МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

Л.В. Курпа, Г.Б. Лінник

Рівняння математичної фізики

Навчальний посібник

для студентів інженерних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України

Харків
Видавництво «Підручник НТУ «ХПІ»
2011

УДК 517.2
ББК 22.161
К 93

Рецензенти:
О.М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Українська інженерно-педагогічна академія.
В.С. Проценко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Національний аерокосмічний університет «ХАІ».

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України, як навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист № 1/11-5679 від 06.07.2011 р.)

Курпа Л.В.

К 93 Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Г.Б. Лінник. – Харків : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 312 с.

ISBN 978-966-2426-28-1

Навчальний посібник складається з теоретичного матеріалу та набору лабораторних робіт з основних розділів традиційного курсу математичної фізики, і з питань, пов’язаних із застосуванням наближених (варіаційних) методів з використанням теорії R-функцій. У кожному розділі розібрані типові приклади та наведені варіанти індивідуальних домашніх завдань. Для розв’язку деяких задач використовуються комп’ютерні системи MAPLE та POLE-RL.

Призначено для студентів інженерно-фізичного та фізико-технічного факультетів. Може бути корисним для викладачів, аспірантів та наукових працівників.

Іл. 65. Табл. 6. Бібліогр.: 17 назв.

УДК 517.2
ББК 22.161

ISBN 978-966-2426-28-1

Вступ

Курс математичної фізики є заключним розділом фундаментальної підготовки інженерів, у якому використовуються практично всі поняття вищої математики. Саме під час вивчення цієї дисципліни майбутні інженери знайомляться з методами математичного моделювання різних фізичних процесів та роблять висновок, що побудовані моделі у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть описувати зовсім різні природні явища. Головною метою цього курсу є закладення класичних знань, необхідних для математичного моделювання та подальшого дослідження побудованих моделей за допомогою різних методів та підходів як точних, так і наближених. Вивчаючи цей курс, необхідно розуміти, що при дослідженні того чи іншого явища існують дві важливі проблеми. Перша пов'язана з побудовою математичної моделі, яка досить точно описує той чи інший процес. А друга, не менш важлива проблема, стосується розробки методів розв'язання побудованих диференціальних рівнянь.

У цьому посібнику вивчаються основні розділи математичної фізики в обсязі, рекомендованому для інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Під час підготовки посібника автори враховували великий досвід, що був накопичений протягом 40 років на кафедрі прикладної математики НТУ «ХПІ» при викладанні цього курсу для студентів спеціальності «Динаміка та міцність машин». Раніше за участю авторів було опубліковано два навчальних посібники «Уравнения математической физики» та «Лабораторный практикум». Видання охоплює як теоретичний матеріал, так і практичний, що необхідно для кращого засвоєння курсу математичної фізики.

У даному посібнику запропоновано лише той теоретичний матеріал, який викладається на лекціях, а також деякі необхідні доповнення, які допомагають зрозуміти викладене більш поглиблено. Зрозуміло, що викладач може опустити деякі питання залежно від кількості часу для викладання цього курсу. Подано тільки теорію лінійних рівнянь з частинними похідними в основному другого порядку. Детально наведено виведення деяких рівнянь та основні типи рівнянь класичної математичної фізики.

Серед методів розв'язання головну увагу приділено методам Фур'є, Даламбера та методу функцій Гріна. Розглядаються не тільки точні, але й наближені методи розв'язання задач математичної фізики. Зокрема, висвітлено один з ефективних сучасних наближених методів, який базується на застосуванні варіаційних методів та теорії R-функцій. Цей метод відомий у літературі як варіаційно-структурний метод або метод R-функцій (міжнародна абревіатура RFM). Для розуміння цього методу у скороченому вигляді викладається теорія R-функцій та програмуюча система POLE-RL, що дозволяє розв’язувати крайові задачі математичної фізики в областях складної форми при різних видах крайових умов.

Матеріал викладено так, щоб якнайкраще допомогти студенту оволодіти математичними методами та впевнено їх використовувати у майбутньому. З цією метою наведено розв’язки великої кількості задач.

Кожен розділ містить теоретичний матеріал і детальні розв’язки задач та прикладів. Майже до всіх розділів додаються лабораторні роботи, за допомогою яких перевіряється рівень засвоєного матеріалу. Ці лабораторні роботи призначені для індивідуального виконання і містять по 25 варіантів завдань.

Однією з особливостей цього видання є наявність необхідних відомостей для використання системи MAPLE як однієї з відомих систем, яка підвищує ефективність наукових досліджень та звільняє інженера-дослідника від рутинної праці, пов’язаної з обчисленнями.

