\omega}_i^{(i)} = S_{(i-1)}^{(i)} \vec{\omega}_{i-1}^{(i-1)} + \vec{\omega}_{i,i-1}^{(i)}. \tag{2.5}$$

Здесь $\vec{r}_{C_i-1}$ - радиус-вектор центра масс «базового» тела в абсолютной СК; $\vec{r}_{C_i}^{(i-1)}$ - радиус-вектор центра масс текущего тела относительно «базового» в СК последнего, накапливаемый из последовательности сдвигов и поворотов, заданных в описании тела; $S_{(i-1)}^{(0)}$ - матрица поворота СК «базового» тела в абсолютной СК, накапливаемая для «базового» тела и для каждого тела по формуле $S_{(i)}^{(0)} = S_{(i-1)}^{(0)} S_{(i)}^{(i-1)}$, последняя матрица накапливается из матриц элементарных поворотов на углы $\vec{\alpha}_i$, $\vec{\beta}_i$, $\vec{\gamma}_i$,…, заданных для каждого тела $S_{(i)}^{(i-1)} = S_{\alpha_i} S_{\beta_i} S_{\gamma_i} \ldots$; $\vec{\omega}_{i-1}^{(i-1)}$ - угловая скорость «базового» тела в его главной центральной СК, выраженная через обобщенные координаты и угловые скорости поворотов предыдущих тел по иерархии; $\vec{\omega}_{i,i-1}^{(i)}$ - угловая скорость поворота СК «базового» тела до совмещения со связанной с текущим телом СК, накапливаемая сложением векторов скоростей элементарных поворотов, заданных в описании тела; $S_{(i-1)}^{(i)}$ - матрица поворота от СК «базового» тела до СК текущего, получающаяся транспонированием ранее полученной матрицы $S_{(i-1)}^{(i)} = \left[S_{(i)}^{(i-1)}\right]^T$.

Накапливаемые для каждого тела добавки угловой скорости и радиус-вектора центра масс могут быть представлены рекуррентными формулами

$$\vec{\omega}_{i,i-1}^{(i)} = ..\left(\dot{\vec{\gamma}}_i + S_{\gamma_i}^T\left(\dot{\vec{\beta}}_i + S_{\beta_i}^T\left(\dot{\vec{\alpha}}_i\right)\right)\right); \qquad \vec{r}_{C_i}^{(i-1)} = \sum_{j=1}^{l} S_{(\varphi_{ji})}^{(i-1)} \vec{d}_j .$$

Здесь $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \dot{\gamma}_i, \ldots$ - векторы скоростей элементарных поворотов, а $\vec{d}_j$ - векторы элементарных сдвигов от «базовой» к СК данного тела, заданные в промежуточных повернутых относительно *(i-1)-й* СК. При каждом элементарном повороте матрица $S_{(i)}^{(i-1)}$ умножается справа на матрицу элементарного поворота. Угловая скорость поворота от «базовой» СК к СК данного тела получается поворотом накопленной угловой скорости на угол поворота (умножением ее слева на транспонированную матрицу элементарного поворота) и добавлением вектора скорости элементарного поворота. Радиус-вектор центра масс данного относительно центра масс «базового» тела в абсолютной СК получается суммированием приведенных к «базовой» системе векторов элементарных сдвигов. При этом используется накопленная к моменту текущего сдвига матрица $S_{(i)}^{(i-1)}$, обозначенная $S_{(\varphi_j)}^{(i-1)}$.

Такое задание инерционных характеристик требует запоминания в аналитическом виде для каждого тела системы двух векторов $\vec{r}_{C_i}$, $\vec{\omega}_i^{(i)}$ и матрицы $S_{(i)}^{(0)}$, причем компоненты векторов есть не что иное, как введенные выше *координаты инерционных элементов, характеристики* которых масса и главные центральные моменты инерции тел. Это дает возможность автоматически сгенерировать инерционные элементы модели, а по ним описанным выше способом - инерционные слагаемые уравнений. Удобство такого описания инерционности модели, кроме компактности, состоит в том, что оно никак не ограничивает выбор системы обобщенных координат, позволяет легко включать дополнительные тела в систему и исключать их, описание каждого тела системы можно делать в любом месте исходных данных.

