

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Гомозкова Ірина Олександрівна

УДК 629.7.05:531.1


**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**МОДЕЛІ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ**  
**ДЛЯ ВИСОКОДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Спеціальність 113 – Прикладна математика

Галузь знань 11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 І. О. Гомозкова

Науковий керівник  
Плаксієв Юрій Андрійович,  
кандидат технічних наук,  
доцент

Харків – 2024

## АНОТАЦІЯ

*Гомозкова І. О.* Моделі і методи дослідження алгоритмів орієнтації для високодинамічних об'єктів. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії (PhD) за спеціальністю 113 – Прикладна математика (11 – Математика та статистика). – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, 2024.

*Метою дисертаційної роботи* є удосконалення математичного моделювання обертального руху твердого тіла за рахунок узагальнення методу аналітичних еталонних моделей, який базується на евристичному представленні кватерніона орієнтації у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних кутів.

*Об'єкт дослідження* – визначення орієнтації в безплатформених інерціальних системах орієнтації.

*Предмет дослідження* – моделювання обертального руху твердого тіла з використанням апарату кватерніонів і аналітичної механіки.

У вступі доведено актуальність розробки моделей, які відтворюють специфічні типи кутового руху та оптимізації алгоритмів визначення орієнтації під такий рух об'єктів. Наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, наведено наукову новизну, представлено практичне значення отриманих результатів, надано інформацію щодо особистого внеску здобувача, представлено перелік публікацій за темою дисертації.

У першому розділі детально описано принципи роботи обчислювального блоку безплатформених інерціальних навігаційних систем, шлях їх розвитку та порівняння з іншими видами навігаційних систем. Наведено класифікацію існуючих алгоритмів визначення орієнтації. Перераховано джерела помилок, які виникають в таких системах та методики їх компенсації. Проаналізовано існуючі методи моделювання та тестування

роботи обчислювального блоку. Обґрунтовано доцільність оптимізації безплатформенних систем навігації під характеристики руху сучасних об'єктів, приведено чисельну реалізацію моделей у вигляді траєкторій в конфігураційному просторі та залежностей від часу.

У другому розділі описано принципи, за якими виконується математичне моделювання роботи обчислювального блоку безплатформенних систем навігації. Перераховано вимоги, які висуваються до таких моделей, враховуючи їх залежність від ступенів вільності об'єкта, який обертається. Сформовано основні задачі дисертаційної роботи. Побудовано нові еталонні моделі, які реалізують обертальний рух об'єкта та шляхом чисельного моделювання доведено, що кожна з них реалізує унікальні характеристики кутового руху, відмінні від класичних. Отримано розв'язки відповідних кінематичних рівнянь та системи динамічних рівнянь Ейлера. Останні грають важливу роль у задачах керування та переорієнтації об'єктів.

У третьому розділі проведено оцінку точності роботи двох алгоритмів визначення орієнтації 4-го порядку точності. На основі отриманого результату, для подальшої реалізації обрано алгоритм Міллера. Знайдено нові значення параметрів цього алгоритма, за яких похибка дрейфу є меншою, ніж за класичних значень. Описано фактори, які призводять до зменшення фактичної точності алгоритма в порівнянні з математичною. Досліджено для розроблених моделей кутового руху значення модулів кутової швидкості, за яких досягається обрана точність алгоритма визначення орієнтації.

У четвертому розділі сформовано чіткі характеристики високоманевреного об'єкта та доведено, що одна з розроблених моделей дозволяє відтворювати такий тип руху. Для цієї моделі знайдено ще один набір параметрів алгоритма Міллера, які у випадку високої швидкості обертання пристрою дають похибку дрейфа, меншу на  $10^{-7}$  рад порівняно з класичними значеннями параметрів ( $\alpha = \frac{33}{80}$ ;  $\beta = \frac{57}{80}$ ). Доведено, що нові чотирьохчастотні моделі враховують в собі вплив вібраційного оточення у вигляді гармонійних

коливань. Для даного випадку знайдено нові, оптимізовані конкретно під такі умови параметри алгоритма Міллера.

У п'ятому розділі описано програмний застосунок, розроблений для чисельної реалізації моделей. Написано програму мовою C++ з використанням елементів об'єктно-орієнтованого програмування. Вихідні дані автоматично записуються до Excel-файлу. В цьому ж файлі виконується побудова відповідних графіків залежностей. Перераховано основні вимоги для встановлення застосунку на кожному конкретному пристрої. Описано характеристики та обмеження вхідних умов, необхідних для реалізації обчислень.

У висновках перераховано головні результати наукової роботи, які є розв'язками сформованих теоретичних та прикладних задач дослідження.

*За результатами дослідження отримано такі наукові результати:*

1. *Розроблено* сім нових еталонних кватерніонних моделей, які реалізують типи руху, відмінні від кінчного обертання та регулярної прецесії.
2. *Оптимізовано* алгоритм визначення орієнтації Міллера, шляхом визначення трьох нових наборів параметрів та показано, за яких характеристик руху слід використовувати кожен з них.
3. *Запропоновано* механізм визначення реалізованого порядку точності алгоритма орієнтації. Для отриманих моделей кутового руху визначено найменше значення модуля кутової швидкості, за якого реалізована та математична точність алгоритма Міллера будуть рівними та відповідатимуть 4-му порядку.
4. *Доведено*, що одна з моделей реалізує рух об'єкта, який має високу кутову динаміку (обертання навколо однієї з осей більше 20 обертів в секунду). Вказано, що модуль кутової швидкості моделі при цьому має бути більший за 15 рад/сек.
5. *Описано* принцип роботи розробленого програмного доданку, який дозволяє проводити чисельні експерименти та отримувати візуалізацію

обраного кутового руху. Результати отримуються у вигляді таблиці та відповідних графіків в Excel.

Дослідження, результати яких викладені в дисертаційній роботі, виконані на кафедрі «Комп'ютерне моделювання процесів та систем» НТУ «ХПІ» відповідно до завдань держбюджетної теми МОН України (номер державної реєстрації проекту 0116U000875) за темою «Створення теоретичних основ для методів довговічності елементів конструкцій аерокосмічної техніки та точності систем управління рухом» (термін виконання 2018-2019 рр), в яких здобувач був виконавцем окремих етапів.

Робота виконувалась у рамках проекту DAAD "Ukraine Digital: Studienerfolg in Krisenzeiten sichern (2022-2023)" (Німеччина).

Результати дослідження підтвердили практичну та теоретичну цінність розроблених моделей та адаптацій алгоритму Міллера для складних кутових рухів, надано практичні рекомендації, щодо оптимальних значень модуля кутової швидкості, за яких реалізований порядок точності алгоритма відповідає 4-му.

**Ключові слова:** математична модель руху; високодинамічний об'єкт; оптимізація; безплатформенна інерціальна навігаційна система (БІНС); системи диференціальних рівнянь динаміки та кінематики; гіроскоп; переорієнтація; системи управління; похибка дрейфа; динамічна система з скінченним числом ступенів вільності; траєкторії в конфігураційному просторі; калібрування датчиків; супутник; безпілотні літальні апарати; аерокосмічні технології.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

*Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати:*

- 1) Homozkova I. O. Plaksiy Yu. A., Breslavsky D. V., Naumenko K. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems. *Continuum mechanics and thermodynamics*. 2021. Vol. 33. P. 1141–1160. (Germany, Scopus).
- 2) Гомозкова І. О. Трьохчастотні моделі для визначення орієнтації твердого тіла з урахуванням вібраційного оточення. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Динаміка та міцність машин. Харків, 2021. №2. С. 29–36. (Б).
- 3) Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Аналіз точності алгоритма орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі обертання твердого тіла. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2019. №22 (1347). С.82–88. (Б).
- 4) Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Нові двочастотні еталонні моделі обертання твердого тіла для точного аналізу орієнтації БІНС. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2018. №27 (1303). С.93–99. (Б).

*Опубліковані праці апробаційного характеру:*

- 5) Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Чисельно-аналітичне моделювання вібраційної обстановки для аналізу точності алгоритму Міллера. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXX Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD-2022, м. Харків, 19- 21 жовтня 2022 р. Харків, 2022. С.325.*
- 6) Homozkova I., Plaksiy Y. Software-numerical optimization of coefficients of the Miller algorithm for a four-frequency model of angular motion of a rigid body. *Авіація у XXI столітті – Безпека в авіації та космічні технології:*

матеріали X всесвітнього конгресу, м. Київ, 28-30 вересня 2022 р. Київ, 2022. С.3.2.23–3.2.26.

7) Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Аналіз впливу вібраційного оточення на точність роботи алгоритму Міллера. *Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених*: матеріали XV міжнародної науково-практичної конференції магістрантів та аспірантів, м. Харків, 1-3 грудня 2021 р. Харків, 2021. С. 16–17.

8) Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Визначення фактичної точності модифікації алгоритма Міллера на чотрьохчастотній еталонній моделі. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*: тези доповідей XXIX Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2021., м. Харків, 18-20 травня 2021 р. Харків, 2021. С.66.

9) Гомозкова І. О., Трунов О. М., Плаксі́й Ю. А. Комп'ютерне моделювання процесу обертання твердого тіла і його орієнтації. *Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених*: матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції магістрантів та аспірантів, м. Харків, 1-4 грудня 2020 р. Харків, 2020. С.64-65.

10) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. New reference model of rotation of a rigid body for orientation algorithms analysis. *Авіація у XXI столітті – Безпека в авіації та космічні технології*: матеріали IX всесвітнього конгресу, м. Київ, 22- 24 вересня 2020 р. Київ, 2020.

11) Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Еталонна модель обертання вібраційного типу для відпрацювання алгоритмів визначення орієнтації. *Автоматика 2020*: матеріали XXVI Міжнародної конференції з автоматичного керування присвяченої пам'яті Л. Понтрягіна, М. Красовського та Б. Пшеничного, м. Київ, 13-15 жовтня 2021 р. Київ, 2020. С.103.

12) Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Трьохчастотна еталонна модель вібраційного руху твердого тіла для відпрацювання алгоритмів орієнтації. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*: тези

доповідей XXVIII Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2020, м. Харків, 28-30 жовтня 2020 р. Харків, 2020. С.71.

13) Гомозкова І. О., Плаксій Ю. А. Комп'ютерне моделювання процесу обертання твердого тіла на основі чотирьохчастотного представлення кватерніона орієнтації. Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених: матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції магістрантів та аспірантів, м. Харків, 19-22 листопада 2019 р. Харків, 2019. С. 36–37.

14) Гомозкова І. О., Плаксій Ю. А. Чотирьохчастотна еталонна модель обертання твердого тіла для відпрацювання алгоритмів орієнтації. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVII Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2019, м. Харків, 15-17 травня 2019 р. Харків, 2019. С.77.*

15) Гомозкова І. О., Плаксій Ю. А. Визначення фактичного порядку точності алгоритмів орієнтації на основі застосування еталонних моделей. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVII Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2019, м. Харків, 15-17 травня 2019 р. Харків, 2019. С.76.*

#### *Патенти та свідоцтва про винаходи:*

16) Гомозкова І. О., Плаксій Ю. А. Комп'ютерна програма для чисельної реалізації еталонних моделей та тестування алгоритмів визначення орієнтації «Точносний аналіз алгоритмів орієнтації на двохчастотних еталонних моделях тестових рухів твердого тіла». Свідоцтво №123049 від 18.01.2024 про реєстрацію авторського права на твір.

17) Гомозкова І. О., Плаксій Ю. А., Трунов О. М. Комп'ютерна програма для чисельної реалізації еталонних моделей «Моделювання обертального руху твердого тіла на основі аналітичних представлень кватерніона орієнтації». Свідоцтво №101991 від 22.01.2021 про реєстрацію авторського права на твір.



## ABSTRACT

*Homozkova I. O.* Models and methods of research of orientation algorithms for high-dynamic objects. Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy (PhD) in specialty 113 – Applied mathematics (11 – Mathematics and statistics). – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, 2024.

*The aim of the dissertation work* is an improvement of the mathematical modeling of the rotational motion of a rigid body due to the generalization of the method of analytical reference models, which is based on the heuristic representation of the orientation quaternion in the form of a superposition of trigonometric functions of linear angles.

*The object of research* is determination in strapdown inertial orientation systems.

*The subject of research* is the simulation of the rotational motion of a rigid body using the quaternion apparatus and analytical mechanics.

The introduction proves the relevance of developing models that reproduce specific types of angular movement and optimizing algorithms for determining the orientation for such movement of objects. The connection of the work with scientific programs, plans and topics is given, scientific novelty is given, the practical significance of the obtained results is presented, information is provided about the personal contribution of the recipient, a list of publications on the topic of the dissertation is presented.

The first chapter describes in detail the principles of operation of the computing unit of platformless inertial navigation systems, the way of their development and comparison with other types of navigation systems. The classification of existing orientation determination algorithms is presented. Sources of errors that occur in such systems and methods of their compensation are listed. The existing methods of modeling and testing the operation of the computing unit are analyzed. The expediency of optimizing platformless navigation systems for the

characteristics of the movement of modern objects is substantiated, the numerical implementation of models in the form of trajectories in the configuration space and time dependencies is given.

The second chapter describes the principles by which mathematical modeling of the computing unit of platformless navigation systems is performed. The requirements for such models are listed, taking into account their dependence on the degrees of freedom of the rotating object. The main tasks of the dissertation have been formulated. New reference models have been built that realize the rotational motion of the object, and it has been proven through numerical simulation that each of them realizes unique characteristics of angular motion, different from the classical ones. The solutions of the corresponding kinematic equations and the Euler system of dynamic equations were obtained. The latter play an important role in the management and reorientation of objects.

In the third section, the accuracy of two algorithms for determining the orientation of the 4th order of accuracy is evaluated. Based on the obtained result, Miller's algorithm was chosen for further implementation. New values of the parameters of this algorithm were found, for which the drift error is smaller than for classical values. The factors that lead to a decrease in the actual accuracy of the algorithm compared to the mathematical one are described. The values of the angular velocity modules, which achieve the chosen accuracy of the orientation determination algorithm, were studied for the developed angular motion models.

In the fourth chapter, clear characteristics of a highly maneuverable object are formed and it is proved that one of the developed models allows to reproduce this type of movement. For this model, another set of parameters of the Miller algorithm was found, which in the case of a high rotation speed of the device give a drift error smaller by  $10^{-7}$  rads compared to the classical parameter values ( $\alpha = \frac{33}{80}$ ;  $\beta = \frac{57}{80}$ ). It has been proven that the new four-frequency models take into account the influence of the vibrating environment in the form of harmonic oscillations. For

this case, new parameters of the Miller algorithm were found, specifically optimized for such conditions.

The fifth chapter describes the software application developed for the numerical implementation of the models. The program was written in the C++ language using elements of object-oriented programming. The output data is automatically saved to an Excel file. In the same file, construction of the corresponding graphs of dependencies is performed. The basic requirements for installing the application on each specific device are listed. The characteristics and limitations of the input conditions necessary for the implementation of calculations are described.

The conclusions list the main results of the scientific work, which are solutions to the formed theoretical and applied research problems.

*According to the results of the research, the following scientific results were obtained:*

1. Seven new reference quaternion models have been developed that implement types of motion other than conical rotation and regular precession.
2. Miller's orientation determination algorithm was optimized by defining three new sets of parameters and showing under which movement characteristics each of them should be used.
3. A mechanism for determining the implemented accuracy order of the orientation algorithm is proposed. For the received models of angular motion, the smallest value of the angular velocity module is determined, for which the implemented and mathematical accuracy of the Miller algorithm will be equal and correspond to the 4th order
4. I It has been proven that one of the models realizes the movement of an object that has high angular dynamics (rotation around one of the axes is more than 20 revolutions per second). It is indicated that the angular velocity module of the model should be greater than 15 rad/sec.

5. The principle of operation of the developed software application is described, which allows you to conduct numerical experiments and obtain a visualization of the selected angular motion. The results are obtained in the form of a table and corresponding graphs in Excel.

The research, the results of which are presented in the dissertation, was carried out at the Department of "Computer Modeling of Processes and Systems" of NTU "KhPI" in accordance with the tasks of the state budget topic of the Ministry of Education and Culture of Ukraine (state registration number of the project 0116U000875) on the topic "Creation of theoretical foundations for methods of durability of structural elements of aerospace engineering and accuracy of motion control systems" (implementation period 2018-2019), in which the acquirer was the executor of individual stages.

The work was carried out within the DAAD project "Ukraine Digital: Studienerfolg in Krisenzeiten sichern (2022-2023)" (Germany).

The results of the study confirmed the practical and theoretical value of the developed models and adaptations of Miller's algorithm for complex angular movements, practical recommendations were given regarding the optimal values of the angular velocity module, for which the implemented order of accuracy of the algorithm corresponds to the 4th.

**Key words:** mathematical model of movement; highly dynamic object; optimization; strapdown inertial navigation system (SINS); systems of differential equations of dynamics and kinematics; gyroscope; reorientation; management systems (control systems); drift error; a dynamic system with a finite number of degrees of freedom; trajectories in configuration space; sensor calibration; satellite; unmanned aerial vehicles (UAV); aerospace technologies

## LIST OF APPLICANT'S PUBLICATIONS:

### *Scientific works in which the main scientific results were published:*

- 1) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A., Breslavsky D. V., Naumenko K. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems. *Continuum mechanics and thermodynamics*. 2021. Vol. 33. P. 1141–1160. (Germany, Scopus).
- 2) Homozkova I. O. Three-frequency models for determining the orientation of a solid body taking into account the vibrating environment. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines*. Kharkiv, 2021. No. 2. P. 29–36. (B).
- 3) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. Accuracy analysis of R. Miller's orientation algorithm on a four-frequency reference model of solid body rotation. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology*. Kharkiv, 2019. No. 22 (1347). P. 82–88. (B).
- 4) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. New two-frequency reference models of solid body rotation for accurate analysis of SINS orientation. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology*. Kharkiv, 2018. No. 27 (1303). P.93–99. (B).

### *Proceeding and materials of conferences (Approbation):*

- 5) Homozkova I.O., Plaksiy Yu.A. Numerical-analytical modeling of the vibration situation for the analysis of the accuracy of Miller's algorithm. *Information technologies: science, technology, technology, education, health: abstracts of reports XX of the International Scientific and Practical Conference MicroCAD- 2022*, Kharkiv, October 19-21, 2022. Kharkiv, 2022. P. 325.
- 6) Homozkova I., Plaksiy Y. Software-numerical optimization of coefficients of the Miller algorithm for a four-frequency model of angular motion of a rigid body. *Aviation in the XXI century - Safety in aviation and space technologies:*

materials of the X world congress, Kyiv, September 28-30, 2022. Kyiv, 2022. P.3.2.23–3.2.26.

7) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. Analysis of the influence of the vibrational environment on the accuracy of the Miller algorithm. *Theoretical and practical research of young scientists: materials of the XV international scientific and practical conference of master's and postgraduate students*, Kharkiv, December 1-3, 2021. Kharkiv, 2021. P. 16-17.

8) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. Determining the actual accuracy of the Miller algorithm modification on a four-frequency reference model. *Information technologies: science, technology, technology, education, health: abstracts of reports of XXIX International Scientific and Practical Conference MicroCAD- 2021.*, Kharkiv, May 18-20, 2021. Kharkiv, 2021. P. 66.

9) Homozkova I. O., Trunov O. M., Plaksiy i Yu. A. Computer modeling of the process of solid body rotation and its orientation. *Theoretical and practical research of young scientists: materials of the XIV international scientific and practical conference of master's and postgraduate students*, Kharkiv, December 1-4, 2020. Kharkiv, 2020. P. 64-65.

10) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. New reference model of rotation of a rigid body for orientation algorithms analysis. *Aviation in the XXI century - Safety in aviation and space technologies: materials of the IX World Congress*, Kyiv, September 22-24, 2020. Kyiv, 2020.

11) Homozkova I.O., Plaksiy Yu.A. Reference model of vibration-type rotation for working out algorithms for determining orientation. *Automation 2020: materials of the XXVI International Conference on Automatic Control dedicated to the memory of L. Pontryagin, M. Krasovsky and B. Pshenychny*, Kyiv, October 13- 15, 2021. Kyiv, 2020. P.103.

12) Homozkova I.O., Plaksiy Yu.A. Three-frequency reference model of the vibrational motion of a rigid body for working out orientation algorithms. *Information technologies: science, technology, technology, education, health:*

abstracts of reports of XXVIII International Scientific and Practical Conference MicroCAD-2020, Kharkiv, October 28-30, 2020. Kharkiv, 2020 P.71.

13) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. Computer simulation of the process of solid body rotation based on the four-frequency representation of the orientation quaternion. *Theoretical and practical research of young scientists: materials of the XIII international scientific and practical conference of master's and postgraduate students*, Kharkiv, November 19-22, 2019. Kharkiv, 2019. P. 36–37.

14) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. Four-frequency reference model of solid body rotation for working out orientation algorithms. *Information technologies: science, technology, technology, education, health: abstracts of reports of the XXVII International Scientific and Practical Conference MicroCAD- 2019*, Kharkiv, May 15-17, 2019. Kharkiv, 2019. P. 77.

15) Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. Determining the actual order of accuracy of orientation algorithms based on the use of reference models. *Information technologies: science, technology, technology, education, health: abstracts of reports of the XXVII International Scientific and Practical Conference MicroCAD- 2019*, Kharkiv, May 15-17, 2019. Kharkiv, 2019. P. 76.

*Patents and certificates of inventions:*

16) Homozkova I.O., Plaksiy Yu.A. Computer program for numerical implementation of reference models and testing of algorithms for determining orientation "Precise analysis of algorithms of orientation on two-frequency reference models of test movements of a rigid body". Certificate No. 123049 dated 18.01.2024 on registration of copyright to the work.

17) Homozkova I.O., Plaksiy Yu.A., Trunov O.M. Computer program for the numerical implementation of reference models "Modeling the rotational motion of a rigid body based on analytical representations of the orientation quaternion". Certificate No. 101991 dated 01.22.2021 on registration of copyright to the work.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	4
ВСТУП .....	5
РОЗДІЛ 1. ПРИНЦИПИ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМ БЕЗПЛАТФОРМЕННОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ НАВІГАЦІЇ ТА ТЕНДЕНЦІЇ ЇХ РОЗВИТКУ .....	13
1.1 Основи роботи безплатформених інерціальних навігаційних систем та сфера їх застосування .....	13
1.2 Алгоритми визначення кватерніонів орієнтації різного математичного порядку та методи їх аналітичного відпрацювання .....	18
1.3 Вплив вібрації на борту рухомого об'єкта та точність визначення орієнтації.....	29
1.4 Найпоширеніші методи коригування похибок алгоритмів .....	33
1.5 Перспективи подальшого розвитку систем інерціальної навігації.....	38
1.6 Висновки за розділом .....	39
РОЗДІЛ 2. НЕПЕРЕРВНІ ЕТАЛОННІ МОДЕЛІ, ЯКІ РЕАЛІЗУЮТЬ ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	41
2.1 Постановка задачі та методика розробки еталонних моделей.....	41
2.2 Нові еталонні моделі обертання, які реалізують різні траєкторії руху об'єкта.....	46
2.3 Чисельна реалізація розроблених моделей.....	58
2.3 Висновки за розділом .....	78
РОЗДІЛ 3. ВІДПРАЦЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ ОРІЄНТАЦІЇ В БІНС .....	80
3.1 Критерії вибору алгоритмів для реалізації.....	80
3.2 Оцінка роботи алгоритмів на розроблених моделях.....	82
3.3 Фактичний порядок алгоритмів та практичні оцінки їх точності.....	96



3.4 Висновки за розділом .....	104
РОЗДІЛ 4. АЛГОРИТМИ ТА МОДЕЛІ ДЛЯ ВИСОКОДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ .....	106
4.1 Реалізація руху високодинамічних об'єктів за допомогою розроблених кватерніонних моделей.....	106
4.2 Врахування вібраційного оточення на борту об'єкта з високими кутовими характеристиками.....	109
4.3 Оптимізація алгоритма Міллера під умови руху високодинамічного об'єкта.....	113
4.4 Висновки за розділом .....	118
РОЗДІЛ 5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ЕТАЛОННИХ МОДЕЛЕЙ .....	120
5.1 Висновки за розділом.....	125
ВИСНОВКИ.....	127
СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ .....	130
ДОДАТОК А СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ .....	139
ДОДАТОК Б АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ .....	142
ДОДАТОК В ОСНОВНІ ПРАВИЛА МАТЕМАТИКИ КВАТЕРНІОНІВ .....	146
ДОДАТОК Г ОСНОВНІ ФРАГМЕНТИ КОДУ ПРОГРАМИ .....	149

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

БІНС – безплатформна інерціальна навігаційна система;  
ДКШ – датчик кутової швидкості;  
ІБ – інерціальний блок;  
ПСНС – інтегрована інерціально-супутникова навігаційна система;  
ІНС – інерціальна навігаційна система;  
МЕМС – мікроелектромеханічна система;  
ПІНС – платформенна інерціальна навігаційна система;  
ПЛА – пілотований літальний апарат;  
РО – рухомий об’єкт;  
СК – система координат;  
СНС – супутникова навігаційна система.

## ВСТУП

**Актуальність теми дослідження.** Проблема підвищення точності визначення орієнтації в безплатформених системах орієнтації є актуальною, оскільки в безплатформених системах, на відміну від інерціальних систем з гіростабілізованою платформою, алгоритм орієнтації виконує роль «аналітичної платформи». Алгоритмів визначення параметрів орієнтації різного математичного порядку на сьогодні розроблено велику кількість. Суттєвий вклад в їх розробку зробили Панов А. П., Савадж П. Дж., Міллер Р. Б., Ігнагні М. Б. Отримання цих алгоритмів базується на різних математичних підходах і на використанні різних кінематичних параметрів (кутів, вектора орієнтації, направляючих косинусів, кватерніонів тощо). Вони є адаптованими під відповідні характеристики, які можуть бути унікальними для кожного конкретного пристрою.

Для тестування і опрацювання алгоритмів на етапі проектування відповідних системи безплатформеної орієнтації зазвичай застосовується відома конічна модель обертання – спеціальний випадок кутового руху, для якого відомі значення проекцій вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі і орієнтація в часі, яка відповідає такому обертальному руху. Така модель за своєю суттю є формалізованими розв'язками системи відповідних динамічних і кінематичних рівнянь руху твердого тіла. Конічний рух також покладається в основу отримання для алгоритмів орієнтації коефіцієнтів на основі відповідних розкладень або на основі мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу. Відомо, що оптимізовані під конічний рух алгоритми, втрачають математичний порядок точності при реалізації інших, відмінних від конічного, обертальних рухів. Таким чином, розробка нових аналітичних моделей обертання, які теж можна інтерпретувати, як деякі точні розв'язки системи відповідних динамічних і кінематичних рівнянь руху твердого тіла, і застосування їх до опрацювання алгоритмів орієнтації, є актуальною задачею на етапі проектування систем безплатформеної

орієнтації. Новий підхід до створення аналітичних моделей обертання дозволить розширити клас обертань, на яких досліджуються алгоритми орієнтації, і опрацювати вибраний алгоритм для конкретного об'єкта, який виконує конкретну технічну задачу.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дослідження, результати яких викладені в дисертаційній роботі, виконані на кафедрі «Комп'ютерне моделювання процесів та систем» НТУ «ХПІ» відповідно до завдань держбюджетної теми МОН України (номер державної реєстрації проекту 0116U000875) за темою «Створення теоретичних основ для методів довговічності елементів конструкцій аерокосмічної техніки та точності систем управління рухом» (термін виконання 2018-2019 рр), в яких здобувач був виконавцем окремих етапів.

Робота виконувалась у рамках проекту DAAD "Ukraine Digital: Studienerfolg in Krisenzeiten sichern (2022-2023)" (Німеччина).

### **Мета і задачі дослідження.**

Метою даної роботи є удосконалення математичного моделювання обертального руху твердого тіла за рахунок узагальнення методу аналітичних еталонних моделей, який базується на евристичному представленні кватерніона орієнтації у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних кутів.

Поставлена мета досягається вирішенням наступних задач:

- створення нового класу двочастотних математичних моделей обертального руху твердого тіла, відмінних від моделей регулярної прецесії і конічного руху;
- створення чотиричастотної моделі обертального руху твердого тіла на основі послідовності елементарних поворотів навколо координатних осей;

- узагальнення методу аналітичних еталонних моделей обертання для опрацювання алгоритмів визначення орієнтації за ідеальною інформацією датчиків кутової швидкості;
- застосування побудови траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для аналізу орієнтації рухомого об'єкту при обертальному русі;
- визначення фактичного порядку алгоритмів орієнтації в умовах реалізації для обраної моделі обертання на основі введених практичних оцінок;
- моделювання процесу обертання і орієнтації високодинамічних об'єктів;
- моделювання вібраційної обстановки за допомогою розробленої чотиричастотної моделі.

*Об'єкт дослідження* – визначення орієнтації в безплатформених інерціальних системах орієнтації.

*Предмет дослідження* – моделювання обертального руху твердого тіла з використанням апарату кватерніонів і аналітичної механіки.

### **Методи дослідження.**

У дисертаційній роботі для побудування кінематичної моделі обертального руху твердого тіла використовується евристичний метод, заснований на представленні кватерніона моделі у вигляді суперпозиції тригонометричних функції лінійних поворотів. Для моделювання обертального руху використовується алгебра кватерніонів і метод описання руху твердого тіла у вигляді кінематичних і динамічних рівнянь. Для побудування еталонних моделей обертального руху використовується аналітичний метод з використанням оберненого кінематичного рівняння для кватерніонів. Для отримання квазікоординат використовується метод аналітичного інтегрування компонент вектора кутової швидкості. Для візуалізації процесу орієнтації і дослідження властивостей побудованих

моделей використовується метод побудування траєкторій в конфігурвційному просторі параметрів орієнтації.

Для оцінювання точності алгоритмів орієнтації використовується метод еталонних моделей і неусувна оцінка похибки накопиченого дрейфу. Для чисельної реалізації моделей, траєкторій, оцінювання точності алгоритмів орієнтації і проведення оптимізації алгоритмів розроблено спеціальну програму мовою C++.

### **Наукова новизна отриманих результатів:**

- вперше розроблено низку нових двочастотних еталонних моделей обертання твердого тіла, які є формальними аналітичними розв’язками системи динамічних і кінематичних рівнянь, відмінними від випадків регулярної прецесії і кінчного руху;

- показано, що розроблені двочастотні моделі обертального руху відтворюють кутовий рух більш узагальненого типу в порівнянні з регулярною прецесією і кінчним обертанням, показано, що за деяких значень параметрів розроблені моделі відповідають регулярній прецесії, вільній або вимушеній;

- вперше розроблена чотиричастотна еталонна модель обертання твердого тіла, заснована на послідовності елементарних поворотів на лінійні кути, що дозволяє моделювати обертальний рух з урахуванням вібраційної складової;

- вперше для підвищення точності алгоритмів орієнтації запропонований метод чисельно-аналітичної оптимізації коефіцієнтів;

- вперше показано, що розроблені моделі обертання шляхом підбору параметрів застосовні для опису руху високодинамічних об’єктів;

- вперше для оцінювання ефективності застосування обраного алгоритму орієнтації в бортовому обчислювачі використано поняття практичних оцінок і заснованого на них понятті фактичного порядку точності алгоритма.

– вперше реалізовано програмно процедуру визначення фактичного порядку алгоритму орієнтації на еталонній моделі.

### **Теоретична і практична цінність.**

Отримані у дисертаційній роботі результати мають прикладний характер і можуть бути використані для чисельно-аналітичного моделювання обертального руху твердого тіла на стадії створення системи безплатформеної орієнтації. Зокрема, належним підбором параметрів в еталонних можелях можна отримувати різноманітні обертальні рухи твердого тіла, відмінні від регулярної прецесії і конічного руху. Метод побудування траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації дозволяє співставити реальному руху об'єкта відповідну близьку за виглядом траєкторій аналітичну модель, яка потім покладається в основу опрацювання алгоритмів орієнтації. Також отримані результати мають науково-теоретичне значення, а саме: показано існування нових аналітичних розв'язків системи рівнянь вимушеного обертального руху в тригонометричних функціях лінійних кутів.

Результати роботи впроваджені в навчальний процес кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем НТУ «ХПІ» (Додаток Б). Отримані 2 авторські свідоцтва України на твір (комп'ютерні програми).

**Авторський внесок здобувача** полягає в розробці нових кватерніонних моделей обертання та тестування їх на здатність відтворювати реальні кутові рухи, а також у модифікації алгоритма Міллера шляхом знаходження нових значень для параметрів. Відповідні результати дисертаційної роботи, які отримані здобувачем особисто та в спіавторстві оприлюднені у публікаціях (Додаток А):

1) фахові видання України:

[1] – здобувачем отримано нові трьохчастотні моделі які є частинними випадками реалізації складного руху об'єкта з чотирма ступенями вільності;

[2] – здобувачем розроблено чотирьохчастотну модель на основі кутів Крилова, протестовано модель та побудовано відповідні графіки, доведено, що для подібних типів руху достатню точність надає алгоритм Міллера (при класичних значеннях параметрів), отримано нові значення параметрів. Співавтором Плаксієм Ю. А. розроблено кватерніонне представлення ускладненого руху для кутів Крилова в послідовності 3-2-1, запропоновано кілька значень модуля кутової швидкості, за яких доцільно почати дослідження моделі;

[3] – здобувачем розроблено аналітичні кватерніонні моделі, які розширюють можливості конічних типів руху та доведено, що вони можуть реалізовувати вільний рух, складніший за класичні. Співавтором Плаксієм Ю. А. сформовано обмеження, які накладаються на моделі при розробці двохчастотних моделей, виведено два кватерніонні представлення з врахуванням ситуацій, коли рух вироджується в конічний;

Б) патенти та свідоцтва про винаходи:

[4] – здобувачем розроблено моделі в аналітичній формі та проведено тестування комп'ютерної програми на достовірність отриманих результатів і повноту їх чисельної реалізації;

[5] – здобувачем модифіковано програму для реалізації нових моделей та тестування алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації чрез обчислення дрейфа.

В) інші публікації:

[6] – здобувачу належить розробка чотирьох еталонних моделей на основі кватерніонного представлення руху, їх чисельне моделювання та тестування, обчислення значень параметрів, за яких отримано вільний рух та регулярну прецесію, тестування алгоритма Бранця 4-го порядку точності;

[7] – здобувачем отримано нову модель та проведено оцінку точності алгоритму Міллера;

[8] – здобувачем знайдено нові значення параметрів алгоритму Міллера, показано доцільність їх використання за наявності вібраційного впливу;



[9] – здобувачем досліджено види вібрації на борту рухомого об'єкту та способи їх врахування при моделюванні;

[10] – здобувачем написано програмний код на C++ та за його допомогою досліджено залежність фактичного порядку алгоритмів за різних умов;

[11] – здобувачем розроблено аналітичні моделі тестових рухів;

[12] – здобувачем чисельно реалізовано чотирьохчастотну еталонну модель за різних значень такту квантування та частоти;

[13] – здобувачем проведено чисельний аналіз розроблених моделей та виявлено закономірності для наведеного випадку руху;

[14] – здобувачем розроблено один з випадків трьохчастотної моделі, порівняно результати реалізації розробленої та виродженої моделей шляхом реалізації їх траєкторій та оцінки дрейфу;

[15] – здобувачем досліджено методи розширення класичних типів руху на прикладі кутів Крилова;

[16] – здобувачем досліджено поведінку чотирьохчастотної моделі та доведено, що для об'єктів з таким рухо доцільно використовувати алготм Міллера;

[17] – здобувачем досліджено причини зменшення точності роботи деяких алгоритмів вищих порядкув, виявлено закономірність між цим значенням та значенням проекцій кутової швидкості.

### **Апробація результатів дисертації.**

Наукові та практичні результати дисертаційної роботи обговорювалися на наступних міжнародних конференціях: XXVII Міжнародна науково-практична конференція "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я" MicroCAD–2019 (Харків, 2019), XIII Міжнародна науково-практична конференція магістрантів та аспірантів "Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених" (Харків, 2019), XXVIII Міжнародна науково-практична конференція "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія,

освіта, здоров'я" MicroCAD–2020 (Харків, 2020), XXVI Міжнародна конференція з автоматичного керування присвячена пам'яті Л. Понтрягіна, М.Красовського та Б.Пшеничного (Київ, 2020), IX Всесвітній конгрес "Авіація у XXI столітті" (Київ, 2020), XIV Міжнародна науково-практична конференція магістрантів та аспірантів "Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених" (Харків, 2020), XXIX Міжнародна науково-практична конференція "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я" MicroCAD–2021 (Харків, 2021), XV Міжнародна науково-практична конференція магістрантів та аспірантів "Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених" (Харків, 2021), XXX Міжнародна науково-практична конференція "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я" MicroCAD–2022 (Харків, 2022), X Всесвітній конгрес "Авіація у XXI столітті" (Київ, 2022).

### **Публікації.**

Основні положення із дисертаційних досліджень, що виносяться на захист, опубліковані у 17 друкованих працях: 3 статті – у наукових періодичних фахових виданнях України категорії «Б», 1 стаття – у періодичному фаховому виданні з наукометричних баз SCOPUS, 2 авторські свідоцтва України на твір та 11 – у матеріалах апробаційного характеру.

### **Структура і об'єм.**

Дисертаційна робота складається з анотації двома мовами, вступу, п'яти розділів основної частини та висновків, а також списку використаних джерел і додатків, який містить апробацію результатів дисертаційної роботи і акт впровадження результатів наукових досліджень цієї роботи. Робота містить 141 сторінку основного тексту, серед них: 104 рисунки, 13 таблиць, 76 найменувань в списках використаних джерел на 9 сторінках; 4 додатки на 19 сторінках. Загальний обсяг роботи викладено на 156 сторінках.

## **РОЗДІЛ 1. ПРИНЦИПИ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМ БЕЗПЛАТФОРМЕННОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ НАВІГАЦІЇ ТА ТЕНДЕНЦІЇ ЇХ РОЗВИТКУ**

Інерціальні навігаційні системи (ІНС) займають особливе місце серед всіх, відомих на початок 21 століття, способів визначення орієнтації. Така позиція обумовлена тим, що ІНС надають повну інформацію про навігаційні параметри руху об'єкта, не потребуючи при цьому інформації від зовнішніх джерел (вони є повністю автономними).

ІНС було розроблено у 30-тих роках ХХ століття. Але в їх основу лягли закони механіки, сформовані ще Ісааком Ньютоном. Розробки навігаційних систем покладаються на праці С. Ф. О'Доннела [1], Р. Белмана [2-3], А. Ю. Ішлінського [4-6], Я. М. Бойкова [7], М. Шулера [8-9], Ч. Дрейпера [10], У. Ріглі [11-12] та багато інших вчених.

### **1.1 Основи роботи безплатформених інерціальних навігаційних систем та сфера їх застосування**

Завдяки спеціальним приладам (акселерометрам та гіроскопам), встановленим на об'єкті, ІНС дозволяють з високою точністю отримати для рухомого об'єкта наступні дані: кути курсу, тангажу (дифферента), крену, прискорення, швидкість руху та координати в будь-якому діапазоні кутів і з високою частотою видачі інформації. Вимірювати лінійне прискорення об'єкта дозволяють акселерометри, а гіроскопи відтворюють на об'єкті систему відліку. Також вони дозволяють визначати кути повороту і нахилу об'єкта, які використовуються для його стабілізації та управління його рухом. Іншою важливою складовою ІНС є обчислювальні прилади, які за прискореннями знаходять необхідні параметри руху об'єкту (швидкість, координати тощо).

ІНС зазвичай розділяють на дві групи, в залежності від типу розташування датчиків на рухомому об'єкті:

1) системи з гіростабілізованою платформою (ПНС). В даному випадку маємо платформу, яка призначена для розміщення об'єктів стабілізації (відповідних датчиків). Перед пуском рухомого об'єкта (РО) платформу встановлюють у задане положення, в якому вона і буде утримувати об'єкт в процесі польоту, таким чином моделюючи інерціальну систему координат;

2) системи без гіростабілізованої платформи (БНС). В них акселерометри і гіроскопи жорстко пов'язані безпосередньо з корпусом РО. В таких системах функції «аналітичної платформи» виконує обчислювальний алгоритм, на який і покладається завдання спостереження за супроводжуваним тригранником опорної системи координат, в якій здійснюється навігація.

При цьому обчислювальний пристрій, що обслуговує БНС повинен виконувати наступні завдання:

- 1) інтегрування кінематичних рівнянь руху об'єкта;
- 2) визначення параметрів орієнтації з навігаційних рівнянь;
- 3) приведення векторів з різних систем координат.

Шляхом інтегрування кінематичних рівнянь кутового руху РО в цифровому обчислювачі в БНС будується інерціальний базис. Такий кутовий рух може бути задано за допомогою наступних параметрів:

- 1) кутів Ейлера;
- 2) направляючих косинусів;
- 3) параметрів Родріга-Гамільтона;
- 4) параметрів Кейлі-Клейна;
- 5) параметрів, які дозволяють еквівалентно описати ейлерове обертання навколо однієї і тієї самої осі миттєвого обертання (вектор кінцевого повороту, вектор орієнтації, вектор кутового положення).

Широкого застосування БНС отримали через свої переваги, в тому числі і в порівнянні з ПНС:

- 1) невеликі енерговитрати та габарити;
- 2) помірна собівартість;

- 3) простота приладової реалізації;
- 4) повна автономність функціонування;
- 5) можливість визначити всю сукупність навігаційних параметрів, необхідних для управління літального апарату;
- 6) необмеженість по кутах повороту РО;
- 7) можливість високошвидкісної видачі інформації (вище 100 Гц);
- 8) універсальність системи, в тому числі і відсутність необхідності використання спеціальних систем стабілізації й приведення, оскільки перехід до визначення тих або інших параметрів орієнтації здійснюється алгоритмічно.

Серед недоліків БІНС можна виділити наступні:

- 1) в точці розташування рухомого об'єкту необхідно врахувати форму Землі і параметри гравітаційного поля;
- 2) задання належних початкових умов для коректної роботи системи (початкові положення платформи, значення швидкості, координати);
- 3) необхідно забезпечити безперервність роботи (якщо робота системи була зупинена, потрібно заново вводити початкові умови з урахуванням поточного географічного положення об'єкта);
- 4) на точність роботи впливають сили інерції й великої кількості випадкових факторів різної природи;
- 5) деякі помилки нарастають з плином часу (необхідна корекція тощо).

У посібнику [13] розглядаються основні елементи теорії ІНС. А сам принцип роботи БІНС є наступним:

- 1) інерціальні датчики, що розташовані у вимірювальному блоці, встановленому безпосередньо на корпусі об'єкту, формують інформацію про складові вектору позірною прискорення (блок акселерометрів) та абсолютної кутової швидкості обертання (блок гіроскопів);
- 2) у режимі реального часу інформація з датчиків надходить до обчислювачів БІНС і оброблюється у них за спеціальними алгоритмами;

3) результатом роботи алгоритмів є поточні значення навігаційних споживчих параметрів об'єкту, які подаються в бортову систему управління з високою частотою.

На точність алгоритмів БІНС впливає, крім безпосередньо порядку самого алгоритма, такт зйому інформації з датчиків, характерні прискорення та швидкості обертання РО.

Методи інерціальної навігації, в тому числі і безплатформенної, активно застосовують в навігації різних РО: надводних суден, підводних човнів, літаків, космічних апаратів, роботів тощо.

Еволюція БІНС для повітряних об'єктів (літаків цивільного та воєнного призначення, а також бортових та балістичних ракет) детально описана Дж. П. Саваджем в [14]. Методика використання БІНС в безпілотних літальних об'єктах з покращеним алгоритмом початкового вирівнювання детально представлена в [15]. В основі запропонованого алгоритма лежить модернізований фільтр Калмана.

З доцільністю застосування ІНС в судноходстві можна ознайомитись на прикладі надводного транспортного засобу MACABOT. Навігаційна система в ньому відповідає за точне визначення положення, швидкості та орієнтації в поточний момент часу. А сам MACABOT є універсальною платформою, яка здатна у водному середовищі, виконувати технічне обслуговування портів, дослідження морських продуктивних екосистем та батиметрії [16].

Автономність БІНС є важливою характеристикою для використання їх у підводних РО. В [17] автори пропонують використовувати гравітаційну складову інерціальних навігаційних систем для підвищення точності місцезнаходження автономних підводних апаратів. Для вирішення проблеми позиціонування підводних роботів-прибиральників адаптовано мультисенсорну навігаційну систему, в основі якої лежить ІНС [18].

В промисловості, при навігації бурових установок також застосовують принципи БІНС, що дозволяє максимально механізувати підземні роботи з добування корисних копалин [19]. В роботі [20] також пропонується метод

компенсації похибки, що ґрунтується на вібраційних характеристиках бурових установок.