Навчальний посібник може бути корисним як для студентів, так і для викладачів, аспірантів та наукових працівників, які у своїй практичній діяльності стикаються з необхідністю розв’язання рівнянь у частинних похідних.

Автори висловлюють глибоку подяку рецензентам проф. О.М. Литвину і проф. В.С. Проценку за корисні рекомендації, зроблені в період підготовки навчального посібника, а також з вдячністю приймуть усі зауваження та пропозиції.

Розділ I. Основні види рівнянь математичної фізики

§1. Поняття про диференціальні рівняння у частинних похідних, їх загальні й частинні розв'язки

Рівняння математичної фізики є одним з основних спеціальних розділів вищої математики, присвяченим вивченню диференціальних рівнянь у частинних похідних. На практиці саме такі диференціальні рівняння виступають у вигляді математичних моделей багатьох фізико-механічних полів.

Диференціальним рівнянням називається таке рівняння, яке містить в собі не тільки невідому функцію, але і її похідні до деяких порядків.

Якщо ***невідома функція***, що входить у диференціальне рівняння разом зі своїми похідними, ***залежить від одного аргументу***, то таке рівняння називають ***звичайним диференціальним рівнянням***. Якщо ***невідома функція залежить від декількох аргументів*** і рівняння містить частинні похідні від невідомої функції, то диференціальне ***рівняння*** називають рівнянням ***у частинних похідних***.

Загальний вигляд такого рівняння:

$$F\left(x_1, x_2, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0,\ (k_1 + ... + k_n = n). \tag{1.1}$$

Порядок старшої похідної, що присутня у рівнянні, визначає порядок рівняння. Наприклад, рівняння першого порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, ... x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} ... \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{1.2}$$

Основною задачею теорії диференціальних рівнянь є знаходження й дослідження функцій, що задовольняють заданому диференціальному рівнянню, тобто їх розв'язків.

Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається така функція $u(x_1, x_2, ... x_n)$, підстановка якої в рівняння разом зі своїми похідними обертає його в тотожність. Задача інтегрування рівняння (1.1) або (1.2) полягає не тільки в тому, щоб знайти частинні розв'язки, але й у тому, щоб одержати всю сукупність розв'язків. Інакше кажучи, і в теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних природно порушувати питання про знаходження загального розв'язку, тобто такого розв'язку, з якого можна одержати частинні розв'язки, що задовольняють додаткові умови. При вивченні звичайних диференціальних рівнянь було показано, що їх загальний розв'язок містить в собі не тільки незалежні змінні, але й довільні сталі. Наприклад, загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння

I порядку містить одну довільну сталу, загальний розв'язок рівняння II порядку – дві довільні сталі й т.д.

Щоб з'ясувати характер загального розв'язку диференціального рівняння у частинних похідних розглянемо найпростіші приклади таких рівнянь. Нехай необхідно розв'язати рівняння

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Невідома функція u залежить від двох змінних x і y. У рівнянні явно присутня тільки частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$, при обчисленні якої аргумент y розглядається як стала. При сталому y рівняння (1.3) можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння з невідомою функцією u і незалежною змінною x. Змінюючи значення y, будемо одержувати різні звичайні диференціальні рівняння, тобто змінна y у рівнянні (1.3) відіграє роль параметра. Нехай $u = \varphi(x, y, C)$ є загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння. Воно містить параметр y і константу C, яка є сталою щодо змінної x, а відносно y може бути будь-якою функцією, тобто $C = C(y)$. Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння I-го порядку виду (1.3) має вигляд $u = \varphi(x, y, C(y))$, тобто воно містить одну довільну функцію $C(y)$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{x} - xy^2. \tag{1.4}$$

Розв'язання. Рівняння (1.4) можна розглядати як звичайне лінійне диференціальне рівняння I порядку, що містить параметр y. Розв'яжемо його методом варіації довільної сталої. Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{x}.$$

Розділяємо змінні $\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial x}{x}$ й інтегруємо $\ln|u| = \ln|x| + \ln|C(y)|$.