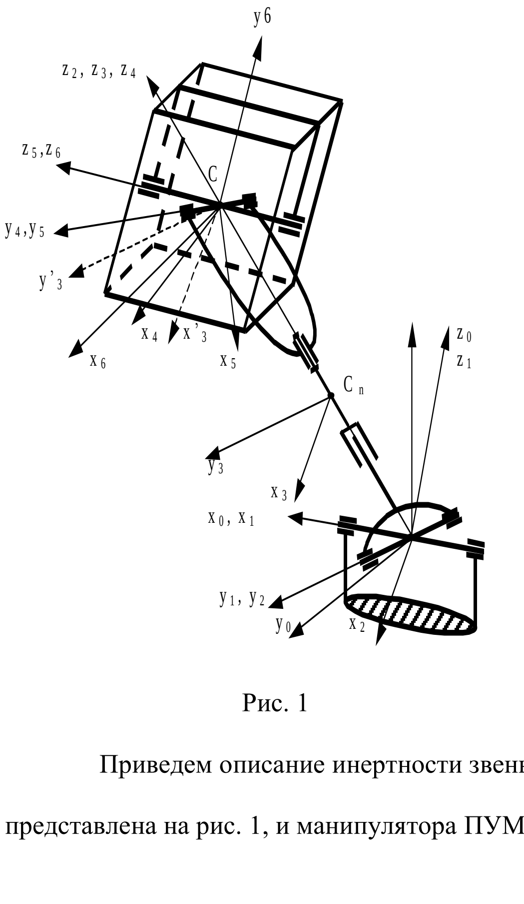

Рис. 1

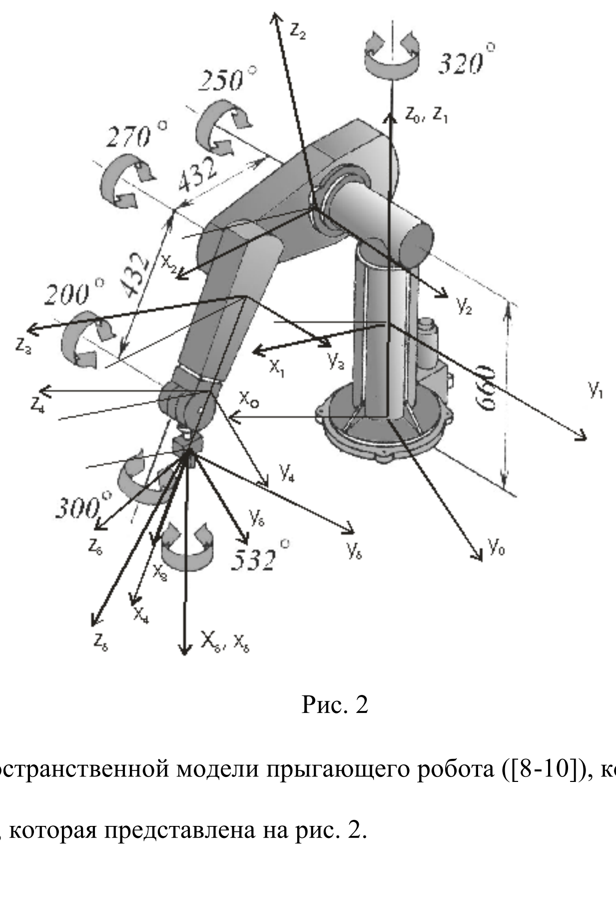

Рис. 2

Приведем описание инертности звеньев пространственной модели прыгающего робота ([8-10]), которая представлена на рис. 1, и манипулятора ПУМА [14], которая представлена на рис. 2.