Новий погляд на використання БІНС можна зустріти в галузі робототехніки. Мобільні роботи, роботи-дослідники для різних сфер (наземні, підводні), роботи-розвідники, тощо, в їх системах навігації актуально використовувати саме ІНС. Завдяки автономності БІНС, можливим є застосовувати роботів за різних умов оточуючого середовища та навантаження. А можливість системи надавати повну інформацію про навігаційні параметри в режимі реального часу дозволяє проводити процедуру керування роботом з високою точністю [21-22].

Частина цих РО належить до класу високодинамічних об'єктів. Термін “високодинамічний об'єкт” використовують для опису керованих пристроїв, що мають достатньо високу зміну кутової швидкості переміщення (швидке обертання навколо однієї з осей). До класу високодинамічних об'єктів можуть належати безпілотні літальні апарати (ПЛА), балістичні, оперативно-тактичні або крилаті ракети, реактивні літаки, штучні супутники тощо.

Нові підходи в використанні систем інерціальної навігації на об'єктах з високою кутовою динамікою запропоновано в роботах [23-26]. В статті [23] пропонується одночасна оптимізація обчислювального блоку, у вигляді нової методики обробки інформації про кутову швидкість об'єкта, та власнорозробленого гіроскопа, який дозволяє отримати достовірніші виміри обертального руху. Для підвищення точності рішення щодо поточної орієнтації, в кватерніонному алгоритмі пропонується розкладання компонент високого порядку в ряд Тейлора та поєднання його з поліномом кутової швидкості. В результаті, цей метод дозволяє підвищити точність роботи системи на порядок, оскільки параметри зв'язку знаходяться шляхом оцінки періоду кутового руху, а на його основі вже отримується інформація про реальну кутову швидкість.

Інший підхід до модифікації систем під умови швидкого обертання осесиметричних аерокосмічних пристроїв запропоновано в [24]. Розглядається

метод зменшення обчислювального навантаження системи на високодинамічних об'єктах через їх декомпозицію на різні підтіла (на окрему складову, що має спрощені динамічні характеристики). Це дозволяє досліджувати обертання відокремлених частин як окремі параметри, без втрати загальної інформації про рухоме тіло.

Вимірювання кутової швидкості крену є базовою проблемою для об'єктів, що швидко обертаються. Алгоритм корекції даної помилки описано в [25]. Дослідження зосереджено на використанні для відповідних вимірів з радіальних гіроскопів і радіальних магнітометрів. Точність отриманих результатів підвищується завдяки їх коригуванню додатковою інформацією з недорогих МЕМС датчиків та за допомогою відповідного алгоритму розширення.

Використання вдосконаленого ітераційного методу Гауса-Ньютона для корекції отриманих навігаційних параметрів високодинамічного об'єкта запропоновано в [26]. В якості моделі для досліджень обрана 6D модель високообертового сняряда, яка в повній мірі реалізує зв'язок між поперечним і поздовжнім рухами тіла.

## **1.2 Алгоритми визначення кватерніонів орієнтації різного математичного порядку та методи їх аналітичного відпрацювання**

Схеми функціонування БІНС є доволі різноманітними, так як у сьогоденні існує значна кількість алгоритмів чисельного інтегрування для кінематичних рівнянь. При цьому, вони відрізняються видом прийнятої за основну системи координат, типом рівнянь орієнтації, формою запису прискорень, яку ми використовуємо, обраним методом чисельного інтегрування, порядком точності алгоритму тощо.

Один з підходів, використаних при розробці алгоритмів орієнтації, базується на застосуванні проміжних параметрів, таких, як вектор орієнтації або вектор Ейлера, і відповідних формул для розкладення в ряд тригонометричних функцій синуса та косинуса половинного кута Ейлера.



В БІНС задача інтегрування навігаційних рівнянь може розв'язуватись різними способами:

- 1) через навігаційний базис у вигляді совокупності різних типів задач з інтегрування прискорення об'єкта;
- 2) шляхом приведення прискорення об'єкту до навігаційного базису з базису, зв'язаного з об'єктом. Таким чином, ми можемо сформулювати задачу визначення приросту уявної швидкості по осям навігаційного базису на такті квантування (інтегрування) навігаційних рівнянь в наступному вигляді [27]:

$$\delta V_n(k+1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} C(t) \cdot a(t) dt, \quad (1.1)$$

де  $k$  – номер такту квантування;  
 $C$  – матриця направляючих косинусів;  
 $a$  – вектор уявного прискорення.

Існують певні умови руху, при яких локальні похибки алгоритмів орієнтації є константами. Виникає така ситуація у випадку, коли в алгоритмах систематичні похибки по прискоренню є еквівалентними похибкам обчислень. Причиною є комбінація гармонійного лінійного прискорення певної частоти по ортогональній осі та плоского гармонійного кутового руху відносно тієї самої осі навігаційного базису. Такий тип руху, особливо в іноземній літературі, прийнято називати – “sculling” [27-28]. Зазвичай його розглядають як тестовий, на якому проводять оцінки якості алгоритмів орієнтації в БІНС.

Так група алгоритмів, оптимізованих відповідним чином під рух типу “sculling”, описана в роботі [28] та полягає в використанні алгоритмів в наступному вигляді:

$$\delta V_n(k+1) = C(t_{k+1/2}) \cdot \Delta V(k+1), \quad (1.2)$$

де  $C(t_{k+1/2})$  – значення матриці  $C$  в середині інтервалу інтегрування.

Такі алгоритми приведення прискорення в загальному випадку, називають «Центрованими». Вони не передбачають синтезу дискретних алгоритмів інтегрування для вихідних інтегралів.

В традиційних способах синтезу для чисельних алгоритмів інтегрування кінематичних рівнянь прийнято використовувати розклад в ряд складових кутової швидкості. Тобто вони ґрунтуються на заданому такті інтегрування на поліноміальне представлення обох співмножників. При цьому кількість коефіцієнтів, які можливо визначити, має відповідати кількості вихідних сигналів з вимірювачів на заданому інтервалі інтегрування, а частоту зйому інформації з вимірювачів обирають кратною частоті розв'язку задачі.

В роботі [29] описано так звані «інваріантні» алгоритми приведення прискорення, які можна назвати альтернативною методикою обчислення інтегралу виду (1.1). Дана методика дозволяє забезпечити до співмножника, який виражає прискорення, інваріантність використовуваного алгоритму. А полягає методика в проведенні інтегрування з використанням поліноміального розкладу тільки для одного зі співмножників матриці  $C$ . Загальні квадратурні формули, які синтезовані в алгоритмі, використовують кратні інтеграли від обчислюваного прискорення на обраному інтервалі.

Крім розробки нових алгоритмів визначення орієнтації, доволі актуальною є задача з оптимізації існуючих алгоритмів. На даний час існує декілька методик для оптимізації алгоритмів орієнтації. Одна з них була запропонована Р. Мілером [30] в 1983 р. і передбачає, що аналітичний вираз для похибки алгоритму можливо отримати у вигляді розкладу ряду по ступеням  $\lambda = \omega_c \cdot \Delta T$ , де  $\omega_c$  – кругова частота для кінцевого руху.

Алгоритми, які використовують інерціальну інформацію всередині такту обчислень, викликають суттєвий інтерес при розробці систем навігації для високодинамічних об'єктів. Цей інтерес пов'язаний з підвищенням розрахункових можливостей та розвитком приладного забезпечення навігаційних систем. Дані алгоритми базуються на поліноміальній апроксимації кутової швидкості всередині такту обчислень. Відповідно,

алгоритм Р. Міллера [30], який використовує квадратичну модель кутової швидкості є досить зручним для реалізації на борту високодинамічних об'єктів. В результаті чого, приріст вектора орієнтації на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  визначається за спеціальною формулою. Це дозволяє формувати вихідні сигнали гіроскопів для об'єктів з високою кутовою динамікою не лише на такті обчислень в точках зйому первинної інформації, а й всередині цього такту, розділяючи його на кілька нових, менших інтервалів інтегрування.

Пізніше, в своїй роботі М. Ігнагні (1990 рік) запропонував алгоритм, який, по суті, реалізує той самий підхід [31]. Його методика базується на припущенні, що алгоритм обчислення інтеграла в загальному вигляді можна представити як суму всіх можливих векторних множень для векторів приросту кута при певній кількості підінтегралів.

Крім того, в роботі [31] наведена так звана «SPIN-CONE» модель, яка і представляє з себе в даному дослідженні аналітичну модель конічного руху. Оскільки локальна або накопичена похибка алгоритма представляється для аналітичних тестових рухів, відповідно, в аналітичному вигляді, тоді це можливо використовувати для оптимізації алгоритмів орієнтації під конкретний механіку об'єкта. Таким чином, для відомого алгоритма Р. Міллера існує два набори коефіцієнтів: для класичної реалізації алгоритма та оптимізованої під конічне обертання реалізації. Але алгоритм здатен накопичувати додаткову похибку для інших видів руху основи присторою.

Загалом, всі методики з оптимізації алгоритмів мають на меті одне: мінімізувати для шуканого інтеграла різницю між його точним значенням та алгоритмічною апроксимацією його в проекції на ту вісь, по якій ми обчислюємо дрейф. Зводиться ця методика до того, що обидва отримані вирази розкладаються в ряд по ступеням, а також виходячи з умов рівності для молодших коефіцієнтів обох розкладань, обчислюємо значення коефіцієнтів алгоритму.

Нові методики дозволяють для різних аналітично заданих видів руху синтезувати оптимізовані під конкретний рух алгоритми. В роботі [32]

описано методику, яка базується на компенсації найбільш істотної складової локальної похибки загального алгоритму за допомогою співвідношень між похідними кутової швидкості, характерних для запропонованого руху.

Наведена методика дозволяє, без необхідності отримання аналітичних виразів для точних і розрахункових значень шуканих величин, оптимізувати алгоритм. Розглядається ця методика на прикладі оптимізації алгоритму Мілера для випадку класичного кінцевого руху. Тоді шукана величина ( $D_\omega$ ) виражається через відомі оцінки ( $A_\omega, B_\omega, C_\omega$ ):

$$(A_\omega \times D_\omega)_x = -(B_\omega \times C_\omega)_x. \quad (1.3)$$

Вибір алгоритмів інтегрування прийнято проводити спираючись на вимоги по точності і швидкодії для конкретного об'єкта. Ці вимоги залежать від навігаційних завдань або завдань орієнтації і стабілізації, які зазвичай розв'язуються на основі БІНС. Оцінюючи всі недоліки та переваги алгоритмів інтегрування, здійснюється вибір рівнянь та кінематичних параметрів.

Структурований та достатньо повний опис методів визначення кутового положення об'єкта наведено в посібнику [33]. Також детально представлено структуру відповідної комп'ютерної моделі БІНС з алгоритмами визначення орієнтації, які належать до різних класів та базуються на різноманітних методиках. В тому числі, в посібку надано вичерпну інформацію про всі основні види кінематичних рівнянь поворотів та вимоги при розробці програми керування положенням РО.

Суттєвий вклад в дослідження методів оптимізації існуючих алгоритмів визначення орієнтації зробив український вчений А. П. Панов. Ним розроблено багато алгоритмів, які використовують первинну інформацію про обертання РО, яка належить різним тактам квантування (зйому інформації). Сам автор називає такі алгоритми багатокроковими. Звертаючи увагу на недоліки таких алгоритмів, можна відзначити значне навантаження

автономного обчислювача на такті обчислень, а також необхідність так званого «розгону» алгоритма на перших кроках обчислень [34-37].

В роботах [34, 35] представлено оптимізацію виключно для випадку регулярної прецесії. Полягає ідея в оптимізації асимптотичних оцінок похибок алгоритмів по швидкодії для заданої множини алгоритмів обчислень параметрів обертання РО. З алгоритмів 4-го порядку точності, шляхом «налаштування» на режим регулярної прецесії їх коефіцієнтів, отримано групу нових алгоритмів 6-го порядку, які можна назвати адаптивними прецесійними алгоритмами. Коефіцієнти адаптивних алгоритмів знаходять шляхом застосування асимптотичних оцінок постійної швидкості обчислювального дрейфа. Відзначено, що по швидкодії адаптивні прецесійні алгоритми визначення орієнтації суттєво перевершують «звичайні» алгоритми 6-го порядку. Алгоритми більшого порядку точності також можливо «налаштувати». Так на основі алгоритмів 6-го порядку можна синтезувати адаптивні алгоритми 8-го порядку точності, використовуючи відповідні оцінки швидкості дрейфу. При цьому автор зауважив, що обчислювальна складність алгоритмів орієнтації, при підвищенні порядку точності до 8-го та вище, зростає навіть при незначному збільшенні такту зчитування інформації.

Методику збільшення кроку обчислення запропоновано в роботі [36]. Це дозволяє зменшити витрати машинного часу та зменшити навантаження на обчислювач. Такий результат досягається за рахунок підвищення точності методів чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Одна з розглянутих автором методик полягає у використанні квазікоординат. При вирішенні цієї задачі застосовується наближений чисельний розв'язок рівняння за заданих початкових умов. Інша ідея полягає в методі невизначених коефіцієнтів, застосованому для безпосереднього знаходження невідомих. Тоді завдання зводиться до розв'язку системи з трьох скалярних рівнянь з трьома невідомими. Загалом можливо скласти 56 різноманітних рівнянь. Зауважимо, що з них лише 49 будуть визначеними, а рівносильними взагалі лише 34 рівняння.

Для компонент кватерніонів орієнтації, представлених у вигляді параметрів Родріга-Гамільтона, в роботі [37] А. Панов описав задачі з оптимізації по швидкодії та точності методів обчислень. Розв'язок цих задач для методів 2-го, 3-го та 4-го порядків точності запропоновано на основі асимптотичних оцінок похибок. Загалом автор пропонує десять методів приведення квазікоординат. Між собою ці методики розрізняються за точністю та складністю. При цьому доведено, що за кінцевим результатом всі запропоновані випадки оптимізації для обчислення кватерніонів еквівалентні між собою. Іншими словами, всі висновки для методів, оптимальних по точності, будуть відноситись і до методів, оптимальних по швидкодії.

Проблематика невідповідності заявленого порядку точності для обраного методу чисельного інтегрування та його фактичної точності при реалізації в обчислювачі (або комп'ютері на етапі моделювання функціонування розроблюваної БНС) описана в [38]. Запропоновано для дослідження даної проблеми використовувати метод послідовних наближень Пікара при чисельному інтегруванні відповідних кінематичних рівнянь у кватерніонах та за чисельного моделювання даних алгоритмів.

Різні методики для корекції похибок в кінематичних рівняннях описані в роботах Р. Роберсона.

Методику корекції розв'язку кінематичних диференціальних рівнянь при довільних обертаннях відносно двох осей детально описано в роботі [39]. Доцільно застосовувати цю методику для чисельного інтегрування кінематичних рівнянь обертання РО при корекції певних похибок, які виникають при обчисленні параметрів.

Для обертань навколо відомих осей з двома ступенями свободи розроблено процедуру корекції, яка наведена в роботі [40]. Описана методика є доволі ефективною для корекції похибки нормування параметрів Ейлера.

В роботі [41] автор розглядає методику корекції для випадків використання параметрів Ейлера та шести параметричних представлень. Процедура обчислень в ній є доволі складною. Полягає запропонована

методика в наступному: до будь-якого рівняння зв'язку, яке існує виключно для методів чотирьох та шести параметрів, додається ще одне рівняння зв'язку, яке містить в собі нульовий компонент. Це дозволяє позбутись надлишковості при знаходженні коренів (параметрів). Також автор пропонує в роботі спосіб використання цієї методики для параметрів Ейлера-Родригеса, а для них, зазвичай, не існує традиційного методу корекції, оскільки вони не задовольняють жодної з умов зв'язку.

Метод вирішення задачі, пов'язаної безпосередньо з підвищенням точності функціонування інерційної навігації запропоновано у [42]. Дана стаття присвячена розробці імітаційної моделі руху інерціального блоку (ІБ), встановленому на двохосьовому поворотному столі – спеціальному обладнанні для імітації руху. І пов'язана дана робота з розробкою алгоритмічного та методичного забезпечення паспортизації, спеціальної процедури для визначення параметрів математичної моделі похибок ІБ. Реалізована програмно при різних видах руху, характерних для двохосьового поворотного столу, ця модель дозволяє генерувати покази інерційних датчиків, які будуть повністю відповідати їх реальній роботі. Ці дані, генеровані моделлю, є необхідними для створення і налагодження алгоритмів паспортизації ІБ. Зазначимо, що запропонований програмний метод також дозволяє визначити послідовність тестових рухів двохосьового поворотного столу, які будуть найбільш ефективними для паспортизації даного блоку.

Вибір алгоритмів орієнтації для реалізації в автономному обчислювачі, проводять через процедуру з оцінювання їх точності і безпосереднього відпрацювання цих алгоритмів. Зазвичай, для цієї процедури застосовують еталонні моделі обертання твердого тіла, які встановлюють зв'язок між первинною інформацією про обертання об'єкта на такті обчислень  $[t_{n-1}, t_n]$  та кватерніоном орієнтації. При цьому еталонні моделі поділяють на дві великі групи, в залежності від обраного методу інтегрування: дискретні та неперервні.

Застосовуючи чисельне інтегрування (наприклад методом Рунге-Куты 4 - го порядку) до рівнянь руху об'єкта, зазвичай отримують дискретні еталонні моделі. В таких моделях завжди присутні похибки, які накопичуються з часом та залежать від обраного методу інтегрування. А порядок для обраного методу інтегрування завжди необхідно узгоджувати з порядком алгоритму визначення орієнтації, який було обрано.

Відомі випадки інтегрування в квадратурах рівнянь руху твердого тіла зазвичай використовують в якості неперервних моделей обертання. Класичними випадками неперервних моделей є моделі регулярної прецесії та кіничного обертання. Вони враховують в собі особливі умови руху основи.

Кватерніон орієнтації для моделі регулярної прецесії представлено у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - r \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2; \\ \lambda_1(t) &= a \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos (\alpha_1 + \psi) / v; \\ \lambda_2(t) &= -a \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin (\alpha_1 + \psi) / v; \\ \lambda_3(t) &= \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + r \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2,\end{aligned}\tag{1.4}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot t, \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t, r = \frac{\xi_2 \cdot \omega_{30}}{v}, a = (\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\psi = -\arctg\left(\frac{\omega_{20}}{\omega_{30}}\right), v = (a^2 + \xi^2 + \omega_{30}^2)^{1/2}$$

Проекції вектора кутової швидкості для моделі регулярної прецесії наведено у вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= a \cdot \cos (k \cdot t + \psi); \\ \omega_2 &= -a \cdot \sin (k \cdot t + \psi); \\ \omega_3 &= \omega_{30},\end{aligned}\tag{1.5}$$

де  $k = (1 - \xi_2) \cdot \omega_{30}, \omega_{30} - \text{const.}$



Тобто, дана модель реалізує специфічний кутовий рух, коли проекція кутової швидкості навколо однієї з осей є сталою на всьому інтервалі моделювання.

Наступним кватерніоном орієнтації задано модель конічного руху:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= 0.5 \cdot (1 + \cos\varphi + (1 - \cos\varphi) \cdot \cos(\nu \cdot t)), \\ \lambda_1(t) &= 0.5 \cdot \sin\varphi \cdot \sin(\nu \cdot t), \\ \lambda_2(t) &= 0.5 \cdot \sin\varphi \cdot (\cos(\nu \cdot t) - 1), \\ \lambda_3(t) &= 0.5 \cdot (1 - \cos\varphi) \cdot \sin(\nu \cdot t).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Проекції вектора кутової швидкості для моделі представлені у вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \nu \cdot \sin\varphi \cdot \cos(\nu \cdot t), \\ \omega_2 &= -\nu \cdot \sin\varphi \cdot \sin(\nu \cdot t), \\ \omega_3 &= \nu \cdot (1 - \cos\varphi),\end{aligned}\tag{1.7}$$

де  $\nu$  – частота власного обертання;

$\varphi$  – частота обертання навколо нерухомої осі відповідної СК.

Еталонні моделі в своїх дослідженнях застосовували наступні вчені: П. Дж. Савадж [14, 28, 43-45], Р. Б. Міллер [30], М. Б. Ігнагні [31], А. П. Панов [34-37].

Еталонні кватерніонні моделі є одним з найзручніших методів представлення кутового руху об'єкта: вони в досить короткій та простій для реалізації формі обчислюють рух навколо всіх осей на будь-які значення кутів.

Для розробки еталонних моделей зазвичай використовують компоненти кватерніонів орієнтації, для яких обов'язковим є виконання умови нормування компонент  $\|\Lambda(t)\| = 1$ . Знаходження виразів для проекцій вектору кутової швидкості відбувається за допомогою підстановки розробленого кватерніона орієнтації та похідних від них в обернене кінематичне рівняння. Для спрощення подальших досліджень обов'язковим є привести отримані вирази

до лінійної форми, тому іноді над ними проводять деякі нескладні тригонометричні перетворення.

Шляхом інтегрування виразів для проекцій вектору кутової швидкості  $\omega(t)$  на інтервалі  $[0, t]$  отримано компоненти вектора позірного повороту (квазікоординати)  $\theta(t)$ , які моделюють дані з відповідних датчиків кутової швидкості при дослідженні.

Розробкою нових еталонних моделей обертання твердого тіла, серед українських вчених, займається Ю. А. Плаксій [46, 47]. Автор пропонує в своїх роботах дві трьохчастотні еталонні моделі обертання твердого тіла у вигляді суперпозиції косинусів і синусів кутів, які лінійно змінюються у часі.

Узагальнена кінематична частина першої моделі представлена у вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos\vartheta(t) \cdot \cos\psi(t) - \xi \cdot \sin\vartheta(t) \cdot \sin\psi(t), \\ \lambda_1(t) &= \eta \cdot \sin\vartheta(t) \cdot \cos\varphi(t), \\ \lambda_2(t) &= \eta \cdot \sin\vartheta(t) \cdot \sin\psi(t), \\ \lambda_3(t) &= \cos\vartheta(t) \cdot \sin\psi(t) + \xi \cdot \sin\vartheta(t) \cdot \cos\psi(t),\end{aligned}\tag{1.8}$$

де  $\eta$  та  $\xi$  - параметри, які мають задовольняти обмеженню:  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ .

Слід зазначити, що залежність кутів  $\vartheta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\varphi(t)$  є лінійною залежністю від часу, тобто:

$$\vartheta(t) = k_1 t, \psi(t) = k_2 t, \varphi(t) = k_3 t.\tag{1.9}$$

Проекції вектору кутової швидкості для розробленої моделі, обчислюються з оберненого кінематичного рівняння, а шляхом інтегрування виразів для  $\omega(t)$  на інтервалі  $[0, t]$  знаходяться компоненти вектора позірного повороту  $\theta(t)$ .

Компоненти кватерніона орієнтації для другої, розробленої автором моделі описано наступним чином:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos\varphi(t) \cdot \cos\psi(t) \cdot \cos\phi(t) + \sin\varphi(t) \cdot \sin\psi(t) \cdot \sin\phi(t), \\
\lambda_1(t) &= \eta \cdot \cos\psi(t) \cdot \sin\phi(t) - \xi \cdot \sin\psi(t) \cdot \cos\phi(t), \\
\lambda_2(t) &= \eta \cdot \sin\psi(t) \cdot \cos\phi(t) + \xi \cdot \cos\psi(t) \cdot \sin\phi(t), \\
\lambda_3(t) &= \sin\varphi(t) \cdot \cos\psi(t) \cdot \cos\phi(t) - \cos\varphi(t) \cdot \sin\psi(t) \cdot \sin\phi(t),
\end{aligned} \tag{1.10}$$

де  $\eta$  та  $\xi$  – параметри, які мають задовольняти тотожності  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ ;

$\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\varphi(t)$  – неперервні функції часу, тобто лінійно змінюються з часом, а саме:

$$\phi(t) = k_1 t, \psi(t) = k_2 t, \varphi(t) = k_3 t.$$

Для цієї моделі, також отримано проекції вектору кутової швидкості на зв'язані осі  $\omega(t)$ . Шляхом їх інтегрування на інтервалі  $[0, t]$  обчислено квазікоординати  $\theta(t)$ .

Також в роботі розглянуто два окремі випадки для моделі, коли  $\eta = 1$ ,  $\xi = 0$  та коли  $\eta = 0$ ,  $\xi = 1$ . Наведені відповідні кватерніонні вирази, отримано проекції векторів кутової швидкості та вирази для квазікоординат на такті.

При цьому, щоб отримати конкретну еталонну модель, для кожної з описаних опорних моделей обертання слід задати значення параметрів  $k_1, k_2, k_3$  і такт обчислень (зчитування інформації)  $\Delta t$ . Зауважимо, що параметри  $k_i$  не слід задавати довільно. Вони мають бути або отримані як результат відповідних апроксимацій реального руху об'єкта, або розраховані опираючись на величину максимального модуля вектора кутової швидкості  $\omega(t)$  для об'єкта, що розглядається.

### 1.3 Вплив вібрації на борту рухомого об'єкта та точність визначення орієнтації

Точність визначення параметрів орієнтації РО залежить не лише від обчислювальних характеристик алгоритма, обраного для певних умов експлуатації. Вона залежить ще від багатьох факторів, таких як якість використовуваних датчиків та принцип їх розташування, початкова виставка об'єкта, дрейф гіроскопів, вплив середовища, в якому знаходяться датчики. До сьогоденішнього часу проведено багато досліджень відносно того, як на

точність отримуваних параметрів орієнтації впливають: вібрація окремих складових РО, вологість та температура.

Вібраційний вплив на точність роботи БІНС є суттєвим. Наразі, розроблено значну кількість методик, які розглядають різні підходи до корекції такого впливу. Тобто, в значній мірі спростити алгоритми роботи обчислювальних пристроїв і виробити обґрунтовані вимоги до корекції системи дозволяє саме якісний аналіз похибок БІНС, в тому числі і викликаних дією вібраційного середовища.

Основні джерела вібрації на борту РО поділяються за своєю природою на дві значні групи. Рухомі елементи бортових систем РО, наприклад ротор двигуна, можуть виступати джерелами гармонійних вібрацій, частота яких буде відповідати частоті обертання ротора. Крім того, в двигуневій установці та її агрегатах також виникають вібрації, але вони вже мають характер випадкового широкополосного шуму. Чим ближче датчики розташовані до джерел вібрації, тим більше спотворюючого впливу набувають їх виміри, а точність роботи системи знижується.

Інший погляд на те, який вплив спричиняє вібрація на роботу інерціального навігаційного модуля запропоновано в [48]. Автор довів, що у випадку, коли вібрація направлена вздовж однієї осі, встановлені на борту РО датчики отримують збуджуючий вплив і по інших осях. Це необхідно враховувати при алгоритмічній компенсації коливальних збурень та розробці амотризаційних установок. Також запропоновані методи попередньої обробки даних з датчиків, які здатні фільтрувати або компенсувати вібраційне оточення у відповідних алгоритмах. Результати експерименту також показали, що розглянуті методи не потребують суттєвих ресурсів обчислювача навіть за значного навантаження.

Розроблено багато методів підвищення якості інформації, що надходить з лазерних та резонансних гіроскопів, шляхом корекції вібраційного впливу на ці датчики. В [49] автор пропонує для знаходження допустимих амплітуд зовнішніх гармонійних впливів на блок БІНС розрахункову схему з

математичної та кінцево-елементної моделей, які базуються на волоконно-оптичних гіроскопах. За його схемою, для кожної конкретної збірки БІНС, можна визначати граничні значення амплітуд зовнішнього гармонійного впливу на основу конфігурації в різних частотних діапазонах.

Запропоновано, для випадку резонансних гіроскопів, вдосконалений алгоритм шумоподавлення [50-52], який добре проявляє себе саме в умовах вібраційної обстановки РО. Розглянуто новий метод для середовища лінійної вібрації на борту літального апарата, який дозволяє колибрувати зсув тріади лазерних гіроскопів.

До розробки дронів застосовують трохи інші підходи. Але при функціонуванні, такі пристрої також схильні до створення певного вібраційного оточення на борту. У роботі [53] виявлено кілька характерних моментів. Одним з них є достатньо жорсткий корпус РО і тому в них вплив вібрації зосереджено на електронну плату дрона. Це погіршує якість роботи системи та зменшує термін використання плати. Зменшити цей вплив можливо, в першу чергу, застосуванням амортизатора. Відповідно до особливостей дії вібрації на борту РО запропоновано новий прототип ізолятора на силіконових опорах. Якість роботи такої модифікації доведено шляхом експериментальної перевірки на спеціальній підвісці. Розглянуто методи, якими можна адаптувати такий амортизатор для інших об'єктів (камери, встановлені на РО, крихкий вантаж, тощо).

В роботах [54-56] описані методики, що дозволяють суттєво підвищити точність визначення орієнтації РО відповідним чином корегуючи вплив вібрації, та безпосередньо визначити тип коливання (лінійне або випадкове). Запропоновано в [57] методику калібрування нелінійного коефіцієнта другого порядку за допомогою випадкової вібрації (CSR<sub>V</sub>). При цьому, моделювання лінійного коливання виконується на спеціальному стенді, що й дозволяє досить коректно генерувати випадкові збурення на борту РО. Інший варіант, коли форма збурення безпілотного літального апарату моделюється як синусоїдальне кутове коливання та випадкова кутова вібрація. Для цього

випадку, описаний вібраційний вплив в системі враховується завдяки спеціальним чином побудованому алгоритму. Ще одна методика корекції збурюючих факторів оточення на борту РО, дозволяє знизити енерговитрати при достатній точності результатів. Підвищити якість початкової виставки БІНС дозволяє методика фільтрації зовнішнього впливу, в тому числі і випадкового. Особливо добре ця методика проявляє себе в умовах дії кутових вібрацій, кутових коливань та випадкової зміни кутового положення корпусу об'єкта під час експлуатації на наземних РО. Розроблено новий метод компенсації динамічної похибки в умовах вібрації для кільцевого лазерного гіроскопа БІНС. Динамічна похибка при цьому описується на еквівалентній моделі для дрейфа гіроскопа в умовах обертання та прискорення.

Коригування вібраційного впливу на борту РО можливе і завдяки методиці, що базується на вимірюванні самого коливання (частота, амплітуда тощо). Це стає можливим завдяки використанню датчиків певного типу, наприклад МЕМС-акселерометрів. В роботі [58] автором проведена оцінка таких датчиків та наведено рекомендації з їх використання для БІНС.

Методика алгоритмічної компенсації наведена в [59]. Запропоновано підходи до отримання двох груп алгоритмів інерціальної навігації. Для одного характерним є з полінома кутової швидкості отримати коефіцієнти моделі. Такі алгоритми належать до класу згладжувальних. Друга група алгоритмів покладається на загальні формули, отримані без звичних обмежень для діапазона частот прискорення відносно заданої частоти опитування датчиків. Названі вони алгоритмами інваріантного прискорення. Обидва випадки враховують ефекти скручування, які викликані дією вібрації і здатні згладжувати псевдопомилки, які можуть виникати через високочастотний шум датчиків. Особливістю цих підходів є використання додаткових вихідних сигналів гіроскопів та акселерометрів (які в свою чергу є приростами кратних інтегралів кутової швидкості протягом обраного кроку зйому інформації). Хоча розробка запропонованих алгоритмів проводилась для об'єктів з рухом типу *sculling*, доведено їх здатність до автокомпенсації помилки орієнтації в

пристроях з іншими динамічними характеристиками (які не відповідають характеристикам sculling-обертання).

#### **1.4 Найпоширеніші методи коригування похибок алгоритмів**

Доволі ефективним методом для визначення координат, вектора швидкості та інших параметрів руху повітряних літальних апаратів, серед розроблених на даний час, є інтегровані системи навігації. Під інтегрованими прийнято розуміти використання на РО двох різних систем навігації. Це дозволяє коригувати недоліки однієї системи за рахунок переваг іншої. Одними з найбільш перспективних об'єднань систем є інтегровані інерціально-супутникові навігаційні системи (ІСНС). Базуються вони на комплексуванні вимірювань, що надходять від супутникових навігаційних систем та БІНС. Таке поєднання систем є доволі вдалим, оскільки їх характеристики в найбільш повній мірі можуть доповнювати та коригувати одна одну.

В монографії [60] автори досить детально наводять принцип побудови інерціальних та супутникових навігаційних систем, функціонування яких розраховано на різні типи повітряних об'єктів. Для кожної з цих систем окремо описано варіанти їх розробки, основні складові, види виникаючих навігаційних помилок, та запропоновано оптимальні схеми їх комплексної роботи.

Алгоритм оцінювання інструментальних погрішностей інерціального блоку навігаційної системи є одним з головних елементів програмно-математичного забезпечення ІСНС. Зазвичай його реалізують на основі алгоритмів узагальненого фільтра Калмана. До основних факторів, які впливають на точність оцінювання навігаційних параметрів, виділяють наступні: маневри, які виконуються пілотованим літальним апаратом (ПЛА), а також безпосередньо налаштування фільтра Калмана.

Зазначимо, що облік і оцінка похибок є важливим етапом при проектуванні БІНС. Зазвичай виділяють наступні джерела похибок в БІНС: інструментальні похибки, серед яких похибки датчиків (гіроскопів і

акселерометрів), в тому числі і ті, що викликані неточністю їх установки, некоректна початкова виставка РО, помилки алгоритму інтегрування, величина квантування первинної інформації (включно з порушенням умов теореми Котельникова), округлення при обчисленнях (особливо актуально для роботи з досить малими значеннями чи грубими обчислювальними схемами). Для кожної групи існують свої, унікальні, методи коригування.

Зменшення інструментальних помилок гіроскопів і акселерометрів можливе за рахунок калібрування цих датчиків. Один з таких методів, який полягає в використанні зовнішніх датчиків (наприклад, зовнішні камери, глобальних навігаційних супутникових систем, радары, тощо) описано в [61]. Дослідження проводилось на наземних рухомих об'єктах (автономні автомобілі).

Початкову виставку БІНС для РО можна описати як геометричний спосіб узгодження системи координат, пов'язаної безпосередньо з корпусом об'єкта і системи координат його приладів з осями стартової системи. При цьому стартова система координат має бути орієнтована в азимуті щодо осей географічної системи. Початкову виставку можна описати й аналітичним методом визначення параметрів орієнтації. Він характеризується початковим положенням осей приладової системи координат щодо географічної системи. Корекція даного типу помилок можлива за рахунок зменшення впливу випадкових помилок вимірювачів. Для цього використовують спеціальні алгоритми обробки інформації, які ґрунтуються на фільтрації сигналу та його корекції за допомогою додавання до нього певного зовнішнього сигналу.

Асимптотична оцінка неточності визначення орієнтації виникає в обчислювачі, при розв'язанні рівнянь в варіаціях, які в свою чергу добувають з відповідних кінематичних рівнянь. Обумовлена дана оцінка помилок різними факторами, такими як округлення даних, похибки задання початкових умов або безпосередньо від використововуваного алгоритму (залежать від порядку алгоритму кроку інтегрування), невірно введені дані, обмеження



смуги пропускання в області значень частоти інтегрування та квантування первинної інформації.

Критеріями точності роботи алгоритмів визначення орієнтації можуть виступати різні характеристики:

- 1) геометричні, такі як дрейф, неортогональність і порушення масштабу;
- 2) різниця обчисленого і точного значення матриці направляючих косинусів (прийнято називати матрицею помилок), норма матриці помилок або швидкість росту цієї норми.

Більш наглядними та зручними є саме геометричні помилки.

За іншими критеріями, похибки алгоритмів розділяють на усувні та неусувні.

Усувними є накопичені помилки модуля. Ці похибки можна коригувати шляхом нормування обчислюваного кватерніону орієнтації в поточний момент часу. Дана процедура є необхідною, оскільки попереджає виникненню ситуації, яка суперечить кінематичному рівнянню або переповненню розрядної сітки бортового комп'ютера. Процедуру нормування кватерніонів проводять на кожному такті квантування відповідно до обраного алгоритма. Зазначимо, що кращий результат дає процедура нормування, в схемі якої не використовується операція ділення.

Неусувними похибками алгоритмів є ті, які неможливо скоригувати під час роботи алгоритму орієнтації. Такі похибки обчислень накопичуються з плином часу. Найбільш критичною є похибка обчисленого дрейфу (накопичений малий кут повороту обчисленого базису відносно його істинного положення).

Новий алгоритм коригування значень кватерніонів для компенсування великих кутів розбіжності між значеннями БІНС і доплерівським журналом швидкості у відповідній інтегрованій навігаційній системі пропонується в [62]. Розроблений метод калібрування кватерніонів дає кращу точність і стійкість, в порівнянні з нелінійними підходами. Полягає нова процедура в

застосувані інформаційного фільтра Калмана до оптимізованого рівняння вимірювань, яке враховує кути зсуву, описані в кватерніонній формі, відповідно до їх фізичних властивостей та похибки масштабного коефіцієнта. Автор пропонує для визначення кутів зсуву використовувати нульовий вектор спостереження, а похибку масштабного коефіцієнта обчислити через скалярну похибку швидкості.

Стандартним методом зменшення систематичних похибок даних у БІНС є попереднє згладжування вихідних сигналів датчиків, безпосередньо, перед розв'язком задач. В роботі [63] описано метод зменшення шуму квантування за допомогою цифрового антиалайзингового фільтра згладжування. На інтервалі, рівному такту зйому інформації з гіроскопів, він забезпечує плавне згладжування сигналу. Сам метод полягає в тому, що при визначенні коефіцієнтів алгоритму враховуються частотні спотворення, внесені фільтром з відомою передаточною функцією. Проте, даний фільтр знижує точність визначення кутової орієнтації. Він робить не ефективним точне налаштування коефіцієнтів алгоритмів орієнтації під умови кінчного руху, через те, що спотворює частотний склад корисного сигналу.

Виділяють ще один тип похибок – «Псевдоконічні» похибки. Їх можна описати, як систематичні похибки БІНС. Вони виникають у вихідних сигналах вимірювачів, за наявності в них гармонійних складових. Співвідношення фаз та частот в них збігаються з фазами та частотами для кінчного руху, але не обумовлені реальним рухом цього типу.

Доволі детально в роботі [64] проаналізовано сукупний вплив різних факторів на точність оцінювання інструментальних похибок ІБ в ПІНС. Також автором сформовано рекомендації з підвищення цієї точності. В даній роботі рекомендовано використовувати налаштування фільтра Калмана за заданих умов моделювання, замість теоретичного налаштування. Автором доведено, що бажано включити кілька додаткових курсових маневрів на початку програми польоту ПЛА, які дозволяють, при оцінюванні похибок вимірювань інерціального блоку, знизити помилки до величини менше 5%, а

також більш ніж на 50% підвищити точність функціонування навігаційної системи в автономному режимі. Також наведено рекомендації для застосування отриманих результатів при розробці рекомендацій з пілотування окремих ПЛА, а також при проектуванні та вдосконаленні програмно-математичного забезпечення ПСНС.

Вплив застосування фільтра Калмана в програмно-математичному забезпеченні ПСНС на працездатність і ефективність неточного володіння статистичними характеристиками шумів та розробки рекомендацій з завдання зазначених параметрів проведено в статі [65]. Наведені автором рекомендації є актуальними не лише при проектуванні програмно-математичного забезпечення для інтегрованих навігаційних систем, а й при проектуванні інших інформаційних систем реального часу з надлишковою інформацією.

Слід відзначити наступні особливості використання фільтра Калмана для корекції вектора стану в ПСНС:

- 1) лінеаризована модель, яку ми отримуємо є нестационарною та суттєво залежить від руху об'єкта;
- 2) лінійна модель динамічного процесу є наближеною, оскільки вона отримується шляхом лінеаризації вихідних нелінійних даних;
- 3) неточно відомі статистичні характеристики, оскільки шуми в системі не є білими гаусовськими.

Розширення класу інтегрованих навігаційних систем пропонується в [66]. Розробки присвячені автоматизації робіт на вугільних шахтах, тому стандартні варіанти інтегрованих систем не є ефективними. Об'єкти, які функціонують під землею мають бути максимально автономними, бо ґрунт створює додаткові перешкоди в навігаційній системі (найгіршу якість показують супутникові та радіо сигнали). Найкращим варіантом для таких машин є інерціальна навігація. Коригування похибок БІНС пропонується виконувати за допомогою додаткової системи у вигляді бездротової сенсорної мережі, встановленої на ділянці роботи об'єкта.

Підвищена увага до подальшого технічного розвитку цих систем

зумовлена перевагами ІНС. Основною причиною цього є можливість застосування досягнень в області розробки бортових обчислювальних машин і сучасних чутливих елементів при їх проектуванні, таких як гіроскопи: динамічно налаштовані, волоконнооптичні, лазерні, мікромеханічні, роторні вібраційні, хвильові твердотільні і т.п.

### **1.5 Перспективи подальшого розвитку систем інерціальної навігації**

Стрімкий розвиток електроніки суттєво впливає і на розвиток інерціальної навігації. Аналогові обчислювачі в ІНС замінили компактними цифровими пристроями. Вони дозволяють не лише зменшити габарити чуттєвих елементів та зменшити собівартість, а й підвищити точність та допустимий діапазон навантажень на обчислювач. МЕМС технології дозволяють розробляти мініатюрні датчики (гіроскопи та акселерометри) з розширеним спектром характеристик. Новий погляд на застосування ІНС у сучасних технологіях навігації запропоновано в роботі [67]. Звичайно, найактивніше ці системи застосовуються в сферах авіації, робототехніки, системи управління БЛА. БІНС є невід'ємною складовою систем управління морського судна, літака, вертольоту, ракети тощо. Зазначимо, що саме принципи інерціальної навігації стали однією з умов, які дозволяють реалізувати безпосадочні авіа перельоти, польоти в космос, тривалі походи підводних човнів. Відповідно, методики з розробки нових та підвищення точності існуючих алгоритмів ІНС, і для БІНС в тому числі, постійно розширюються [68].

Новий підхід до розширення класу кінчних моделей запропоновано в [69]. Враховуємо, що класичний випадок кінчного обертання – це одночасна реалізація кутового руху тіла навколо власної осі та навколо певної осі нерухомої СК. Автор пропонує реалізувати цю саму властивість об'єкта як синхронні коливання з заданим зсувом фази навколо двох перпендикулярних осей. В такому випадку утворюється лише алгоритмічний дрейф відносно нерухомої осі, а швидкість його зросту буде залежати від заданих в моделі

параметрів. На цій моделі зручніше виділити окремі складові похибки та коригувати кожен з них спеціально підібраним методом.

Імітаційні моделі ІБ, серед всіх методів моделювання руху безпосередньо для БІНС, розглядаються найчастіше. Вони дозволяють імітувати еталонні моделі обертання твердого тіла та показники інерціальних датчиків. Ці дані й застосовують на етапі проектування системи орієнтації для отримання коректних оцінок точності алгоритмів для певного РО. Саме через те, що рух об'єкта в реальних умовах є досить складним, то доволі актуальною і для сучасних БІНС стає задача розширення класу неперервних еталонних моделей обертання твердого тіла.

### **1.6 Висновки за розділом**

Представлено основні переваги та недоліки БІНС, в тому числі порівняння їх із іншими навігаційними системами. До переваг належать вартість системи, надійність, швидкодія, точність, перешкодозахищеність. Це дозволяє використовувати їх на об'єктах, які потребують повної або часткової автономності роботи (військові об'єкти, підводні човни, бурові системи), в тому числі, стійкі до стороннього втручання. Основними недоліками БІНС можна назвати накопичення похибки орієнтації з часом, необхідність початкової виставки системи, вимоги до точності та конфігурації датчиків. Для компенсації кожного з цих недоліків існують різні способи. Один з них - інтеграція з додатковою навігаційною системою (для БІНС найефективнішою є супутникова система).

Доцільно, також, оптимізувати роботу кожної складової інерціальної системи окремо: модернізація датчиків та коректний підбір їх складу та конфігурації в конкретній навігаційній системі, потужний бортовий обчислювач, фільтрація даних та покращені навігаційні алгоритми, тощо. Проаналізовано різні погляди на сучасний стан розвитку інерціальних навігаційних систем. Зокрема, розглянуто можливості розширення сфери їх

застосування завдяки здатності задовольнити вимоги, які висувають при розробці рухомих об'єктів.

Виявлено питання, які потребують найбільшої уваги. Сформовано актуальну задачу для подальшого дослідження в роботі та опрацьовано методи, які доцільно використовувати.

## РОЗДІЛ 2. НЕПЕРЕРВНІ ЕТАЛОННІ МОДЕЛІ, ЯКІ РЕАЛІЗУЮТЬ ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

### 2.1 Постановка задачі та методика розробки еталонних моделей

Від якості роботи алгоритма визначення орієнтації суттєво залежить точність роботи безплатформенної інерціальної навігаційної системи в цілому. Тому будь-який з розроблених алгоритмів має виконувати вимоги по завантаженню автономного обчислювача на такті (що частково вирішується завдяки потужності новітніх комп'ютерних систем) та точності визначення навігаційних параметрів, необхідних для орієнтації, стабілізації та автоматичного керування об'єктом.