З останнього виразу одержимо, що $u = C(y)x$. Згідно з методом довільної сталої вважаємо, що стала C залежить від x. Отже, $u = C(x, y)x$, де $C(x, y)$ – будь-яка функція, яку обираємо так, щоб функція $u = C(x, y)x$ була розв'язком неоднорідного рівняння (1.4). Підставимо u в (1.4), маючи на увазі, що $\frac{\partial u}{\partial x} = C_x' x + C$. Тоді одержимо

$$C_x' x + C = \frac{Cx}{x} - xy^2 \;\Rightarrow\; C_x' x = -xy^2 \Rightarrow C_x' = -y^2 \;\Rightarrow\; C(x, y) = -xy^2 + C_1(y).$$

Остаточно розв’язок набуде вигляду
$u(x,y)=(-xy^2+C_1(y))x$, де функція C_1 повинна бути константою відносно змінної *x*, але може залежати від параметра *y*. Таким чином, загальний розв’язок містить довільну функцію $C_1=C_1(y)$.

Розглянемо ще випадок квазілінійного диференціального рівняння першого порядку із двома незалежними змінними. За означенням таке рівняння має вигляд:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z).$$

Функції *P, Q, R* будемо вважати неперервними в розглянутій області й такими, що не перетворюються в нуль одночасно.

Розглянемо векторне поле $\vec{F}$:

$$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}, \tag{1.5}$$

де $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орти. Векторні лінії цього поля (тобто лінії, дотична до яких у кожній точці має напрямок, що збігається з напрямком вектора $\vec{F}$ в цій же точці) визначаються з умови колінеарності вектора $\vec{F}$ й напрямного вектора дотичної до шуканої лінії $\vec{t}=\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$, тобто з умови

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{1.6}$$

Поверхні, що утворені з векторних ліній, називаються векторними поверхнями. Очевидно, векторні поверхні можна одержати, розглядаючи множину точок, що лежать на довільно обраному неперервно залежному від параметра однопараметричному сімействі векторних ліній.

Векторна поверхня характеризується тим, що вектор $\vec{N}$, спрямований по нормалі до неї, у будь-якій точці поверхні буде ортогональним до вектора поля $\vec{F}$, тобто

$$(\vec{N},\vec{F})=0. \tag{1.7}$$

Якщо векторна поверхня визначається рівнянням $z=f(x,y)$, то вектор нормалі має вигляд

$$\vec{N}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{i}-\vec{k} \qquad \text{або} \qquad \vec{N}\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right).$$

Тоді з умови (1.7) маємо

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z). \tag{1.8}$$

Якщо векторна поверхня задається рівнянням $u(x,y,z)=0$, то

$\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ або $N = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ і з умови (1.7) одержимо, що

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1.9)$$

Отже, для знаходження векторних поверхонь треба проінтегрувати квазілінійне рівняння (1.8) або (1.9). Оскільки векторні поверхні можуть бути складені з векторних ліній, то інтегрування рівнянь (1.8) або (1.9) зводиться до інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь векторних ліній (1.6). Нехай $\Psi_1(x,y,z) = C_1$ і $\Psi_2(x,y,z) = C_2$ два незалежних перших інтеграли системи (1.6), які називаються характеристиками системи (1.6) та утворюють двопараметричне сімейство векторних ліній. Виділимо з нього довільним способом однопараметричне сімейство, встановлюючи якунебудь неперервну залежність $\Phi(C_1, C_2) = 0$ між параметрами C_1 і C_2. Крім параметрів C_1 і C_2, із системи $\Psi_1(x,y,z) = C_1,\ \Psi_2(x,y,z) = C_2,\ \Phi(C_1, C_2) = 0_1$ одержуємо шукане рівняння векторних поверхонь

$$\Phi(\Psi_1(x,y,z), \Psi_2(x,y,z)) = 0,$$

де Φ – довільна функція.

***Приклад* 2**. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Розв’язання. Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1}.$$

Перші інтеграли цієї системи визначаються таким чином:

$$x - y = C_1,$$
$$z - x = C_2.$$

Тоді інтегралом вихідного рівняння є $\Phi(C_1, C_2) = 0$ або $\Phi(x - y, x - z) = 0$.

Можна покласти $C_2 = \varphi(C_1)$, тоді рівняння поверхні в явному вигляді буде таким:

$z = x + C_2 = x + \varphi(x - y),$ тобто $z = x + \varphi(x - y)$.

