Многофункциональное вихретоковое устройство для измерения радиуса, магнитной проницаемости, удельного электрического сопротивления и температуры цилиндрического проводящего изделия. – Технічна електродинаміка. – Київ. – Інститут електродинаміки НАНУ. – 2002. – Технічний вип. ч.3. - С. 101-104. 17. Чинков В.М. Основи метрології та вимірювальної техніки / Навчальний посібник/. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2005.- 524 с. 18. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий. Справочник / *Под ред В.В. Клюева*. Кн.2.- М.: Машиностроение, 1986. – 351 с. 19. *Себко В.П., Тюпа И.В.* К теории работы контактного электромагнитного преобразователя для контроля параметров трубчатых изделий // Весник ХГПУ.- Харьков, 1999.- вып.24.- С. 109-113. 20. *Себко В.П., Тюпа И.В., Филоненко Д.В.* Исследование электромагнитного трехпараметрового метода контроля труб. // Вестн. НТУ "ХПИ". - Харьков. - 2004. - Вып. 46.- С. 161-163.

Поступила в редколлегию 07.11.06

УДК 621.396

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук, ***А.Ю. СИДОРЕНКО***, ***Д.А. СТАРУШКИН***

ДИСКРЕТНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ КАЧЕСТВА И ЭФФЕКТИВНОЕ КОЛИЧЕСТВО ЕГО КОМПОНЕНТ

Розглянуто метод контролю якості випадкових процесів із застосуванням дискретного квадратичного функціоналу. Отримана і проаналізована залежність ефективної кількості підрахунків адитивного критерію, тобто обсягу вимірювань, від коефіцієнта кореляції.

Введение. В теории оценивания и принятия решений принято использовать статистические функционалы определенного вида. На их основе строят выборочные критерии, формулируют условные и безусловные законы распределения и рассчитывают соответствующие квантили [1, 2, 3]. Эти критерии образуются из элементов (компонент) наблюдаемой выборки, при этом её отсчеты предполагаются независимыми [3, 4]. Между тем на практике условие независимости отсчетов может не выполняться или по условиям эксперимента может отсутствовать информация о степени статистической связи между ними.

В данной работе в качестве математической модели будет рассматриваться дискретный квадратичный функционал:

$$J_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n^2 , \tag{1}$$

где $\{x_n\}$ – последовательность отсчетов; N – количество отсчетов в выборке; h – шаг измерений, $h = L / N$; L – длина интервала измерений. С целью изучить влияние коррелированности отсчетов будет предполагать, что выборка образована из отсчетов случайного процесса $x(l)$, обладающего свойствами нормального марковского процесса (НМП) [5,6]. В качестве проверки для используемого в данной работе функционала качества (1) можно выбрать хорошо известный в математической статистике критерий χ^2 Пирсона, который образован из независимых нормальных отсчетов [3].

Постановка задачи. Целью настоящей работы является определить: при каких параметрах и для какого количества элементов выборки распределение выбранного критерия (1) будет совпадать с χ^2-распределением.

Алгоритм расчета. Пусть известны параметры НМП: декремент ν и дисперсия σ. Примем, что число элементов выборки $\{y_m\}$, подчиняющейся χ^2–распределению, составляет M, а сами они также имеют дисперсию σ. Образуем на основе (1) два функционала качества: один, основанный на НМП, и второй, образованный из отсчетов гауссовского процесса с нулевой корреляцией. Обе эти случайные величины имеют плотности распределения вероятностей похожего вида (стартуют из нуля, имеют один максимум и экспоненциальную асимптотику на периферии). Поэтому в качестве критерия близости законов используем их дисперсии.

Запишем формулы дисперсии функционала качества (1) для НМП и для χ^2-распределения

$$\Delta_N = \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \right\rangle^2, \quad \Delta_M = \left\langle \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} y_m^2 \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} y_m^2 \right\rangle^2, \quad (2)$$

где $\{x_n\}$ и $\{y_m\}$ – наборы соответствующих отсчетов. НМП характеризуется наличием корреляций между отсчетами, $\langle x_n x_k \rangle = \sigma \exp(-|n-k|\nu h)$ [5, 6], в то же время для компонент χ^2-критерия можно считать, что $\nu \to \infty$ и $q_{nk} \to \delta_{nk}$. Благодаря наличию корреляций в отсчетах НМП дисперсии в (2) будут различными при $N = M$. Поставим задачу определения такого объема M выборки, для которого значения дисперсий Δ_N и Δ_M окажутся насколько возможно максимально близкими. Этот найденный объем будем называть эффективным числом компонент выборки из НМП, т.е. тот объем, который отвечает выборке из независимых нормальных отсчетов.