Визначення поточної орієнтації в БІНС відбувається наступним чином: встановлені на об'єкті ДКШ (в класичній комплектації інерціальний вимірювальний модуль складається з тріади акселерометрів та тріади гіроскопів або лише з надлишкової кількості акселерометрів) вимірюють кутовий рух основи  $\omega$ , та передають його до автономного обчислювача у вигляді дискретного сигналу, або так званих квазікоординат:

$$\theta_n^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega(t) dt, \quad (2.1)$$

де  $\omega(t)$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта на зв'язані осі.

На основі цього сигналу, на кожному такті  $[t_{n-1}, t_n]$ , в бортовому комп'ютері реалізується певний алгоритм, який розраховує положення об'єкта відносно базової системи координат (а також для уявного прискорення  $n$ , отриманого з акселерометрів, здійснює подвійне інтегрування  $gn$ ). При цьому можуть використовуватись матриця напрямних косинусів ( $C$ ) або кватерніони орієнтації ( $\Lambda$ ).

З них потім обчислюються необхідні навігаційні параметри: координати об'єкта, його лінійна швидкість та кутове положення (рис. 2.1).

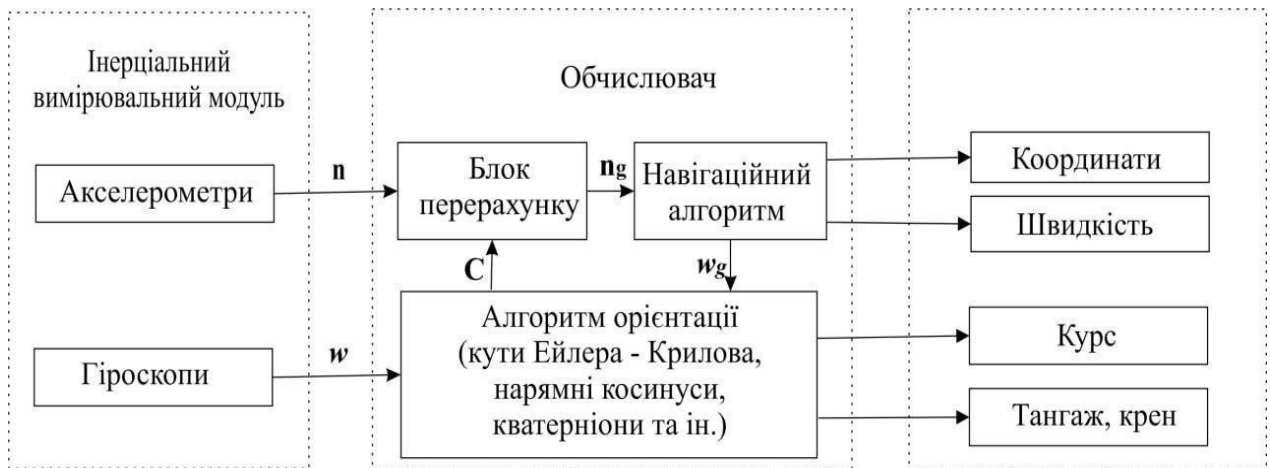


Рисунок 2.1 – Схема роботи БІНС

Питанню розробки алгоритмічного забезпечення присвячено роботи багатьох вчених [14, 15, 29-31, 33-36]. Тому, на сьогодні існує значна кількість алгоритмів різних принципів роботи та порядків точності. Процедура вибору алгоритма, який буде найкращим для реалізації на борту конкретного рухомого об'єкта є важливою задачею при проектуванні БІНС. Тестуючи алгоритм визначення орієнтації на реальному об'єкті, ми можемо порівняти обчислене положення приладу з фактичним. Використовувати під час дослідження методи моделювання є доволі зручним, бо це потребує менше часу, місця та фінансових ресурсів, а також дозволяє більш детально з'ясувати природу певних процесів.

В механіці, обертальний рух досліджуваного об'єкта навколо його центру мас описується кінематичний кватерніонним рівнянням (2.2):

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \cdot \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}, \quad (2.2)$$

та системою динамічних рівнянь Ейлера (2.3):

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \dot{\omega}_1(t) - (I_3 - I_2) \cdot \omega_2(t) \cdot \omega_3(t) &= M_1(t), \\ I_2 \cdot \dot{\omega}_2(t) - (I_1 - I_3) \cdot \omega_1(t) \cdot \omega_3(t) &= M_2(t), \\ I_3 \cdot \dot{\omega}_3(t) - (I_2 - I_1) \cdot \omega_1(t) \cdot \omega_2(t) &= M_3(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$



де  $I_i$  – моменти інерції твердого тіла, ( $i=1,2,3$ );

$M_i$  – проекції вектора головного моменту, ( $i=1,2,3$ );

$\omega_i(t)$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості на зв'язані осі ( $i=1,2,3$ ).

Зазвичай, для моделювання використовують спеціальні тестові рухи, які імітують обертання конкретного об'єкта. Базуються вони на заданих заздалегідь кватерніонах орієнтації та значеннях позірних поворотів. В загальному вигляді вони є розв'язками кінематичного (2.2) та системи динамічних (2.3) рівнянь. Такі тестові рухи прийнято називати еталонними моделями обертання, які можуть бути задані в дискретному або неперервному вигляді.

Для дискретних еталонних моделей характерним є те, що отримують їх шляхом чисельного інтегрування рівнянь математичної моделі обраного об'єкта. Вони можуть бути реалізовані для досить складних об'єктів, що є їх суттєвою перевагою. Але такі моделі накопичують похибки від методу чисельного інтегрування, які в них застосовується, і об'єднують їх з похибками самого алгоритма визначення орієнтації.

В неперервних еталонних моделях квазікоординати та кінематичні параметри представлені як неперервні явні функції від часу. Тому похибка в таких моделях пов'язана переважно з точністю роботи обраного алгоритма визначення орієнтації. Але при імітації обертання твердого тіла ця група моделей зазвичай обмежена існуючими точними розв'язками сукупності кінематичних та динамічних рівнянь.

Найчастіше, для відпрацювання алгоритмів обирають тестові рухи у вигляді неперервних моделей регулярної прецесії (одночасне обертання об'єкта навколо певної власної осі та навколо осі нерухомої координатної системи) і конічного руху (як випадок самостійного руху під дією моментів або як частинний випадок регулярної прецесії).

Процедура тестування та вибору алгоритма за допомогою еталонних моделей наступна (рис. 2.2):



Рисунок 2.2 – Схема тестування алгоритмів на еталонних кватерніонних моделях

Першим етапом імітується обертальний рух тіла. Для цього обирається кватерніонна модель, яка найкраще описує характеристики запропонованого об'єкта  $\Lambda_e$ . Потім з оберненого кінематичного кватерніонного рівняння обчислюються проекції вектора кутової швидкості (2.4):

$$\omega = 2 \cdot \tilde{\Lambda} \circ \dot{\Lambda}, \quad (2.4)$$

де  $\tilde{\Lambda}$  – спряжений, обернений до заданого:

$$\tilde{\Lambda} = (\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3);$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{d\Lambda}{dt};$$

$$\omega = (0, \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Далі шляхом інтегрування на кожному такті  $[t_{n-1}, t_n]$  виразів (2.4), вони приводяться безпосередньо до вигляду даних з ДКШ, які ще називають квазікоординатами (2.1).

Наступним етапом імітується робота БНС. В автономному обчислювачі реалізується заданий алгоритм (при моделюванні досить зручно перевірити роботу кількох алгоритмів та обрати кращий серед них). Вхідними даними для нього є квазікоординати (2.1). Результатом роботи алгоритма в цьому випадку

є інша кватерніонна модель, яка реалізує обчислений рух. Основним критерієм при виборі алгоритма є максимальна наближеність між фактичним (змодельованим) рухом та обчисленим (отриманим з алгоритма).

Кватерніонне представлення обертового руху є досить зручним для застосування, оскільки використовує мінімальну кількість параметрів та може бути застосовано для перепроеціювання векторів. Крім того, спеціальна "математика кватерніонів" використовує доволі просте правило складання поворотів (для проміжних кватерніонів поворотів обчислюється їх добуток, в порядку реалізації самих поворотів записаних зліва направо). Розробка еталонних моделей в загальному випадку базується на аналітичних представленнях для компонент кватерніона орієнтації  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$ , який обов'язково має бути нормованим  $\|\Lambda(t)\| = 1$ . Якщо  $\mathbf{e}$  – направляючий орт осі,  $\psi$  – величина кута обертання, тоді такий рух в кватерніонній формі записують наступним чином (2.5):

$$\Lambda_\psi = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{e} \cdot \sin \frac{\psi}{2}. \quad (2.5)$$

Кількість таких проміжних кватерніонів відповідає кількості ступенів вільності об'єкта та різним між собою величинам кутів обертання. Також при побудові кватерніонних моделей необхідно враховувати виконання початкової умови  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$ .

Для квазікоординат (2.1) в аналітичному вигляді модельні значення визначаються з формули:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i=1, 2, 3, \quad (2.6)$$

де  $\theta_i(t_n)$  – компоненти вектора позірного повороту (квазікоординати), обчислені в моменти часу  $t_n$  і  $t_{n-1}$ :

$$\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad \theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t) dt.$$

При моделюванні рівняння (2.4) використовують в розкладеній покомпонентно формі:

$$\omega_1 = 2 \cdot (\dot{\lambda}_1 \cdot \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \cdot \lambda_1 + \lambda_3 \cdot \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \cdot \dot{\lambda}_3),$$

$$\omega_2 = 2 \cdot (\dot{\lambda}_2 \cdot \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \cdot \dot{\lambda}_1),$$

$$\omega_3 = 2 \cdot (\dot{\lambda}_3 \cdot \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \cdot \dot{\lambda}_2),$$

де  $\dot{\lambda}_i$  – похідні компонент кватерніону орієнтації,  $i=0, 1, 2, 3$ .

## 2.2 Нові еталонні моделі обертання, які реалізують різні траєкторії руху об'єкта

Еталонні моделі повинні реалізовувати різні випадки обертального руху. Відповідно, при їх розробці спираються на різну кількість проміжних кватерніонів. Так обертання об'єкта лише з одним ступенем вільності (на значення одного кута) називається плоским. Даний тип руху є досить обмеженим, а тому його не прийнято використовувати в якості тестового. Класичні еталонні моделі покладаються на кутовий рух, який має два ступеня вільності (обертальний рух обов'язково відбувається на значення двох кутів, різних між собою). Моделі такого типу прийнято називати конічними. До цієї групи належать модель конічного руху та регулярної прецесії. Їх особливість полягає в тому, що одна з осей залишається нерухомою (і виникає додаткова методична похибка навколо цієї осі).

Випадок кутового руху, коли об'єкт має три ступені вільності називається сферичним. В окремих реалізаціях такого обертання, кінець вектора кутової швидкості реалізує рух по сфері незмінного радіуса. На сьогодні розроблено значну кількість приладів, які мають три і більше ступені вільності, тому класичні тестові рухи виявляються недостатніми для повного аналізу обраного алгоритма.

Першим етапом дослідження є розширення класу конічних моделей. Розроблено чотири еталонні моделі, які в загальному випадку відтворюють наступний обертальний рух:

$$\Lambda = (\cos \frac{\varphi}{2} + i_1 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}) \circ (\cos \frac{\psi}{2} + i_2 \cdot \sin \frac{\psi}{2}).$$

Розроблені моделі названо двохчастотними, оскільки кути в них представлені двома різними явними функціями від часу (частотами).

Для першого випадку двохчастотної моделі [69-70], покомпонентне представлення кватерніона орієнтації запропоновано у вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \eta \cdot \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t), \\ \lambda_1(t) &= \xi \cdot \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) - \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t), \\ \lambda_2(t) &= \xi \cdot \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t), \\ \lambda_3(t) &= \eta \cdot \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t),\end{aligned}\tag{2.7}$$

де  $k_1, k_2$  – деякі частоти ( $k_1 \neq k_2$ ),  $\eta$  та  $\xi$  – параметри, значення яких вважаємо заданим відповідно до умови  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ .

Згідно оберненого кінематичного рівняння (2.4) проекції вектору кутової швидкості матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= -2 \cdot k_1 \cdot \eta \cdot \cos(2k_2 t), \\ \omega_2(t) &= 2 \cdot k_1 \cdot \eta \cdot \sin(2k_2 t), \\ \omega_3(t) &= -2 \cdot \xi \cdot k_1 + 2 \cdot k_2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Обертання навколо третьої осі для даної моделі є сталим (не змінюється з часом), а перша та друга компоненти для проекцій вектору кутової швидкості змінюються відповідно з гармонійним законом. Такі властивості зазвичай притаманні твердим тілам з динамічною симетрією ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) при класичній регулярній прецесії.

Розроблена модель відповідає початковим умовам, що є відмінними від класичного випадку  $\Lambda(0) = (\eta, 0, \xi, 0)$ ,  $\omega(0) = (-2k_1\eta, 0, -2\xi k_1 + 2k_2)$ .

Щоб довести, що розроблена модель є узагальненим випадком обертального руху, на відміну від класичних моделей, необхідно знайти розв'язки для оберненої задачі динаміки. Для цього необхідно знайти зовнішні моменти  $M_i$  з системи динамічних рівнянь Ейлера (2.3):

$$\begin{aligned} M_1(t) &= 4\eta k_1 \sin(2k_1 t) (I_1 k_2 + (I_2 - I_3)(\xi k_1 - k_2)), \\ M_2(t) &= 4\eta k_1 \cos(2k_2 t) (I_2 k_2 + (I_3 - I_1)(-\xi k_1 + k_2)), \\ M_3(t) &= 2\eta^2 k_1^2 \sin(4k_2 t) (I_1 - I_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обчислення виразів (2.3) для випадку несиметричного рухомого об'єкта ( $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ ) показало, що загалом тіло рухається під дією моментів (не є вільним обертанням).

Якщо тіло, динамічні властивості якого досліджуються, є симетричним ( $I_1 = I_2$ ), розв'язки (2.3) будуть наступними:

$$\begin{aligned} M_1(t) &= 4\eta k_1 \sin(2k_2 t) (I_3 k_2 + (I_1 - I_3)\xi k_1), \\ M_2(t) &= 4\eta k_1 \cos(2k_2 t) (I_3 k_2 + (I_1 - I_3)\xi k_1), \\ M_3(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$M_3(t)$  незалежно від значень параметрів буде нульовим на всьому інтервалі дослідження. Слід відзначити, що дані вирази залежать не лише від значень частот, а й покладаються на задані параметри  $\eta$  та  $\xi$ . В умові, коли параметри  $\eta=0$  і  $\xi=1$  отримуємо випадок вільного обертання об'єкта:  $M_1(t) = M_2(t) = M_3(t) = 0$ . Відповідно, за окремих умов реалізації дана модель здатна відтворювати рух запропонованого твердого тіла відповідно до характеристик регулярної прецесії.

Другий випадок двохчастотного руху [69-70], представлено наступним кватерніоном орієнтації:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \eta \cos(k_1 t) \cos(k_2 t) + \xi \sin(k_1 t) \sin(k_2 t), \\
\lambda_1(t) &= \cos(k_1 t) \sin(k_2 t), \\
\lambda_2(t) &= \sin(k_1 t) \cos(k_2 t), \\
\lambda_3(t) &= \xi \cos(k_1 t) \cos(k_2 t) - \eta \sin(k_1 t) \sin(k_2 t),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

де  $k_1, k_2$  – деякі частоти ( $k_1 \neq k_2$ ),  $\eta$  та  $\xi$  – параметри, значення яких задано згідно до умови:  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ .

Проекції кутової швидкості для даної реалізації матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= 2\xi k_1 \cos(2k_2 t) + 2\eta k_2, \\
\omega_2(t) &= 2\eta k_1 \cos(2k_2 t) - 2\xi k_2, \\
\omega_3(t) &= -2k_1 \sin(2k_2 t).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Для даної реалізації руху характерним є те, що перша та друга складові вектора кутової швидкості містять в собі постійні складові, а третя компонента не залежить від параметрів  $\eta$  і  $\xi$  та змінюється згідно гармонійного закону. Початковими умовами розробленої моделі є:  $\Lambda(0) = (\eta, 0, 0, \xi)$ ,  $\omega(0) = (2\xi k_1 + 2\eta k_2, 2\eta k_1 - 2\xi k_2, 0)$ . Виходячи з того, що жодна з компонент вектора кутової швидкості не є постійною (при загальному випадку значень  $\eta$  і  $\xi$ ), маємо, що розроблений обертальний рух суттєво відрізняється від конічного руху та регулярної прецесії.

Для даної моделі знайдено моменти, під дією яких відбувається кутовий рух з відповідними компонентами кутової швидкості:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -4k_1 \sin(2k_2 t) (I_1 \xi k_2 - (I_2 - I_3)(\eta k_1 \cos(2k_2 t) - \xi k_2)), \\
M_2 &= -4k_1 \sin(2k_2 t) (I_2 \eta k_2 - (I_3 - I_1)(\xi k_1 \cos(2k_2 t) + \eta k_2)), \\
M_3 &= -4I_3 k_1 k_2 \cos(2k_2 t) - 4(I_1 - I_2)(\xi k_1 \cos(2k_2 t) + \eta k_2)(\eta k_1 \cos(2k_2 t) - \xi k_2),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для даної моделі цікавими є частинні випадки для параметрів  $\eta$  та  $\xi$ .

Розглянемо реалізацію моделі, коли  $\eta = 0$ ,  $\xi = 1$

Отриманий при цьому кватерніон орієнтації буде наступним:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \sin(k_1 t) \sin(k_2 t), \\ \lambda_1 &= \cos(k_1 t) \sin(k_2 t), \\ \lambda_2 &= \sin(k_1 t) \cos(k_2 t), \\ \lambda_3 &= \cos(k_1 t) \cos(k_2 t).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Вектор кутової швидкості за цих умов:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2k_1 \cos(2k_2 t), \\ \omega_2 &= -2k_1, \\ \omega_3 &= 2k_1 \sin(2k_2 t).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Друга складова вектора кутової швидкості є сталою на всьому інтервалі моделювання. Початкові умови кутового руху для розробленої моделі:

$$\Lambda(0) = (0, 0, 0, 1), \quad \omega(0) = (2k_1, -2k_2, 0).$$

Для даного випадку обертового руху, головні моменти обчислюються в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}M_1 &= -4k_1 k_2 (I_1 + I_2 - I_3) \sin(2k_2 t), \\ M_2 &= 2k_1^2 (I_3 - I_2) \sin(4k_2 t), \\ M_3 &= 4k_1 k_2 (I_1 - I_2 - I_3) \cos(2k_2 t).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Інший цікавий випадок реалізації моделі отримано, коли параметри відповідають значенням:  $\eta = 1$ ,  $\xi = 0$ . Кватерніон за даних умов набуває вигляду:



$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cos(k_2 t), \\
\lambda_1(t) &= \cos(k_1 t) \sin(k_2 t), \\
\lambda_2(t) &= \sin(k_1 t) \cos(k_2 t), \\
\lambda_3(t) &= -\sin(k_1 t) \sin(k_2 t).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Відповідний вектор кутової швидкості:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= 2k_2, \\
\omega_2(t) &= 2k_1 \cos(2k_2 t), \\
\omega_3(t) &= -2k_1 \sin(2k_2 t).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Для даної реалізації кутового руху перша складова вектора кутової швидкості залишається сталою і залежить лише від величини  $k_2$ . Початкові умови для розробленої моделі:  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\omega(0) = (2k_2, 2k_1, 0)$ .

Головні моменти можна обчислити з наступних виразів:

$$\begin{aligned}
M_1(t) &= 2k_1^2(I_2 - I_3) \sin(2k_2 t), \\
M_2(t) &= -4k_1 k_2(I_1 + I_2 - I_3) \sin(2k_2 t), \\
M_3(t) &= -4k_1 k_2(I_1 - I_2 + I_3) \cos(2k_2 t).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

У випадку динамічно симетричного твердого тіла ( $I_2 = I_3$ ) модельований рух буде вимушеною регулярною прецесією, при цьому  $\mathbf{M} \neq 0$ .

Для третьої двохчастотної моделі [69-70] представлення компонент кватерніона будуть наступними:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \eta \cdot \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) + \xi \cdot \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t), \\
\lambda_1(t) &= \eta \cdot \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) - \xi \cdot \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t), \\
\lambda_2(t) &= \eta \cdot \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) + \xi \cdot \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t), \\
\lambda_3(t) &= \xi \cdot \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) - \eta \cdot \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

де  $k_1, k_2$  – деякі частоти ( $k_1 \neq k_2$ ),  $\eta$  та  $\xi$  – параметри, які є заздалегідь заданими і для яких виконується умова  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ .

Проекції вектору кутової швидкості для кватерніонної моделі (2.20) отримано в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= 2 \cdot k_2, \\ \omega_2(t) &= 2 \cdot k_1 \cdot \cos(2k_2 t), \\ \omega_3(t) &= -2 \cdot k_1 \cdot \sin(2k_2 t).\end{aligned}\tag{2.21}$$

Для цієї моделі сталим є обертання навколо першої осі (не змінюється з часом роботи).

Початкові умови для другої розробленої моделі також відрізняються від загальноприйнятих  $\Lambda(0) = (\eta, 0, 0, \xi)$ ,  $\omega(0) = (2k_2, 2k_1, 0)$ . При цьому, маємо випадок, коли відсутній параметричний зв'язок між  $\Lambda(0)$  і  $\omega(0)$ , як для першої двочастотної моделі, а безпосередньо розв'язки компоненти вектора  $\omega(t)$  не залежать від параметрів  $\eta$  та  $\xi$ .

Розв'язки системи динамічних рівнянь Ейлера (2.3) для цієї моделі доводять, що даний тип руху може бути вільним  $M_1(t) = M_2(t) = M_3(t) = 0$ .

Четвертий випадок двохчастотного розв'язку отримано з одного з класичних представлень обертового руху – кутів Крилова. В загальному сенсі, кути Крилова – три кути, обертання, які задані з чіткою послідовністю і дозволяють описати поворот однієї системи координат відносно іншої. Вони є досить поширеними при реалізації руху кораблів або об'єктів авіації. Відповідний ним кутовий рух реалізовано засобами різних представлень: матриці напрямних косинусів, параметрами Родріга-Гамільтона, тощо.

Наступні компоненти кватерніона отримані з аналітичного представлення кутів Крилова для випадку двох однакових частот  $k_2 = k_3$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cos^2(k_2 t) + \sin(k_1 t) \sin^2(k_2 t), \\
\lambda_1(t) &= \frac{1}{2} \sin(2k_2 t) (\cos(k_1 t) - \sin(k_1 t)), \\
\lambda_2(t) &= \frac{1}{2} \sin(2k_2 t) (\cos(k_1 t) + \sin(k_1 t)), \\
\lambda_3(t) &= \sin(k_1 t) \cos^2(k_2 t) - \cos(k_1 t) \sin^2(k_2 t),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Цьому модельному кватерніону (2.22) відповідають наступні проекції вектора кутової швидкості на зв'язані осі:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= -2k_1 \sin(2k_2 t) + 2k_2, \\
\omega_2(t) &= k_1 \sin(4k_2 t) + 2k_2 \cos(2k_2 t), \\
\omega_3(t) &= k_1 \cos(4k_2 t) - 2k_2 \sin(2k_2 t) + k_1.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Початковими умовами руху розробленої моделі є:  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\omega(0) = (2k_2, 2k_2, 2k_1)$ .

Більш складні випадки обертового руху реалізовані у вигляді нової еталонної, яка отримана також на основі кутів Крилова. Ускладнення цієї реалізації кутового руху виконане за рахунок виникнення в частині її компонент певних випадкових процесів. Для цього в деяких складових кватерніона частота  $k_l$  представлена з врахуванням зміщення положення у вигляді частоти  $k_4 = k_1 + \Delta k$ . Таким чином отримано нову чотирьохчастотну модель [71] з кватерніоном орієнтації (2.24):

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t), \\
\lambda_1(t) &= \cos(k_4 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) - \sin(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t), \\
\lambda_2(t) &= \cos(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_4 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t), \\
\lambda_3(t) &= \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Згідно оберненого кінематичного рівняння (2.4), розв'язок динамічних рівнянь (2.3) отримано в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 \omega_1(t) &= (k_1 + k_4) \left( 0.25(\cos((2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4)t) \right. \\
 &\quad - \cos((2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4)t) + \cos((2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4)t) \\
 &\quad - \cos((2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4)t)) - 0.5(\sin((2k_2 - k_1 + k_4)t) \\
 &\quad + \sin((2k_2 + k_1 - k_4)t)) + k_2(\sin((k_1 - k_4 - 2k_3)t) \\
 &\quad + \sin((k_1 - k_4 + 2k_3)t)) + 2k_3\cos((k_1 - k_4)t), \\
 \omega_2(t) &= (k_1 + k_4) \left( 0.25(\sin((2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4)t) \right. \\
 &\quad + \sin((2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4)t) + \sin((2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4)t) \\
 &\quad + \sin((2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4)t)) + 0.5(\cos((2k_2 - k_1 + k_4)t) \\
 &\quad - \cos((2k_2 + k_1 - k_4)t)) \\
 &\quad + k_2 \left( \cos((k_1 - k_4 - 2k_3)t) + \cos((k_1 - k_4 + 2k_3)t) \right) \\
 &\quad - 2k_3\sin((k_1 - k_4)t), \\
 \omega_3(t) &= (k_1 - k_4) - 2k_2\sin(2k_3t) \\
 &\quad + 0.5(k_1 + k_4) \left( \cos((2k_2 + 2k_3)t) + \cos((2k_2 - 2k_3)t) \right).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Реалізація цієї моделі є досить складною. Для визначення моментів, під дією яких відбувається рух рекомендовано використовувати програмні засоби. Аналітичні вирази для системи динамічних рівнянь Ейлера містять багато складових і можуть бути розв'язані методами математичних пакетів, таких як Wolfram Mathematica [73], Matlab тощо. Завдяки даним методикам також можливо або знаходження параметрів для частинних випадків, коли рух буде вільним рух (для динамічно симетричного та несиметричного тіл окремо). Обов'язковим є дотримання умов  $k_i \neq 0$  та  $k_i \neq k_j$ . В протилежному випадку обертальний рух, який виконує модельований об'єкт буде спрощуватись. Для сферичних моделей це означає, що буде отримано конічний рух. Це, в свою чергу, спричинить накопичення додаткових алгоритмічних помилок.

В частинних випадках, чотирьохчастотна модель (2.24)–(2.25) може перетворюватись в трьохчастотну, наприклад, коли маємо обертання об'єкта на однаковий кут навколо двох осей, але в протилежних напрямках. Слід зазначити, що для такого руху потрібно окремо проводити обчислення аналітичних виразів. Відповідної підстановки значень при чисельній реалізації недостатньо, оскільки вона може породжувати похибки і “зламати” модель. Таким чином, отримано нову аналітичну модель з унікальними властивостями, за рахунок прирівнювання кутів (розглядаємо випадок  $k_3 = -k_1$ , оскільки він реалізує найбільш цікавий тип руху з усіх можливих для моделі (2.24)–(2.25)) [72]. Відповідне покомпонентне представлення кватерніона орієнтації (2.24) в якості розв'язку кінематичного рівняння (2.2) має вигляд (2.26):

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) - \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t), \\ \lambda_1(t) &= -\cos(k_4 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_1 t) - \sin(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_1 t), \\ \lambda_2(t) &= \cos(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_1 t) - \sin(k_4 t) \cdot \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t), \\ \lambda_3(t) &= \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_1 t) \cdot (\cos(k_2 t) + \sin(k_2 t)).\end{aligned}\quad (2.26)$$

Слід відзначити, що отримане аналітичне представлення відповідає приладу з трьома ступенями вільності (як і базова модель Крилова) та має початкові умови  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$ . Але кутовий рух, якому відповідає модель, є відмінним від існуючих.

Обчислені з аналітичного представлення (2.26) проекції кутової швидкості будуть наступними:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) = & -2k_1 \cos((k_1 - k_4)t) \\
& + 0,25(k_1 + k_4)(\cos((3k_1 - 2k_2 - k_4)t) \\
& + \cos((3k_1 + 2k_2 - k_4)t) - \cos((k_1 - 2k_2 + k_4)t) \\
& - \cos((k_1 + 2k_2 + k_4)t) + 2\sin((k_1 - 2k_2 - k_4)t) \\
& - 2\sin((k_1 + 2k_2 - k_4)t)) + k_2(\sin((3k_1 - k_4)t) \\
& - \sin((k_1 + k_4)t)), \\
\omega_2(t) = & 2k_1 \sin((k_1 - k_4)t) \\
& + 0,25(4k_2(\cos((3k_1 - k_4)t) + \cos((k_1 + k_4)t)) \\
& + 2(k_1 + k_4)(\cos((k_1 - 2k_2 - k_4)t) \\
& - \cos((k_1 + 2k_2 - k_4)t)) \\
& - (k_1 + k_4)(\sin((3k_1 - 2k_2 - k_4)t) \\
& + \sin((3k_1 + 2k_2 - k_4)t)) + \sin((k_1 - 2k_2 + k_4)t) \\
& + \sin((k_1 + 2k_2 + k_4)t))) \\
\omega_3(t) = & k_1 - k_4 + 0,5(k_1 + k_4)(\cos(2(k_1 - k_2)t) + \cos(2(k_1 + \\
& k_2)t)) + 2k_2 \sin(2k_1 t).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Інший випадок для чотирьохчастотної моделі можливо отримати, якщо задати обертовий рух в наступному кватерніонному вигляді [73].

$$\Lambda = \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \left( \cos \frac{\psi}{2} + i_2 \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + i_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \circ \left( \cos \frac{\chi}{2} + i_2 \sin \frac{\chi}{2} \right).$$

Тут кінематика кутового руху об'єкта базується на послідовності чотирьох елементарних поворотів. Перші три повороти в даному моделюванні здійснюються відповідно до класичної послідовності кутів Крилова  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\vartheta$ , а четвертий поворот виконується навколо другої (вже поверненої системи координат об'єкта) осі на кут  $\chi$ . Покомпонентно результуючий кватерніон повороту цієї моделі буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos \frac{\chi}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\
&\quad - \sin \frac{\chi}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\
\lambda_1(t) &= \cos \frac{\chi}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \\
&\quad - \sin \frac{\chi}{2} \left( \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\
\lambda_2(t) &= \cos \frac{\chi}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\
&\quad + \sin \frac{\chi}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\
\lambda_3(t) &= \cos \frac{\chi}{2} \left( \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\
&\quad + \sin \frac{\chi}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \right).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

За допомогою рівнянь (2.2) та (2.3) отримано проекції вектора кутової швидкості у вигляді:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= -\sin(k_4 t) (k_1 \cos(k_2 t) \cos(k_3 t) - k_2 \sin(k_3 t)) \\
&\quad + \cos(k_4 t) (k_3 - k_1 \sin(k_2 t)), \\
\omega_2(t) &= k_4 + 0,5k_1 \left( \sin((k_3 + k_2)t) + \sin((k_3 - k_2)t) \right) + k_2 \cos(k_3 t), \\
\omega_3(t) &= \sin(k_4 t) (k_3 - k_1 \sin(k_2 t)) \\
&\quad + \cos(k_4 t) (k_1 \cos(k_2 t) \cos(k_3 t) - k_2 \sin(k_3 t)).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Вирази (2.29) є залежними від часу.

При розробці еталонних моделей на основі кватерніонного представлення руху використано програмні засоби математичного пакету Mathematica Wolfram [73]. Вхідними даними слугують кватерніони відповідного обертового руху та обернене кватерніонне кінематичне рівняння.

Достовірність отриманої кінематичної моделі доведено засобами програми KiDiM [74].

Розроблені моделі, для подальшого їх застосування при тестуванні БІНС, мають бути доповнені компонентами вектора позірного повороту в аналітичному вигляді (відповідно до (2.1)). При цьому частоти  $k_i$  мають бути чітко задані відповідно до однієї з наступних умов: або покладаючись на існуючі обмеження для значень кутової швидкості досліджуваного об'єкта, або бути результатом апроксимацій реального обертового руху.

### 2.3 Чисельна реалізація розроблених моделей

Отримані аналітичні еталонні моделі можуть бути реалізовані чисельно, якщо надати конкретних числових значень використаним в них частотам та параметрам. Такт інтегрування має бути задано відповідно до теореми Котельникова – частота дискретизації сигналу повинна бути хоча б вдвічі більшою на найбільшу частоту неперервного первинного сигналу. В іншому випадку буде ризик або втратити частину корисної інформації (яка буде знаходитись всередині такту), або перевантажити обчислювач через велику кількість подібних даних.

Для відображення траєкторій, які відтворює еталонна модель, доцільно побудувати траєкторії в конфігураційному просторі.

Чисельна реалізація класичних випадків кутового руху виконана з тактом інтегрування  $\Delta t = 0.1$  секунди на інтервалі 200. Результат приведено на рис. 2.3 (для регулярної прецесії) та на рис. 2.4 для конічного обертання відповідно.



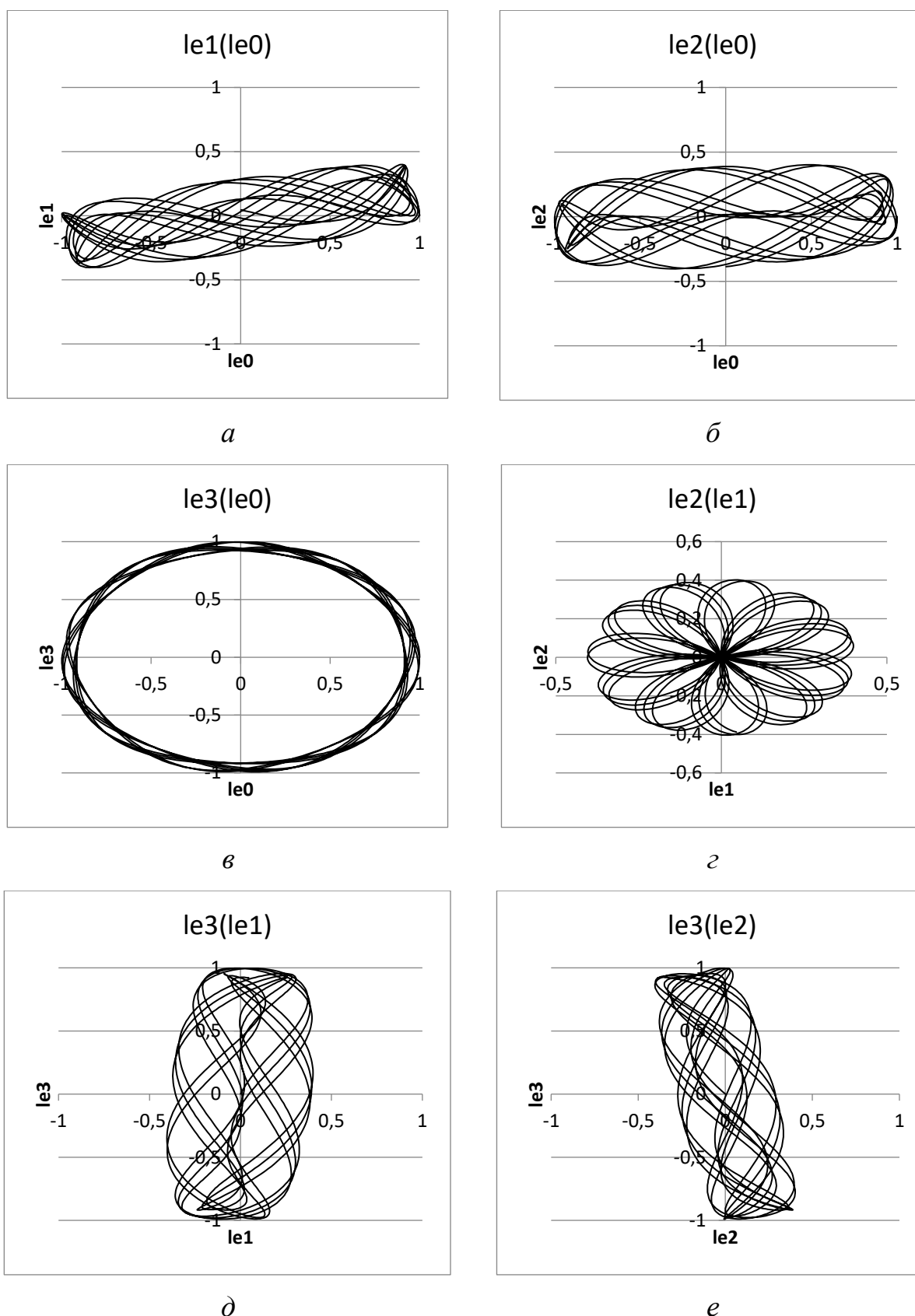


Рисунок 2.3 – Траекторії в конфігураційному просторі для моделі регулярної прецесії

*a*) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *б*) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *в*) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; *г*) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; *д*) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; *е*) –  $\lambda_3(\lambda_2)$

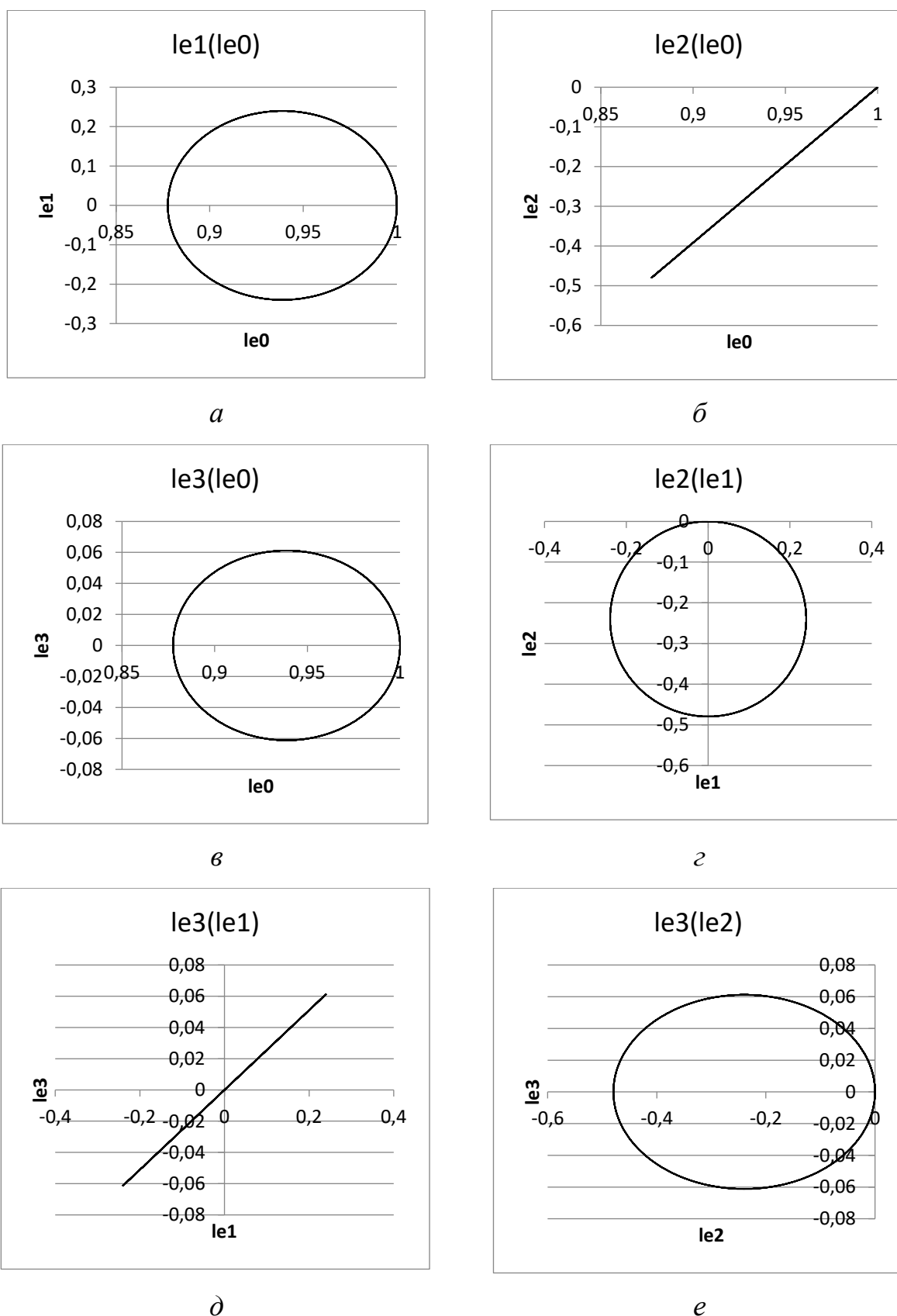


Рисунок 2.4 – Траекторії в конфігураційному просторі для моделі кінцевого обертання

*a*) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *б*) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *в*) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; *г*) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; *д*) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; *е*) –  $\lambda_3(\lambda_2)$

Слід зауважити, що траєкторії для кінчного руху будуть незмінними за будь-яких значень параметрів.

На рис. 2.5 зображено траєкторії в конфігураційному просторі для першої двохчастотної моделі (2.7) на інтервалі 200 секунд при  $k_1 = 0.015$ ,  $k_2 = 0.75$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$  та  $\Delta t = 0.1$  секунди.

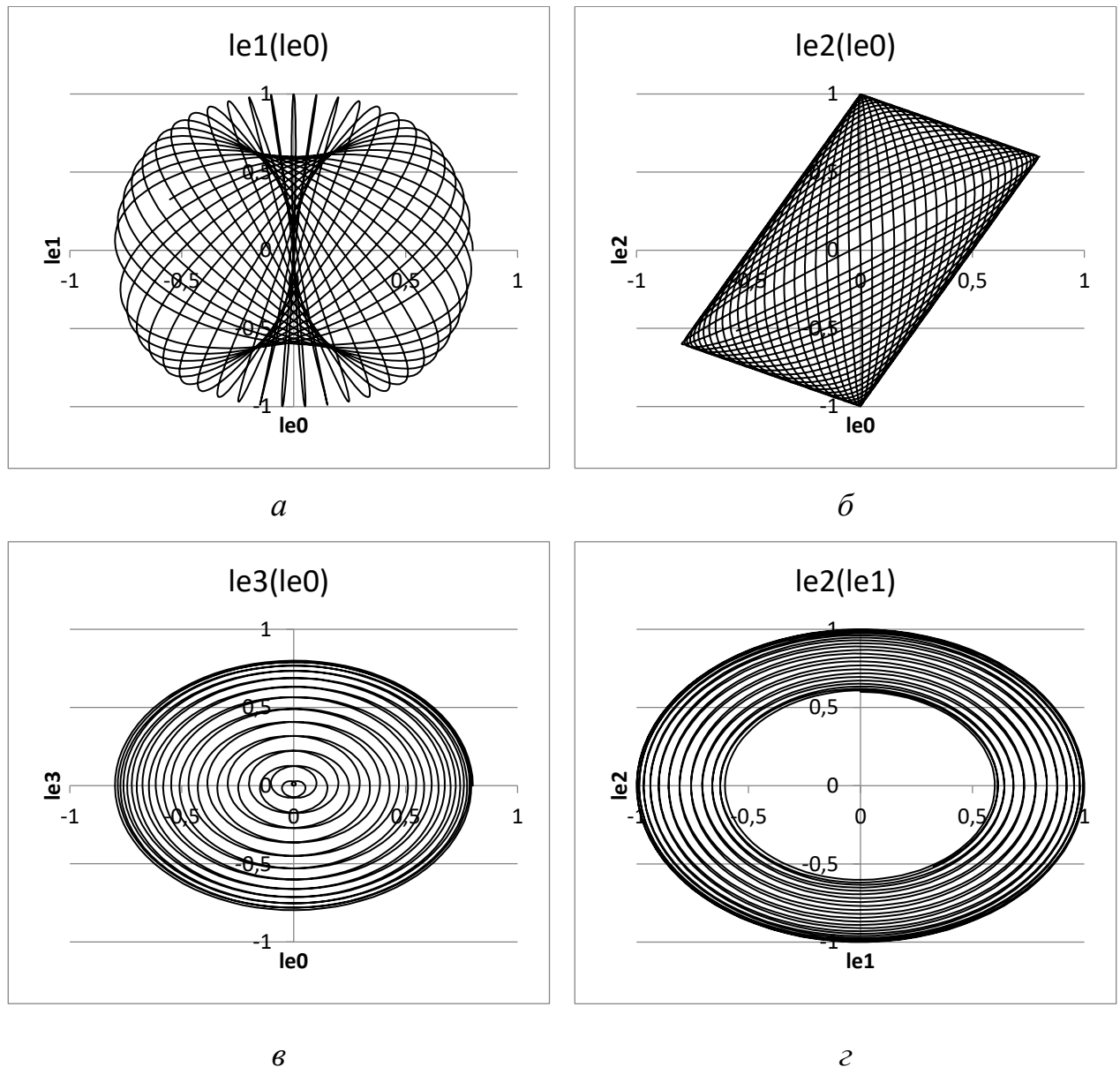
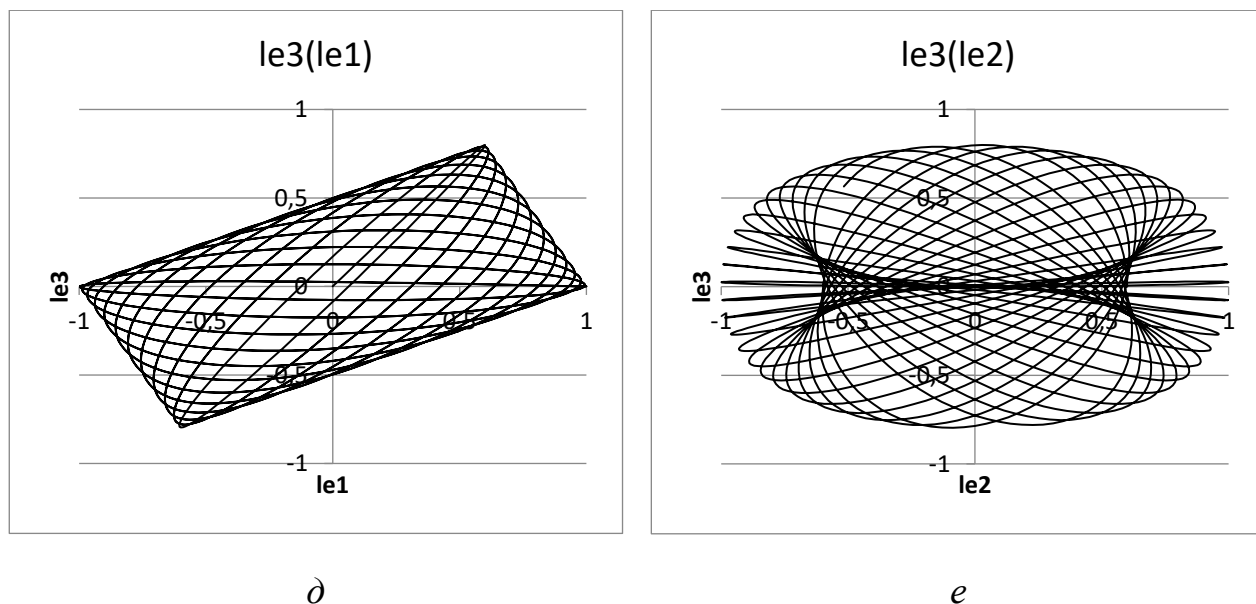


Рисунок 2.5 – Траєкторії в конфігураційному просторі

при  $k_1 = 0.015$ ,  $k_2 = 0.75$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$

а) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е) –  $\lambda_3(\lambda_2)$



Закінчення рисунка 2.5

На рис. 2.6 побудовані значення проекцій кутової швидкості для виразів (2.8) за відповідних значень частот.