***Приклад* 3**. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Розв’язання. Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{-x + y} = \frac{dz}{z}.$$

Перші інтеграли цієї системи визначаються методом інтегрованих комбінацій. Виконаємо тотожні перетворення системи й використаємо основну властивість пропорції

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3}{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3}.$$

Вихідна система перетвориться таким чином:

$$\frac{xdx}{x^2+xy}=\frac{ydy}{-xy+y^2}=\frac{dz}{z};$$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+xy-xy+y^2}=\frac{dz}{z};$$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{z};$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln z+\ln C_1 \Rightarrow C_1=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Для знаходження другого інтегралу помножимо перший дріб вихідної системи на y, а другий на $-x$, потім скористаємося основною властивістю пропорції, тоді одержимо

$$\frac{ydx}{y^2+xy}=\frac{-xdy}{-xy+x^2}=\frac{dz}{z}.$$

Звідки

$$\frac{ydx-xdy}{y^2\left(1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2\right)}=\frac{dz}{z}\Rightarrow\frac{d\left(\dfrac{x}{y}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=d\ln z\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)=\ln z+C_2;$$

$$C_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)-\ln z.$$

Інтеграл вихідного рівняння $\Phi(C_1,C_2)=0$ або

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\ln z\right)=0.$$

***Приклад* 4**. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Розв’язання. Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

Як і в попередньому прикладі перші інтеграли цієї системи визначаються методом інтегрованих комбінацій. Використовуючи основну властивість пропорцій, одержимо

$$\frac{dx+dy+dz}{z-y+x-z+y-x}=\frac{dz}{y-x}\Rightarrow\frac{d(x+y+z)}{0}=\frac{dz}{y-x}.$$

Перший загальний інтеграл вихідної системи диференціальних рівнянь:

$$x+y+z=C_1.$$

Другий інтеграл одержимо аналогічно:

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(z-y)+y(x-z)+z(y-x)}=\frac{dz}{y-x}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{0}=\frac{dz}{y-x}.$$

Звідки

$$x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Розв'язком вихідного диференціального рівняння у частинних похідних є довільна функція, аргументами якої будуть C_1 і C_2. Тобто

$\Phi(C_1,C_2)=0$ або $\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$.

Якщо потрібно знайти не довільну векторну поверхню поля, а поверхню, що проходить через задану лінію, визначену рівняннями

$$\begin{cases}\Phi_1(x,y,z)=0,\\ \Phi_2(x,y,z)=0,\end{cases}$$

то функція Φ вже не буде довільною, а буде знайдена шляхом виключення змінних *x, y, z* із системи рівнянь

$$\Phi_1(x,y,z)=0,\Phi_2(x,y,z)=0;$$

$$\Psi_1(x,y,z)=C_1,\Psi_2(x,y,z)=C_2,$$

які повинні одночасно задовольнятися в точках заданої лінії

$$\begin{cases}\Phi_1(x,y,z)=0;\\ \Phi_2(x,y,z)=0,\end{cases}$$

через яку проводимо характеристики, визначені рівняннями $\Psi_1(x,y,z)=C_1$, $\Psi_2(x,y,z)=C_2$.

Зауважимо, що задача стане невизначеною, якщо задана лінія є характеристикою, тому що в цьому випадку цю лінію можна включити в різні однопараметричні сімейства характеристик і тим самим одержати різні інтегральні поверхні, що проходять через цю лінію.

***Приклад* 5.** Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

яка проходить через криву

$$x=0,\ z=y^2.$$

Формулювання цієї задачі може бути іншим.
Знайти розв’язок рівняння, що задовольняє умовам Коші.

Розв’язання. Складемо відповідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0},$$

тоді перші інтеграли цієї системи визначаться як

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\frac{C_1}{2};\ z=C_2$$

або

$$x^2+y^2=C_1, z=C_2.$$

Загальний розв’язок рівняння визначиться таким чином
$\Phi(C_1,C_2)=0$ або $\Phi(x^2+y^2,z)=0$.
З того, що

$$x=0,\ \text{а}\ z=y^2\ \text{ і }\ x^2+y^2=C_1,\ z=C_2,$$

випливає

$0+y^2=C_1$, тобто $\begin{cases} z=C_1, \\ z=C_2, \end{cases}$ $\Rightarrow C_1=C_2$ й векторна поверхня набуде вигляду

$$z=x^2+y^2.$$

Отримуємо таку ж відповідь інакше.
З того, що $\Phi(x^2+y^2,z)=0$ випливає $z=\varphi\left(x^2+y^2\right)$, з даних Коші $y^2=\varphi\left(y^2\right)$, звідси $\varphi\left(t\right)=t$, а отже

$$z=\varphi\left(x^2+y^2\right)=x^2+y^2.$$

***Приклад* 6.** Знайти розв’язок рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

який задовольняє умовам Коші

$$z=1,\ x^2+y^2=4.$$

Розв’язання. Оскільки задана лінія є характеристикою при $C_1=4$, то задача є невизначеною. Дійсно, вважаючи $C_2=\varphi(C_1)$, одержимо загальний розв’язок у вигляді $z=\varphi(x^2+y^2)$, тобто загальний розв’язок представляє всілякі поверхні обертання з віссю обертання Oz. Очевидно, що існує нескінченна множина поверхонь обертання, які проходять через коло $z=1,\ x^2+y^2=4$, наприклад, параболоїди обертання

$$z=x^2+y^2-3,\ \ 4z=x^2+y^2,\ \ z=-(x^2+y^2)+5,$$

сфера

$$x^2+y^2+z^2=5$$

й т. ін.