В дальнейшем для усреднений понадобятся переходная $f(x_n|x_k)$ и равновесная $f(x_n)$ плотности распределения вероятностей НМП [5, 6]

$$f(x_n|x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(1-q_{nk}^2)}} \exp\left[-\frac{(x_n - q_{nk}x_k)^2}{2\sigma(1-q_{nk}^2)} \right], \quad f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{x_n^2}{2\sigma} \right], \quad (3)$$

где $q_{nk} = \exp(-|n-k|\nu h)$.

После необходимых усреднений в (2) с помощью (3) получаем

$$\Delta_N = \frac{2\sigma^2}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \exp(-2\nu h|n-k|), \quad (4)$$

а с помощью предельного перехода $\nu \to \infty$ найдем

$$\Delta_M = \frac{2\sigma^2}{M}. \quad (5)$$

Сопоставляя выражения (4) и (5), получим

$$\frac{2}{M} \cong \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\exp(-|k-n|\nu h), \tag{6}$$

откуда видно, что $M = N$ лишь при $\nu \to \infty$. Заменяя в (6) приближенно суммы на интегралы, найдем

$$\frac{2}{M} \cong \frac{4}{\nu^2 h^2 N^2}\left[\nu L - 1 + \exp(-\nu L)\right], \tag{7}$$

что дает окончательно

$$M = \frac{\nu^2 L^2}{2\left[\nu L - 1 + \exp(-\nu L)\right]}. \tag{8}$$

Проанализируем поведение эффективного количества элементов M при различных значениях параметра νL. При $\nu L \ll 1$ имеем $M \to 1$. При $\nu L \gg 1$ имеем $M \to \nu L/2 = \nu Nh/2$, следовательно, если $\nu h \geq 2$, то есть $q \ll 1$, то объемы выборок практически совпадают.

Основные результаты. Для анализа полученных выражений построим зависимости количества элементов выборки распределения χ^2 и дискретного квадратичного критерия (1) при варьируемом параметре ν (декремент затухания НМП). На рис. 1 изображены искомые зависимости при различных ν. Анализируя зависимости на рис. 1, можно сделать вывод о том, что при отсутствии корреляции, т.е. когда декремент затухания $\nu \to \infty$, количества элементов двух выборок приблизительно одинаковы. При уменьшении ν и соответствующем увеличении корреляций между отсчетами в (1) величины M и N изменяются прямо пропорционально.

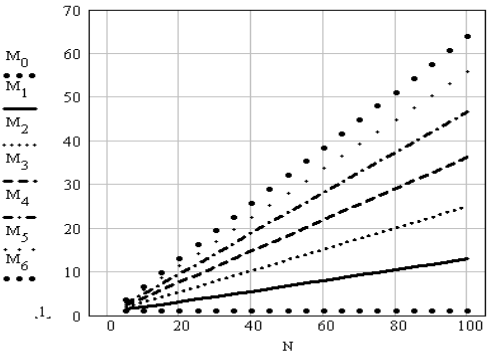


Рисунок 1 – Зависимости эффективного количества M элементов выборки χ^2 – распределения от фактического количества N элементов выборки критерия (1) N ($h = 0.5$; $\nu = 0;\ 1;\ 2;\ldots;6$)

Рассмотрим теперь влияние коэффициента корреляции $q = \exp(-\nu h)$ в соседних отсчетах с шагом h на эффективный объем выборки M.

На рис. 2 представлены зависимости количества элементов выборки M от коэффициента корреляции q. Из рис. 2 следует, что величина объема выборки M обратно пропорциональна коэффициенту корреляции q, т.е. с увеличением корреляции эффективный объем выборки падает, а при полной корреляции ($q \to 1$) величина эффективного объема всегда равна 1.