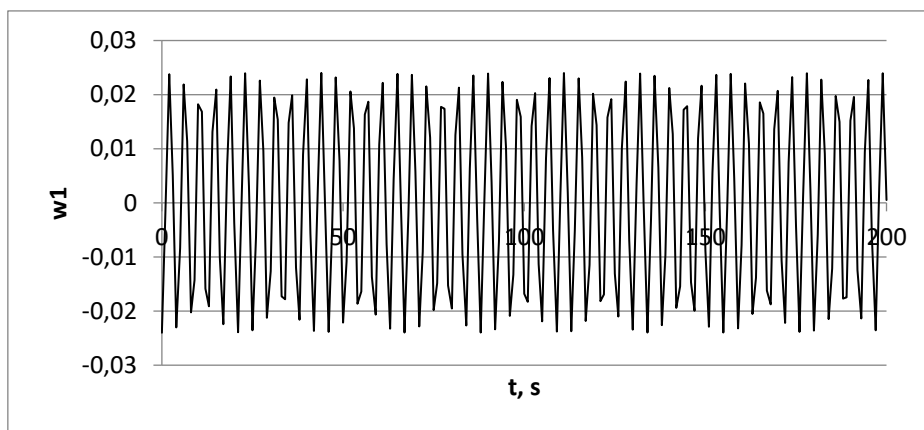
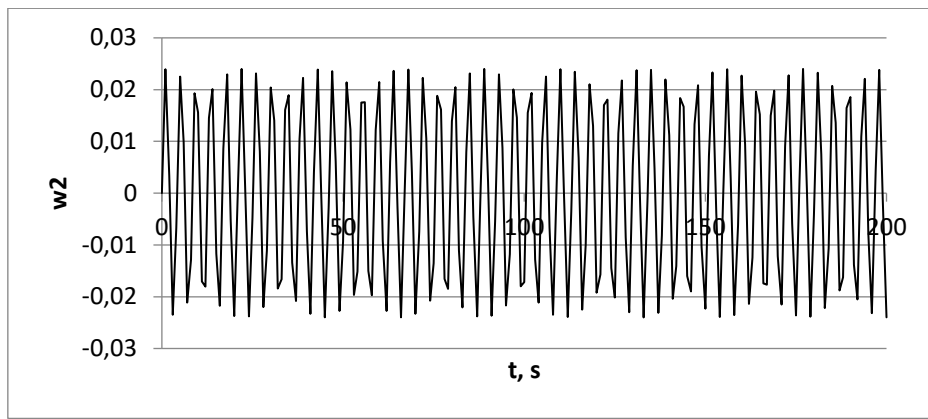
 $a$ 

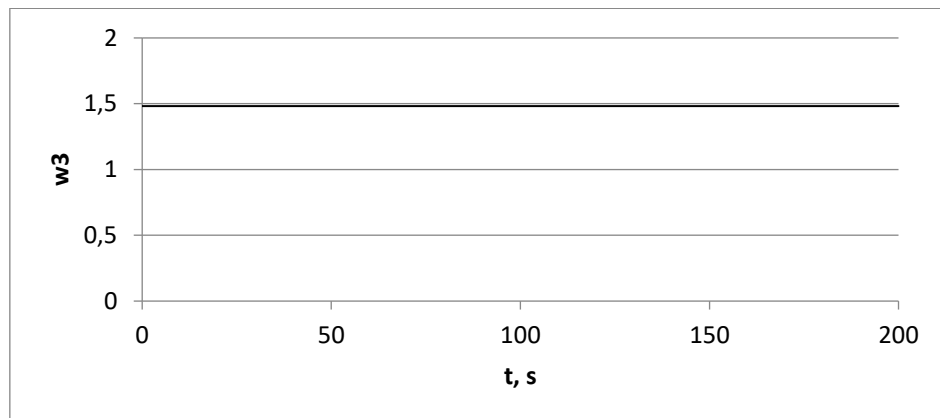
Рисунок 2.6 – Проекції вектору кутової швидкості

при  $k_1 = 0.015$ ,  $k_2 = 0.75$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$

$a)$  – по першій осі;  $b)$  – по другій осі;  $в)$  – по третій осі



б



в

Закінчення рисунка 2.6

Модуль вектора кутової швидкості для першої двохчастотної моделі є постійним і при запропонованих значеннях параметрів відповідає  $|\omega| = 1.482$  рад/с

Друга двохчастотна модель (2.11) – (2.12) реалізована чисельно на рис. 2.7 - 2.8 при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.56$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$ , часу роботи 200 секунд та кроку 0.1 секунди.

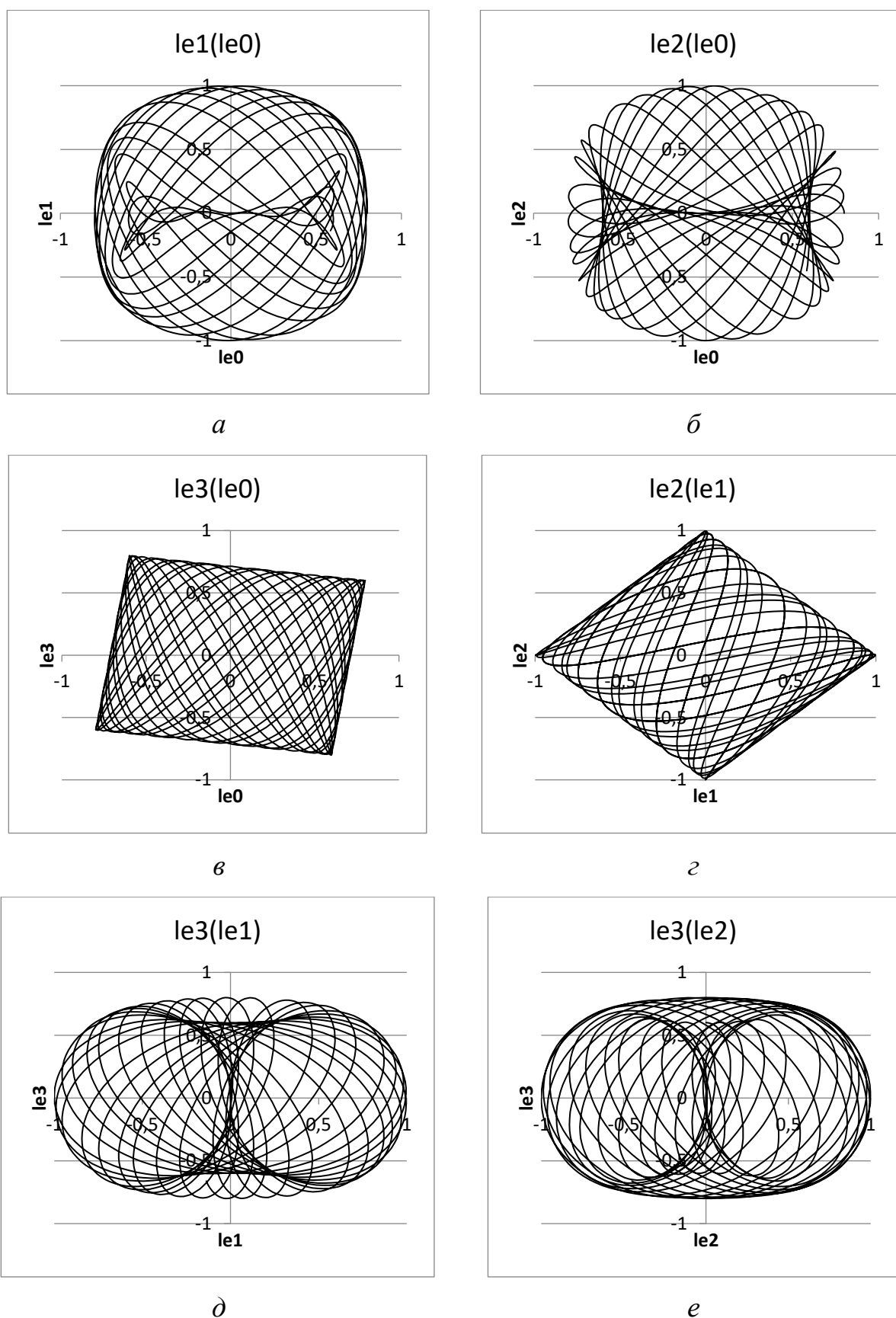
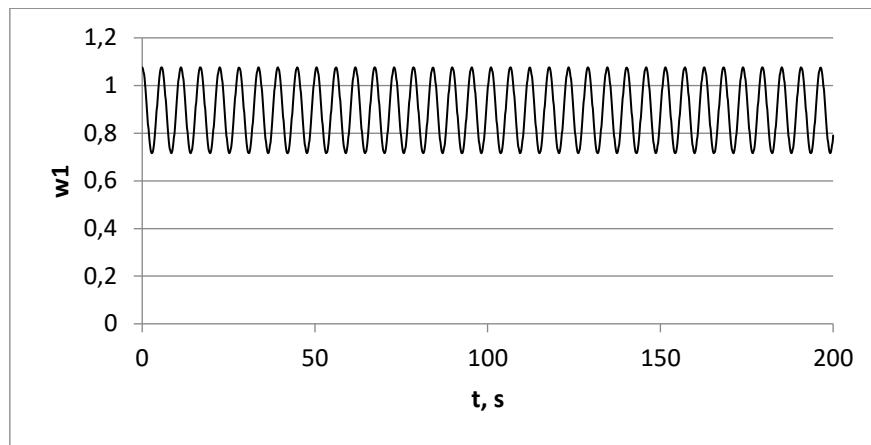


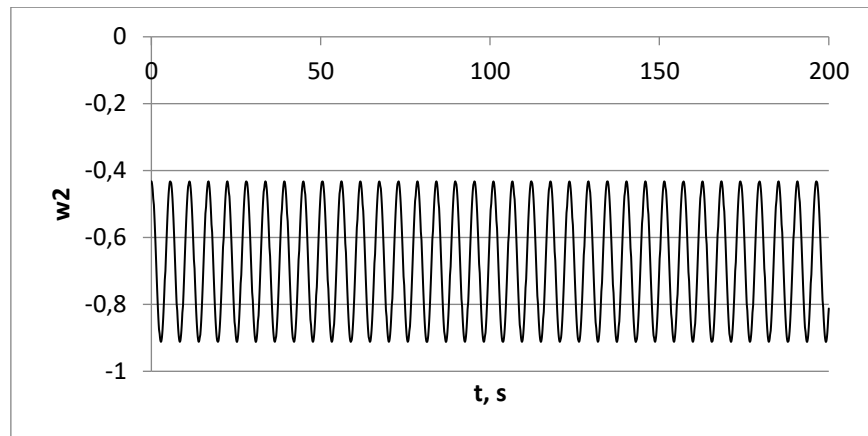
Рисунок 2.7 – Траекторії в конфігураційному просторі

при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.56$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$

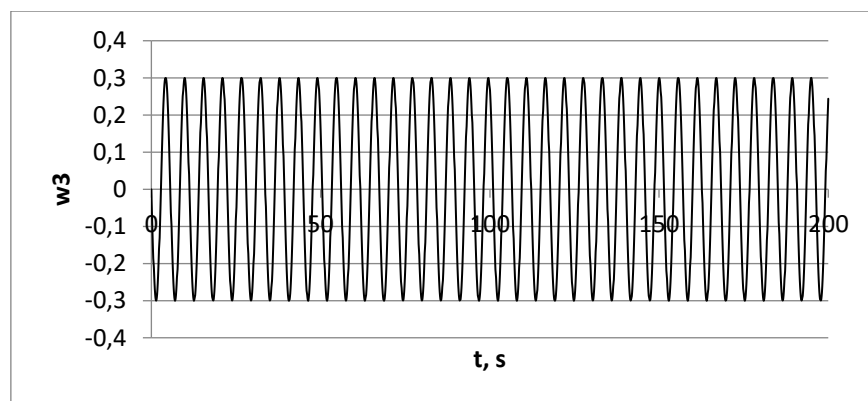
*a*) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *b*) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *v*) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; *z*) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; *d*) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; *e*) –  $\lambda_3(\lambda_2)$



а



б



в

Рисунок 2.8 – Проекції вектору кутової швидкості

при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.56$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$

а) – по першій осі; б) – по другій осі; в) – по третій осі

Модуль проекцій кутової швидкості для розробленої моделі є сталим і відповідає величині  $|\omega| = 1.159$  рад/сек.

Реалізація третьої двохчастотної моделі (2.20) – (2.21) зображена на рис. 2.9 - 2.10 відповідно при  $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.7$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$ , часу роботи 200 секунд та кроку 0.1 секунди.

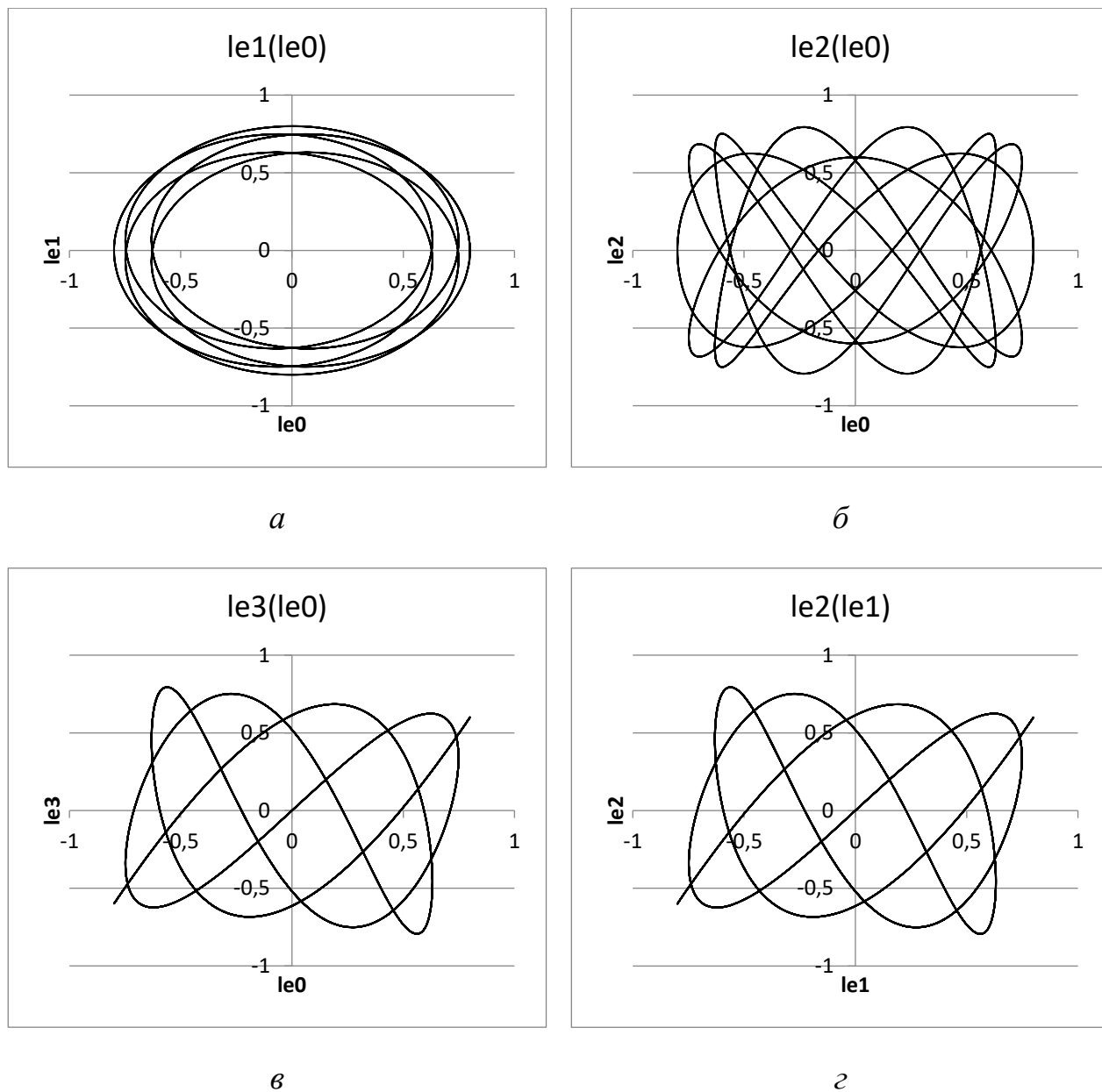
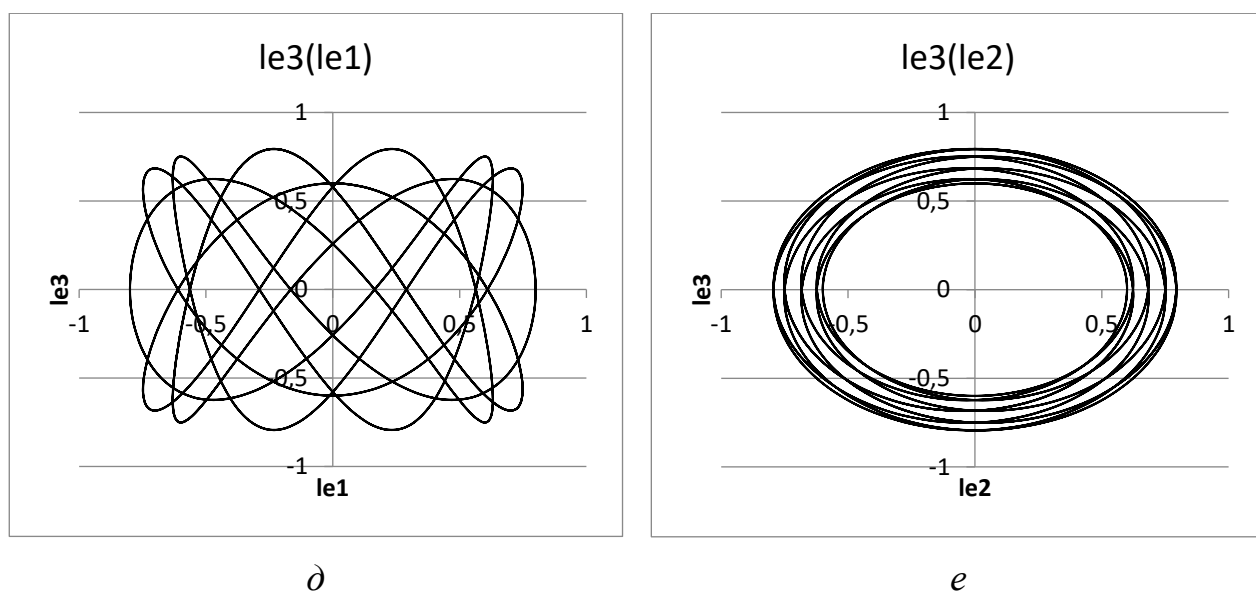


Рисунок 2.9 – Траєкторії в конфігураційному просторі

при  $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.7$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$

$a) - \lambda_1(\lambda_0)$ ;  $б) - \lambda_2(\lambda_0)$ ;  $в) - \lambda_3(\lambda_0)$ ;  $г) - \lambda_2(\lambda_1)$ ;  $д) - \lambda_3(\lambda_1)$ ;  $е) - \lambda_3(\lambda_2)$





Закінчення рисунка 2.9

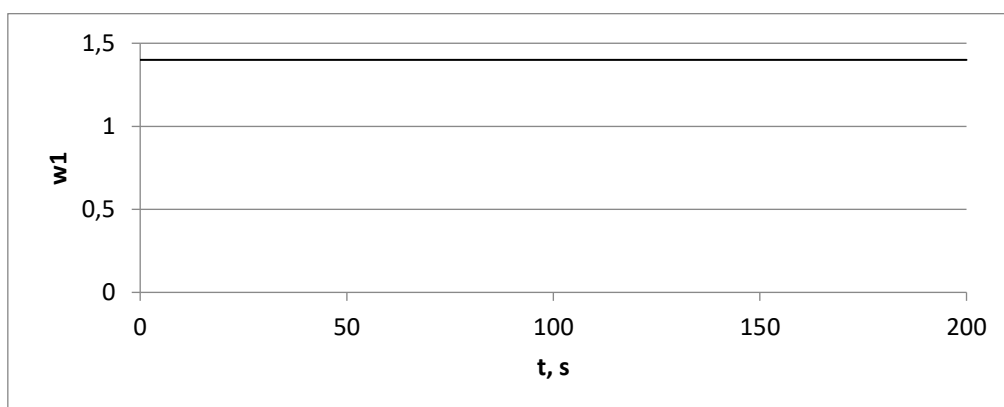
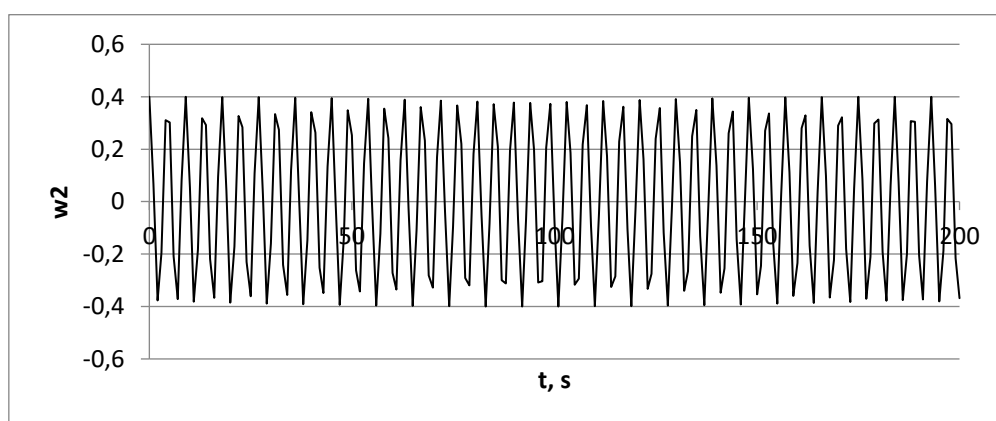
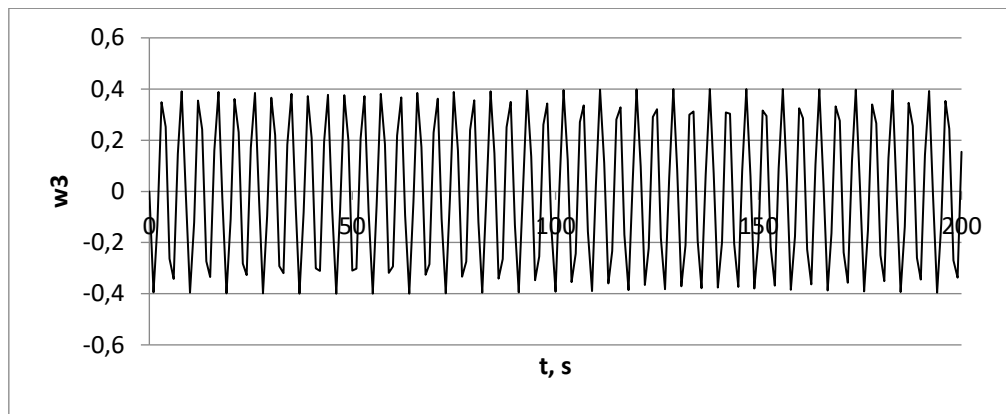
 $a$  $b$ 

Рисунок 2.10 – Проекції вектору кутової швидкості

при  $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.7$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$  $a)$  – по першій осі;  $b)$  – по другій осі;  $в)$  – по третій осі



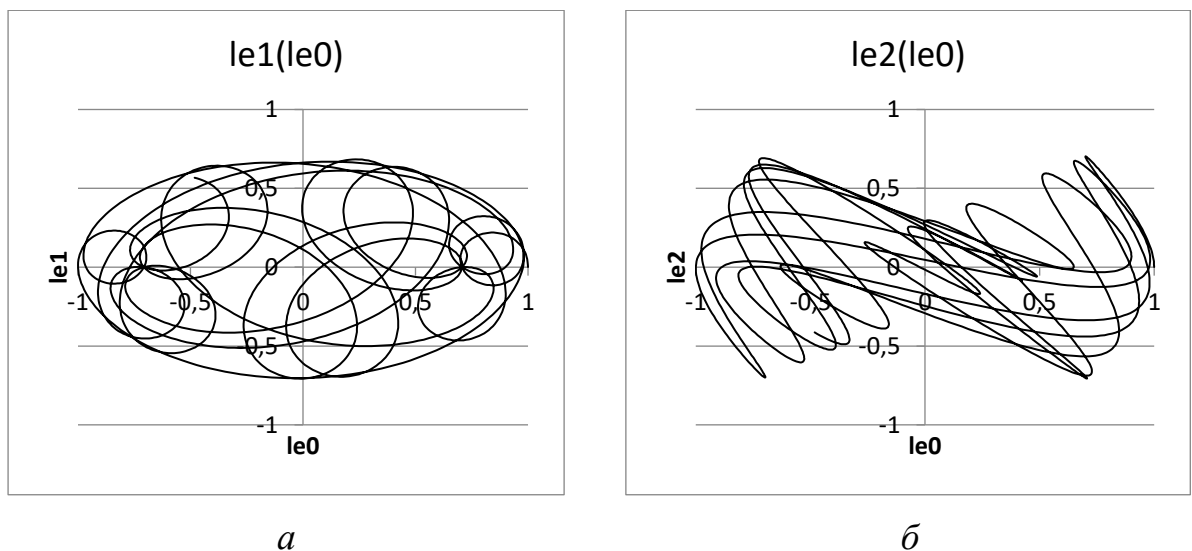
в

Закінчення рисунка 2.10

З рисунків видно, що рух, який реалізують розроблені двохчастотні моделі, є складнішим за класичні випадки (відрізняється від конічного руху).

Значення модуля вектора кутової швидкості розробленої моделі є постійним. Для заданих параметрів маємо  $|\omega| = 1.456$  рад/с.

Для четвертого випадку двохчастотної моделі чисельні реалізації раекторій зображені на рис. 2.11 при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.177$  та величині такту  $\Delta t = 0.1$  секунди.



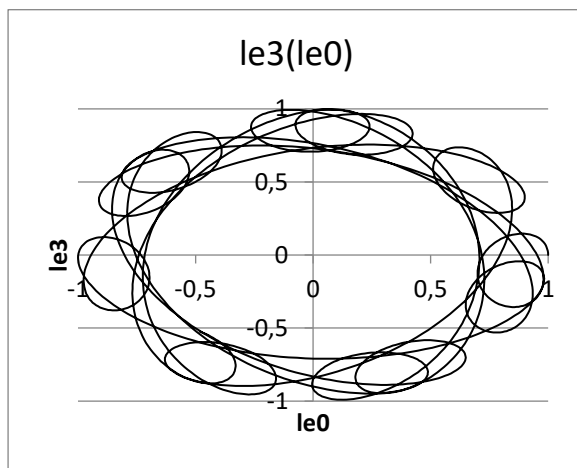
а

б

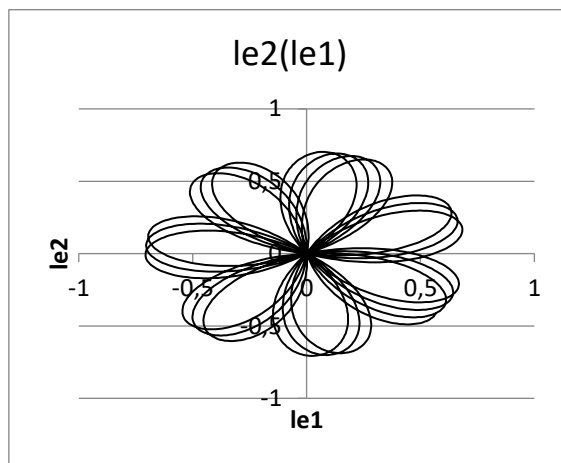
Рисунок 2.11 – Траекторії в конфігураційному просторі

при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.117$ 

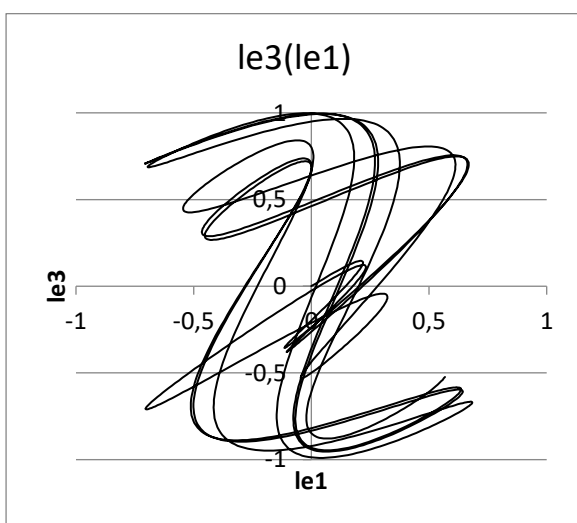
а) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е) –  $\lambda_3(\lambda_2)$



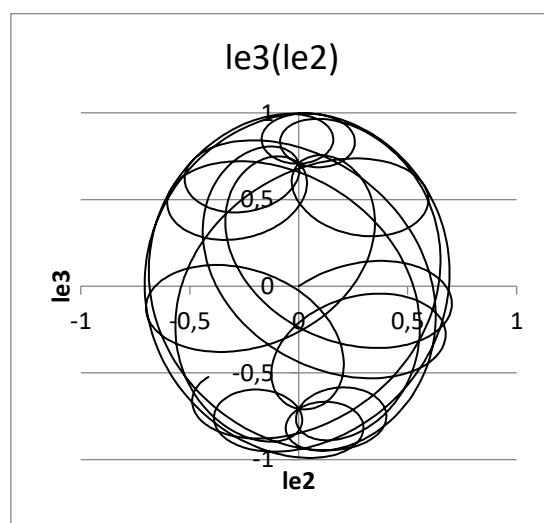
б



в



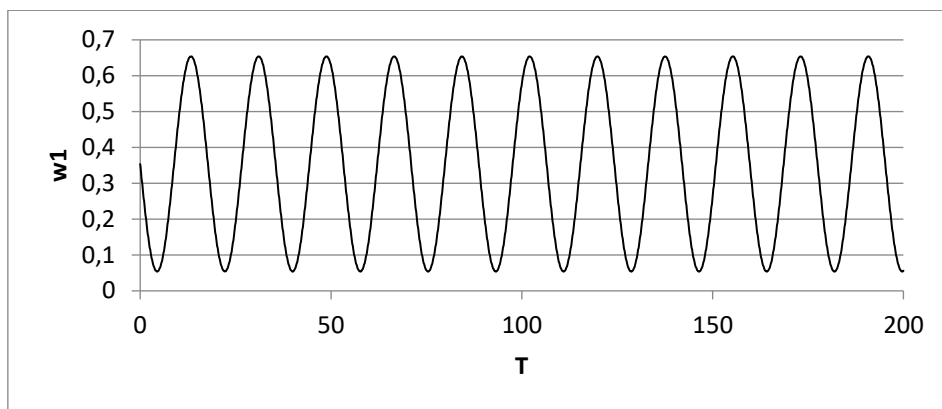
г



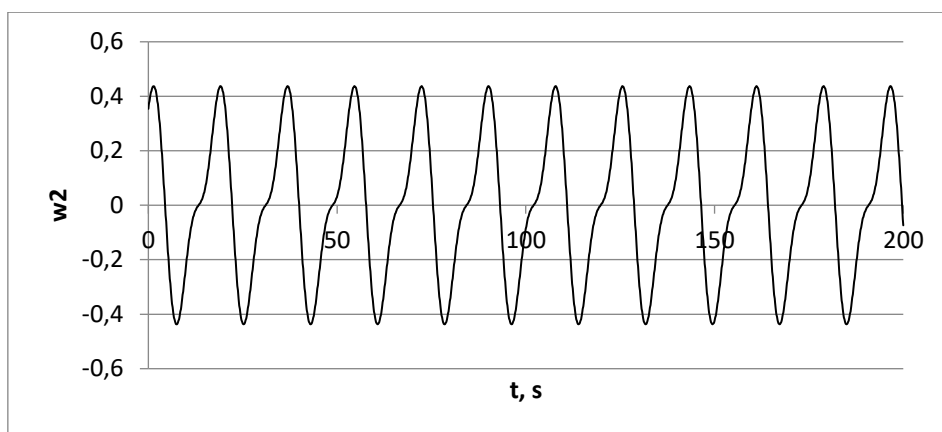
д

Закінчення рисунка 2.11

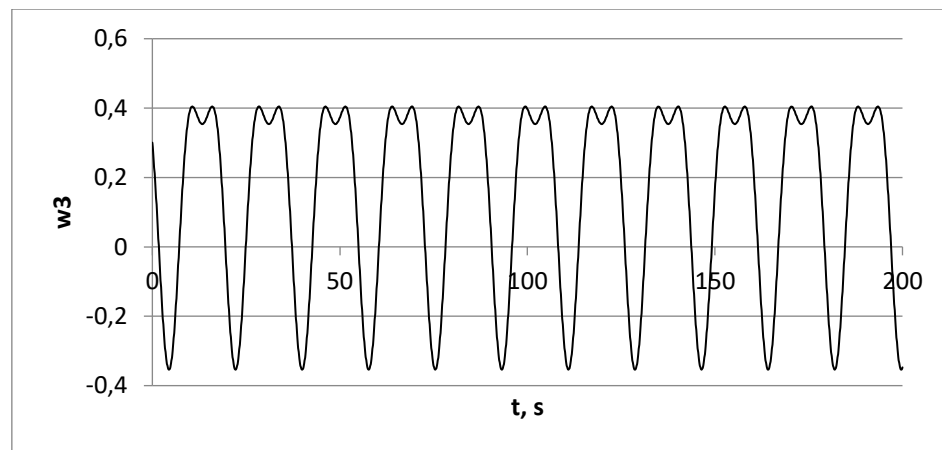
Залежності проєкцій кутової швидкості від часу для цієї моделі наведені на рис. 2.12 при значеннях частот  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.177$  та величині такту  $\Delta t = 0.1$  секунди.



*a*



*б*



*в*

Рисунок 2.12 – Проекції вектору кутової швидкості

при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.117$

*a*) – по першій осі; *б*) – по другій осі; *в*) – по третій осі

Дана реалізація руху має значення кутової швидкості, які змінюються з плином часу. Середня величина числових реалізацій (2.23) на інтервалі:  $|\omega| = 0.565$  рад/сек

Чисельну реалізацію для випадку трьохчастотної моделі (2.26)-(2.27) при значеннях  $k_1 = 0.1, k_2 = 0.7, k_3 = 0.05$  зображено на рис. 2.13-2.14. Час дослідження 200 секунд, зйом інформації кожену 0.1 секунди

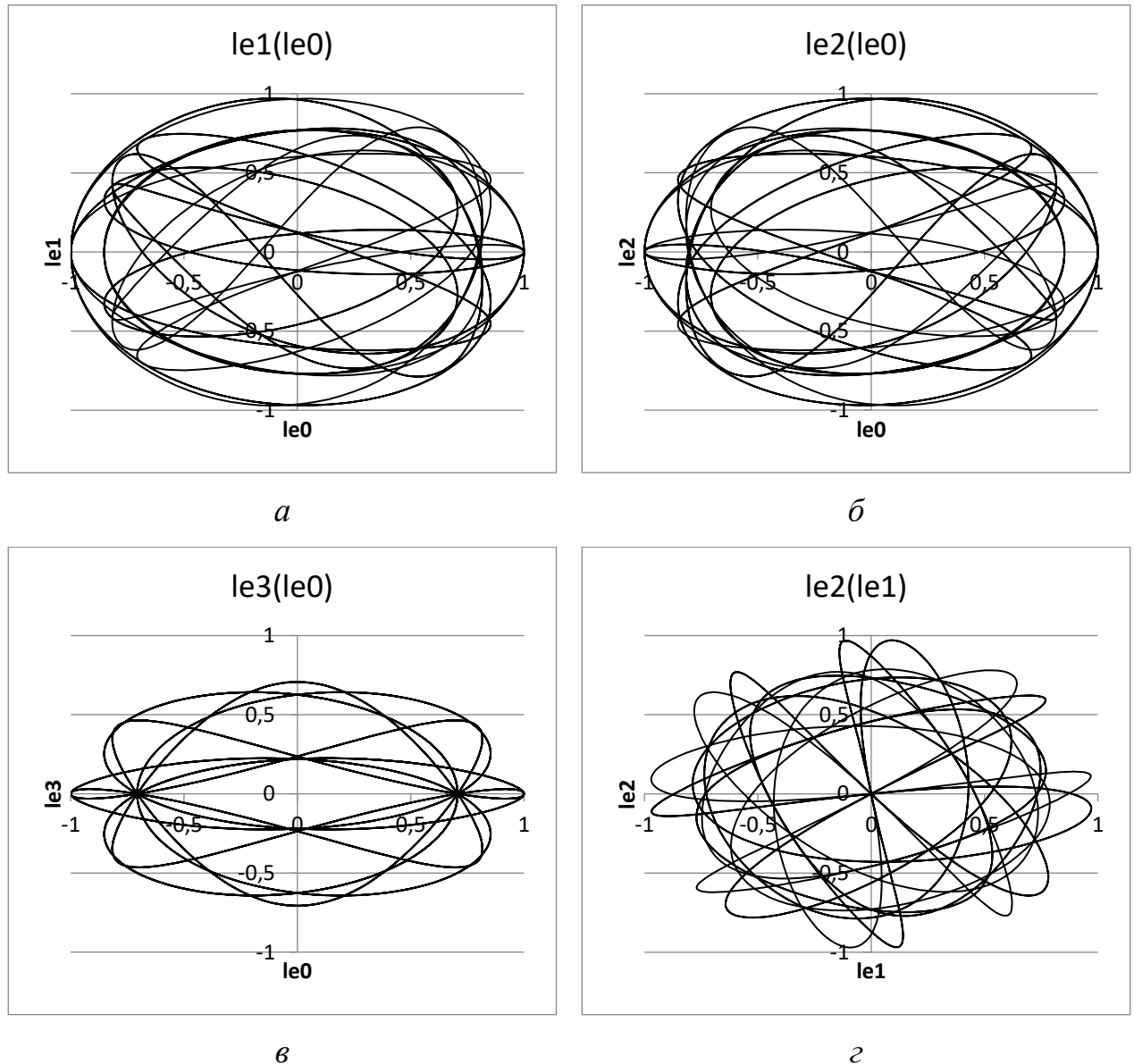
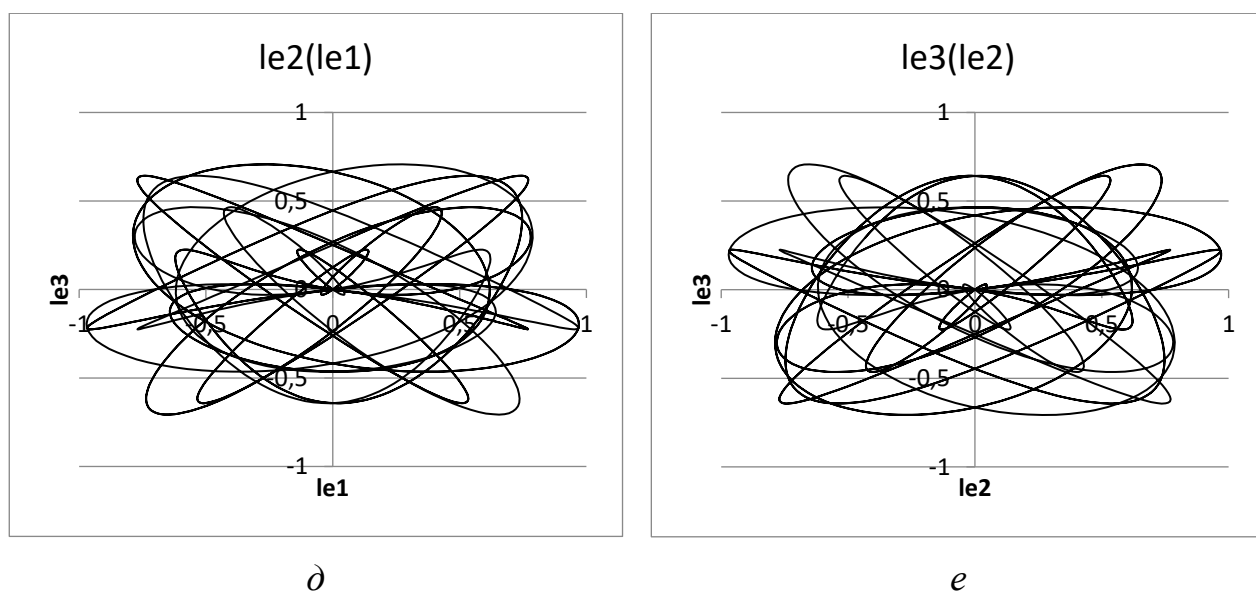


Рисунок 2.13 – Траєкторії в конфігураційному просторі

$$k_1 = 0.1, k_2 = 0.7, k_3 = 0.05$$

а) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е) –  $\lambda_3(\lambda_2)$



Закінчення рисунка 2.13

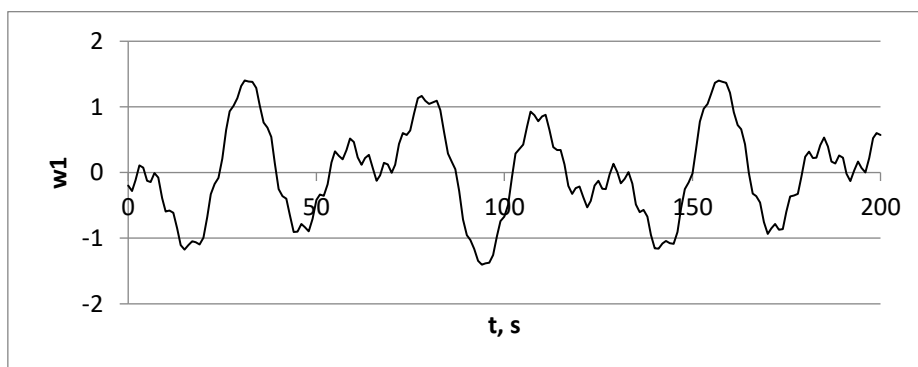
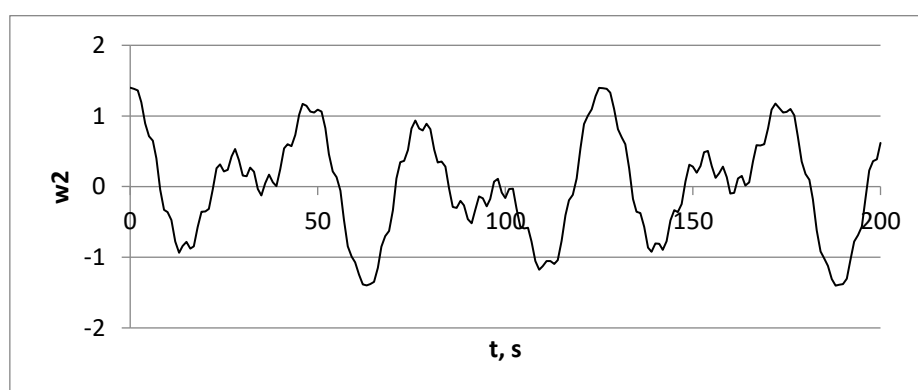
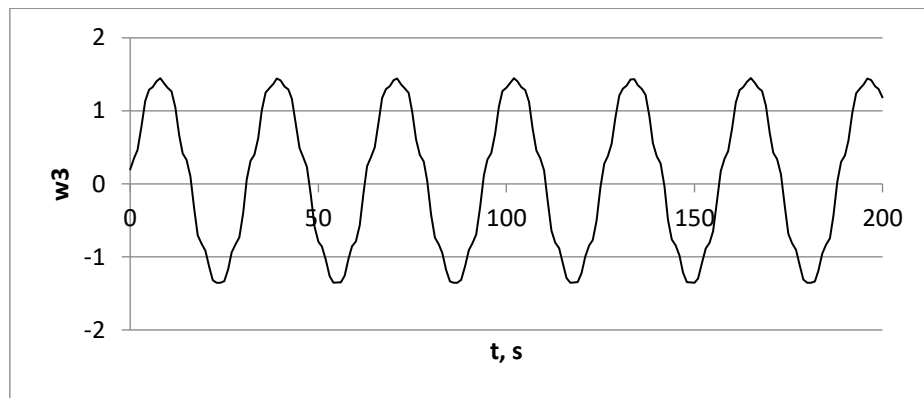
*а**б*

Рисунок 2.14 – Проекції вектору кутової швидкості

$$k_1 = 0.1, k_2 = 0.7, k_3 = 0.05$$

*а*) – по першій осі; *б*) – по другій осі; *в*) – по третій осі

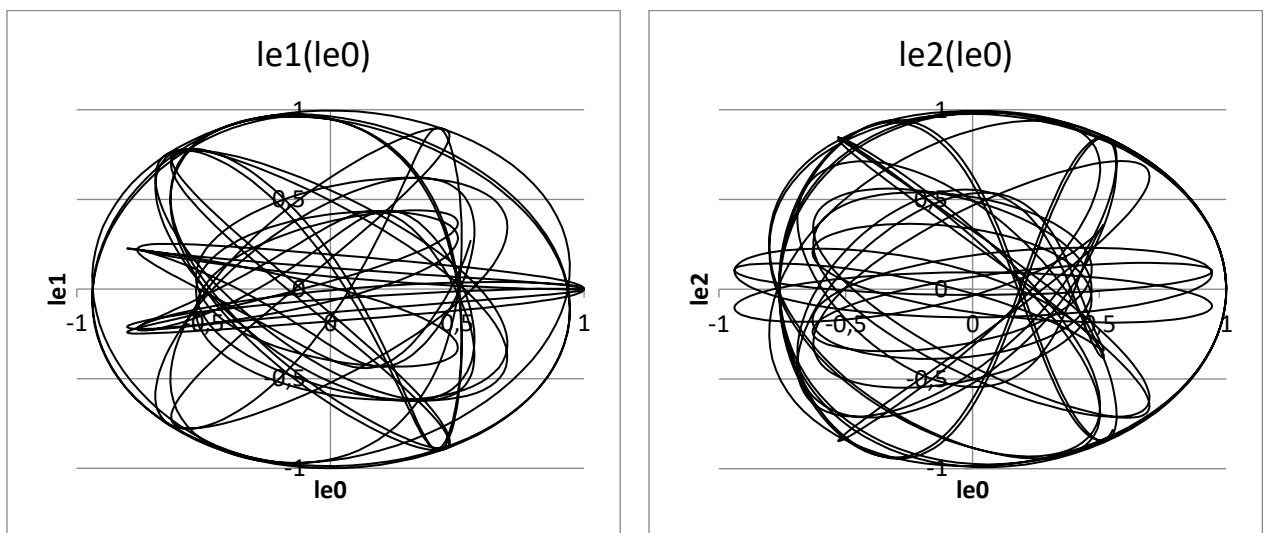


в

Закінчення рисунка 2.14

За даних параметрів  $k_1$  отримаємо середнє значення проекцій кутової швидкості на інтервалі дослідження  $|\omega| = 1.423$  рад/с. Для цієї моделі швидкість обертання не є сталою, а залежна від часу.