Якщо рівняння кривої, через яку проходить поверхня, задано в параметричній формі:

$$x=x_0(s), y=y_0(s), z=z_0(s),$$

то звичайно й розв’язок зручно шукати в параметричній формі

$$x=x(t,s), y=y(t,s), z=z(t,s).$$

С цією метою в систему (1.6) вводиться додатковий параметр t

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}=dt. \tag{1.10}$$

Для того щоб характеристики проходили через задану криву, шукаємо розв’язок системи (1.10), який задовольняє при $t=0$ (або $t=t_0$) початкові умови:

$$x=x_0(s), y=y_0(s), z=z_0(s).$$

***Приклад* 7.** Знайти розв’язок рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

який задовольняє умови Коші $\quad x_o=s, y_o=s^2, z_o=s^3$.

Розв’язання. Складемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{1}=dt$$

або

$$dx=-dy=dz=dt.$$

Розв’язком її є

$$\begin{cases} x=t+C_1; \\ y=-t+C_2; \\ z=t+C_3 \end{cases}$$

з того, що

$$\begin{cases} x=s, \\ y=s^2, \\ z=s^3 \end{cases}$$

при $t=0$ випливає

$$\begin{cases} C_1 = s, \\ C_2 = s^2, \\ C_3 = s^3. \end{cases}$$

Тоді

$$x = t + s, y = t + s^2, z = t + s^3$$

є сімейством характеристик, що проходять через точки заданої кривої.

Розглянемо рівняння другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Запишемо його у вигляді $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$. З останнього рівняння випливає, що функція $\frac{\partial u}{\partial y}$ не залежить від *x*, отже, є довільною функцією, що залежить від *y*, тобто $\frac{\partial u}{\partial y} = \Psi(y)$.

Інтегруючи останнє рівняння за *y* і враховуючи, що стала інтегрування повинна бути сталою відносно змінного *y* і може бути будь-якою функцією від *x*, одержуємо

$$u(x, y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(y) = \int \Psi(y) dy$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння другого порядку у частинних похідних містить дві довільні функції.

***Приклад* 8.** Проінтегрувати рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2x}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{2x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.11}$$

Нове подання рівняння дозволяє ввести нову функцію $\frac{\partial u}{\partial y} = v(x, y)$, тоді рівняння (1.11) перетвориться в

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2x} v = 0.$$

Останнє рівняння можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння відносно функції *v*, у якому *x* є незалежною змінною, а *y* є параметром. Розділяючи змінні й інтегруючи, одержимо

$$\frac{\partial v}{v}=\frac{\partial x}{2x};\ \ln|v|=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln|f(y)|,$$

де $f(y)$ – довільна функція від y. Після потенціювання знаходимо

$$v=f(y)\sqrt{x}\,.$$

Але $\frac{\partial u}{\partial y}=v$, тому $\frac{\partial u}{\partial y}=f(y)\sqrt{x}$. Звідси

$$u(x,y)=\sqrt{x}\int f(y)dy+\Psi(x)\,,$$

де $\Psi(x)$ – довільна функція від x. Введемо позначення

$\int f(y)dy=\Phi(y),$ остаточно одержимо $u(x,y)=\sqrt{x}\Phi(y)+\Psi(x)$,

де $\Phi(y)$ й $\Psi(x)$ – довільні функції від y і x відповідно.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння другого порядку містить дві довільні функції.

Розглянуті приклади дозволяють зробити висновок про корінну відмінність розв'язку звичайного диференціального рівняння від розв'язку диференціального рівняння у частинних похідних. ***Якщо загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння містить довільні сталі, то загальний розв'язок рівняння у частинних похідних містить довільні функції.*** Задача знаходження загального розв'язку рівняння у частинних похідних досить важка. Часто необхідно знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє деяким додатковим умовам (граничним і початковим). Характер додаткових умов, за допомогою яких можна знайти певний частинний розв'язок рівняння у частинних похідних, істотно відрізняється від умов для звичайних диференціальних рівнянь.