Прыгающий аппарат:

```
Нога|Rx(q1),Ry(q2),Sz(q3),Rz(q4) = mn,Jnx,Jny,Jnz;
Корпус~Нога|Sz(b3),Ry(q5),Rz(q6) =  m, Jx, Jy, Jz;
```

Манипулятор ПУМА:

```
Колонна          |Rz(Fi1),Sz(h)                     = Jz(J1z);
Плечо~Колонна    |Sz(h1), Ry(Fi2),Sx(l2),Sy(-d2) = m2,J2x,J2z,J2y;
Локоть~Плечо     |Sx(h2), Ry(Fi3),Sx(l3),Sy(d3)  = m3,J3x,J3z,J3y;
Запястье~Локоть  |Sx(h3), Rx(Fi4)                  = m4,J4z,J4x,J4y;
Ладонь~Запястье  |Ry(Fi5)                          = m5,J5x,J5z,J5y;
Схват~Ладонь     |Sx(h6), Rz(Fi6)                  = m6,J6z,J6x,J6y;
```

Здесь ~ - разделяет имена данного и «базового» тела; *Rx*, *Ry*, *Rz* – означает «повернуть» вокруг оси *x*, *y*, *z*, соответственно; *Sx*, *Sy*, *Sz* – означает «сдвинуть» по оси *x*, *y*, *z*, соответственно; в скобках указываются величины (параметры) поворотов и сдвига. Прямой подсчет числа операций для получения кинетической энергии по формуле (1.8), осуществляемый самим алгоритмом (исключая повторные вычисления одних и тех же переменных, умножения на нуль и единицу, без тригонометрических упрощений), для прыгающего аппарата дает результат: 52(+,-) + 99(*) + 10(sin,cos). Подсчет числа операций для получения кинетической энергии по алгоритму, приведенному в [8-10], дает оценку: 1255(+,-) + 3183(*) + 10(sin,cos). Уравнения Лагранжа, построенные для прыгающего аппарата и кинетической энергии в форме (1.8), требуют 385(+,-) + 690(*) + 10(sin,cos). Уравнения же построенные по алгоритму (2.5), (2.3) требуют 340(+,-) + 583(*) + 10(sin,cos). Для манипулятора ПУМА аналогичные расчеты показывают следующие результаты. Уравнения Лагранжа: 2074(+,-) + 4038(*) + 12(sin,cos). Уравнения (2.5), (2.3): 1903(+,-) + 3708(*) + 10(sin,cos).

§3. Примеры решения задач механики. Запись геометрических структур вида (1.4), (1.6) для точек и тел системы позволяет по заданному закону движения системы в виде **q**=**q**(*t*) аналитическим дифференцированием получить линейные (1.5) и угловые (1.7) скорости звеньев, вторым дифференцированием – линейные и угловые ускорения, тем самым решить прямую задачу кинематики

$$a_{\xi_i}=\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k+\sum_{l=1}^{s}\left(\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_k\partial q_l}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_l\partial t}\right)\dot{q}_l\right)+\frac{\partial^2\xi_i}{\partial t^2}\qquad \varepsilon_i=\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k+\sum_{l=1}^{s}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_k\partial q_l}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_l\partial t}\right)\dot{q}_l\right)+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}.$$

Приравнивая нулю обобщенные силы системы (2.1), запишем

$$\mathbf{S}_P^T\mathbf{P}=0\,. \tag{3.1}$$

Это система уравнений равновесия, размерность которой равна числу обобщенных координат системы (числу степеней свободы). Если **P** – известные силы, то это система уравнений (вообще говоря, нелинейная) для определения положения равновесия $\mathbf{q_0}$, так как элементы структурной матрицы сил $\mathbf{S}_P$ зависят от обобщенных координат. Если **P** содержит, кроме известных активных сил, неизвестные силы реакций, переведенные в разряд активных применением к системе принципа освобождаемости от связей, то это обычные уравнения статики для нахождения реакций или активных сил, обеспечивающих равновесие. Разобьем структурную матрицу сил на два блока, соответствующие известным **F** и неизвестным **R** силам задачи $\begin{bmatrix}\mathbf{S_1} & \mathbf{S}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{R}\end{bmatrix}$, откуда найдем

$$\mathbf{R}=-\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1\mathbf{F}. \tag{3.2}$$

Похожим образом решаются задачи кинетостатики по определению динамических реакций связей. В этом случае строится полное уравнение (2.3), которое в матричном виде имеет вид

$$\mathbf{U}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Q}_i^u+\mathbf{S}_P^T\mathbf{P}=0\,. \tag{3.3}$$