Для першого випадку чотирьохчастотної моделі (2.24) на рис. 2.15 побудовані траєкторії в конфігураційному просторі за значень параметрів  $k_1 = 0.15, k_2 = 0.7, k_3 = 0.05, k_4 = 0.001$ . Час дослідження роботи системи обрано 200 секунд за такту  $\Delta t = 0.1$  секунди



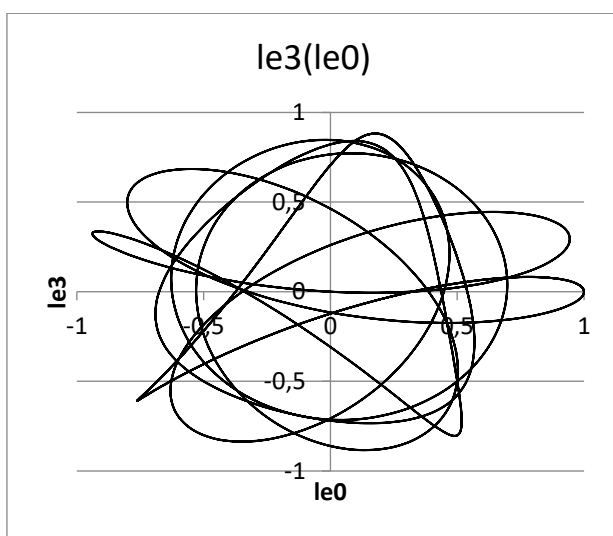
а

б

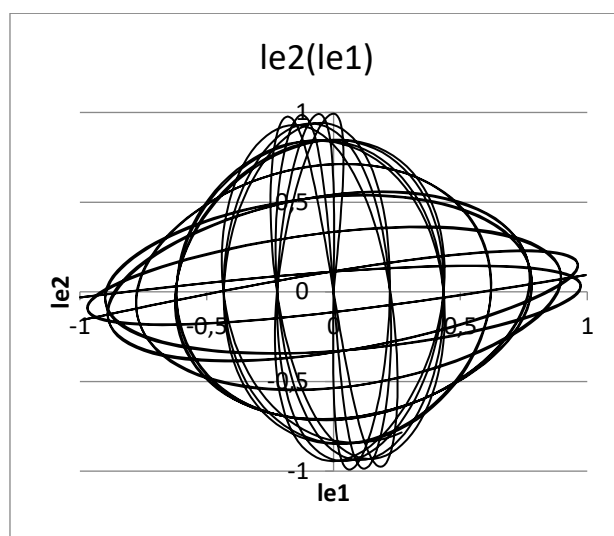
Рисунок 2.15 – Траєкторії в конфігураційному просторі

$$k_1 = 0.15, k_2 = 0.7, k_3 = 0.05, k_4 = 0.001$$

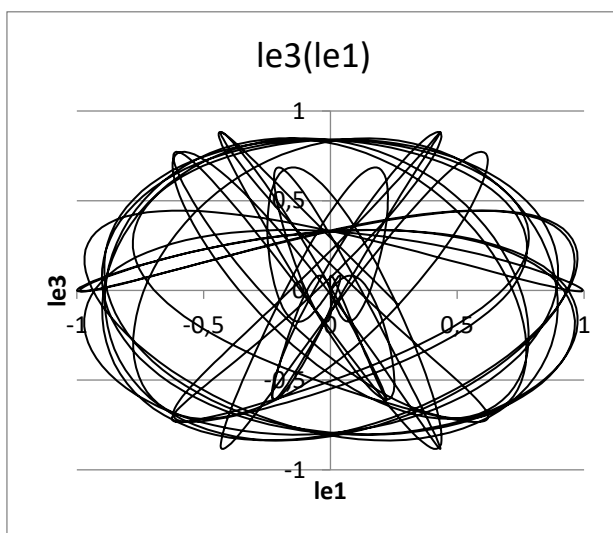
а) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е) –  $\lambda_3(\lambda_2)$



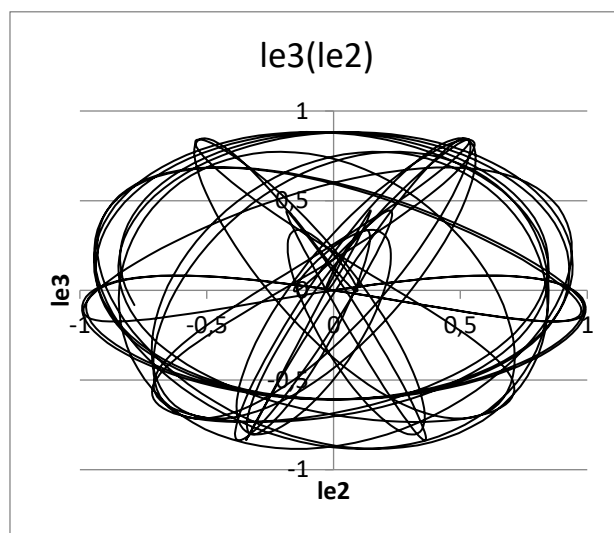
б



в



г

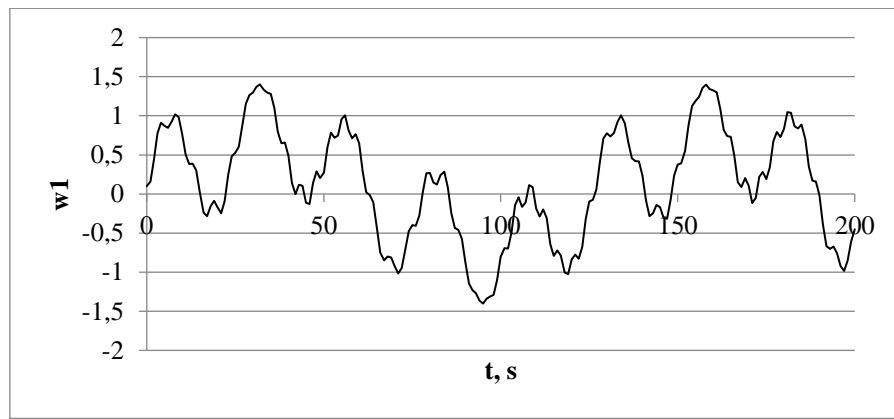


д

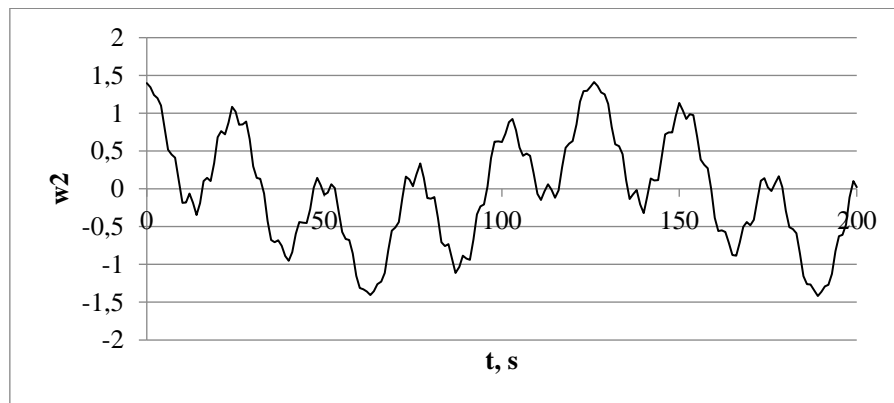
Закінчення рис. 2.15

Проекції вектору кутової швидкості (2.25) представлені на рис. 2.16 при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.7$ ,  $k_3 = 0.05$ ,  $k_4 = 0.001$ , такту  $\Delta t = 0.1$  секунди та часу роботи системи 200 секунд.

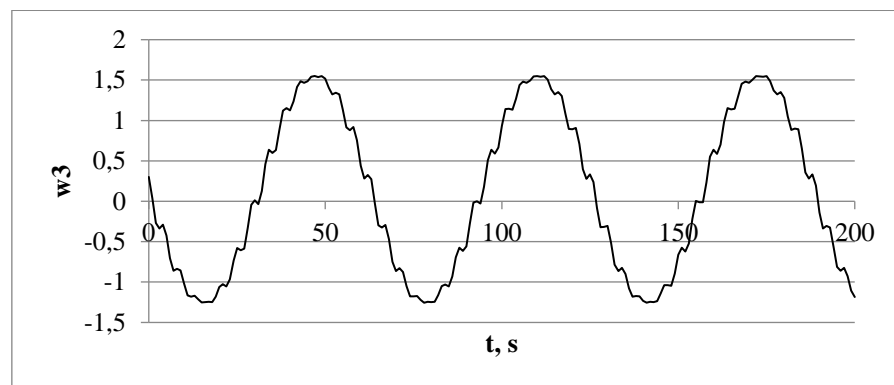




а



б



в

Рисунок 2.16– Проекції вектору кутової швидкості

$$k_1 = 0.15, k_2 = 0.7, k_3 = 0.05, k_4 = 0.001$$

а) – по першій осі; б) – по другій осі; в) – по третій осі

Відзначимо, що  $|\omega| = 1.414$  рад/с для даної моделі за відповідним чином заданих частот.

Друга чотирьохчастотна модель (2.28)-(2.29) при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 1.3$ ,

$k_3 = 0.6, k_4 = 0.03$  реалізована на рис. 2.17-2.18 відповідно. Час реалізації моделі – 200 секунд, а крок інтегрування 0.1 секунди.

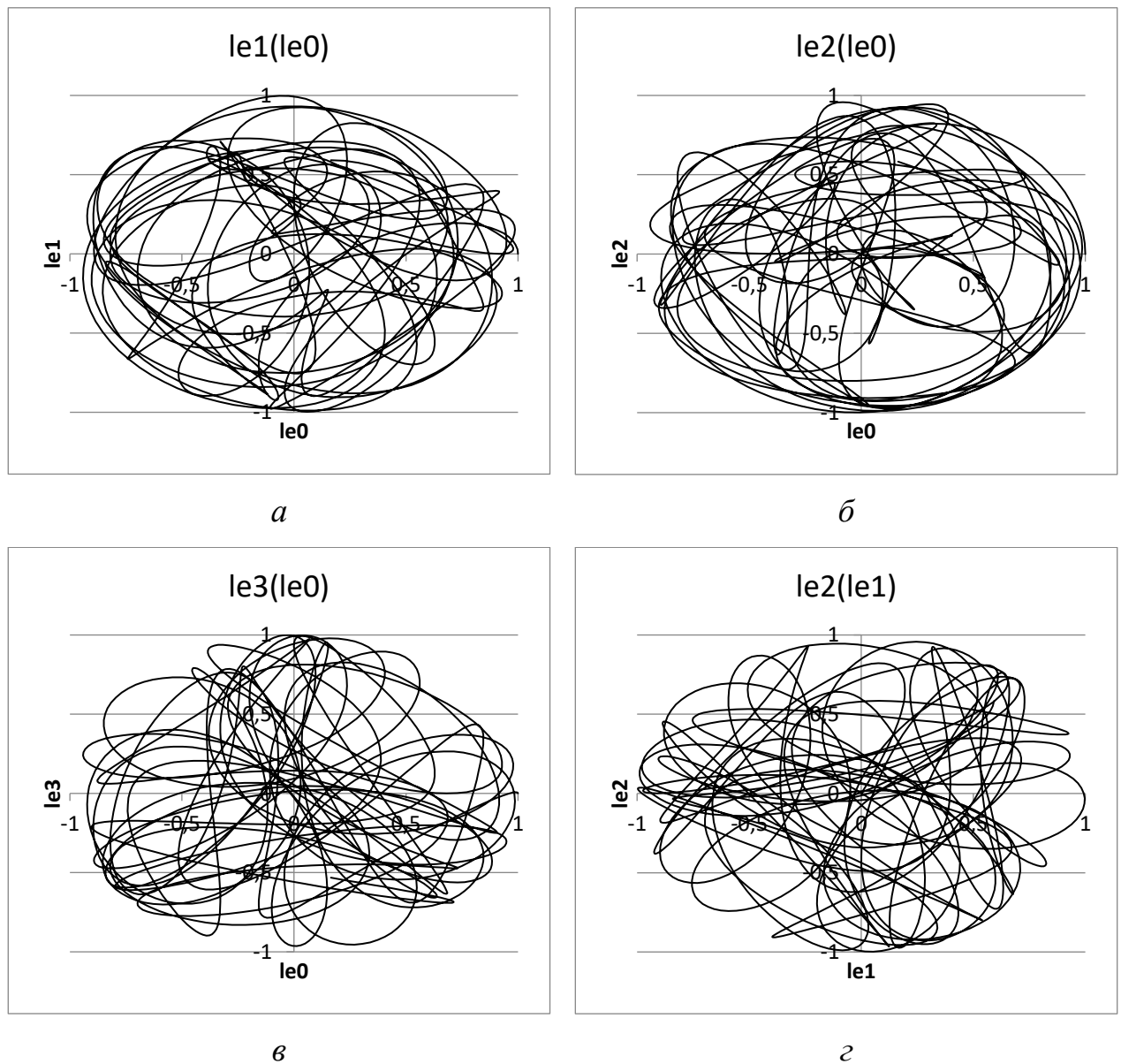
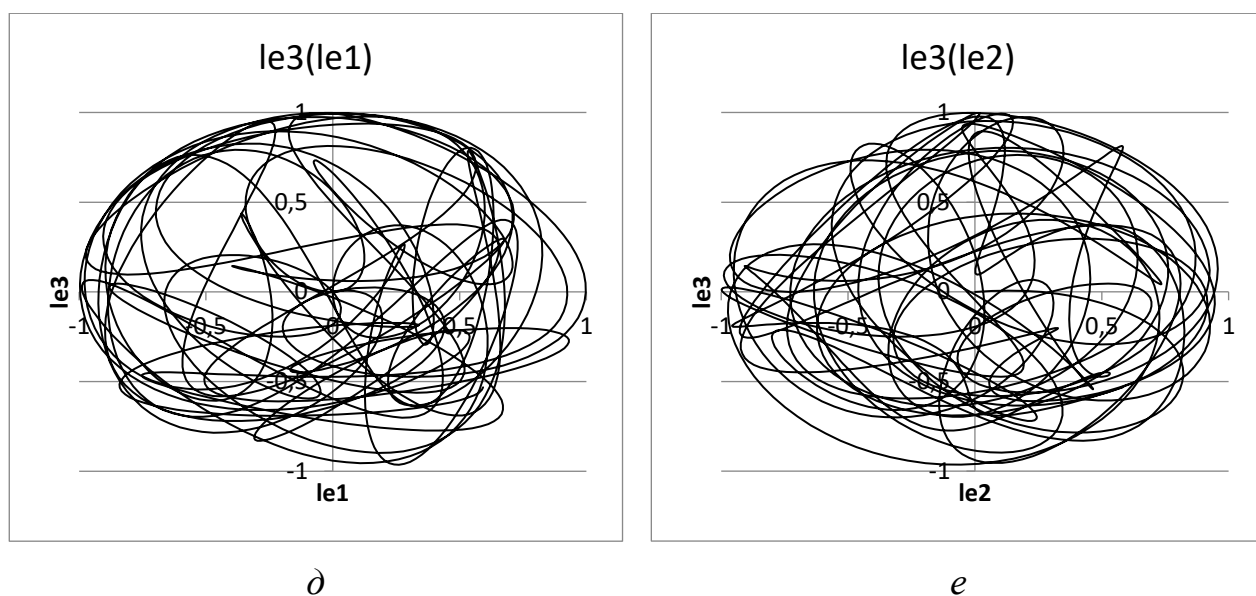


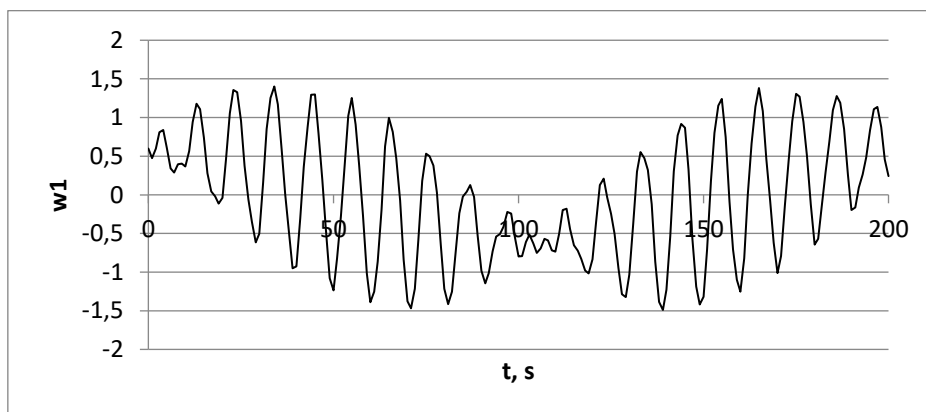
Рисунок 2.17 – Траєкторії в конфігураційному просторі

при  $k_1 = 0.15, k_2 = 1.3, k_3 = 0.6, k_4 = 0.03$

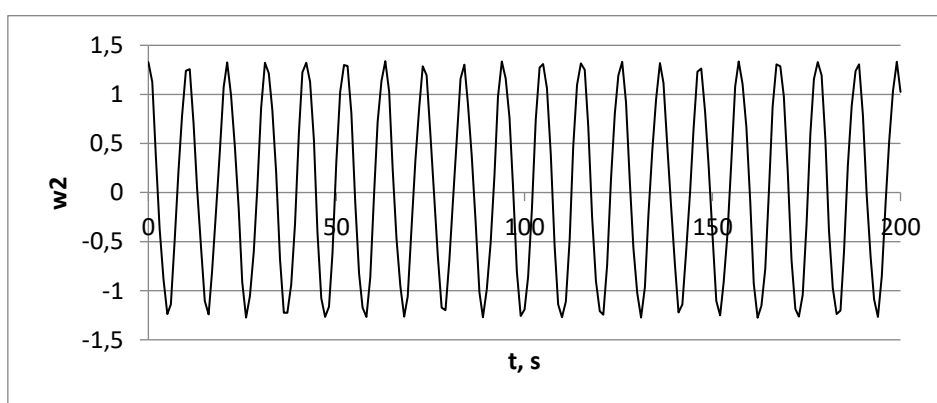
*a*) –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *б*) –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *в*) –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; *г*) –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; *д*) –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; *е*) –  $\lambda_3(\lambda_2)$



Закінчення рисунка 2.11



а

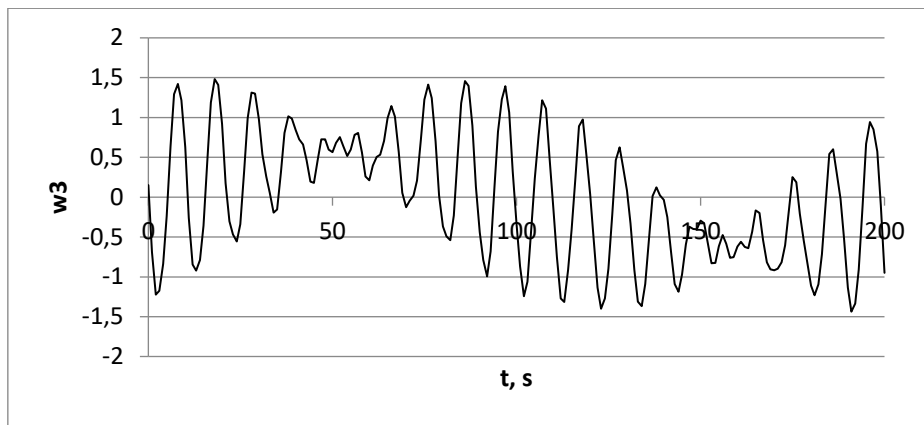


б

Рисунок 2.18 – Проекції вектору кутової швидкості

при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 1.3$ ,  $k_3 = 0.6$ ,  $k_4 = 0.03$ 

а) – по першій осі; б) – по другій осі; в) – по третій осі



в

Закінчення рисунка 2.18

При відповідних значеннях параметрів середнє значення модуля кутової швидкості на інтервалі досліджень  $|\omega| = 1.439$  рад/с (швидкість зміни кутового положення не є сталою для жодної з осей).

Шляхом зміни частот  $k_i$  можливо реалізувати на будь-якій з моделей достатньо широкі випадки руху. За умови, коли значення частот співпадають в одній моделі, чи стає нульовим, маємо спрощену модель (часто перетворюється в модель кіничного обертання).

### 2.3 Висновки за розділом

Проаналізовано існуючі еталонні моделі, визначено їх переваги та недоліки. Детально описано методи та вимоги для розробки відповідних кватерніонних моделей. На основі даних досліджень розроблено нові неперервні еталонні моделі, які за своїми характеристиками відмінні від класичних. Ці моделі здатні відтворювати плоске та сферичне обертання тіла, відповідно, а також враховувати збурюючі фактори на борту рухомого тіла. Розширення середовища для їх застосування можливе саме завдяки реалізації кута обертання у вигляді  $k_i \cdot t$ , при цьому  $k_i$  – частота, підбираючи значення якої, можна реалізувати кутовий рух з певною швидкістю (в тому числі, об'єкти з високою кутовою швидкістю). Кількість розроблених еталонних моделей можна назвати достатньою для виявлення закономірностей

відповідних рухів та розв'язання певних задач з тестування та оптимізації. За необхідності, група кватерніонних моделей може бути в майбутньому розширена новими випадками кутового руху.

На прикладі трьохчастотної моделі показано, що частоту « $-k$ » не можна інтерпретувати як окрему (нову) частоту, в таких випадках вона відображає обертання навколо певної осі в зворотньому напрямку. Достовірність аналітичних розв'язків розроблених моделей доведена їх реалізацією у відповідних математичних пакетах (Mathematica Wolfram та KiDiM). Можливості моделей були показані на чисельній реалізації за певного інтервалу роботи системи при конкретних значеннях параметрів та заданому такті інтегрування. Реалізованість моделей показана шляхом розв'язку системи динамічних рівнянь Ейлера. Доведено, що для певних моделей ми можемо задати параметри таким чином, щоб отримати вільний рух системи в окремих моментах часу або на всьому інтервалі реалізації. Це доводить не лише розширені можливості нових тестових рухів, а й доцільність їх використання для моделювання та відтворення процесу автоматичного керування обраним об'єктом.

## **РОЗДІЛ 3. ВІДПРАЦЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ ОРІЄНТАЦІЇ В БІНС**

### **3.1 Критерії вибору алгоритмів для реалізації**

Основним показником якості розробленої БІНС є точність навігаційних параметрів об'єкта, отриманих за допомогою обраного алгоритма визначення орієнтації. Тому доволі важливим є підібрати для реалізації в автономному обчислювачі алгоритм, який найкраще пристосований для конкретного типу руху. Алгоритмів розроблено велику кількість і, відповідно, вибір найоптимальнішого серед них є важливою та складною задачею, а тому має відбуватись за певними критеріями.

Перш за все, проводиться аналіз параметрів, які використовуються для опису положення розробленого рухомого об'єкта щодо його центру мас. Також важливим є враховувати індивідуальні особливості розробленої системи, такі як тип кінематичних параметрів орієнтації, характер вихідної інформації ДКШ, швидкодія алгоритму та необхідний порядок точності. Важливо враховувати характеристики датчиків, які встановлені на об'єкті та умови, за яких прилад буде функціонувати. Іншими важливими критеріями є максимальне завантаження обчислювача на такті (яке вдалося частково знизити завдяки потужностям сучасних комп'ютерів) та сама величина кроку квантування (такт зйому інформації).

Порядок обраного при проектуванні безплатформної навігаційної системи алгоритма зазвичай визначається кількістю послідовних інтегралів Пікара (3.1):

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(h) = & \left[ 1 - \frac{1}{8} (\nabla \theta_n)^2 + \frac{1}{16} (\nabla^2 \theta_n)^2 + \dots \right] \\
& + \frac{1}{2} \nabla \theta_n \left[ 1 - \frac{1}{24} (\nabla \theta_n)^2 + \frac{1}{32} (\nabla^2 \theta_n)^2 + \frac{1}{24} (\nabla \theta_n \cdot \nabla^2 \theta_n) \right] \\
& - \frac{1}{96} (\nabla \theta_n)^2 \nabla^2 \theta_n + \frac{1}{24} \nabla \theta_n \times \nabla^2 \theta_n + \frac{1}{48} \nabla \theta_n \times \nabla^3 \theta_n \\
& + \frac{1}{144} \nabla \theta_n \times \nabla^4 \theta_n + \dots.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Чим вищим є порядок алгоритма, тим більше членів нескінченного ряду використано при обчисленні. Відповідно, алгоритми з більшим порядком є більш точними, але вони потребують суттєвих обчислювальних потужностей. В таких випадках слід враховувати і те, що для досить невеликих величин може виникати похибка, пов'язана з округленням при обчисленні. Іноді це може бути причиною зниження реалізованого порядку алгоритма порівняно з очікуваним (математичним). Алгоритми 1-го та 2-го порядків є зручнішими для програмування в обчислювачі, але вони відкидають багато членів ряду, що знижує їх точність.

За принципом своєї роботи алгоритми поділяються на однокрокові та багатокрокові (або розгінні). В Україні, суттєвий внесок в розробку багатокрокових алгоритмів визначення орієнтації, тобто таких алгоритмів, які використовують первинну інформацію з різних тактів зйому належить А. Панову [33-36]. В сучасних системах розгінні алгоритми не набули особливої популярності, оскільки для своєї роботи вони потребують інформації з кількох попередніх тактів квантування (тобто застосування іншого методу обчислень на початку роботи системи для так званого «розгону»). Зручнішими для застосування в автономному обчислювачі БІНС є однокрокові (безрозгінні) алгоритми. Для реалізації їм потрібна інформація лише з попереднього кроку опитування.

Операції розгону не потребує й інша група алгоритмів. Їх перевага полягає в тому, що вони отримують надлишкові параметри для визначення

орієнтації шляхом використання інформації не лише на кінцях заданого інтервалу й в середині нього. Це дозволяє підвищити точність алгоритма, але збільшує кількість математичних обчислень і навантаження на обчислювач, відповідно.

При проектуванні інерціальних навігаційних систем важливим є коректно запрограмувати крок зйому інформації, оптимальний саме для даної системи. Зменшення кроку буде зменшувати і значення накопиченої похибки та дозволить отримувати точнішу інформацію з ДКШ. Недоліком є збільшення кількості математичних операцій, що виконуються за загальний час роботи системи. Збільшення кроку може призводити до зменшення точності через втрату важливої інформації всередині інтервалу.

### 3.2 Оцінка роботи алгоритмів на розроблених моделях

Відповідно до заданих в навігаційній системі критеріїв, підбирається конкретний алгоритм визначення кватерніонів орієнтації. Для того, щоб перевірити доцільність обраного алгоритма, прийнято проводити його тестування на еталонних моделях, які реалізують рух відповідного твердого тіла.

Точність роботи БІНС при цьому оцінюють обчислюючи похибку типу дрейф. Він належить до класу неусувних похибок (їх неможливо зменшити шляхом додаткових обчислень), які накопичуються з часом роботи. Накопичений дрейф є накопиченим кутом повороту обчисленого положення об'єкта (отриманого з алгоритма) відносно істинного.

В [27] визначена методика, за якою можна обчислити похибку дрейфу (3.2):

$$\delta\theta = 2 \arctg \left( \frac{|\delta\lambda|}{\delta\lambda_0} \right), \quad (3.2)$$

де  $\delta\lambda$  – кватерніон накопиченої похибки орієнтації,  $\delta\lambda = \lambda^* \circ \tilde{\lambda}$ ;

$\lambda^*$  – обчислений кватерніон;



$\tilde{\Lambda}$  – кватерніон, спряжений до кватерніону орієнтації еталонної моделі:

$$\tilde{\Lambda} = (\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3).$$

Визначення цієї похибки досить чітко відображає точність роботи алгоритма за певних умов. Крім того, аналіз дрейфа для конкретного рухомого об'єкта є важливим для його керування та коригування положення.

При розробці, модифікації та тестуванні алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації, в якості аналітичного представлення кінематичних та динамічних характеристик об'єкта, використовують еталонні моделі. Для них можливо реалізувати одразу і модельний (реальний) рух, і обчислений (алгоритмічний), які зручно порівняти.

В роботі зосереджено увагу на алгоритмах 4-го порядку. Їх алгоритмічна точність є досить високою, але вони можуть накопичувати похибку від округлення при достатньо малих значеннях вхідних параметрів або кроках обчислень. Слід відзначити, що оцінювання точності відбувається з врахуванням умов експлуатації космічних об'єктів (без врахування додаткових зовнішніх факторів, які впливають на об'єкт біля поверхні Землі).

В якості алгоритма для реалізації обрано алгоритм Бранця 4-го порядку точності [27], який обчислюється за відповідною формулою (3.3):

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \nabla \theta_1 - \frac{1}{8} |\nabla \theta_1^2| + \frac{1}{24} (\nabla \theta_1 \times \nabla^2 \theta_1) - \frac{1}{48} |\nabla \theta_1^2| \nabla \theta_1 \\ + \frac{1}{48} (\nabla \theta_1 \times \nabla^3 \theta_1) - \frac{1}{192} |\nabla \theta_1^2| \nabla^2 \theta_1 + \frac{1}{384} |\nabla \theta_1^4| + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Або покомпонентно:

$$\Delta \lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8} \theta_n^{*2} + \frac{1}{384} \theta_n^{*4}, \quad (3.4)$$

$$\Delta\lambda_n^* = \frac{1}{2}\theta_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) - \frac{1}{24}(\theta_{n-1}^* \times \theta_n^*) - \frac{1}{192}\theta_n^{*2}(\theta_n^* - \theta_{n-1}^*) + \frac{1}{48}(\theta_n^* \times (\theta_{n-2}^* - 2\theta_{n-1}^*)),$$

де  $n$  – крок обчислення (крок інтегрування).

Даний алгоритм є багатокроковим та для чисельної реалізації потребує значення квазікоординат з двох попередніх тактів. Проблема вирішена методом використання на перших двох кроках алгоритма Бранця 2-го порядку, що дає незначний вплив на точність роботи системи.

Іншим алгоритмом, цікавим для дослідження в умовах кутового руху сучасних об'єктів є алгоритм Р. Міллера [30]. Належить він до групи алгоритмів, які обчислюють інерціальну інформацію і на кінцях такту  $[t_{n-1}, t_n]$ , і виконують додаткові обчислення всередині нього. Відповідно, приріст вектора орієнтації (квазікоординат) на кожному такті розраховується за формулою (3.5):

$$\theta_n = \theta_n^* + \alpha(\theta_n^1 \times \theta_n^3) + \beta\theta_n^2 \times (\theta_n^3 - \theta_n^1), \quad (3.5)$$

де  $\theta_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)$ ;

$\theta_n^1, \theta_n^2, \theta_n^3$  - вихідні сигнали гіроскопів, які обчислюються всередині такту за відповідними формулами:

$$\theta_n^1 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1} + \frac{1}{3}\Delta t} \omega(t)dt, \theta_n^2 = \int_{t_{n-1} + \frac{1}{3}\Delta t}^{t_{n-1} + \frac{2}{3}\Delta t} \omega(t)dt, \theta_n^3 = \int_{t_{n-1} + \frac{2}{3}\Delta t}^{t_{n-1} + \Delta t} \omega(t)dt;$$

$t_{n-1}, t_{n-1} + \frac{1}{3}\Delta t, t_{n-1} + \frac{2}{3}\Delta t, t_{n-1} + \Delta t$  – точки зйому первинної інформації;

$\Delta t$  – такт обчислень;

$\alpha$  та  $\beta$  – параметри, для яких виконується умова:  $\alpha + \beta = \frac{9}{8}$

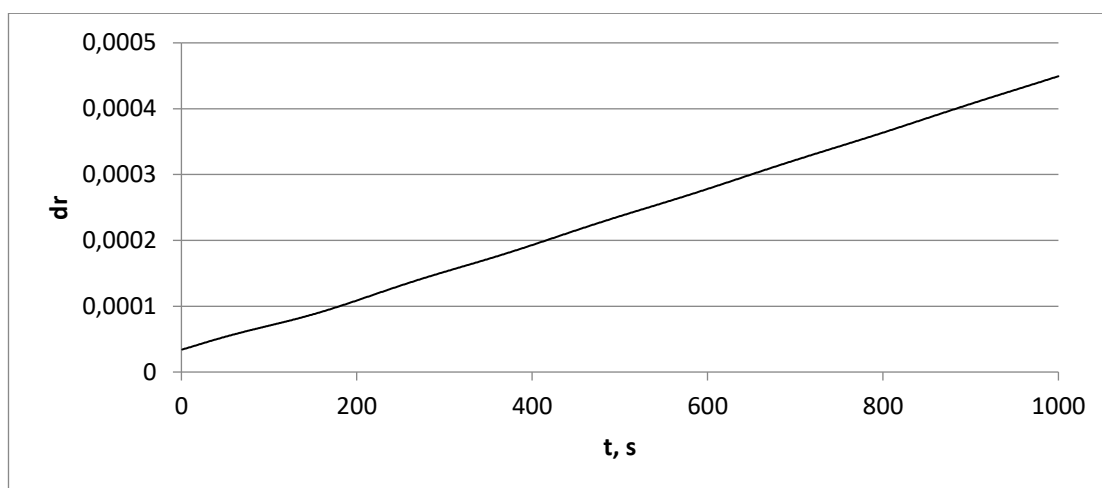
Для класичного випадку алгоритма автор пропонує наступні значення параметрів:  $\alpha = \frac{33}{80}$  та  $\beta = \frac{57}{80}$ . В своїй роботі [31] Ігнагні продовжив дослідження даного алгоритма та запропонував інші значення параметрів, які є оптимізованими для об'єкта з кінчним рухом основи:  $\alpha = \frac{36}{80}$  та  $\beta = \frac{57}{80}$ .

На розроблених моделях проведено тестування алгоритмів Бранця та Міллера 4-го порядку точності. Даний порядок дозволяє в багатьох випадках отримати оптимальний результат з точки зору точності визначення навігаційних параметрів та максимального завантаження автономного обчислювача. Для наочності отриманих результатів, параметри  $k_i$  підібрані з врахуванням модуля кутової швидкості на інтервалі дослідження (час роботи системи  $T=1000$  секунд, інтервал інтегрування  $\Delta t=0.1$  секунди). Обчислений дрейф наведено в табл. 3.1

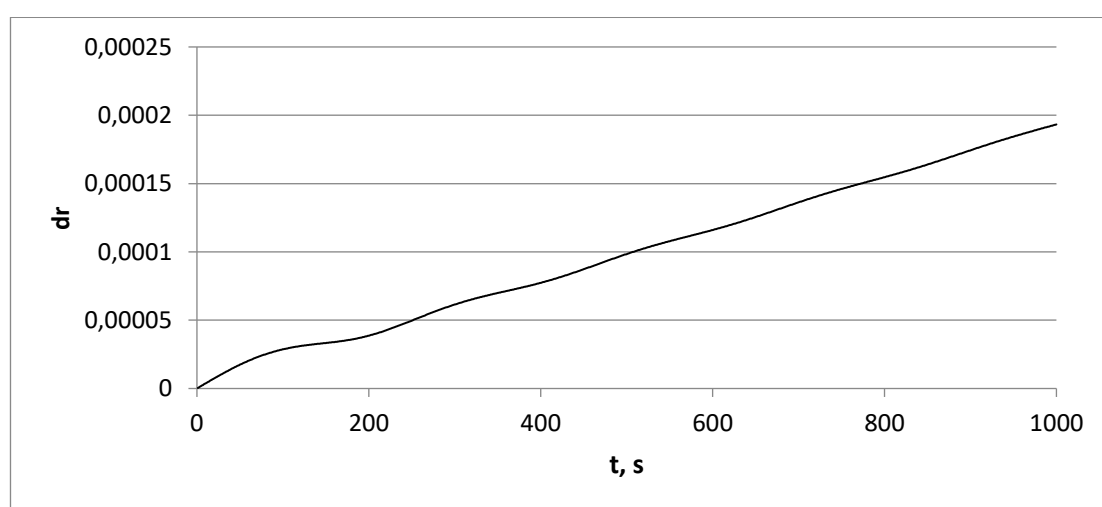
Таблиця 3.1 – Оцінка похибки дрейфу на розроблених еталонних моделях

Модель	Дрейф (алгоритм Бранця 4-го порядку), рад	Дрейф (класичний алгоритм Міллера 4-го порядку), рад
Двохчастотна (2.7)-(2.8)	0.000449	0.000193
Двохчастотна (2.11)-(2.12)	0,000998	0,000143
Двохчастотна (2.20)-(2.21)	0.003242	0.000461
Двохчастотна (2.22)-(2.23)	0,000044	0,0000057
Трьохчастотна (2.26)-(2.27)	0.001296	0.000188
Чотирьохчастотна (2.24)-(2.25)	0.001303	0.000191
Чотирьохчастотна (2.28)-(2.29)	0.001499	0.000192

Відповідні графіки оціненої похибки дрейфу для розроблених моделей наведені на рис. 3.1-3.7



*a*



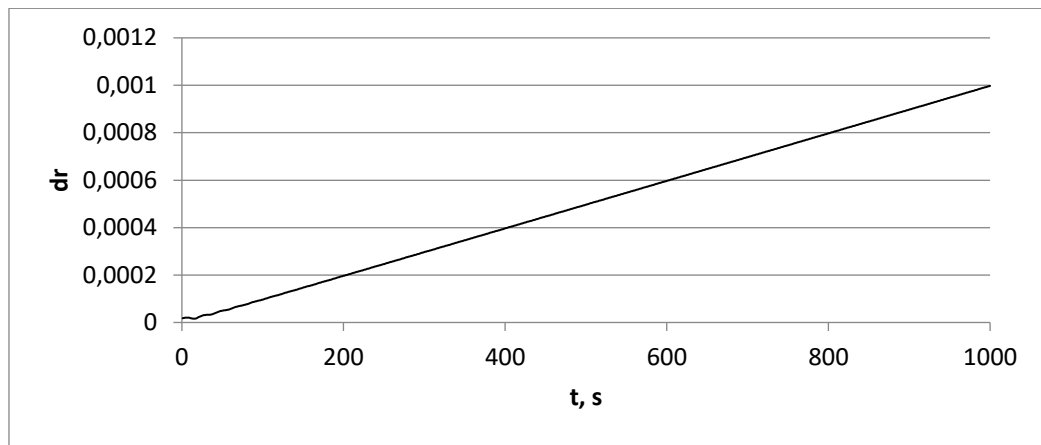
*б*

Рисунок 3.1 – Похибка дрейфу для моделі (2.7)-(2.8)

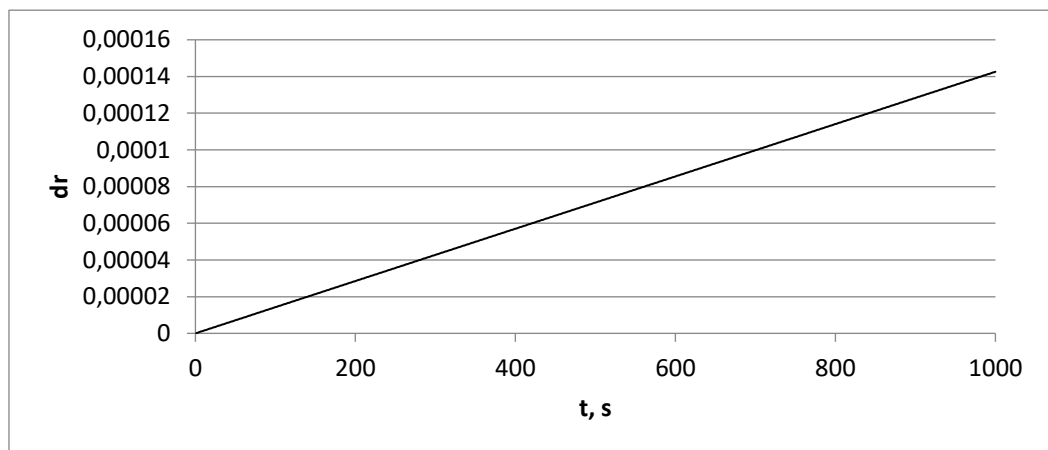
при  $k_1 = 0.015$ ,  $k_2 = 0.75$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$

*a*) – алгоритм Бранця 4-го порядку; *б*) – алгоритм Міллера

Різниця точності роботи обох алгоритмів на інтервалі дослідження моделі є невеликою. Похибка дрейфа для алгоритма Міллера вдвічі менша.