Лабораторна робота 1

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок таких рівнянь першого порядку у частинних похідних

1.1. 1. а) $\frac{\partial u}{\partial y}=\cos^2 y-5\sin\frac{x}{3}$; á) $\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{tg} y-8\ln x$; â) $\frac{\partial u}{\partial x}=xu-y^2$.

1.1. 2. а) $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{2}\cos 2x$; á) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u}{x^2}-y$; â) $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{\sqrt{y^2+1}}+y^2x$.

1.1. 3. а) $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 3x-\frac{y^2}{2}$; á) $y\frac{\partial z}{\partial y}=z+yx$; â) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\operatorname{tg} y}{x}+y^2x^2$.

1.1. 4. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\ln x}{x}y+xy^2$; $\text{á)}\ z=x\left(\frac{\partial z}{\partial y}-x\cos y\right)$; $\text{â)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=ye^{2y}+\operatorname{tg}x$.

1.1. 5. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=2+y^3+\frac{x}{\cos^2 x}$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{ar\operatorname{ctg}x}{1+x^2}+\frac{\sqrt{x}\ln y}{y}$; $\text{â)}\ x\frac{\partial u}{\partial x}=2u+yx^2$.

1.1. 6. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{5+x^3}{\sqrt[3]{y+1}+1}$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sin^2 y\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$; $\text{â)}\ z\frac{\partial z}{\partial x}+x=y$.

1.1. 7. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=xe^x+y$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x\ln x}{y^2+1}$; $\text{â)}\ \frac{\partial z}{\partial y}=z\left(x^2+y^2\right)$.

1.1. 8. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\sin 2x+\cos y$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$; $\text{â)}\ \frac{\partial z}{\partial x}=y^2+zx^2$.

1.1. 9. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\ln^2 x+\frac{\ln^2 y}{y}$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin y}{x}$; $\text{â)}\ \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{xu}{y}=y^2\ln x$.

1.1.10. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\ln y}{(\cos x+\sin x)y}$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\cos^2 x-\ln\operatorname{tg}y$; $\text{â)}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}=\frac{y}{x}$.

1.1.11. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\cos^2 2x\frac{y^2}{2}$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=y\sin y-3$; $\text{â)}\ \frac{\partial u}{\partial x}-u\cos x=\sin 2x$.

1.1.12. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^3}\sin 5x$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=5\cos 2x+2\sin 4y$; $\text{â)}\ \frac{\partial u}{\partial x}+u\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$.

1.1.13. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\cos x-5\sin^2\frac{y}{2}$; $\text{á)}\ x^2\frac{\partial u}{\partial y}+uy+1=0$; $\text{â)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=x\sqrt{1+x^2}+5\operatorname{tg}y$.

1.1.14. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sin^3 x\cos x+y^2$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sin^2 y}+\cos x$; $\text{â)}\ \frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{z}{x}}+\frac{zy}{x}$.

1.1.15.

$\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sin^3 y+\frac{4x+1}{\sqrt{1-x^2-2x}}$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sin y+3\cos y}+5$; $\text{â)}\ \frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2z}{y}=\frac{y+x}{y}$.

1.1.16. $\text{a)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sin^5 x\cos^3 x+e^y$; $\text{á)}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\left(1+\sqrt[3]{y^2}\right)^2}{y\sqrt[3]{y^2}}+\ln x$;

â) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{z}{1+x}+x^2y=0.$

1.1.17. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2-5x}{\sqrt{4x^2-8x+1}}+\sin^5 y;$

á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{\sin^4 y\cos^3 y}+\ln x;$ â) $\left(1-y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}-yz=x.$

1.1.18. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\sin^3 x\cos^{12} x+y^2e^y;$ á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\ln^2 y+\ln^2 x;$ â) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{xz}{x^2+1}=\dfrac{y}{x^2+1}.$

1.1.19. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}+ye^{\sqrt{y}};$

á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{e^{\sqrt{y}}ar\,\mathrm{ctg}\,e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}+\arcsin\ln x;$ â) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z=\sin x+\sin y.$

1.1.20. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{ar\tilde{n}tg}\,\frac{1}{x}}{x^2}+\sqrt{x}y^2;$

á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\left(1+\sqrt[3]{y^2}\right)^2}{y^2\sqrt{x}}+\ln^2 x;$ â) $\dfrac{\partial z}{\partial y}+2zy=\left(2y-1\right)e^{-y}x.$

1.1.21. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\left(1-x\right)}{\sqrt{3x^2-2x-8}}+\dfrac{\sin^2 y}{\cos^4 x};$

á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{y}+\sin^{11} y\cos y;$ â) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos x+z\sin x=1.$

1.1.22. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}+xar\,\mathrm{ctg}\,y;$

á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y^2-20y-3}{\left(y^2-1\right)\left(y-5\right)}+xy;$ â) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-z\sin x=e^{-\cos x}\sin 2x.$

1.1.23. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\ln^3\left(x-1\right)}{x-1}+\dfrac{\sin^5 y}{\cos^2 x};$

á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\sin^5 y}{\cos^3 y}+x^3;$ â) $\left(1+y^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=x\cdot \operatorname{arcctg} y$.