Привести уравнения (3.3), как и уравнения (3.1), к виду **AR=B** для нахождения вектора сил **R** можно за два действия: подставить в (3.3) **R=0**, получить правую часть $\mathbf{B}=-\mathbf{U}\big|_{\mathbf{R}=\mathbf{0}}$; продифференцировать вектор уравнений (3.3) **U** по вектору неизвестных **R**, получить квадратную матрицу

$$\mathbf{A}=\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{R}}=\frac{\partial\mathbf{U}\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{P}\partial\mathbf{R}}=\mathbf{S}_P^T\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{R}} \tag{3.4}$$

Матрица **A** будет зависеть от обобщенных координат, так как от них зависят элементы структурной матрицы активных сил $\mathbf{S}_P$, а матрица $\dfrac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{R}}$ состоит из нулей и единиц. Вектор **B** будет зависеть от обобщенных координат, их скоростей и ускорений, а также от инерционных, диссипативных и упругих параметров дискретной модели системы (от них зависят три первых слагаемых в (3.3)).

Таким образом, по заданному закону изменения во времени обобщенных координат $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$ система компьютерной алгебры сможет вычислить матрицы **A** и **B**, через которые при неособенной матрице **A** находятся неизвестные силы

$$\mathbf{R}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{3.5}$$

Получить решение (3.5) удобнее всего путем численного обращения матрицы **A**. Для каждого значения времени из заданного диапазона вычисляются числовые значения элементов матрицы **A** и вектора **B** и находятся значения вектор-функции $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathrm{t})$. Таким же образом, понимая под вектором неизвестных сил **R** управляющие воздействия на систему, можно решать некоторые задачи управления движением механической системы.

Выводы. Предложены теория и аналитические алгоритмы для систем компьютерной алгебры. Описана компьютерная система, способная оптимально организовать входные данные, строить уравнения движения и равновесия, формулировать и решать основные задачи механики для плоских и пространственных систем, имеющих структуру «дерева», включая манипуляционные и замкнутые системы. Исследования выполнены на основе применения общего вариационного уравнения (принципа Д' Аламбера-Лагранжа) к системам многих тел с упругими и диссипативными связями. Применение принятого в работе подхода в системах компьютерной алгебры в сравнении с подходами, основанными на использовании уравнений Лагранжа II рода, имеет выигрыш в затратах вычислительных ресурсов 10-15%. Использование специальной системы компьютерной алгебры, построенной на предлагаемых алгоритмах дает еще более существенный выигрыш.

1. Грошева М.В., Ефимов Г.В. О системах аналитических вычислений на ЭВМ //Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. – М., 1988. – С.5-30.

2. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структуры дискретных механических моделей конструкций //Динамика и прочность машин. – 1982. – Вып. 35. – С. 3-6.

3. Андреев Ю.М., Штейнвольф Л.И. Компьютерное моделирование задач механики голономных систем твердых тел со стационарными и нестационарными связями //Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 53. С. 96-102.

4. Механика промышленных роботов: Учеб. Пособие для втузов: В 3 кн./Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. Кн. 1: Кинематика и динамика/Е.И. Воробьев, А.С. Попов, Г.И. Шевелева. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.

5. Вукобратович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами: теория и приложения. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 384 с.

6. Коноплев В.А. Матричная форма уравнений движения свободного твердого тела. – Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М., 1984, вып. 15. С. 118-123.

7. Русанов П.Г. Об одном методе вывода и решения дифференциальных уравнений движения механических систем с помощью ЭВМ. - Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М., 1984, вып. 15. С. 66-71.

8. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. – М., 1988. – 274 с.

9. Ермаков Б.Е. Метод постоянных скоростей в задачах механики. – М., 2000. – 152 с.

10. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М.: Мир. 1989. 624 с.

11. Андреев Ю.М. Эффективность компьютерного построения моделей кинематики и динамики манипуляционных систем // Вестник национального технического университета «Харьковский политехнический университет». – 2004. - №19. – С.13-16.

12. Ларин В.Б. Пространственная модель одноногого прыгающего аппарата // Прикладная механика. – 2004. - №5. – С. 126-136.

13. Ларин В.Б. Матиясевич В.М. Алгоритм управления пространственным движением прыгающего аппарата // Прикладная механика. – 2004. - №4. – С. 117-126.

14. Ларин В.Б. Задача управления пространственным движением прыгающего аппарата // Прикладная механика. – 2003. - №5. – С. 131-142.

23.11.2004