а



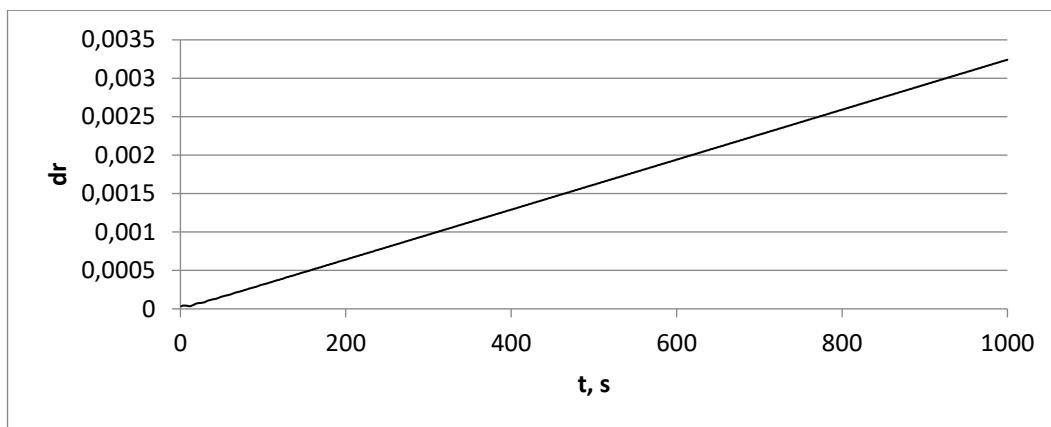
б

Рисунок 3.2 – Похибка дрейфу для моделі (2.11)-(2.12)

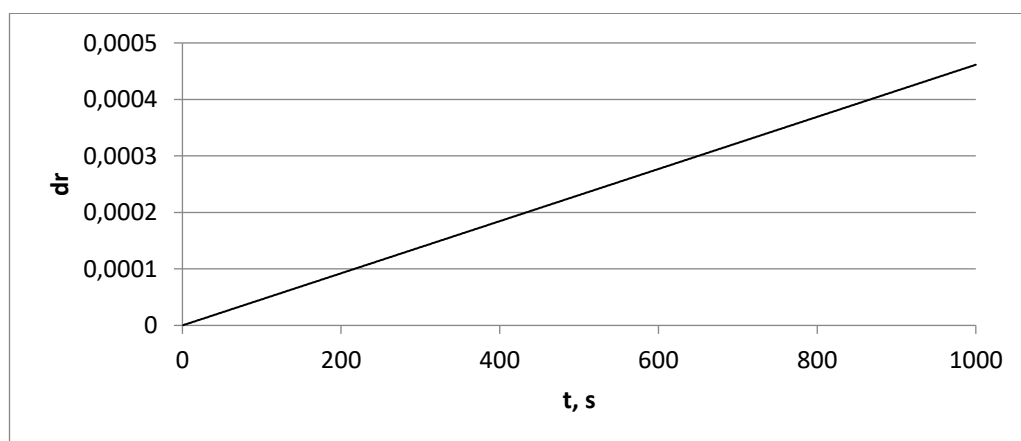
при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.56$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$ 

а) – алгоритм Бранця 4-го порядку; б) – алгоритм Міллера

За даної реалізації моделей отримано, що алгоритм Міллера дає точність в 10 разів більшу, за алгоритм Бранця аналогічного порядку. Результат підтверджено за кількох різних наборів частот  $k_i$  та тактів інтегрування  $\Delta t = 0.05$  та  $\Delta t = 0.01$



*a*



*б*

Рисунок 3.3 – Похибка дрейфу для моделі (2.11)-(2.12)

при  $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.7$ ,  $\eta = 0.8$ ,  $\xi = 0.6$

*a*) – алгоритм Бранця 4-го порядку; *б*) – алгоритм Міллера

Алгоритм Міллера для кутового руху, який реалізує дана модель дає результат в 10 разів точніший за алгоритм Бранця відповідного порядку. Обчислення з тим самим результатом отримано для кількох різних наборів частот  $k_i$  та тактів зйому інформації  $\Delta t = 0.05$  та  $\Delta t = 0.01$

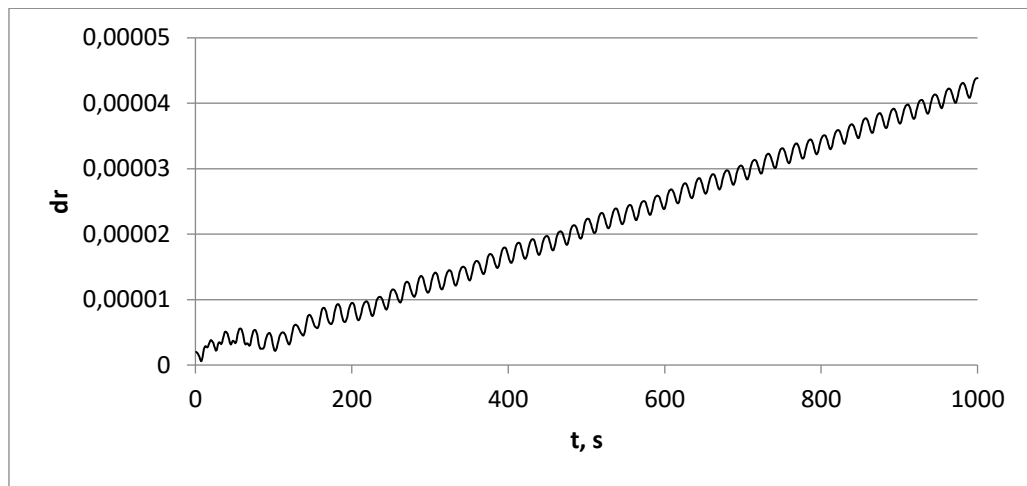
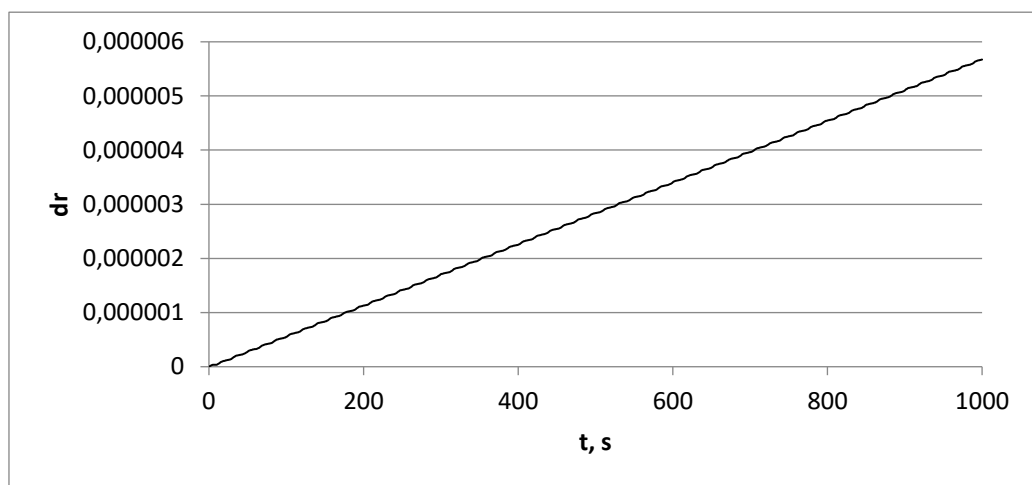
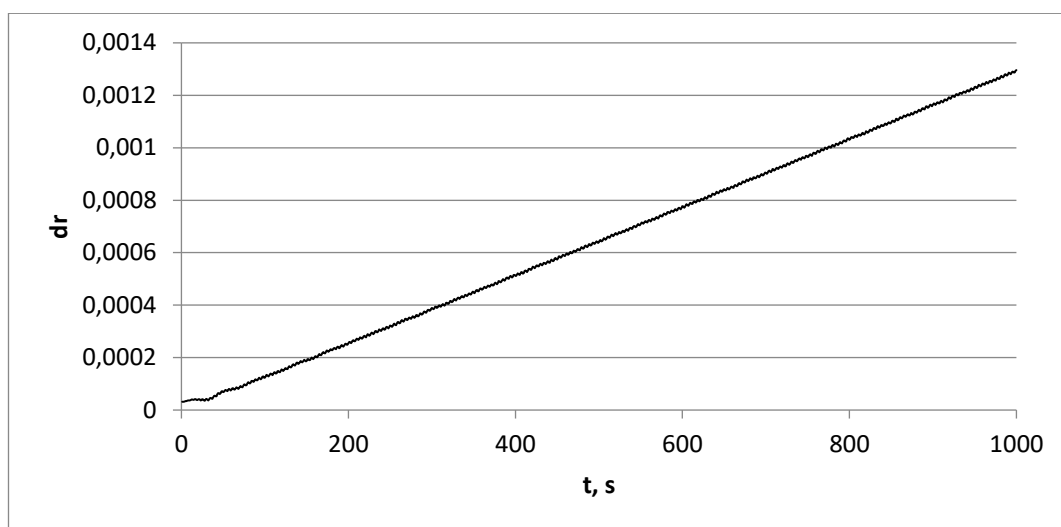
*a**б*

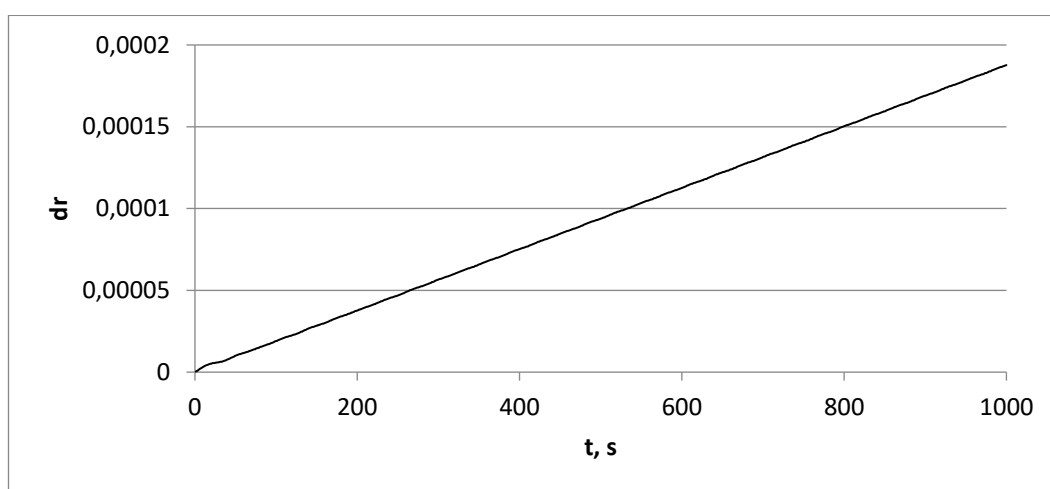
Рисунок 3.4 – Похибка дрейфу для моделі (2.22)-(2.23)

при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.177$ *a*) – алгоритм Бранця 4-го порядку; *б*) – алгоритм Міллера

Для запропонованої двохчастотної моделі алгоритм Міллера (класичний випадок) має на інтервалі роботи 1000 секунд дрейф в 10 разів менший за алгоритм Бранця.



*a*



*б*

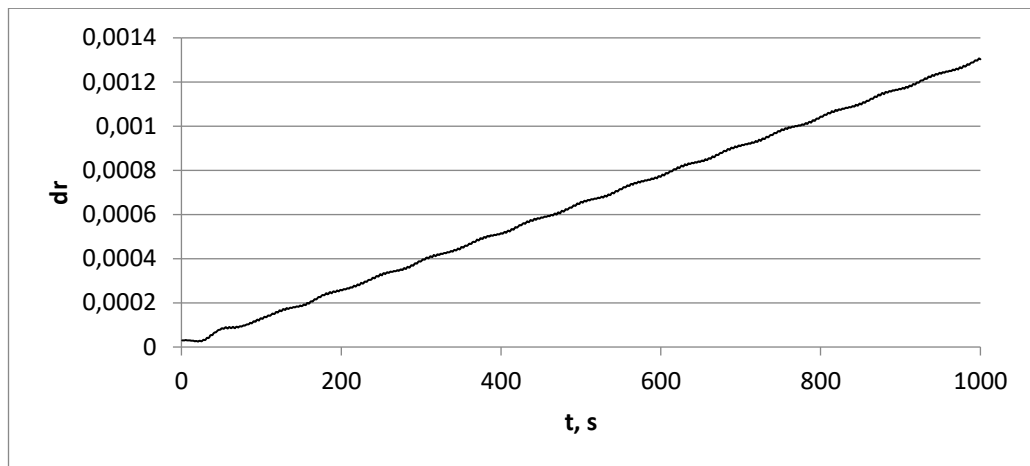
Рисунок 3.5 – Похибка дрейфу для моделі (2.24)-(2.25)

при  $k_1 = 0.1$ ,  $k_2 = 0.7$ ,  $k_3 = 0.05$

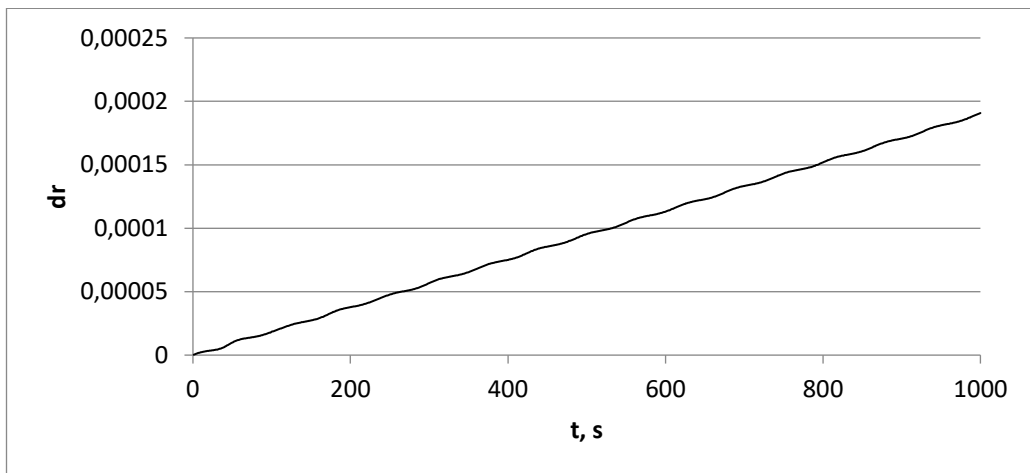
*a*) – алгоритм Бранця 4-го порядку; *б*) – алгоритм Міллера

За значень кутової швидкості, яка змодельована в даному випадку, алгоритм Міллера накопичує дрейф в 10 разів повільніше, ніж алгоритм Бранця 4-го порядку.





*a*



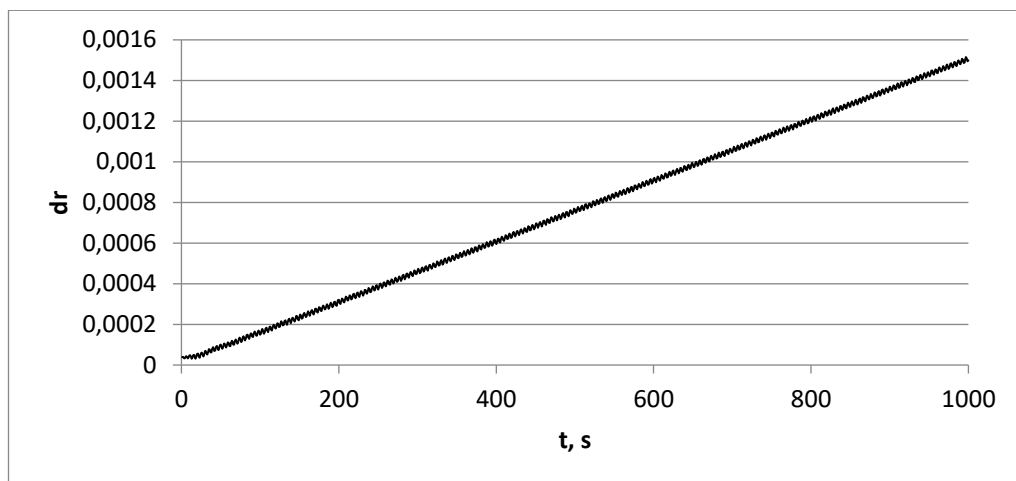
*б*

Рисунок 3.6 – Похибка дрейфу для моделі (2.26)-(2.27)

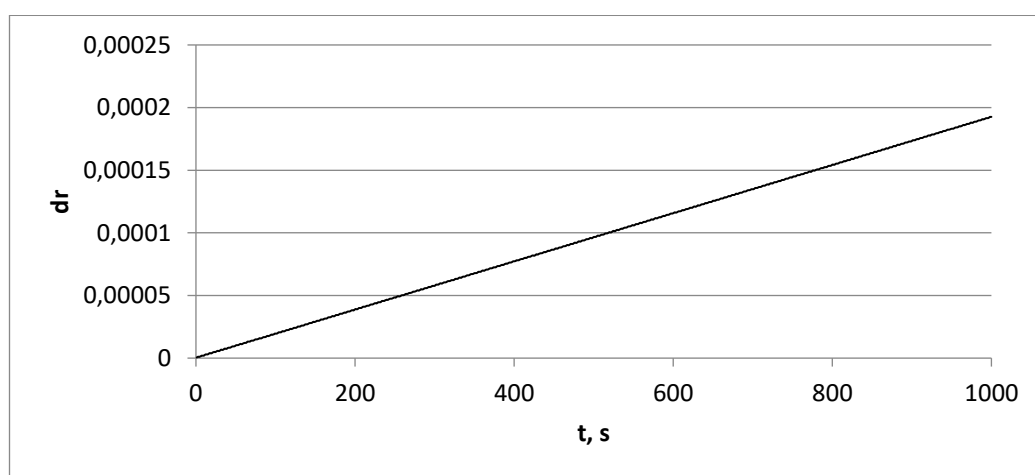
при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.7$ ,  $k_3 = 0.05$ ,  $k_4 = 0.001$

*a*) – алгоритм Бранця 4-го порядку; *б*) – алгоритм Міллера

Розроблена чотирьохчастотна модель має достатньо великий приріст квазікоординат на такті інтегрування. Доцільність застосування для відповідних типів руху алгоритма Міллера можна побачити з наведених на рис. 3.6 графіків (два алгоритми відрізняються за значенням дрейфа майже вдесятеро).



a



б

Рисунок 3.7 – Похибка дрейфу для моделі (2.28)-(2.29)

при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 1.3$ ,  $k_3 = 0.6$ ,  $k_4 = 0.03$ 

а) – алгоритм Бранця 4-го порядку; б) – алгоритм Міллера

Дана модель за однакових наборів частот має різницю накопиченого дрейфу майже вдесятеро між обома алгоритмами, які було протестовано. Крім того, алгоритм Бранця 4-го порядку є багатокроковим. Для визначення орієнтації на трьох перших кроках було використано алгоритм Бранця 2-го порядку, що є досить незручним і знижує якість рооти алгоритма.

Результат чисельного моделювання вказує на те, що для алгоритма Міллера похибка дрейфу є меншою для всіх відтворених типів руху. Слід зазначити, що даний алгоритм враховує різкі зміни значень кутової швидкості,

а тому в умовах попиту на об'єкти з високою кутовою динамікою, саме його оптимізація є достатньо актуальною.

Чисельна реалізація показала, що в чотирьохчастотних моделях швидкість приросту квазікоординат на кроці інтегрування є досить великою і може відтворювати певні типи руху. Згідно цих результатів, подальше тестування алгоритму Міллера доцільно проводити саме на чотирьохчастотних кватерніонних моделях. Метою дослідження було оптимізувати цей алгоритм шляхом підбору інших наборів параметрів. Початковий етап повністю покладався на класичну умову алгоритму ( $\alpha + \beta = 1.125$ ). Значення частот  $k_i$  впродовж експерименту залишались незмінними і були задані з врахуванням середнього значення модулю кутової швидкості. Порівнюючи нові значення параметрів з класичними було отримано, що один з оптимізованих наборів  $\alpha$  та  $\beta$  дає менший дрейф одночасно для обох моделей в порівнянні з запропонованими раніше значеннями (табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Точність алгоритма Міллера за різних значень параметрів

Алгоритм Міллера для різних наборів параметрів $\alpha + \beta = 1.125$		Дрейф для моделі (2.24)-(2.25), рад	Дрейф для моделі (2.28)-(2.29), рад
Класичний	$\alpha = \frac{33}{80}; \beta = \frac{57}{80}$	0.000493	0.000556
Оптимізований під конічний рух (Ігнагні)	$\alpha = \frac{36}{80}; \beta = \frac{57}{80}$	0.000505	0.000561
Нові оптимізовані значення	$\alpha = 0; \beta = \frac{9}{8}$	0.000362	0.000507

Результатом даного дослідження є набір нових значень для параметрів:  $\alpha = 0$  та  $\beta = \frac{9}{8}$ . Дані висновки підтверджено при кількох різних значеннях коефіцієнтів  $k_i$ , які в ході чисельної реалізації давали суттєво різні значення модулю кутової швидкості, а також змінювались кроки інтегрування (обчислення проводились при  $\Delta t_1 = 0.1$ ;  $\Delta t_2 = 0.05$ ;  $\Delta t_3 = 0.01$ ).

Наступним кроком було знайти оптимізовані параметри алгоритму Міллера за певного діапазона кутових швидкостей, коли умова для  $\alpha + \beta$  змінювалась в межах  $\pm 3\%$ , тобто  $\alpha + \beta = [1.122; 1.128]$ . Результат цього дослідження при одному з кількох отриманих наборів значень  $k_i$  для обох двохчастотних моделей на інтервалі  $T=1000$  секунд за кроку інтегрування  $\Delta t = 0.1$  приведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Точність алгоритму Міллера за різних значень для  $\alpha + \beta$  на розроблених чотирьохчастотних моделях

$\alpha + \beta$	Модель (2.13)-(2.14)		Модель (2.17)-(2.18)	
	класичний алгоритм Міллера, дрейф (рад)	модифікація Ігнагні, дрейф (рад)	класичний алгоритм Міллера, дрейф (рад)	модифікація Ігнагні, дрейф (рад)
1.122	0.002772	0.002784	0.001515	0.00152
1.123	0.002012	0.002024	0.001196	0.001201
1.124	0.001253	0.001265	0.000877	0.000882
1.1245	0.000873	0.000885	0.000718	0.000722
1.125	0.000493	0.000505	0.000556	0.000561
1.126	0.000267	0.000255	0.000239	0.000244
1.1265	0.000646	0.000635	0.000081	0.000086
1.127	0.001026	0.0010145	0.000078	0.000074
1.1275	0.0014062	0.001394	0.000236	0.000232
1.128	0.001786	0.001774	0.000395	0.00039

З таблиці можна бачити, що класична умова  $\alpha + \beta = 1.125$  є оптимальною не для всіх випадків руху. При певних значеннях кутової швидкості (і відповідно різних тактах зйому інформації) алгоритм дає менший дрейф за інших наборів параметрів  $\alpha$  та  $\beta$ . Перша чотирьохчастотна модель (2.24)-(2.25) реалізуючи кутову швидкість в межах  $|\omega| = [0.9; 1.9]$  рад/сек має найвищу точність, коли  $\alpha + \beta = 1.126$ .

Для другої чотирьохчастотної моделі (2.28)-(2.29) точність алгоритму Міллера є вищою, коли  $\alpha + \beta = 1.127$ . Діапазон змодельованої кутової швидкості при цьому буде в межах  $|\omega| = [1; 2,1]$  рад/сек.

На цьому етапі важливим є визначити конкретні значення параметрів в заданих межах. В табл. 3.4 наведено значення похибки дрейфу для алгоритму Міллера при різних значеннях  $\alpha$  (та  $\beta$  відповідно).

Таблиця 3.4 – Уточнення значення параметра  $\alpha$  за знайденої умови  $\alpha + \beta = 1.127$  для моделі (2.24)-(2.25).

$\alpha$	Змінений алгоритм Міллера, дрейф (рад)
0.8	0.00003213
0.85	0.00002641
0.9	0.00002092
1.0	0.00001214
1.04	0.00001063
1.05	0.00001061
1.06	0.00001072

Дослідження проводилось при значеннях  $\alpha = [0; 1.127]$ . В таблиці наведено діапазон з найменшими значеннями дрейфа ( $\alpha = [0.8; 1.06]$ ). Випадок, коли один з параметрів  $\alpha$  або  $\beta$  дорівнює нулю не є оптимальним для реалізованого типу кутового руху.

Якщо в моделях значення частот  $k_i$  задані таким чином, що модуль кутової швидкості не потрапляє в задані інтервали, оптимальними значеннями параметрів в алгоритмі Міллера залишаються  $\alpha = 0$ ;  $\beta = 1.125$

### 3.3 Фактичний порядок алгоритмів та практичні оцінки їх точності

Порядок обраного при проектуванні БІНС алгоритму відповідає членам певного порядку малості, які залишаються при розкладанні (3.1). Звідси маємо, що чим більше членів ряду залишається, тим точнішим є обраний алгоритм. Але слід враховувати, що в залежності від величини вхідних даних, значення членів ряду (3.1) починаючи з певного, можуть бути досить невеликими. Це призводить до виникнення додаткових похибок в чисельних методах обчислень, включаючи приведення до нуля складових, досить малих порядків. Тому на практиці можливо визначити математичний порядок деяких алгоритмів заздалегідь, а фактичну точність можливо визначити лише шляхом чисельних експериментів за конкретних початкових умов. Найчастіше алгоритми вищих порядків даватимуть ту ж саму реалізовану точність, що й алгоритми 1-го або 2-го порядку. Тому для задачі визначення орієнтації в БІНС вводяться поняття фактичного порядку точності ( $N_f$ ) та області ефективного використання алгоритмів, які дозволяють звужити діапазон для значень позірних поворотів при проектуванні БІНС. Виходячи з цього, при чисельній реалізації алгоритма може виявитись, що за конкретних значень частот та діапазоні зміни кутової швидкості формальний (математичний) порядок не буде реалізований. Тестуючи алгоритм, можна підібрати значення для нього таким чином, щоб фактичний порядок точності співпадав з математичним (або був вищим).

Для визначення фактичного порядку, його пов'язують зі значенням квазікоординат та тактом обчислення наступним чином:

$$|\Delta\lambda_{nj} - \Delta\lambda_{nj}^*| = \alpha_{nj}\theta_n^{*Nj}, \quad (3.6)$$

де  $\Delta\lambda_{nj}, \Delta\lambda_{nj}^*$  – еталонне та обчислене значення параметрів відповідно, в моделюванні вони визначають поворот рухомого об'єкта на такті  $[t_{n-1}, t_n]$

$j$  – відповідна компонента кватерніона орієнтації,  $j = 0, 1, 2, 3$ ;

$n$  – крок інтегрування (зчитування інформації);

$$\theta_n^* = \sqrt{\sum_j \theta_{nj}^{*2}};$$

$\alpha_{nj}$  – коефіцієнт, для якого виконується умова  $\theta_n^* < \alpha_{nj} < 1$ ;

$N_j$  – максимальний порядок  $\theta_n^*$ , при якому забезпечується (3.6).

Величина фактичного порядку обраного алгоритма визначається відповідно:

$$N_f = \min N_j - 1. \quad (3.7)$$

Оцінювання фактичного порядку та проміжку квазікоординат, за яких реалізований та математичний порядки обраного алгоритму співпадають є важливим етапом тестування алгоритмів при розробці БНС. Результатом даного дослідження може бути зменшення кількості обчислювальних операцій на такті інтегрування, якщо вдається підібрати такий алгоритм, який за заданих умов реалізації має математичний порядок нижчий або рівний фактичному.

В ході тестування алгоритму Міллера за різних умов експлуатації було визначено інтервали значень квазікоординат, за яких він буде найефективнішим для типів руху, представлених в розроблених моделях. Зважаючи на те, що значення приросту позірних поворотів суттєво залежать від величини кроку інтегрування, дослідження проводилось при двох випадках  $\Delta t = 0.1$  секунди та  $\Delta t = 0.01$  секунди. На другий випадок звертається більше уваги, оскільки для датчиків та алгоритмів в обчислювачі крок задається достатньо малим. За рахунок цього суттєво знижується накопичення навігаційних похибок, але зростає навантаження на комп'ютер. Відзначимо, що при моделюванні, обчислена кутова швидкість залишається

сталою за конкретних значень параметрів і не змінюється відносно  $\Delta t$  (на відміну від значень квазікоординат, які напряду пов'язані з обраним кроком інтегрування).

Частоти підбирались таким чином, щоб отримати для кожної з розроблених моделей однакове значення фактичного та математичного порядку. Цей випадок є найкращим при розробці навігаційної системи, яка має конкретні умови експлуатації. В дослідженні важливим є, також, визначити параметри моделі, коли алгоритмічний (математичний) та реалізуємий (фактичний) порядки будуть відрзнятись. Випадок, коли математичний порядок більший за фактичний вказує, що алгоритм для даного типу руху не дає необхідної точності. Крім того, ми отримуємо необґрунтоване навантаження на обчислювальний блок, що є важливим при розробці БІНС. Якщо при реалізації алгоритма на конкретному об'єкті отримано, що його фактичний порядок більший за математичний, ми отримаємо сприятливу ситуацію. Це дозволяє або понизити порядок алгоритма для реалізації, або оновити характеристики в цілому.

Оскільки розроблені двохчастотні еталонні моделі мають достатньо близькі характеристики, доцільним в подальших дослідженнях використовувати першу модель (2.7)–(2.8) та третю (2.20)–(2.21). Вибір покладається на можливість цих моделей за відповідних початкових даних реалізовувати вільний кутовий рух. Результат дослідження для обраних двохчастотних моделей представлено в табл. 3.5 для моделі (2.7)–(2.8) та в табл. 3.6 для моделі (2.20)–(2.21). Дослідження проводилось на інтервалі часу 1000 секунд, але значення фактичного порядку припиняє змінюватись приблизно з 100-ї секунди чисельної реалізації моделі для різних тактів.



Таблиця 3.5 – Значення квазікоординат для моделі (2.7)-(2.8) при різних значеннях фактичного порядку алгоритму

Порядок алгоритму	Значення параметрів для моделі	
	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.01;$
4 матем., 3 фактичн.	$k_1=0.05; k_2=0.6;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 1.143$ рад/сек	$k_1=0.05; k_2=0.6;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 1.143$ рад/сек
4 матем., 4 фактичн.	$k_1=0.8; k_2=0.05;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 1.542$ рад/сек	$k_1=3.8; k_2=0.05;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 7.54$ рад/сек
4 матем., 5 фактичн.	$k_1=0.005; k_2=0.9;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 1.794$ рад/сек	$k_1=0.0005; k_2=2.9;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 5.799$ рад/сек

Таблиця 3.6 – Значення квазікоординат для моделі (2.20)-(2.21) при різних значеннях фактичного порядку алгоритму

Порядок алгоритму	Значення параметрів для моделі	
	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.01;$
4 матем., 3 фактичн.	$k_1=0.05; k_2=0.6;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 1.204$ рад/сек	$k_1=0.05; k_2=0.6;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 1.204$ рад/сек
4 матем., 4 фактичн.	$k_1=0.8; k_2=0.05; \eta=0.8;$ $\xi=0.6;$ $ \omega  = 1.603$ рад/сек	$k_1=3.8; k_2=0.05; \eta=0.8;$ $\xi=0.6;$ $ \omega  = 7.6$ рад/сек
4 матем., 5 фактичн.	$k_1=0.005; k_2=0.9; \eta=0.8;$ $\xi=0.6;$ $ \omega  = 1.8$ рад/сек	$k_1=0.0005; k_2=2.9;$ $\eta=0.8; \xi=0.6;$ $ \omega  = 5.8$ рад/сек

Перше, що можна побачити з табл. 3.5 та 3.6 – моделі мають однаковий порядок за однакових значень частот  $k_i$ . Модуль проєкцій кутової швидкості при цьому буде достатньо близьким для обох моделей. Аналогічний результат отримано для двох інших двохчастотних моделей. Слід зауважити, що параметри  $\eta$  та  $\xi$  для моделі (2.20)-(2.21) не впливають на результат (реалізований порядок не буде змінюватись). У випадку моделі (2.7)-(2.8) отримано пониження реалізованого порядку при  $\eta = 0$  та  $\xi = 1$ . Доцільним для тестування алгоритмів за даного типу руху є проводити дослідження лише на одній зрозроблених двохчастотних моделей. Оптимальною можна назвати модель (2.20)-(2.21), бо вона менше залежить від варіації параметрів.

Відзначимо зв'язок отриманих результатів з використовуваними параметрами. Збільшення однієї з частот  $k_i$  в моделі призводить до збільшення кутової швидкості (і квазікоординат, тому що вони відображають швидкість зростання відповідного кута обертання), яка, в свою чергу, дозволяє збільшити фактичну точність алгоритма. Але похибка дрейфу, за цих умов, також буде збільшуватись.

Дослідження для випадку, коли крок інтегрування  $\Delta t = 0.1$  показало, що достатню реалізовану точність алгоритму можна отримати, коли модуль проєкцій кутової швидкості набуває значення не менше 1.5 рад/сек.

Необхідну фактичну точність алгоритму для умови  $\Delta t = 0.01$  можливо отримати, коли проєкції кутової швидкості приймають значення не менше  $|\omega| = 5$  рад/сек.

Визначення допустимих інтервалів для значень квазікоординат є окремим питанням. Для моделі (2.7)-(2.8) вони становлять від -0.0008 рад до 0.18 рад при  $\Delta t = 0.1$ , та від -0.008 рад до 0.05 рад при  $\Delta t = 0.01$ . Результатом для моделі (2.11)-(2.12) є значення від -0.0001 рад до 0.16 рад при  $\Delta t = 0.1$ , та від -0.001 рад до 0.076 рад при  $\Delta t = 0.01$ .

Дослідження фактичного порядку трьохчастотної моделі наведено в табл. 3.7.

Таблиця 3.7 – Значення квазікоординат для моделі (2.15)-(2.16) при різних значеннях фактичного порядку алгоритму

Порядок алгоритму	Значення параметрів для моделі	
	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.01$ ;
4 матем., 3 фактичн.	$k_1=0.035$ ; $k_2=0.073$ ; $k_3=0.05$ ; $ \omega  = 0.18$ рад/сек	$k_1=0.035$ ; $k_2=0.073$ ; $k_3=0.05$ ; $ \omega  = 0.18$ рад/сек
4 матем., 4 фактичн.	$k_1=1.15$ ; $k_2=0.001$ ; $k_3=0.6$ ; $ \omega  = 3.3$ рад/сек	$k_1=5$ ; $k_2=0.001$ ; $k_3=0.6$ ; $ \omega  = 13.466$ рад/сек
4 матем., 5 фактичн.	$k_1=0.7$ ; $k_2=0.003$ ; $k_3=0.015$ ; $ \omega  = 2.0655$ рад/сек	$k_1=7$ ; $k_2=0.03$ ; $k_3=0.15$ ; $ \omega  = 16.595$ рад/сек

З таблиці 3.7 можна побачити, що залежності значень приросту вектору позірного повороту на обраному такті інтегрування напряму пов'язані з середнім значенням модуля кутової швидкості на інтервалі дослідження. Експеримент показав, що для трьохчастотної моделі (2.26)-(2.27) достатнім інтервалом часу є 300 секунд. Збільшення накопиченого дрейфу призводить до порушення точності дослідження після 300 секунд роботи програми в незалежності від кроку зйому інформації.

Шляхом коректного підбору частот  $k_i$  отримано випадок, коли за 4-го математичного порядку точності, фактичний порядок відповідає 5-му та 2-му.

Коли крок зйому інформації  $\Delta t = 0.1$ , маємо наступні умови для досягнення достатньої точності: модуль проекції кутової швидкості має бути  $|\omega| = 2.1$  рад/сек або вище; інтервали допустимих значень для квазікоординат мають відповідати від -0.3 рад до 0.34 рад. Менші значення можуть привести до меншої реалізованій точності.

Якщо в реалізованій навігаційній системі маємо  $\Delta t = 0.01$ , то точність, якої вона потребує для коректної роботи, досягається за відповідних умов. Найменшим допустимим значенням модуля кутової швидкості об'єкта на

інтервалі є  $|\omega| = 15$  рад/сек. Значення квазікоординат при цьому від  $-0.003$  рад до  $0.212$  рад.

Слід звернути увагу, що частоти, які при  $\Delta t = 0.1$  дозволяють отримати фактичний порядок нижчим, за математичний, дають аналогічний результати і при кроці  $\Delta t = 0.01$

Дослідження фактичного порядку для першої чотирьохчастотної моделі при різних значеннях частот та параметрів наведено в табл. 3.8

Таблиця 3.8 – Значення квазікоординат для моделі (2.24)-(2.25) при різних значеннях фактичного порядку алгоритму

Порядок алгоритму	Значення параметрів для моделі	
	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.01$ ;
4 матем., 3 фактичн.	$k_1=0.15; k_2=0.151;$ $k_3=0.075; k_4=0.152;$ $ \omega  = 0.44$ рад/сек	$k_1=0.15; k_2=0.151;$ $k_3=0.075; k_4=0.152;$ $ \omega  = 0.44$ рад/сек
4 матем., 4 фактичн.	$k_1=1.15; k_2=0.035; k_3=0.75;$ $k_4=0.152;$ $ \omega  = 2.14$ рад/сек	$k_1=1.15; k_2=0.035;$ $k_3=7.5; k_4=0.152;$ $ \omega  = 15.07$ рад/сек
4 матем., 5 фактичн.	$k_1=1.15; k_2=0.001; k_3=0.8;$ $k_4=0.07;$ $ \omega  = 2.235$ рад/сек	$k_1=1.15; k_2=0.001;$ $k_3=8; k_4=0.07;$ $ \omega  = 16.08$ рад/сек

В табл. 3.9 наведено результати досліджень для другої чотирьохчастотної моделі (2.28)–(2.29) за відповідних початкових умов.

Таблиця 3.9 – Значення квазікоординат для моделі (2.28)-(2.29) при різних значеннях фактичного порядку алгоритму

Порядок алгоритму	Значення параметрів для моделі	
	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.01$ ;
4 матем., 3 фактичн.	$k_1=0.15; k_2=1.55; k_3=0.35;$ $k_4=0.75;$ $ \omega  = 1.684$ рад/сек	$k_1=0.15; k_2=1.55;$ $k_3=0.35; k_4=0.75;$ $ \omega  = 1.684$ рад/сек
4 матем., 4 фактичн.	$k_1=0.002; k_2=0.75; k_3=0.03;$ $k_4=0.25;$ $ \omega  = 0.784$ рад/сек	$k_1=0.002; k_2=5.5;$ $k_3=0.03; k_4=0.25;$ $ \omega  = 5.514$ рад/сек
4 матем., 5 фактичн.	$k_1=0.05; k_2=0.4;$ $k_3=0.001; k_4=0.85;$ $ \omega  = 1.247$ рад/сек	$k_1=0.05; k_2=0.4;$ $k_3=0.001; k_4=8.5;$ $ \omega  = 8.895$ рад/сек

Таблиці 3.8 та 3.9 приводять основні результати з дослідження фактичного порядку для чотирьохчастотних моделей. На відміну від двохчастотних моделей, тут маємо різні значення частот для отримання необхідної реалізуємої точності. Тому рекомендації, стосовно вибору алгоритма, оптимального для кожного з відтворюваних типів руху, потрібно робити окремо для кожної моделі.

Модель (2.24)-(2.25) потребує мінімального значення модуля кутової швидкості  $|\omega| = 2.1$  рад/сек при  $\Delta t = 0.1$ , а квазікоординати відповідно від - 0.16 рад до 0.229 рад. Коли дослідження відбувалось при  $\Delta t = 0.01$ , мінімальний модуль кутової швидкості має набувати  $|\omega| = 15$  рад/сек, а інтервал значень позірних поворотів бути від -0.16 рад до 0.163 рад.

Інші умови для реалізації потрібного фактичного порядку отримано для моделі (2.28)-(2.29). З табл 3.9 можна бачити, що вимоги до кутової швидкості є значно нижчими. У випадку, коли крок  $\Delta t = 0.1$ ,  $|\omega| = 1$  рад/сек і вище. Квазікоординати від -0.0002 рад до 0.23 рад. Коли ми зменшили крок до

значення  $\Delta t = 0.1$ , отримали, що  $|\omega| = 5.5$  рад/сек та вище, а прирості позірних поворотів мають потрапляти в інтервал від  $-0.05$  рад до  $0.89$  рад.

В даних дослідженнях слід акцентувати увагу на тому, що отримати необхідну точність обраного алгоритма можна шляхом пошуку відповідних частот  $k_i$ . Не завжди потрібно збільшувати всі їх значення. З аналітичних виразів для проекцій кутової швидкості можна виявити їх залежність від певного коефіцієнта і надалі активно коригувати саме його з метою отримати мінімальне обчислювальне навантаження обчислювача за необхідної точності. Відзначимо, що залежність між фактичним та математичним порядками виявляється при дослідженні модуля проекцій кутової швидкості, але не завжди має чіткі інтервали значень позірних поворотів. Зменшення кроку інтегрування має вплив на реалізовану точність лише при досить високому алгоритмічному порядку, який пропонується в системі.

### 3.4 Висновки за розділом

На розроблених еталонних моделях проведено тестування двох алгоритмів 4-го порядку точності. Показано, що алгоритм Міллера, завдяки своїй структурі, дозволяє отримати навігаційні параметри об'єкта з більшою точністю і не потребує додаткового обчислення значень на перших кроках. Доведено це через оцінювання похибки накопиченого дрейфа за певних коефіцієнтів системи та достатнього інтервалу роботи.

Чотирьохчастотні моделі реалізують достатньо складні випадку руху, а тому були використані для подальшої оптимізації алгоритма Міллера. В ході даного дослідження отримано нові параметри алгоритма, за яких похибка дрейфа є меншою в порівнянні з класичними та модифікованими Ігнагні випадками. Доведено, що одна з таких оптимізацій є універсальною для обох моделей, за різних реалізацій кутового руху. Також отримано нові набори параметрів  $\alpha$  та  $\beta$ , які дають покращену точність роботи системи, але лише для частинних випадків руху об'єкту.

Відпрацьовано методику визначення фактичного порядку алгоритмів на прикладі алгоритму Міллера. Для кожної з моделей знайдено коефіцієнти,

при яких реалізований порядок алгоритма відповідає математичному, а також, коли вони є різними. Описано, чому при проектуванні навігаційних систем важливо звернути увагу на реалізовані характеристики об'єкту в порівнянні з запропонованими. Акцентовано увагу на умовах кутового руху, які потрібні для досягнення відповідної фактичної точності визначення конкретного кутового руху.

## **РОЗДІЛ 4. АЛГОРИТМИ ТА МОДЕЛІ ДЛЯ ВИСОКОДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

### **4.1 Реалізація руху високодинамічних об'єктів за допомогою розроблених кватерніонних моделей**

Окремою групою рухомих об'єктів, яка викликає великий інтерес у дослідників є об'єкти з високою кутовою динамікою. До таких відносяться бойові снаряди (балістичні, крилаті або оперативно-тактичні ракети, артилерійські снаряди, тощо), безпілотні літаючі об'єкти (різних розмірів, ваги, призначення), реактивні літаки, штучні супутники землі і т.д. Але через особливості своїх конструкцій та динамічних характеристик, такі пристрої мають складнощі при проектуванні навігаційних систем, здатних в повній мірі задовольняти вимоги по швидкодії та точності роботи. Основною причиною є швидка зміна кутового положення, яка породжує похибки обчисленої навігаційної інформації. Для її компенсації на сьогодні пропонуються переважно інструментальні рішення, які активно покладаються на нові типи датчиків. В даній роботі, увагу звернено на алгоритмічні методи покращення точності визначення орієнтації відповідних пристроїв.