1.1.24. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin^2 y}{\cos^6 x}+e^{2\sqrt{y}};$ á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=ye^{\frac{y}{4}}\dfrac{1}{1+x^2};$ â) $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{u}{x\ln x}=x\ln x$.

1.1.25. a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{e^{2x}\left(y^2+1\right)}{\sqrt{1-e^{4x}}};$ á) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin^2 y\cos^2 y+\left(x^2+1\right);$

â) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2\sin x+3u$.

Завдання 2. Знайти загальний розв’язок таких рівнянь першого порядку у частинних похідних

1.2. 1. a) $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2;$ á) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2}$.

1.2. 2. a) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$ á) $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yz$.

1.2. 3. a) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=z;$ á) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.2. 4. a) $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$ á) $2x^3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(3x^2y+y^3\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2z$.

1.2. 5. a) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{y^3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$ á) $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

1.2. 6. a) $\sin^2 x\dfrac{\partial u}{\partial y}+\ln y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0;$ á) $\left(x+y\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\left(x-y\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

1.2. 7. a) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{z}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;$ á) $\left(z-y\right)^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

1.2. 8. a) $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}-xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^z;$ á) $2y^4\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\sqrt{z^2+1}$.

1.2. 9. a) $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(x-2z\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz;$ á) $\left(xz+y\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(x+yz\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1-z^2$.

1.2.10. a) $\left(xz+y\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(x+yz\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1-z^2;$ á) $\left(x+z\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(y+z\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y$.

1.2.11. a) $x^2z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y;$ á) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy$.

1.2.12. a) $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;$ á) $(z+y-x)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+z-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y+z\,.$

1.2.13. a) $2xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+2yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2;$ á) $\left(y+2z^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\,.$

1.2.14. a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;$ á) $\left(z+e^y\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(z+e^x\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2\left(e^x-e^y\right).$

1.2.15. a) $\left(z^2+x^2-y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}-2xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+2yz=0;$ á) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y\,.$

1.2.16. a) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;$ á) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xy}{z}\,.$

1.2.17. a) $\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0;$ á) $e^x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=ye^x\,.$

1.2.18. a) $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz;$ á) $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y\,.$

1.2.19. a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1;$ á) $(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1-z^2)(z+2)\,.$

1.2.20. a) $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0;$ á) $-9y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=1.$

1.2.21. a) $(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1;$ á) $\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=1\,.$

1.2.22. a) $\sin x\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos x\sin y\dfrac{\partial z}{\partial y}=1;$ á) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^z\,.$

1.2.23. a) $-y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=1;$ á) $-\ln u\dfrac{\partial u}{\partial x}+(\ln u-2x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x\,.$

1.2.24. a) $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}-yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy;$ á) $2zx\dfrac{\partial z}{\partial x}+2zy\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2.$

1.2.25. a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+zy\dfrac{\partial z}{\partial y}=z;$ б) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2-2xy-x^2}{z}\,.$

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок рівнянь другого порядку у частинних похідних.

1.3. 1. a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0;$ á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\sin(x+y);$ â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u=0\,.$

1.3. 2. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x \sin x$;   á) $2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$.

1.3. 3. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x}\ln y - \dfrac{1}{y}\ln x$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;   â) $2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.3. 4. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin x + 2\cos y$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.3. 5. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{y}u = 2$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.3. 6. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = y$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3\sin x - \cos x$.

1.3. 7. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin x \cdot \cos x$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1/\sin x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.3. 8. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{x}{\sqrt{1+y^2}}$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 1/\cos x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.3. 9. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = x^2$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ln y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.3.10. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.3.11. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x}$;   á) $2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

1.3.12. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \ln y\dfrac{\partial u}{\partial y} + x$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9u = x$.

1.3.13. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 1$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\sin x}{y} - 1$.

1.3.14. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{x\ln x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 2$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5u + y$.

1.3.15. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xe^x$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u + x$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u = \sin x$.

1.3.16. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial u}{\partial x} = x$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4u = \cos y$.