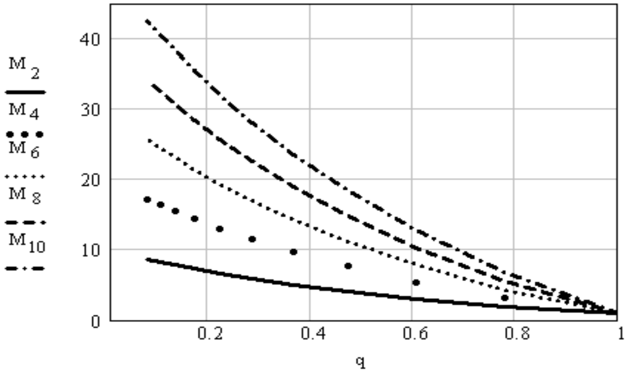
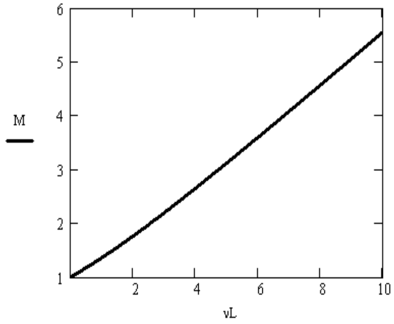


Рисунок 2 – Зависимости эффективного количества элементов M от коэффициента корреляции q

Для того чтобы выяснить, как ведет себя параметр M в зависимости от величины интервала наблюдения L, построим график изменения поведения данного параметра от приведенного интервала наблюдения νL в соответствии с (8). Результаты расчета эффективного количества элементов выборки M приведены на рис. 3. Как видно из рисунка, с увеличением интервала наблюдения L регистрируемого процесса возрастает количество эффективных элементов исследуемой выборки. Это означает прямо пропорциональную зависимость эффективного количества выборки M от длины отрезка наблюдаемого процесса.

На рис. 4 приведен пример двух распределений – критерия $f(\eta)$, основанного на НМП, и χ^2-распределения $\varphi(\eta)$. Параметры подобраны таким образом, чтобы первые два статистические момента распределений равнялись ($N = 20$, $\nu = 0.34$, $\sigma = 1$, $h = 1$ и $M = 4$). Из рисунка видно, что соответствующие кривые хорошо отвечают друг другу.



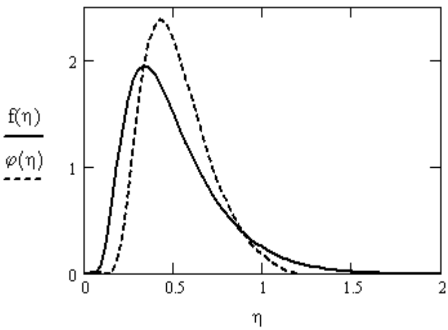


Рисунок 3 – Зависимость эффективного количества M элементов выборки χ^2-распределения от приведенного интервала наблюдения νL

Рисунок 4 – Плотности распределений вероятностей критерия $f(\eta)$, определенного на НМП, и χ^2-распределения $\varphi(\eta)$

Выводы. Таким образом, практика применения распространенного χ^2 – критерия Пирсона, которая предполагает независимость компонент статистического критерия, должна предварительно включать учет возможной степени коррелированности отсчетов между компонентами аддитивного функционала качества. Такого рода анализ корреляций известен [3], результатом него является оценка q' коэффициента корреляции q в рассматриваемой выборке, а значит и оценка ν' декремента случайного марковского процесса. Если оказывается, что $\nu' h \leq 1$, а принимается, что $M = N$, статистическая зависимость между отсчетами может исказить соответствующий результат задачи принятия решения.

В заключение отметим, что хотя в работе анализ эффективного объема выборки проведен на примере квадратичного критерия Пирсона, рассмотренный подход также применим в задачах, в которых используются критерии Стьюдента, Фишера, Бартлетта и другие [4,5]

Список литературы: 1. *Хусу А.Н., Виттенберг Ю.Р., Пальмов В.А.* Шероховатость поверхностей: (теоретико-вероятностный подход). – М.: Наука, 1975. – 344 с. 2. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962. – 504 с. 3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.– 648 с. 4. *Виленкин С.Я.* Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. – М.: Энергия, 1979. – 320 с. 5. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с. 6. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. – М.: Наука, 1989. – 304 с.

Поступила в редколлегию 08.11.06