Високодинамічними або високоманевреними об'єктами можна назвати такі рухомі апарати, в яких наявна певна специфіка для динаміки обертового руху: наявна досить висока швидкість обертання тіла навколо одної або кількох власних осей (найчастіше такою є поздовжня вісь, яку ще називають креном або в іноземній літературі «roll»).

Високою вважається швидкість близько 20 обертів на секунду. При проектуванні для таких об'єктів систем інерціальної навігації, основною проблемою є здатність датчиків коректно сприймати інформацію про обертання на обраному такті зйому інформації (датчики для таких систем повинні мати діапазон більше 7200 град/с). Ця проблема частково вирішується завдяки МЕМС датчикам (які все ж мають певні обмеження по точності) та



використанню класичних датчиків, але в нових методах компанування на об'єкті.

Застосовані в обчислювачі алгоритми також мають бути сприятливими до великих значень приросту кутової швидкості на заданому такті, та до стрімкої зміни цих значень з часом. При цьому бажано знайти метод, який не буде перевантажувати обчислювач (відповідно, необхідно підібрати крок зйому інформації так, щоб алгоритм не втратив важливих даних, але й не перевищував допустиму частоту квантування).

В розділі 3 наведено дослідження алгоритму Міллера за різних значень його параметрів, а також підібрано для конкретних випадків руху оптимізовані коефіцієнти. Показано, що даний алгоритм дійсно є оптимальним для використання на борту високоманевреного об'єкта з інерційною системою навігації.

В якості тестового руху для високодинамічного об'єкта краще використовувати чотирьохчастотні моделі. Оптимальною є модель (2.24)-(2.25). Шляхом зміни значень  $k_i$  можливо досягти досить великого значення для модуля проєкцій кутової швидкості. При цьому, в порівнянні з другою чотирьохчастотною моделлю, не обов'язково досягати значних величин для частот (кутів) обертання. Так за однакових значень  $k_i$  та кроку інтегрування  $|\omega|$  будуть відрізнятись приблизно в 5 разів.

Розроблену чотирьохчастотну модель (2.24)-(2.25) можна назвати імітацією моделі високодинамічного об'єкта. З обчислень фактичного порядку для цієї моделі (розділ 3) можна побачити, що кутова швидкість моделі, коли фактичний порядок співпадає або більший за математичний є досить великою (відповідає опису високоманевреного об'єкта). За подальшого тестування моделі важливим є не лише знайти діапазон необхідних для цього випадку кутових швидкостей, а й дослідити їх зв'язок зі значеннями частот.

Отримано, що модель буде реалізовувати рух об'єкта, який має високу кутову динаміку за умови найменшого значення модуля кутової швидкості  $|\omega| = 8$  рад/сек. Максимального значення для цієї величини не виявлено, але

важливо розуміти при чисельній реалізації, характеристики обертового руху обраного об'єкта та можливості розробленої навігаційної системи (обчислювальна здатність алгоритма та технічні дані датчиків).

Результати дослідження чотирьохчастотної кватерніонної моделі на інтервалі роботи 1000 секунд, з кроком інтегрування  $\Delta t=0.1$  секунди та  $|\omega|$  від 8 рад/сек наведено в табл. 4.1 для кожної компоненти вектора кутової швидкості. Зауважимо, що крок інтегрування не впливає на величину кутового руху об'єкту, тому чисельне моделювання наведено для однієї величини зйому інформації (підтверджено чисельними реалізаціями за величини кроку  $\Delta t=0.05$  та  $\Delta t=0.01$  секунди), а для обчислення квазікоординат важливо обрати цей параметр відповідно до вимог системи.

Таблиця 4.1 – Залежність середніх значень проекцій вектору кутової швидкості від значень частот  $k_i$

	$\Delta t=0.1$			
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$ \omega $
$k_1=0.01$ ; $k_2=0.035$ ; $k_3=4.2$ ; $k_4=0.5$	-0.0005687	-0.00077866	-0.48998208	8.4282
$k_1=4.3$ ; $k_2=0.004$ ; $k_3=0.023$ ; $k_4=0.37$	-0.0000762	-0.00120625	3.924048	8.8007
$k_1=0.001$ ; $k_2=0.007$ ; $k_3=5.25$ ; $k_4=0.75$	0.01322082	0.01062018	-0.74895346	10.5466
$k_1=1.15$ ; $k_2=0.001$ ; $k_3=8.0$ ; $k_4=0.07$	-0.0075692	-0.00218214	1.08008273	16.0695

Такі результати обчислень вказують, що при певним чином заданих параметрах можна отримати рух високодинамічного об'єкта. Згідно наведених даних, для реалізації високоманевреного руху достатньо збільшити лише одну з частот до значення більше 4. Залежність частот в аналітичних виразах для проекцій кутової швидкості, та результати з табл. 4.1 дозволяють зауважити, що зменшення значення  $k_2$  також має позитивний вплив на збільшення швидкості обертання. Модель реалізує кутовий рух з досить великим значенням обертання навколо третьої осі (не залежно від заданих частот) в порівнянні з рухом навколо інших осей. Знак мінус «-» вказує, що обертальний рух здійснюється в обох напрямках (прями та зворотній).

#### **4.2 Врахування вібраційного оточення на борту об'єкта з високими кутовими характеристиками**

На борту рухомого об'єкта завжди наявні коливання певної природи., В залежності від того, наскільки близько датчики розташовані до джерел вібрації, вплив їх на точність отриманих навігаційних параметрів буде різним. Слід зазначити, що повністю позбутись вібраційного впливу неможливо. Але його значення зазвичай коригують шляхом спеціальних амортизуючих установок, нових типів датчиків, принцип функціонування яких є досить стійким до коливань. Інший варіант – вимірювати вібраційний вплив на конкретному об'єкті та враховувати його при роботі алгоритма.

Загальний вигляд рівнянь гармонічного коливання, які повинні бути враховані при розширенні моделі є наступний:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.1)$$

або

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4.2)$$

де  $x$  – величина відхилення від положення рівноваги;

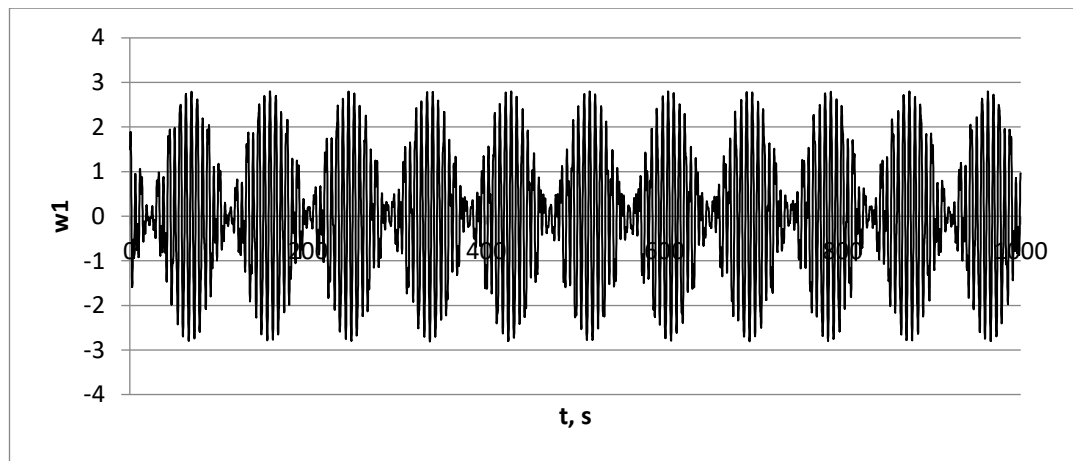
$A$  – амплітуда коливання;

$\omega$  – циклічна частота;

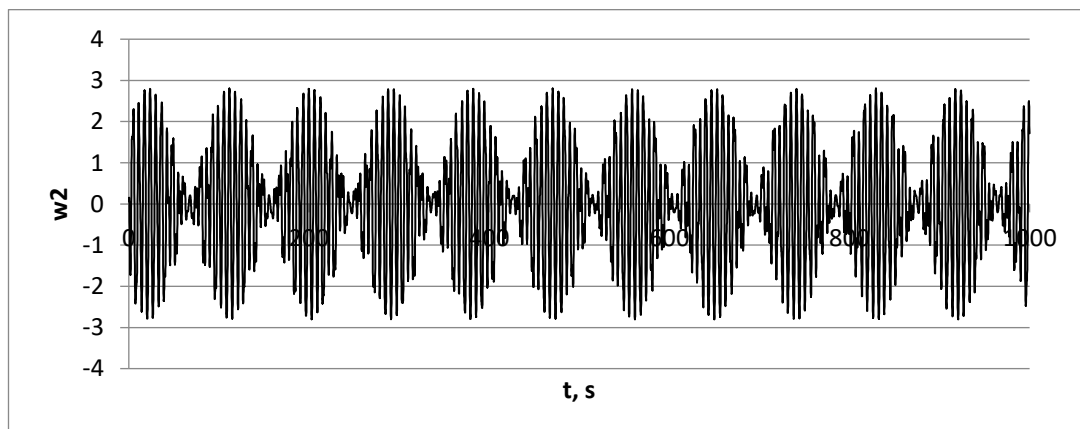
$\varphi_0$  – початкова фаза коливань.

Оскільки це загальний вигляд, певна складова вібрації може бути реалізована іншими методиками, які дозволяють врахувати збурення від окремої компоненти РО, досить часто – найближчої до відповідного датчика. В деяких випадках це дозволяє спростити моделювання вібраційного оточення.

Випадок кутового руху, який враховує вплив гармонійного коливання, можливо спостерігати при чисельній реалізації відповідних кінематичних параметрів чотирьохчастотних моделей. На рис. 5.1 наведені детальні реалізації для проєкцій кутової швидкості моделі (2.25) за часу  $T=1000$  секунд.



*a*

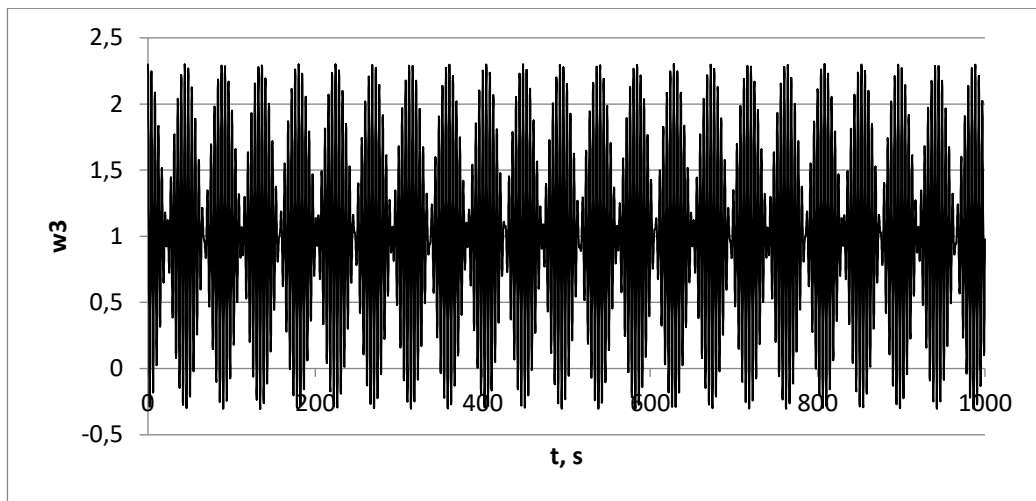


*б*

Рисунок 4.1 – Проекції вектору кутової швидкості

при  $k_1=1.15$ ;  $k_2=0.035$ ;  $k_3=0.75$ ;  $k_4=0.152$

*a)* – по першій осі; *б)* – по другій осі; *в)* – по третій осі

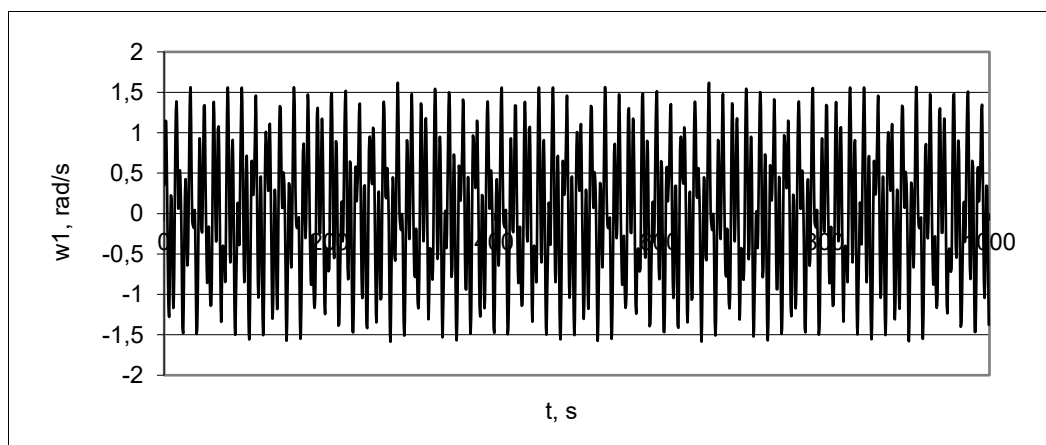


*в*

Закінчення рисунка 4.1.

За даної реалізації можливо визначити для моделі основні характеристики коливання: період 88 секунд, найбільша амплітуда 2,25 – за першою та другою осями. Це суттєво відрізняється від реалізації моделі на рис. 2.16 (період 124 секунд за першою та другою осями, найбільша амплітуда 1,25)

Чисельна реалізація чотирьохчастотної моделі при  $k_1=0.15$ ;  $k_2=1.55$ ;  $k_3=0.35$ ;  $k_4=0.75$ ;  $\Delta t=0.1$  та інтервалі роботи 1000 секунд показана на рис. 4.2.

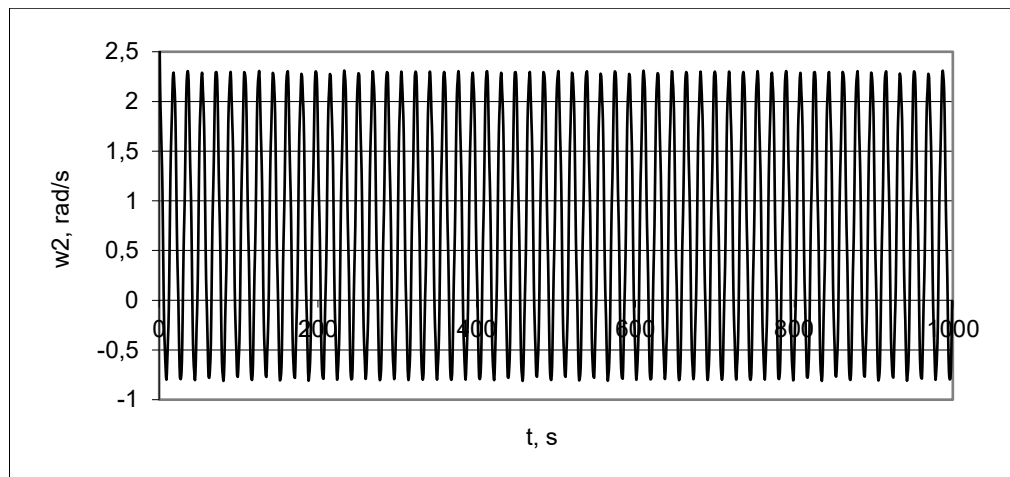


*а*

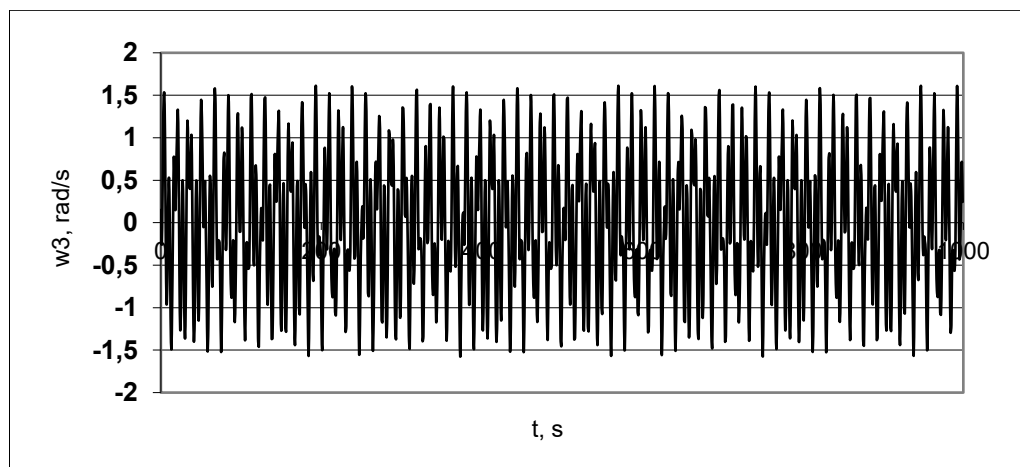
*а)* – по першій осі; *б)* – по другій осі; *в)* – по третій осі

Рисунок 5.2 – Проекції вектору кутової швидкості

при  $k_1=0.15$ ;  $k_2=1.55$ ;  $k_3=0.35$ ;  $k_4=0.75$



б



в

Закінчення рисунка 4.2

З чисельної реалізації другої чотирьохчастотної моделі можна визначити наступні характеристики гармонійного коливання системи: період за першою та третьою осями 124 секунди, а за другою – 36 секунд, найбільша амплітуда 2,3 по другій осі.

Характеристики коливання за даних значень частот також відмінні від реалізації, отриманої на рис. 2.18.

В розділі 3 проведено дослідження алгоритма Міллера 4-го порядку на даних чотирьохчастотних моделях. Оскільки обидві моделі відтворюють гармонічні коливання за різних наборів частот, отримані результати є допустимими при тестуванні системи за наявності гармонічної вібрації.

Окремо зауважимо, що збільшення кутової швидкості залежить від збільшення частот  $k_2$  та  $k_4$ . Значення  $k_1$  і  $k_3$  навпаки, є доцільним зменшувати. За рахунок таких маніпуляцій можливо досягти бажаного реалізованого порядку точності алгоритма визначення орієнтації, не змінюючи суттєво модуль проєкцій кутової швидкості. Випадок, коли одна з частот набуває нульового значення призводить до спрощення динамічних характеристик моделі, але все одно враховує наявність вібрації. Аналогічно для реалізації моделі, коли дві частоти набувають однакового значення. За рахунок послідовних поворотів, неможливо додати значення кутів як  $\psi = \varphi + \xi$  так, щоб не втратити особливостей розробленої моделі.

#### **4.3 Оптимізація алгоритма Міллера під умови руху високодинамічного об'єкта**

Алгоритми визначення орієнтації рухомого тіла, які в своїй роботі виконують додаткові обчислення всередині такту є найоптимальнішими для використання на борту високоманеврених об'єктів (також дозволяють реалізувати суттєву зміну приросту кутової швидкості на такті зйому інформації). Чисельні експерименти довели, що для чотирьохчастотної моделі (2.24)-(2.25) за деяких значень частот можливо досягти кутової швидкості, достатньої, щоб відтворити обертальний рух високодинамічного об'єкта. Саме за таких величин параметрів проводилось тестування та оптимізація алгоритму Міллера.

В розділі 3 знайдено оптимізовані значення параметрів алгоритму. Проведемо уточнення отриманих результатів для високодинамічного типу руху. Враховуючи здатність алгоритмів до зниження фактичної точності за досить невеликих значень приростів квазікоординат на такті, спираємось на частоти, які відповідають певній реалізуємій точності.

В табл. 4.2 наведено оцінки похибки дрейфа для алгоритма Міллера за класичних, модифікованих Ігнагні та власноруч модифікованих значень параметрів при кроці 0.01 секунди.

Таблиця 4.2 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритма Міллера за кількох наборів параметрів

Набори частот	Параметри за різних модифікацій		
	$\alpha = \frac{33}{80}; \beta = \frac{57}{80}$	$\alpha = \frac{36}{80}; \beta = \frac{54}{80}$	$\alpha = 0; \beta = \frac{9}{8}$
$k_1=0.01; k_2=0.035;$ $k_3=4.2; k_4=0.5$	0.6741283	0.6742805	0.6724534
$k_1=4.3; k_2=0.004;$ $k_3=0.023; k_4=0.37$	0.4176449	0.4178641	0.4152311
$k_1=0.001;$ $k_2=0.007; k_3=5.25;$ $k_4=0.75$	1.9942388	1.9952223	1.9834179
$k_1=1.15; k_2=0.001;$ $k_3=8.0; k_4=0.07$	0.9696677	0.94933608	1.1934368

Спостерігається найбільше значення дрейфу при модифікації Ігнагні (самим автором вона пропонується, як оптимізована під конічний тип руху) для трьох наборів значень з чотирьох. Для цих трьох наборів частот маємо мінімальний дрейф саме за оптимізованих параметрів моделі  $\alpha = 0; \beta = \frac{9}{8}$ . Зауважимо, що за деяких наборів параметрів, які дозволяють отримати рух високодинамічного об'єкта, точність роботи системи показує досить нестабільний результат і не рекомендована для подальших досліджень.

Результати оцінювання алгоритму для модифікованих параметрів алгоритму показані на рисунках 4.3 – 4.6 за відповідних значень частот.



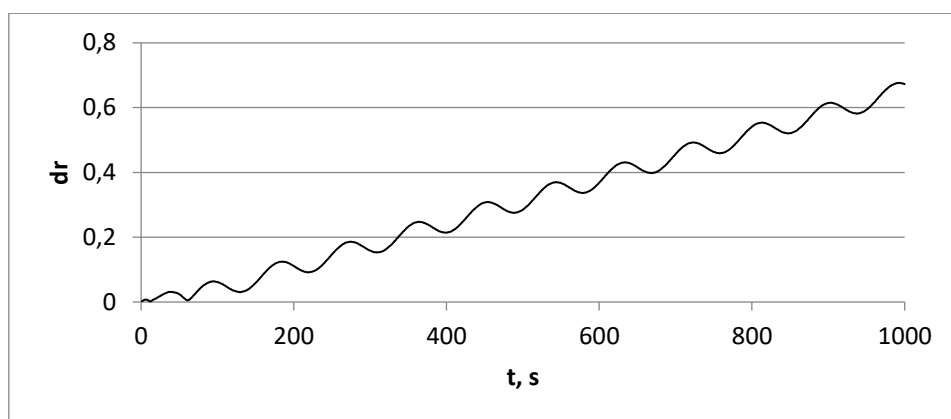


Рисунок 4.3 – Оцінка похибки дрейфу для моделі  
при  $k_1=0.01$ ;  $k_2=0.035$ ;  $k_3=4.2$ ;  $k_4=0.5$ ;  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \frac{9}{8}$

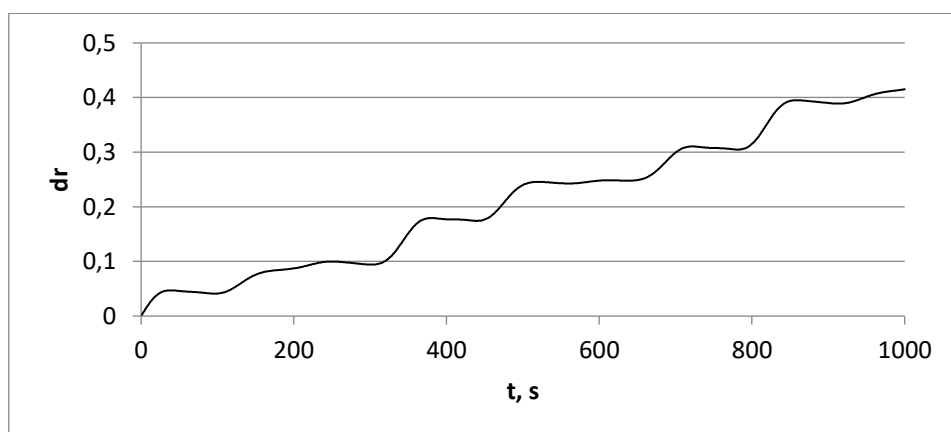


Рисунок 4.4 – Оцінка похибки дрейфу для моделі  
при  $k_1=4.3$ ;  $k_2=0.004$ ;  $k_3=0.023$ ;  $k_4=0.37$ ;  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \frac{9}{8}$

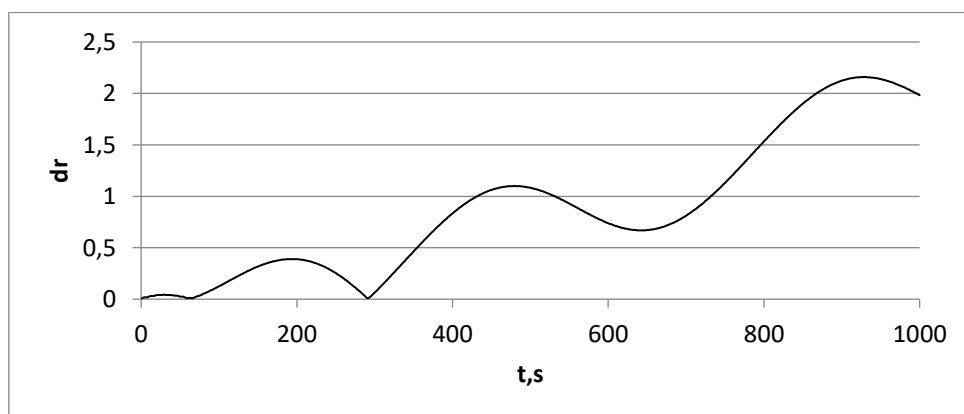


Рисунок 4.5 – Оцінка похибки дрейфу для моделі  
при  $k_1=0.001$ ;  $k_2=0.007$ ;  $k_3=5.25$ ;  $k_4=0.75$ ;  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \frac{9}{8}$

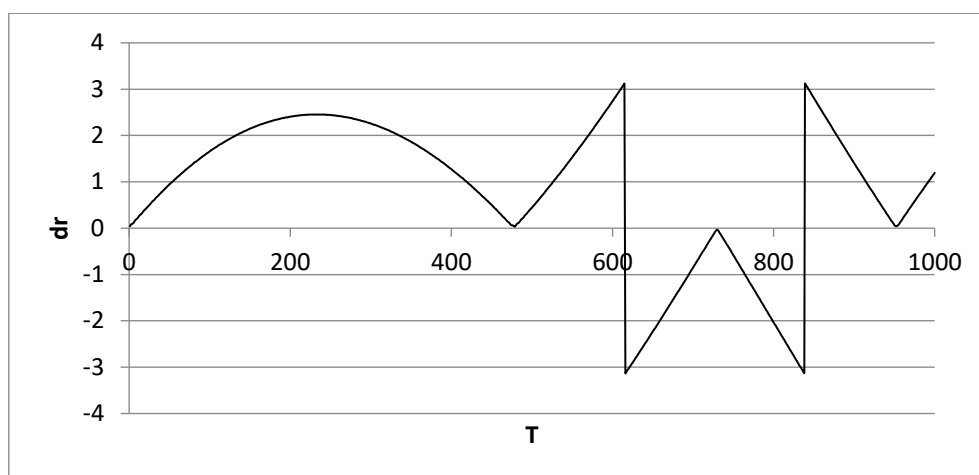


Рисунок 4.6 – Оцінка похибки дрейфу для моделі  
при  $k_1=1.15$ ;  $k_2=0.001$ ;  $k_3=8.0$ ;  $k_4=0.07$ ;  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \frac{9}{8}$

Рисунки підтверджують, що два набори частот із запропонованих спричиняють досить високий ріст дрейфу. Інші два набори частот є оптимальними для продовження роботи з підвищення точності алгоритму шляхом підбору покращених значень параметрів. Оскільки, в розділі 3 для окремих типів руху, які реалізує модель, знайдено нову умову  $\alpha + \beta = 1.127$ , її і застосовано в подальших обчисленнях. В таблиці 4.3 наведено оцінку похибки дрейфу за кількох наборів частот.

Таблиця 4.3 – Оцінка похибки дрейфу за нових значень параметрів  $\alpha$  та  $\beta$ .

Частоти	Дрейф для алгоритма Міллера при		
	$\alpha + \beta = 1.126$	$\alpha + \beta = 1.127$	$\alpha + \beta = 1.128$
$k_1=0.01$ ; $k_2=0.035$ ; $k_3=4.2$ ; $k_4=0.5$	0.6595748	0.6466961	0.6338171
$k_1=4.3$ ; $k_2=0.004$ ; $k_3=0.023$ ; $k_4=0.37$	0.3746863	0.3341408	0.2935946

Для оптимізованих під високоманеврені умови рухів алгоритм Міллера дає більшу точність при  $\alpha + \beta = 1.128$ , що відрізняється від результату, для повільніших обертальних значень. На цьому етапі важливим є уточнити конкретні значення для нових значень параметрів  $\alpha + \beta = 1.128$ . Оцінювання проводилось для всіх варіантів  $\alpha = [0; 1.128]$ . В таблиці 4.4 наведено основні результати дослідження, які показують менший дрейф.

Таблиця 4.4 – Накопичений дрейф за різних значень  $\alpha$

$\alpha$	Змінений алгоритм Міллера, дрейф (рад)
0.8	3.210E-05
0.85	2.642E-05
0.9	2.091E-05
1.0	1.210E-05
1.04	1.061E-05
1.05	1.060E-05
1.06	1.069E-05

За умови високодинамічного руху маємо, що алгоритм Міллера має найбільшу точність при  $\alpha = 1.05$ .

Графічно, цю залежність величини дрейфу від значення параметрів за умови  $\alpha + \beta = 1.128$  реалізовано на рис. 4.7

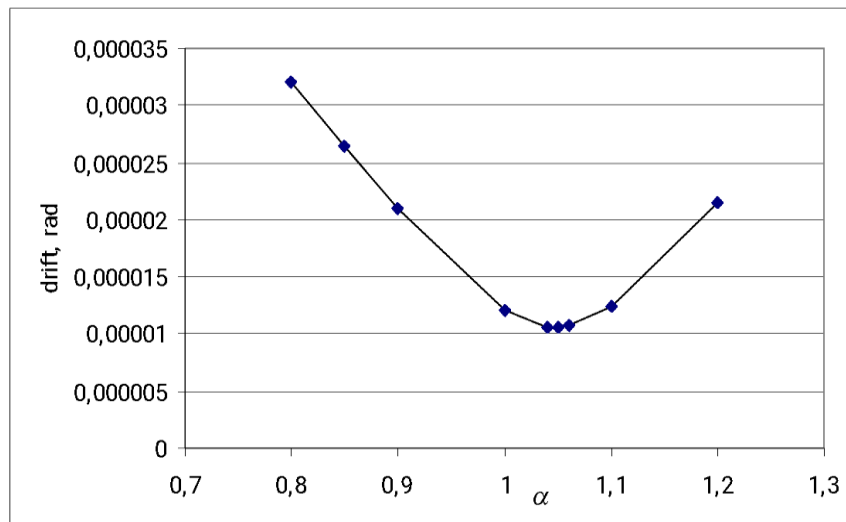


Рисунок 4.7 – Оцінка накопиченого дрейфу для зміненого алгоритма Міллера в залежності від коефіцієнта  $\alpha$

Слід відзначити, що даний набір оптимізованих параметрів дає більшу точність лише на конкретній моделі за певних значень частот. Тобто не може бути універсальним і потребує дослідження для кожної обраної реалізації руху.

#### 4.4 Висновки за розділом

В даному розділі наведено актуальність дослідження об'єктів, кутовий рух яких має досить високу динаміку. Сформовано точне визначення таких механічних тіл для зручності їх подальшого аналізу. Описано основні проблеми, які виникають при розробці навігаційних систем для таких пристроїв, а також методи коригування цих проблем.

Показано, що в обох чотирьохчастотних моделях враховано наявність гармонічних вібрацій на борту рухомого об'єкта та визначно, що за різних значень частот характеристики коливань будуть різними.

Доведено, що одна з чотирьохчастотних розроблених моделей може відтворювати потрібну динаміку за коректно підібраних параметрів, в тому числі, наведено рекомендації і залежності частот від значень модуля кутової швидкості.

На новій кватерніонній моделі, за значень коефіцієнтів, які реалізують високодинамічний рух, отримано нову оптимізацію алгоритму Міллера. Показано, що модифіковані параметри дозволяють отримати менші значення дрейфу в порівнянні з класичними для більшості реалізацій. Модифікація Ігнагні за таких значень дають найгірший результат і не є бажаними при розробці навігаційної системи об'єктів з деякими типами руху.

## РОЗДІЛ 5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ЕТАЛОННИХ МОДЕЛЕЙ

Дослідження властивостей алгоритмів за певних умов, а також виявлення частинних випадків руху при вдало підібраних параметрах є важливим етапом розробки та відпрацювання тестових рухів. Для повноти та наочності, результати мають бути відображені у вигляді графіків залежностей складових від часу та одна від одної. Доцільно для чисельної реалізації розроблених моделей використання спеціально спроектованого програмного застосунку. Він має враховувати всі особливості кватерніонного відтворення кутового руху і можливості змінювати початкові умови.

Всім висунутим вимогам до чисельної реалізації відповідає розроблена засобами об'єктно-орієнтованого програмування комп'ютерна програма, написана мовою C++ [75-76]. Призначена вона для отримання точносних характеристик нових еталонних моделей тестового обертального руху і відпрацювання на них алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації.

Оскільки алгоритми, які реалізуються в автономному обчислювачі для визначення поточної орієнтації пристрою, базуються на використанні інформації з датчиків кутової швидкості на обраних інтервалах часу, доцільним є отримати чисельно саме цю інформацію. Для багатокрокових алгоритмів важливо правильно підібрати методику обчислення параметрів кутової орієнтації на кількох перших тактах (виконати процедуру «розгону»). Слід відзначити, що прирівнювання цих даних до нуля може спричинити виникнення додаткової обчислювальної похибки, як і ситуація, коли дані на кількох перших кроках не задано взагалі.

Тестування алгоритмів відбувається на розроблених неперервних еталонних моделях, які мають різні характеристики обертального руху твердого тіла і є точними розв'язками відповідних рівнянь кінематики. При розробці програми, для кожної моделі створюється окремий файл. Аналітичні представлення кватерніона орієнтації і проекцій вектора кутової швидкості,

отримуються засобами інших програмних пакетів або обчислюються вручну. Оцінка точності роботи алгоритмів в застосунку відбувається шляхом обчислення похибки дрейфа (накопичений малий кут повороту обчисленого базису відносно його істинного положення, що задається еталонною моделлю). Результатом роботи програми є чисельні значення, отримані для проєкцій вектора кутової швидкості, значень квазікоординат, компонент модельного еталонного кватерніона орієнтації, а також обчисленого кватерніона орієнтації за обраним алгоритмом на кожному такті обчислень. Далі, розраховується оцінка похибки накопиченого дрейфу, яка покладається на визначені кутові положення еталонного та обчисленого кватерніонів. Отримані в ході розрахунків дані записуються до окремого Excel-файлу, а потім на їх основі створюються необхідні графіки залежностей відповідних параметрів від часу.

Структура програми основана на окремих файлах для кожної складової (для кожної моделі та кожного алгоритма), які пов'язані між собою класовою системою (наявність базового класу з характеристиками, спільними для всіх моделей). На рис. 5.1 наведена архітектура окремих складових розробленої програми.

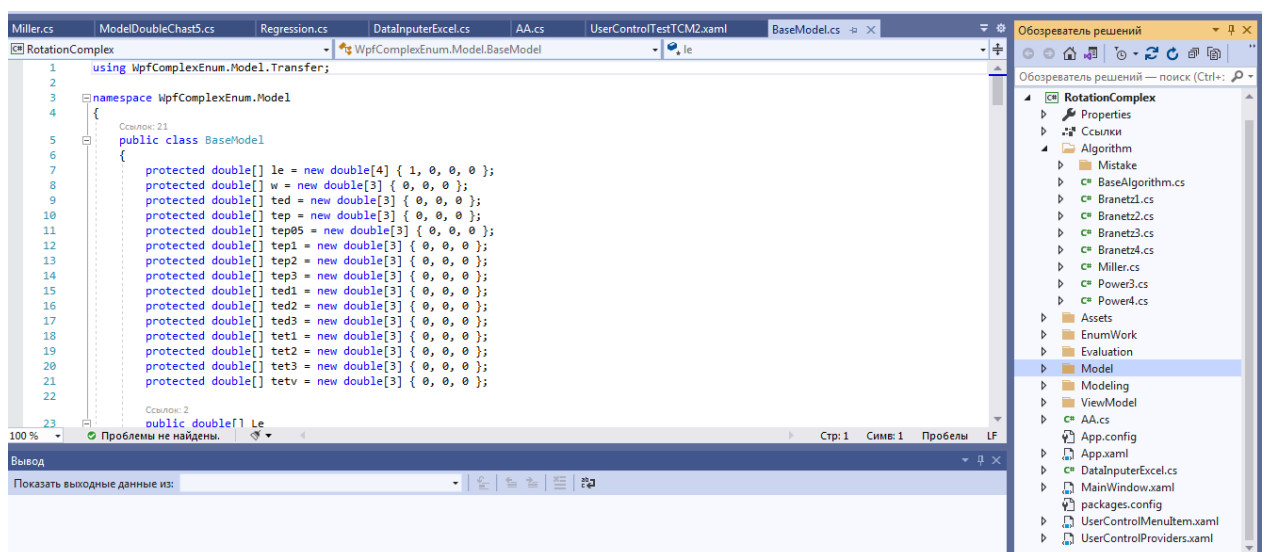


Рисунок 5.1 – Структура розробленої програми

Для розрахунків програма використовує окремі файли на кожен з запрограмованих алгоритмів орієнтації (дослідження проводились для алгоритма Бранця 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків точності, алгоритма Міллера та ступеневих алгоритмів). Зауважимо, що ступеневі алгоритми при тестуванні давали результат, гірший за інші алгоритми того самого порядку, але мають більше математичне навантаження, а тому не рекомендовані для рухів, яким відповідають розроблені моделі.

Для алгоритмів, які використовують дані всередині такту, обчислення значень квазікоординат відбувається в класі кожної з запрограмованих моделей і записуються у вигляді відповідних аналітичних виразів.

Користувач за допомогою інтерфейсу має можливість обрати конкретну еталонну модель, задати чисельні значення параметрів цієї моделі, час розрахунку, такт зйому інформації, крок запису даних до файлу та алгоритм, який на цій моделі буде протестовано (рис. 5.2).

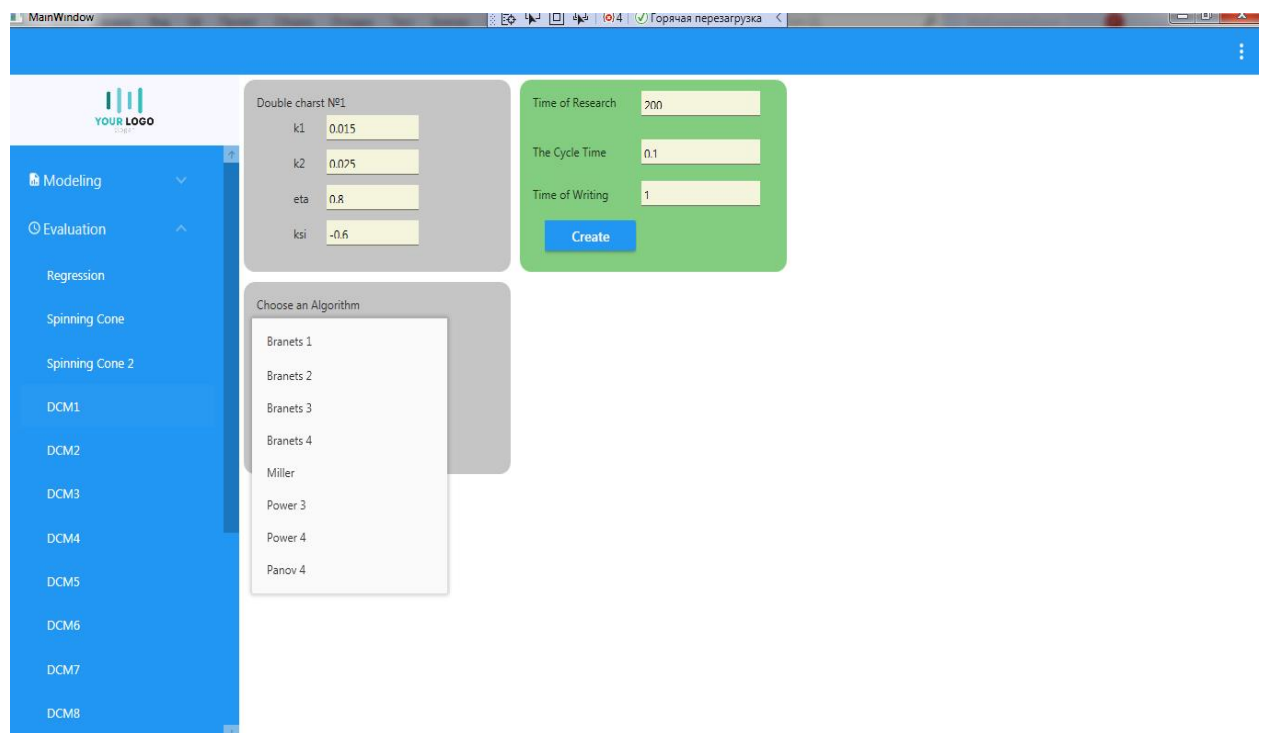


Рисунок 5.2 - Інтерфейс програми



«Modeling» – вкладка з переліком всіх моделей, які додано до застосунку. Вона дозволяє користувачу обрати відповідну модель, задати початкові умови та отримати чисельну реалізацію у вигляді значень компонент кватерніону орієнтації, проекцій вектора кутової швидкості та квазікоординат на кожному обраному такті запису даних (може бути більшим за такт інтегрування).

«Evaluation» – вкладка з назвами всіх запрограмованих моделей, яка дозволяє проводити тестування обраного алгоритма визначення орієнтації і має вихідними даними обчислені значення похибки дрейфа на кожному такті зйому інформації.

Один з класів програми звертається до Excel.exe, щоб створити окремий Excel-файл, записати до нього дані та автоматично створити в ньому відповідні графіки. При кожному запуску розрахунків створюється новий Excel-файл, який можна зберігати для подальшого аналізу під зручною назвою. Приклад такого файлу наведено на рис. 5.3

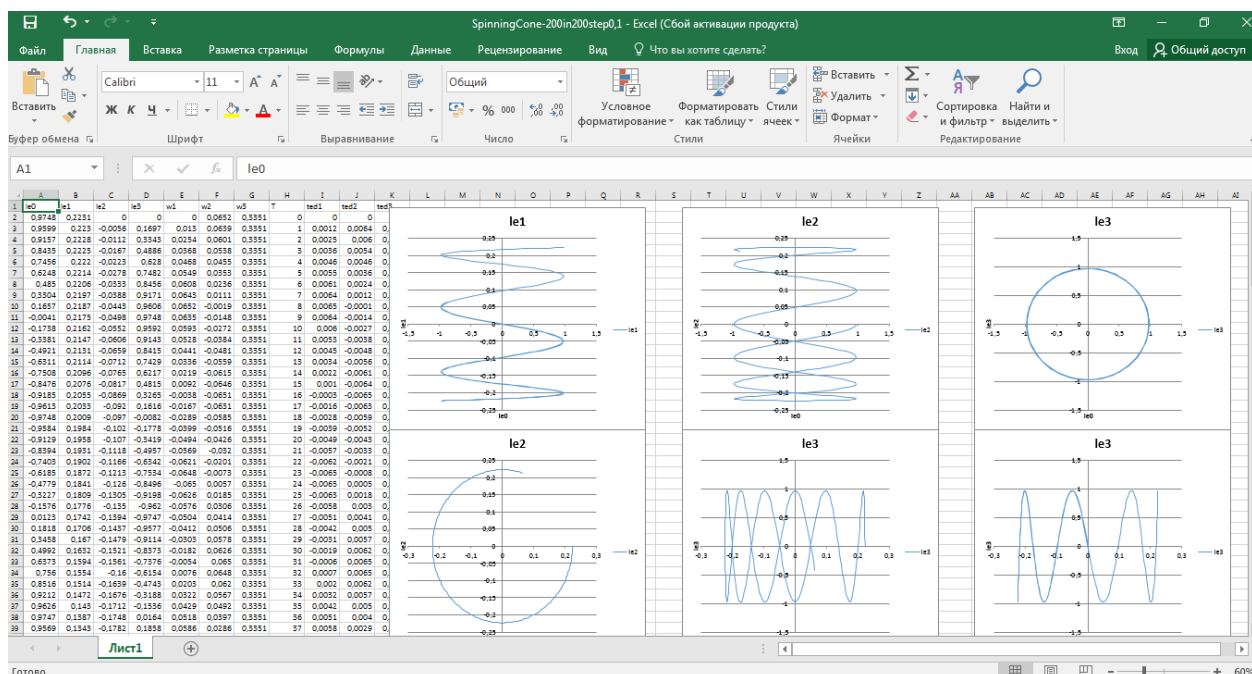


Рисунок 5.3 – Excel-файл для чисельної реалізації кватерніонної моделі

Логічна структура програми представлена у вигляді схеми на рис.5.4.

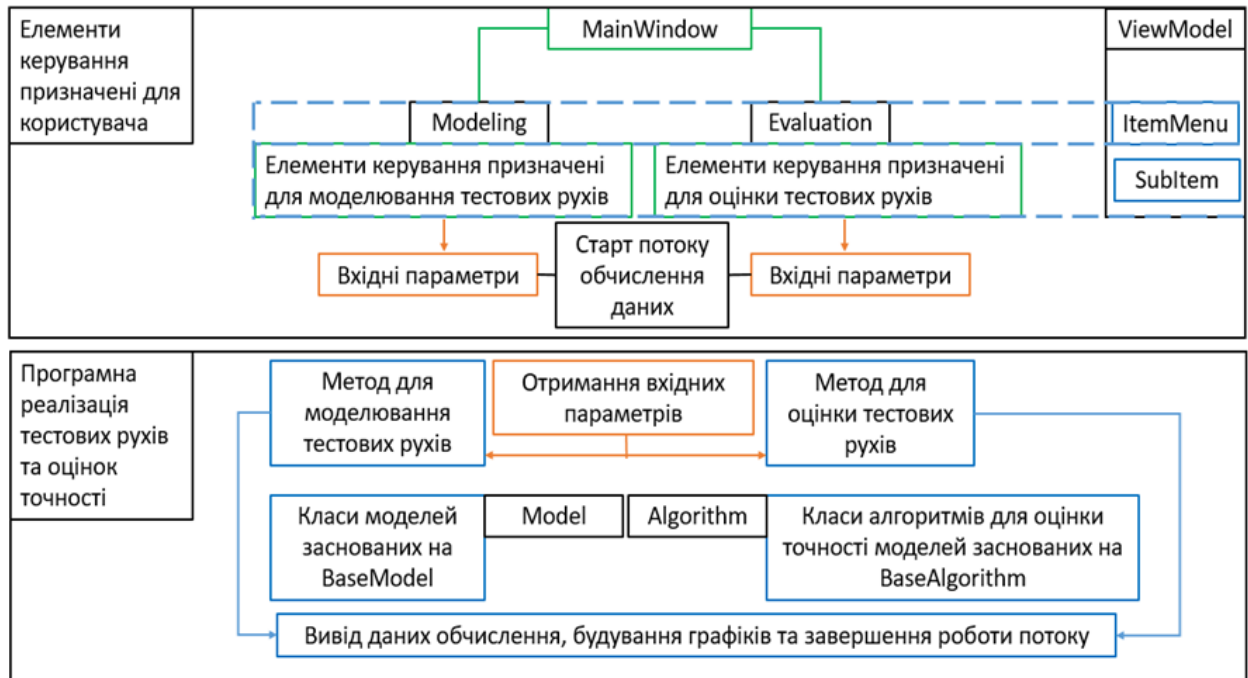


Рисунок 5.4 – Структура розробленого програмного застосунку.

Дана програма створювалась як додаток Windows Forms (.NetFramework) з відповідним інтерфейсом користувача. За замовчуванням для кожної моделі автором програми вже внесені початкові дані, які є оптимальними при чисельній реалізації тестових рухів. За необхідності, користувач може їх змінити перед запуском обчислення.

В програмі обов'язково відбувається перевірка введених даних:

- на наявність пустих полів;
- чи є введені символи цифрами;
- дробові числа вводяться лише через крапку;
- час розрахунку, такт обчислення та такт запису не можуть бути меншими чи рівними нулю;
- час розрахунку має бути більшим за такт обчислення та такт запису;
- такт запису не має бути меншим за такт обчислення.

Розроблений програмний застосунок не вимагає спеціальної установки. Щоб встановити програму та почати роботу достатньо розпакувати архів з

програмним засобом на будь-якому комп'ютері (ноутбуці, планшеті тощо). Для запуску програми необхідно мати Visual Studio, не нижче версії 3.0 з підтримкою платформи .NET та табличним процесором Microsoft Office Excel (що входить до складу).

При кожному запуску програми відкривається інтерфейс (рис. 5.3).

Користувач має змогу обрати модель та алгоритм із наявного списку, змінити значення для параметрів моделі, час моделювання, крок зйому інформації та крок запису в файл. Тестування довело, що програма здатна реалізувати чисельне моделювання на інтервалі рівному одному року безперервної роботи при достатньо невеликих значеннях кроку інтегрування  $\Delta t = 0.0000001$  секунди та будь-яких значеннях частот (якщо вони не порушують наведених вище вимог).

### **5.1 Висновки за розділом**

Розроблено програмний застосунок, який дозволяє проводити чисельні експерименти на еталонних кватерніонних моделях. Це сприяє оптимізації процесу досліджень властивостей розроблених моделей, порівняння їх з класичними випадками руху, а також дослідженню роботи поширених алгоритмів визначення орієнтації.

Алгоритм роботи програми базується на розрахунку за заданими для кожної моделі аналітичними формулами: компонент кватерніона орієнтації, проекцій вектору кутової швидкості, квазікоординат та похибки дрейфа на кожному такті зчитування інформації. Результати моделювання представляються у вигляді графіків залежностей параметрів орієнтації від часу. Це дозволяє користувачу візуально оцінити поведінку моделі при заданих параметрах та порівняти похибку дрейфа для різних алгоритмів. Завдяки цьому користувач може обрати кращий алгоритм для подальших досліджень об'єкта з певними характеристиками.

Програма написана засобами мови C++. Вхідною інформацією є аналітичні вирази для квазікоординат, проекцій кутової швидкості та

квазікоординат. Для чисельної реалізації задається час роботи системи, крок інтегрування, крок запису даних до файлу, значення частот та параметрів (з врахуванням існуючих обмежень).

Розширення можливостей застосунку триває і пов'язане з дослідженнями, які виконуються в роботі. На дану програму отримано два свідоцтва про авторське право.

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі запропоновано метод підвищення обчислювальної точності БІНС шляхом оптимізації певних алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації. Для моделювання відповідних процесів автономного обчислювача та тестування алгоритмів розширено групу еталонних моделей.

1 Проведено аналіз інерціальних навігаційних систем, в тому числі, виявлено актуальні на сьогодні напрямки розвитку БІНС. Описано проблеми, які потребують додаткової уваги. Такими є підвищення точності визначення навігаційних параметрів, компенсація інструментальних помилок, коригування обчислювальних похибок. Розглянуто основні типи тестових рухів, на яких прийнято проводити підбір орієнтаційного алгоритму та параметрів для його реалізації.

2 Сформовано задачі для дослідження в даній роботі та методи їх розв'язку. Детально описано процедуру розробки тестових рухів, які є еталонними моделями обертання. Розроблено сім нових неперервних моделей, що дозволяють реалізувати різні типи руху, в тому числі відмінні від кінчного кочення або регулярної прецесії. Чотири моделі є двохчастотними, тобто кутовий рух вони відтворюють за умови наявності двох ступенів вільності в приладу, що обертається. Для цих моделей розв'язано систему динамічних рівнянь Ейлера, що дозволило знайти параметри, за яких модельований об'єкт має вільний рух (частинні випадки реалізації). Дві моделі імітують складний рух, оскільки мають чотири ступені вільності (чотири різні кути обертання, за умови, що один з кутів виконує роль випадкового фактора). Відповідні кватерніонні моделі названі чотирьохчастотними. Для однієї з цих моделей досліджено випадок, коли значення частот в ній накладаються (дві різні частоти приймають однакове значення, але обертання реалізується в протилежному напрямку). За такого руху модель вироджується в трьохчастотну. Реалізація моделей доводить, що в частинних випадках може

утворитись кілька трьохчастотних моделей – різних між собою за відтворюваними характеристиками. Важливим при дослідженні таких рухів є неможливість коректно реалізувати їх шляхом лише відповідної чисельної реалізації для чотирьохчастотної моделі. Для коректного моделювання руху спочатку необхідно отримати вирази для квазікоординат та проекцій кутової швидкості в аналітичному вигляді. За чисельної реалізації всіх моделей зауважимо, збільшення частот призводить до зростання модуля кутової швидкості.

3 Розглянуто основні групи навігаційних алгоритмів БІНС. Покладаючись на їх переваги та недоліки обрано два алгоритми для подальших досліджень. Показано, що алгоритми 4-го порядку дають достатню точність при відносному завантаженню обчислювача. Порівняно між собою, через оцінку похибки дрейфу, точність роботи алгоритмів Бранця та Міллера відповідного математичного порядку на всіх розроблених моделях. Отримано, що алгоритм Міллера дає кращу точність за однакових значень частот. Доведено, що саме алгоритм Міллера є гарним для подальших досліджень. Для нього було отримано кілька наборів оптимізованих параметрів. Деякі з них є універсальними за будь-яких умов реалізації моделі, а деякі адаптовані під конкретні типи кутового руху. Додатково відпрацьовано методику визначення реалізованого (фактичного) порядку обраних алгоритмів. Показано, що найкращими умовами є такі, коли фактичний та математичний порядок алгоритму співпадають, оскільки так стає можливим досягти потрібної точності за невеликих навантажень на обчислювач. Відображено зв'язок фактичного порядку з кутовою швидкістю, яку реалізує модель, та з величиною такту квантування.

4 Розглянуто характеристики об'єктів, які прийнято називати високодинамічними, їх особливості та проблеми, які виникають при реалізації в навігаційних системах на відповідних пристроях. Для даної роботи сформовано чітке визначення високоманеврених об'єктів. Доведено, що одна з чотирьохчастотних моделей добре відтворює такий тип руху за певним

чином заданих частот (частинний випадок чисельної реалізації). Проведено додаткову оптимізацію алгоритму Міллера для таких характеристик.

Для обох чотирьохчастотних моделей проведено оцінку вібраційного оточення, яке вони включають в себе, визначено основні характеристики коливань. Для другої чотирьохчастотної моделі отримано ще один набір оптимізованих параметрів алгоритма Міллера, який дозволяє визначати орієнтацію об'єкта за деяких значень частот.

5 Для проведення чисельних експериментів розроблено спеціальний програмний застосунок. Використовуючи отримані при розробці моделей аналітичні вирази для кватерніонів, проекцій кутової швидкості та квазікоординат, програма отримує конкретні числові значення. Виконується перевірка на коректність для вхідних даних: час дослідження, крок зйому інформації та крок запису даних до файлу. Всі отримані результати записуються до окремого Excel-файлу, що робить їх зручними для подальшого використання, а також для автоматичної побудови відповідних графіків.

На основі отриманих в роботі результатів можливо оптимізувати процес оцінювання та підбору кватерніонних алгоритмів для реалізації через використання розроблених моделей та програмного додатку. Підвищено точність алгоритму Міллера для значної групи відтворюваних рухів за умови, що він реалізується на космічному об'єкті (без врахування додаткового впливу, яке наявне на поверхні Землі).

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

- 1 O'Donnell C. F. Inertial navigation. *Journal of the Franklin Institute*. USA, 1958. Vol. 266. No. 4. P. 257-277.
- 2 Bellman R. E. An Introduction to the theory of dynamic programming. *RAND Corporation*. Santa Monica, USA, 1953. 23 p.
- 3 Beckenbach E.F., Bellman R. E. An introduction to inequalities. *Mathematical Association of America*. Washington, USA, 1961. 142 p.
- 4 Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем. *Изд-во АН УССР*. Киев, 1952. 432 с.
- 5 Ишлинский, А. Ю. Некоторые вопросы теории автономного управления баллистическими ракетами. Киев: Тип. МВД УССР, 1960. 142 с.
- 6 Ишлинский, А. Ю. Полная компенсация внешних возмущений, вызванных маневрированием в гироскопических системах. *Изд-во АН УССР*. Киев, 1959. С. 12-24.
- 7 Einrichtung zum Messen von Wegstrecken: Patent № 661882 Deutsch, K1.42. Siemens Apparate und Maschinen G.m.b.H., Berlin, 02.06.1938.
- 8 Schuler M., Slater J.M. The Disturbance of Pendulum and Gyroscopic Apparatus by the Acceleration of the Vehicle. *Navigation*. 1967. Vol. 14. P. 26-32.
- 9 Schuler M. Die Störung von Pendel und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges. *Physikalische Zeitschrift*. 1923. Vol. 24. No. 16. P. 344–350.
- 10 Draper C. S., McKay W., Lees S. Instrument Engineering. *McGraw-Hill Book Company, Inc.* New York, 1952. 269 p.
- 11 Draper C.S., Wrigley W., Grohe L.R. The floating integrating gyro and its application to geometrical stabilization problems on moving base. *Institute of the Aeronautical Sciences*. New York, 1955. Vol. 15. P. 46.
- 12 Duncan, R. C., Gunnensen Alf S. JR. Inertial guidance, navigation, and control systems. *Journal of Spacecraft and Rockets*. USA, 1964. Vol. 1. No. 6. P. 577–587.



- 13 Savage Paul G. Blazing gyros: The evolution of strapdown inertial navigation technology for aircraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Reston, 2013. Vol. 36. No. 3. P. 637–655.
- 14 Zhang Y., Yu F., Gao W., Wang Y. An improved strapdown inertial navigation system initial alignment algorithm for unmanned vehicles. *Sensors*. Basel, Switzerland, 2018. Vol. 18. No. 10. P. 3297.
- 15 Menna B., Villar S., Acosta G. Navigation System for MACÁBOT an Autonomous Surface Vehicles Using GPS Aided Strapdown Inertial Navigation System. *IEEE Latin America Transactions*. San Luis Potosi Mexico, 2019. Vol. 17. No. 6. P. 1009-1019.
- 16 Wang Q., Yang C. S., Wu S. E., Wang Y. Application of gravity passive aided strapdown inertial navigation in underwater vehicles. *International Journal of Sensor Networks*. University of Malaya, Malaysia, 2020. Vol. 32. No. 4. P. 209-217.
- 17 Chen H., Luo Y., Tang G., Sun T., Huang H. Positioning Method of Underwater Cleaning Robot Based on Vision and Inertial Navigation. *The 31st International Ocean and Polar Engineering Conference*. Rhodes, Greece, June 20- 25 2021. Rhodes, 2021
- 18 Wu G., Fang X., Song Y., Liang M., Chen N. Study on the Shearer Attitude Sensing Error Compensation Method Based on Strapdown Inertial Navigation System. *Applied Sciences*. India, 2022. Vol. 12. No. 21. P. 10848.
- 19 Shen Y., Wang P., Zheng W., Ji X. Jiang H., Wu M. Error compensation of strapdown inertial navigation system for the boom-type roadheader under complex vibration. *Axioms*. Basel, Switzerland, 2021. Vol. 10. No. 3. P. 224.
- 20 Reinstein M., Hoffmann M. Dead reckoning in a dynamic quadruped robot: Inertial navigation system aided by a legged odometer. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Shanghai, China, 9-13 May 2011. Shanghai, 2011. P. 617-624.
- 21 Rudyk A. V., Semenov A. O., Kryvinska N., Semenova O. O., Kvasnikov V. P., Safonyk A. P. Strapdown inertial navigation systems for

positioning mobile robots — mems gyroscopes random errors analysis using allan variance method. *Sensors*. Basel, Switzerland, 2020. Vol. 20. No. 17. P. 4841.

22 Liu F., Su Z., Qing Li Q., Zhao H. Angular motion decoupling and attitude determination based on high dynamic gyro. *IEEE Access*. USA, 2019. Vol. 7. P. 14308–14322.

23 De Celis R., Cadarso L., Fuentes M. A simplified computational method for two-body high spinning rate vehicles. *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 105. P. 106050.

24 Zhao H., Su Z., Li Q., Liu F., Liu N. Real-time attitude propagation algorithm for high spinning flying bodies. *Measurement*. Amsterdam, Netherlands, 2021. Vol. 177. P. 109260.

25 Zhou Z., An L., Fu J., Wang L. Aerodynamic parameters identification for high-spinning projectile based on geomagnetic data. *40th Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE. Shanghai, China, 26-28 July 2021. Shanghai, 2021. P. 1236-1242.

26 Waldmann J. Sculling and scrolling effects on the performance of multirate terrestrial strapdown navigation algorithms. *Proceedings of the 17th International Congress of Mechanical Engineering*. (São Paulo, November 10-14, 2003). São Paulo, Brazil, 2003.

27 Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design Part 2: Velocity and position algorithms. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Reston, 1998. Vol. 21. No.2. P.208-221.

28 Litmanovich Yu. A. Use of Angular Rate Multiple Integrals as Input Signals for Strapdown Attitude Algorithms. *Proceedings of Symposium Gyro Technology*. Institut A fur Mechanik, Universitat Stuttgart, Germany, 1997. P. 20.0– 20.9.

29 Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Reston, 1983. Vol. 6, No. 4. P. 287-291.

30 Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Reston, 1990. Vol. 13, No. 2.

P. 363– 369.

31 Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. New Procedure for Deriving Optimized Strapdown Attitude Algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Reston, 1997. Vol. 20. No. 4. P. 673–680.

32 Лазарєв, Ю. Ф. Прикладні методи дослідження алгоритмів систем орієнтації: метод. посіб. *Національний технічний університет України «КПІ»*. Київ, 2015. 26 с.

33 Панов А.П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела. *Кибернетика и вычислительная техника*. Киев, 1988. Вып. 77. С. 47–52.

34 Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела. *Кибернетика и вычислительная техника*. Киев, 1987. Вып. 73. С. 3–9.

35 Панов А.П. Методы 6-го порядку точности для вычисления координат вектора ориентации по квазикоординатам. *Кибернетика и вычислительная техника*. Киев, 1986. Вып. 69. С. 47 – 52.

36 Панов А.П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела. *Механика гироскопических систем*. Киев, 1984. Вып. 3. С. 105–112.

37 Лазарєв Ю. Ф., Бобровицька Г. Я. Алгоритми метода Пікара чисельного інтегрування кінематичних рівнянь у кватерніонах. *Наукові вісті національного технічного університету України «КПІ»*. Київ, 2006. № 6(50). С. 113–119

38 Roberson R. E. Generalized correction of numerical error in kinematical differential equations based on Euler-Rodrigues Paranders. *Acta Mechanica*. Vienna, 1984. Vol. 54. P. 127–132.

39 Roberson R. E. Generalized correction of numerical error in kinematical Differential Equations Based on Euler Normalized Paranders. *Acta Mechanica*. Vienna, 1986. С. 133-138.

40 Roberson R. E. Correction of numerical errors in kinematical differential equations when one direction cosine is known. *computer methods in applied mechanics and engineering*. 1984. Vol. 46. № 3. P. 307–312.

41 Успенский В. Б., Асютин А. Д. Разработка имитационной модели движения инерциального блока на двухосном поворотном столе. *Вестник Национального технического университета «ХПИ»*. Системный анализ, управление и информационные технологии. Харьков, 2010. № 9. С. 107–113.

42 Savage P.G. Strapdown System Performance Analysis. *Advances In Navigation Sensors and Integration Technology*. Minnesota, USA, 2004. P. 4.1–4.33.

43 Savage P. G. Blazing gyros – the evolution of strapdown inertial navigation technology for aircraft. *Journal of Guidance, Control, & Dynamics*. Reston, 2013. Vol. 36. Num. 3. P. 637–655.

44 Savage P. G. Improved strapdown inertial system calibration procedures part 1 – procedures and accuracy analysis. *Maple Plain: Strapdown Associates, Inc.* USA, 2017. 70 p.

45 Плаксій Ю.А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2015. № 41. С. 111–118.

46 Плаксій Ю. А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2016. № 6. С. 96–104.

47 Capriglione D., Carratu M., Catelani M., Ciani L., Patrizi G., Singuaroli R., Sommella P. Experimental analysis of IMU under vibration. *16th IMEKO TC10 Conference: Testing, Diagnostics & Inspection as a comprehensive value chain for Quality & Safety*. Berlin, Germany, September 3-4, 2019. Berlin, 2019. P. 26-31.

48 Погорелов С. Ю., Счастливец К. Ю. Определение допустимых

амплитуд вібрацій для лазерної безплатформенної інерціальної навігаційної системи. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Динаміка та міцність машин. Харків, 2003. № 12. С. 99-103.

49 Lin Wang, Wenqi Wu, Geng Li, Xianfei Pan and Ruihang Yu Ring Laser Gyro G-Sensitive Misalignment Calibration in Linear Vibration Environments, *Sensors*. Basel, Switzerland, 2018. Vol. 18. No. 2. P. 601.

50 Xiao-Gang Z., Ji-Wen T., Bin S., Qing-Kai L. Application of a new denoising algorithm in hemispherical resonant gyro vibration signal processing. *3rd IEEE International Conference on Control Science and Systems Engineering (ICCSSE)*. (Beijing, 17-19 August 2017). Beijing, China, 2017. P. 535-538

51 Yue T., Pan X., Yang Y., Zhang H. A new method to improve the navigation performance of SINS in vibration environment. *IEEE Sensors Journal*. 2020. Vol. 21. No. 1. P. 438–446.

52 Kedadouche M., Yulan S., Liu Z., Thomas M., Charland-Arcand G., Beck A., Design of a vibration isolator for the inertial navigation system of an autopilot dedicated to the operation of light drones. *9th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE)*. Budapest, Hungary, 10-13 July 2018. Budapest, 2018. P. 73–78.

53 Lai J., Lv P., Liu J., Jiang B. Noncommutativity error analysis of strapdown inertial navigation system under the vibration in UAVs. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2012. Vol. 9. No. 4. P. 136.

54 Jinglong W., Bin Zh. Target Method Approaching Green Computing for Active Vibration Control in the Strapdown Inertial Navigation System. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*. 2018. Vol. 34. No. 2. P. 1003–1012.

55 Wang L., Wu W., Pan X. RLG SINS dynamic error compensation under vibration environments. *Gyroscopy and navigation*. USA, 2018. Vol. 9. P. 35–44.

56 Varanis M., Silva A., Mereles A. MEMS accelerometers for mechanical vibrations analysis: a comprehensive review with applications. *Society of Mechanical Sciences and Engineering*. Brazilian, 2018. Vol. 40. No. 527.

P. 1– 18.

57 Farrell J. A., Silva F. O., Rahman F., Wendel J. Inertial measurement unit error modeling tutorial: Inertial navigation system state estimation with real-time sensor calibration. *IEEE Control Systems Magazine*. USA, 2022. Vol. 42. №. 6. P. 40-66.

58 Litmanovich, Yu. A., Lesyuchevsky V. M., Gusinsky V. Z. Two new classes of strapdown navigation algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Reston, 2000. Vol. 23. Num. 1. P. 34-44.

59 Захарін Ф. М., Синєглазов В. М., Філяшкін М. К. Алгоритмічне забезпечення інерціально-супутникових систем навігації: монографія. Вид-во Національного авіаційного університету «НАУ-друк». Київ. 2011. 320 с.

60 Xu Bo., Wang L., Li Sh., Zhang J. A novel calibration method of SINS/DVL integration navigation system based on quaternion. *IEEE Sensors Journal*. USA, 2020. Vol. 20. Num. 16. P. 9567-9580.

61 Dell'Olio F., Tatoli T., Ciminelli C., Armenise M. N. Recent advances in miniaturized optical gyroscopes. *Journal of the European optical society-Rapid publications*. Italy, 2014. Vol. 9. P. 14013.1-14013.14.

62 Mark, J. G., Tazartes D. A. Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Reston, 2001. Vol. 24. Num. 4. P. 641-647.

63 Багмут И. А. К вопросу о повышении точности оценивания инструментальных погрешностей инерциального блока интегрированной навигационной системы. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Харків, 2012. № 67. С. 14–18.

64 Успенский В. Б., Асютин А. Д. Настройка фильтра Калмана в задаче комплексирования информации в интегрированной навигационной системе. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Харків, 2010. № 67. С. 51–57

65 Yan M., Zengcai W. Precise shearer positioning technology using shearer motion constraint and magnetometer aided SINS. *Mathematical Problems*

*in Engineering*. 2021. Vol. 2021. Num. 1. P 1679014.

66 Titterton D., Weston J. Strapdown Inertial Navigation Technology. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics*, second edition. Reston, USA, 2004. 558 p.

67 Даниленко, А. В., Павленко Л. Ю., Сапегін О. М. Застосування високоточних алгоритмів орієнтації. *Погляд у майбутнє приладобудування: XV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених*. м. Київ, 14-15 червня 2022 р. Київ, 2022. С. 12-15.

68 Сапегін, О. М. Модель конічного дрейфу безплатформних інерціальних систем орієнтації. *Приладобудування: стан і перспективи*. Матеріали: XXII Міжнародної науково-технічної конференції. м. Київ, 16–17 травня 2023 р. Київ, 2023.

69 Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A., Breslavsky D. V., Naumenko K. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems. *Continuum mechanics and thermodynamics*. 2021. Vol. 33. P. 1141–1160.

70 Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Нові двочастотні еталонні моделі обертання твердого тіла для точного аналізу орієнтації БІНС. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2018. №27 (1303). С.93–99.

71 Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Аналіз точності алгоритма орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі обертання твердого тіла. *Вісник Національного технічного «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2019. №22 (1347). С.82–88.

72 Гомозкова І. О. Трьохчастотні моделі для визначення орієнтації твердого тіла з урахуванням вібраційного оточення. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Динаміка та міцність машин. Харків, 2021. №2. С. 29–36

73 Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 12.0, Champaign, IL (2019).

74 Андреев Ю. М., Ларин А. А., Интерактивный модуль расчетов виброизоляции приборов для ССКА КиДиМ. *Новітні технології, обладнання та системи управління у будівництві*. Кол. моногр. Заг. ред. Сопов В. П. Харків, 2016. С. 110-116.

75 Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Комп'ютерна програма для чисельної реалізації еталонних моделей та тестування алгоритмів визначення орієнтації «Точносний аналіз алгоритмів орієнтації на двохчастотних еталонних моделях тестових рухів твердого тіла». Свідоцтво №123049 від 18.01.2024 про реєстрацію авторського права на твір.

76 Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А., Трунов О. М. Комп'ютерна програма для чисельної реалізації еталонних моделей «Моделювання обертального руху твердого тіла на основі аналітичних представлень кватерніона орієнтації». Свідоцтво №101991 від 22.01.2021 про реєстрацію авторського права на твір.



## ДОДАТОК А

### СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати:*

1. Гомозкова І. О. Трьохчастотні моделі для визначення орієнтації твердого тіла з урахуванням вібраційного оточення. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ», Серія: Динаміка та міцність машин*. Харків, 2021. №2. С. 29–36. (Б).
2. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Аналіз точності алгоритма орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі обертання твердого тіла. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ», Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків, 2019. №22 (1347). С.82–88. (Б)
3. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Нові двочастотні еталонні моделі обертання твердого тіла для точного аналізу орієнтації БІНС. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ», Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків, 2018. №27 (1303). С.93–99. (Б).
4. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Комп'ютерна програма для чисельної реалізації еталонних моделей та тестування алгоритмів визначення орієнтації «Точносний аналіз алгоритмів орієнтації на двохчастотних еталонних моделях тестових рухів твердого тіла». Свідоцтво №123049 від 18.01.2024 про реєстрацію авторського права на твір.
5. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А., Трунов О. М. Комп'ютерна програма для чисельної реалізації еталонних моделей «Моделювання обертального руху твердого тіла на основі аналітичних представлень кватерніона орієнтації». Свідоцтво №101991 від 22.01.2021 про реєстрацію авторського права на твір.
6. Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A., Breslavsky D. V., Naumenko K. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems.

*Continuum mechanics and thermodynamics*. 2021. Vol. 33. P. 1141– 1160. (Scopus, Germany).

*Опубліковані праці апробаційного характеру:*

7. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Чисельно-аналітичне моделювання вібраційної обстановки для аналізу точності алгоритму Міллера. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXX Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2022*, м. Харків, 19-21 жовтня 2022 р. Харків, 2022. С.325.

8. Homozkova I. Plaksiy Yu. Software-numerical optimization of coefficients of the Miller algorithm for a four-frequency model of angular motion of a rigid body. *Авіація у XXI столітті – Безпека в авіації та космічні технології: матеріали X всесвітнього конгресу*, м. Київ, 28-30 вересня 2022 р. Київ, 2022. С.3.2.23–3.2.26.

9. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Аналіз впливу вібраційного оточення на точність роботи алгоритму Міллера. *Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених: матеріали XV міжнародної науково-практичної конференції магістрантів та аспірантів*, м. Харків, 1-3 грудня 2021 р. Харків, 2021. С. 16–17.

10. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Визначення фактичної точності модифікації алгоритма Міллера на чотрьохчастотній еталонній моделі. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXIX Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2021*, м. Харків, 18-20 травня 2021 р. Харків, 2021. С.66.

11. Гомозкова І. О., Трунов О. М., Плаксі́й Ю. А. Комп'ютерне моделювання процесу обертання твердого тіла і його орієнтації. *Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених: матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції магістрантів та аспірантів*. м. Харків, 1-4 грудня 2020 р. Харків, 2020. С.64-65.

12. Homozkova I. O., Plaksiy Yu. A. New reference model of rotation of a rigid body for orientation algorithms analysis. *Авіація у XXI столітті – Безпека в авіації та космічні технології*: матеріали IX всесвітнього конгресу, м. Київ, 22-24 вересня 2020 р. Київ, 2020.

13. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Еталонна модель обертання вібраційного типу для відпрацювання алгоритмів визначення орієнтації. *Автоматика 2020*: матеріали XXVI Міжнародної конференції з автоматичного керування присвяченої пам'яті Л. Понтрягіна, М. Красовського та Б. Пшеничного, м. Київ, 13-15 жовтня 2021 р. Київ, 2020. С. 103.

14. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Трьохчастотна еталонна модель вібраційного руху твердого тіла для відпрацювання алгоритмів орієнтації. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*: тези доповідей XXVIII Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2020, м. Харків, 28-30 жовтня 2020 р. Харків, 2020. С.71.

15. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Комп'ютерне моделювання процесу обертання твердого тіла на основі чотирьохчастотного представлення кватерніона орієнтації. *Теоретичні та практичні дослідження молодих вчених*: матеріали XIII міжнародної науково-практичної конференції магістрантів та аспірантів, м. Харків, 19-22 листопада 2019 р. Харків, 2019. С. 36–37.

16. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Чотирьохчастотна еталонна модель обертання твердого тіла для відпрацювання алгоритмів орієнтації. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*: тези доповідей XXVII Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2019, м. Харків, 15-17 травня 2019 р. Харків, 2019. С.77.

17. Гомозкова І. О., Плаксі́й Ю. А. Визначення фактичного порядку точності алгоритмів орієнтації на основі застосування еталонних моделей. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я*: тези доповідей XXVII Міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD- 2019. м. Харків, 15-17 травня 2019 р. Харків, 2019. С.76.

**ДОДАТОК Б**  
**АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ**  
**РОБОТИ**

ЗАТВЕРДЖУЮ



## АКТ

Впровадження в навчальний процес результатів дисертаційної роботи «Моделі і методи дослідження алгоритмів орієнтації для високодинамічних об'єктів» здобувача наукового ступеня доктора філософії аспірантки кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем НТУ «ХПІ» Гомозкової Ірини Олександрівни.

У період з 22 квітня по 26 квітня 2024 року комісія у складі голови т. в. о. завідувача кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, доц. Татарінової О. А., проф. Успенського В. Б. та проф. Андрєєва Ю. М. провела роботу по визначенню результатів використання науково-методичних положень дисертаційного дослідження Гомозкової І. О. в навчальному процесі при підготовці фахівців НТУ «ХПІ».

Результати дослідження Гомозкової І. О. впроваджені в навчальний процес НТУ «ХПІ» в наступному напрямі: результати дослідження Гомозкової І. О. успішно використано при розробці тем курсового та дипломного проектування для студентів кафедри спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», а також при розробці навчальної програми дисципліни «Методи обчислювального експерименту» для вітчизняних та іноземних студентів.

Голова комісії:

Члени комісії:

Three handwritten signatures are shown, corresponding to the names listed to the right. The first signature is for Oksana Tatarinova, the second for Valeriy Uspen'skiy, and the third for Yuriy Andreev.

Оксана ТАТАРІНОВА

Валерій УСПЕНСЬКИЙ

Юрій АНДРЕЄВ





УКРАЇНА



**СВІДОЦТВО**

**про реєстрацію авторського права на твір**

**№ 123049**

**Комп'ютерна програма «Точносний аналіз алгоритмів орієнтації на двохчастотних еталонних моделях тестових рухів твердого тіла» («Orientation Algorithms Analysis on Two-Frequency Models»)**

(вид, назва твору)

**Автор (співавтор) Пляксі́й Ю́рій Андрі́йович, Гомозкова Ірина Олександрівна**

(прізвище, ім'я, по батькові (за наявності), посядром (за наявності))

**Авторські майнові права належать спільно Пляксі́й Ю́рій Андрі́йович, пров. Аравійський, 5, м. Харків, 61010; Гомозкова Ірина Олександрівна, вул. Кооперативна, 31, с. Руські Тишки, Харківський р-н, Харківська обл., 62440**

(прізвище, ім'я, по батькові (за наявності) фізичної особи / найменування юридичної особи, адреса)

**Дата реєстрації 18 січня 2024 р.**

**Виконувач обов'язків  
Директора Державної  
організації «Український  
національний офіс  
інтелектуальної власності та  
інновацій»**

  
**Богдан ПАДУЧАК**



## ДОДАТОК В

### ОСНОВНІ ПРАВИЛА МАТЕМАТИКИ КВАТЕРНІОНІВ

Кватерніони – чотирьохвимірні гіперкомплексні числа, які мають наступний вигляд:

$$\Lambda = \lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$$

де  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – довільні дійсні числа, які називають компонентами кватерніона;

$i, j, k$  – кватерніонні одиниці.

Для кватерніонних одиниць виконуються наступні правила:

- а)  $1 \circ 1 = 1$ ;
- б)  $1 \circ i_k = i_k$ ;
- в)  $i_k \circ i_k = -1$ ;
- г)  $i_1 \circ i_2 = i_3$ ;  $i_3 \circ i_1 = -i_2$ ;  $i_2 \circ i_3 = i_1$ ;
- д)  $i_j \circ i_k = -i_k \circ i_j$ ;  $j \neq k$ ,

де « $\circ$ » – знак кватерніонного множення.

Основні властивості операцій над кватерніонами наведено на прикладі двох різних кватерніонів

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3, \quad M = \mu_0 + \mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3,$$

та двох дійсних чисел  $a$  та  $b$ .

#### 1. Рівність кватерніонів

$$\Lambda = M, \text{ якщо } \lambda_0 = \mu_0, \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3.$$

#### 2. Правила додавання кватерніонів

$$2.1. \Lambda + M = M + \Lambda = (\lambda_0 + \mu_0, \lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \lambda_3 + \mu_3).$$

$$2.2. (\Lambda + M) + N = \Lambda + (M + N), \text{ де } N - \text{ деякий кватерніон}$$

#### 3. Правила множення кватерніонів на число

$$3.1. a\Lambda = \Lambda a = (a\lambda_0, a\lambda_1, a\lambda_2, a\lambda_3).$$

$$3.2. (ab)\Lambda = \Lambda(ab) = \Lambda(ba).$$

$$3.3. (a + b)\Lambda = a\Lambda + b\Lambda.$$

$$3.4. a(\Lambda + M) = a\Lambda + aM.$$



#### 4. Правило множення кватерніонів

$$\Lambda \circ M = (\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}) \circ (\mu_0 + \boldsymbol{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\mu}.$$

Знайдемо останню складову:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\mu} &= (\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3) \circ (\mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3) \\ &= -\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_1 i_3 + \lambda_3 \mu_1 i_2 + \lambda_1 \mu_2 i_3 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_2 i_1 - \lambda_1 \mu_3 i_2 \\ &\quad + \lambda_2 \mu_3 i_1 - \lambda_3 \mu_3 \\ &= -(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3) + i_1 (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) + i_2 (\lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \mu_3) \\ &\quad + i_3 (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}$$

Зауваження  $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$ :

$$M \circ \Lambda = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\lambda}$$

4. Множення кватерніонів має властивості асоціативності та дистрибутивності:

$$4.1. (\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N).$$

$$4.2. \Lambda \circ (M + N) = \Lambda \circ M + \Lambda \circ N.$$

#### 5. Спряжені кватерніони.

Кватерніон  $\Lambda = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}$  називається спряженим до кватерніону  $\Lambda$ .

5.1. Кватерніон, спряжений добутку  $\Lambda \circ M$ :

$$\lambda_0 \mu_0 - \lambda_0 \boldsymbol{\mu} - \mu_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu} = (\mu_0 - \boldsymbol{\mu}) \circ (\lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}) = \tilde{M} \circ \tilde{\Lambda}.$$

Це правило дійсне для будь-якої кількості кватерніонів, які перемножаються.

#### 6. Норма кватерніона:

$$\begin{aligned} \|\Lambda\| &= \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = (\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0^2 + \lambda_0 \boldsymbol{\lambda} - \lambda_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\lambda} \\ &= \lambda_0^2 + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0^2 + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \end{aligned}$$

Якщо  $\|\Lambda\| = 1$ , кватерніон називають нормованим.

6.1. Норма добутку кватерніонів  $\|\Lambda \circ M\| = (\Lambda \circ M) \circ (\tilde{M} \circ \tilde{\Lambda}) = \Lambda \circ (M \circ \tilde{M}) \circ \tilde{\Lambda} = \|M\| \circ (\Lambda \circ \tilde{\Lambda}) = \|M\| \circ \|\Lambda\| = \|\Lambda\| \circ \|M\|$ .

Це правило дійсне для будь-якої кількості кватерніонів, які перемножуються.

7. Зворотний кватерніон:  $\Lambda^{-1} = \frac{\tilde{\Lambda}}{\|\Lambda\|}$ .

$$7.1. \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \frac{\Lambda \circ \tilde{\Lambda}}{\|\Lambda\|} = \frac{\|\Lambda\|}{\|\Lambda\|} = 1.$$

7.2. Якщо кватерніон  $N = \Lambda \circ M$ . Тоді  $\Lambda^{-1} \circ N = \Lambda^{-1} \circ \Lambda \circ M = M$ .

$$7.3. (\Lambda \circ M)^{-1} = \frac{\tilde{M} \circ \tilde{\Lambda}}{\|M\| \circ \|\Lambda\|} = M^{-1} \circ \Lambda^{-1}.$$

## ДОДАТОК Г

### ОСНОВНІ ФРАГМЕНТИ КОДУ ПРОГРАМИ

```
#include <Miller.h>

namespace WpfComplexEnum.Algorithm
{
    public class Miller : BaseAlgorithm
    {
        protected double[] fi = new double[3] { 0, 0, 0 };
        //private double alfa = 33.0 / 80.0, beta = 57.0 / 80.0; // Miller
        //private double alfa = 36.0 / 80.0, beta = 54.0 / 80.0; // Ignagni
        //private double alfa = 0.0, beta = 9.0 / 8.0; //new optimization 1
        public override void Algorithm()
        {
            fi[0] = ted[0] + alfa * (tet1[1] * tet3[2] - tet1[2] * tet3[1]) + beta * (tet2[1] * (tet3[2] -
            tet1[2]) - tet2[2] * (tet3[1] - tet1[1]));
            fi[1] = ted[1] + alfa * (tet1[2] * tet3[0] - tet1[0] * tet3[2]) + beta * (tet2[2] * (tet3[0] -
            tet1[0]) - tet2[0] * (tet3[2] - tet1[2]));
            fi[2] = ted[2] + alfa * (tet1[0] * tet3[1] - tet1[1] * tet3[0]) + beta * (tet2[0] * (tet3[1] -
            tet1[1]) - tet2[1] * (tet3[0] - tet1[0]));

            double tedm = fi[0] * fi[0] + fi[1] * fi[1] + fi[2] * fi[2];
            dl[0] = 1 - 0.125 * tedm + tedm * tedm / 384;
            dl[1] = 0.5 * fi[0] * (1 - tedm / 24);
            dl[2] = 0.5 * fi[1] * (1 - tedm / 24);
            dl[3] = 0.5 * fi[2] * (1 - tedm / 24);
        }

        public override string StringAlgorithm()
        {
            return "Miller";
        }
    }
}

#include < BaseModel.h>
```

```
using WpfComplexEnum.Model.Transfer;
```

```
namespace WpfComplexEnum.Model
```

```
{
```

```
    public class BaseModel
```

```
    {
```

```
        protected double[] le = new double[4] { 1, 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] w = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] ted = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tep = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tep05 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tep1 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tep2 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tep3 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] ted1 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] ted2 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] ted3 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tet1 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tet2 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tet3 = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        protected double[] tetv = new double[3] { 0, 0, 0 };
```

```
        public double[] Le
```

```
        {
```

```
            get { return le; }
```

```
            set
```

```
            {
```

```
                if (value.Length == le.Length)
```

```
                {
```

```
                    le = value;
```

```
                }
```

```
            }
```

```
        }
```

```
        public double[] W
```

```
        {
```

```
get { return w; }
set
{
    if (value.Length == w.Length)
    {
        w = value;
    }
}
}
public double[] Ted
{
    get { return ted; }
    set
    {
        if (value.Length == ted.Length)
        {
            ted = value;
        }
    }
}
public double[] Ted1
{
    get { return ted1; }
    set
    {
        if (value.Length == ted1.Length)
        {
            ted1 = value;
        }
    }
}
public double[] Ted2
{
    get { return ted2; }
    set
```

```

    {
        if (value.Length == ted2.Length)
        {
            ted2 = value;
        }
    }
}

public double[] Ted3
{
    get { return ted3; }
    set
    {
        if (value.Length == ted3.Length)
        {
            ted3 = value;
        }
    }
}

public double[] Tet1
{
    get { return tet1; }
    set
    {
        if (value.Length == tet1.Length)
        {
            tet1 = value;
        }
    }
}

public double[] Tet2
{
    get { return tet2; }
    set
    {
        if (value.Length == tet2.Length)

```

```

        {
            tet2 = value;
        }
    }
}

public double[] Tet3
{
    get { return tet3; }
    set
    {
        if (value.Length == tet3.Length)
        {
            tet3 = value;
        }
    }
}

public double[] Tetv
{
    get { return tetv; }
    set
    {
        if (value.Length == tetv.Length)
        {
            tetv = value;
        }
    }
}

protected double[] l1 = new double[4] { 1, 0, 0, 0 };
protected double[] l = new double[4] { 1, 0, 0, 0 };
public double[] L1
{
    get { return l1; }
    set
    {

```

```

        if (value.Length == l1.Length)
        {
            l1 = value;
        }
    }
}

public double[] L
{
    get { return l; }
    set
    {
        if (value.Length == l.Length)
        {
            l = value;
        }
    }
}

public virtual void Model(double t, double t05, double t2, double t3)
{
    //реализуется модель
}

public virtual void Inputer(TranferModel tranferModel)
{
    //вводятся данные для специальной модели
}

public virtual string StringModel()
{
    return ""; // возвращается имя модели
}

public virtual string StringPathCord()
{

```



```

        return ""; // возвращаются вводные данные для расчета модели
    }

    public void ReassignmentTep()
    {
        for (int i = 0; i < 3; i++)
        {
            ted[i] = tep[i] - tep1[i];
        }
    }

    public void ReassignmentTed()
    {
        for (int i = 0; i < 3; i++)
        {
            ted3[i] = ted2[i];
            ted2[i] = ted1[i];
            ted1[i] = ted[i];
        }
    }

    public void ReassignmentTet()
    {
        for (int i = 0; i < 3; i++)
        {
            tet1[i] = tep2[i] - tep1[i];
            tet2[i] = tep3[i] - tep2[i];
            tet3[i] = tep[i] - tep3[i];
            tetv[i] = tep05[i] - tep1[i];
        }
    }
}

public enum ModelType
{
    Regression = 1,

```

```
    SpinningCone = 2,  
    SpinningCone2 = 3,  
    ModelDoubleChast1 = 4,  
    ModelDoubleChast2 = 5,  
    ModelDoubleChast3 = 6,  
    ModelDoubleChast4 = 7,  
    ModelDoubleChast5 = 8,  
    ModelDoubleChast6 = 9,  
    ModelDoubleChast7 = 10,  
    ModelDoubleChast8 = 11,  
    ModelTripleChast1 = 12,  
    ModelTripleChast2 = 13,  
    ModelTripleChast3 = 14,  
    ModelTripleChast4 = 15,  
    ModelFourChastKrulova = 16,  
    Krulov = 17,  
    ModelVibration = 18,  
}  
}
```