1.3.17. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(x\sqrt{1+x^2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}$;   á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;   â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9u = e^x$

1.3.18. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \right) \frac{\partial u}{\partial y}$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - e^x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 25u = e^{5x}$

1.3.19. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{e^y + 1} \frac{\partial u}{\partial x}$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin y \frac{\partial u}{\partial x}$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin y \frac{\partial u}{\partial y} + 1$.

1.3.20. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{x}{x+1} \right) \frac{\partial u}{\partial y}$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos 3y \frac{\partial u}{\partial x} = 1$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin 2x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right)$.

1.3.21. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(y-2)(y+3)} \frac{\partial u}{\partial x}$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin 2x \frac{\partial u}{\partial y} = 5$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right)$.

1.3.22. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin 5x + e^{3y}$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = y^2$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 5x \frac{\partial u}{\partial x}$.

1.3.23. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x-y)$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u-4}{u+3} \frac{\partial u}{\partial y}$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \ln x \frac{\partial u}{\partial y}$.

1.3.24. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xe^x \frac{\partial u}{\partial y}$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{u-y}{u+y} \frac{\partial u}{\partial x} = 1$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4u = y$.

1.3.25. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \ln y \frac{\partial u}{\partial x} + 5$; á) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u-2x}{u+4x} \frac{\partial u}{\partial y}$; â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \ln 2y \frac{\partial u}{\partial x}$.

Завдання 4. Знайти розв'язок задачі Коші.

1.4.1. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x, x = 0, z = y^2$.

1.4.2. $x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, y = 1, x = t, z = t^2$.

1.4.3. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy, y = x, z = x^2$.

1.4.4. $z(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, x = 1, z = \sqrt{y}$.

1.4.5. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0, z = 0, xy = a^2$.

1.4.6. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, x = 0, y^2 = 2pz$.

1.4.7. $x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, y = 1, z = x^2$.

1.4.8. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, x = 2, z = y^2 + 1$.

1.4.9. $\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, y = x, z = x^3.$

1.4.10. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 (x - 3y), x = 1, yz + 1 = 0.$

1.4.11. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, y = -2, z = x - x^2.$

1.4.12. $z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz, x + y = 2, yz = 1.$

1.4.13. $(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y, z = y = -x.$

1.4.14. $\left(\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y\right) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \;\; y = -x, \;\; z = y.$

1.4.15. $z(-x + yz) \frac{\partial z}{\partial x} + (yz - 2x) \frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \quad z = 1, x = y.$

1.4.16. $(3x + 8y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x + 3y) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, x = y = -z.$

1.4.17. $(-y + z) \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = x + z, x + y = 2, z = y^2.$

1.4.18. $(4x - 5y) \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad z^2 = y, x - y = 2.$

1.4.19. $(x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (4y - 2x) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad z = x, y^2 = x.$

1.4.20. $y \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - x) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, x = -2, z = y(y - 1).$

1.4.21. $(3 - 2y) \frac{\partial z}{\partial x} + (-y + \sin z) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad z = 1, x + y = 1.$

1.4.22. $\left(y - x + e^z\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(x - y + e^z\right) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad z = 2y, x = -y.$

1.4.23. $\left(x + y + e^z\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(x + y - e^z\right) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad z = 3x, y = 5 - 2x.$

1.4.24. $(-y + \sin z) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + \cos z) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad z = 2 + y, x^2 = y.$

1.4.25. $\left(5x + 4y + e^z\right) \frac{\partial z}{\partial x} + (4x + 5y + 1) \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad z = x^2, y = \sqrt{x}.$

§ 2. Про задачі, що приводять до рівнянь у частинних похідних

Розв’язання диференціальних рівнянь у частинних похідних при додаткових початкових і граничних умовах у загальному випадку пов'язано з великими математичними труднощами. У класичному курсі математичної фізики вивчаються лише найпростіші диференціальні рівняння в частинних похідних, до яких приводить велика кількість задач фізики й техніки. Це лінійні рівняння 2-го порядку виду

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+C(x,y,z,t)u+g(x,y,z,t), \qquad (1.12)$$

де α, β, a – сталі. Якщо $g(x,y,z,t)=0$, то рівняння називається однорідним. Розглянемо приклади задач, що приводять до рівнянь типу (1.12).

2.1. Рівняння коливань струни

Струною називають тонку сильно натягнуту нитку, зроблену із пружного матеріалу. Передбачається, що струна має абсолютну гнучкість, тобто не чинить опору згину. Тобто якщо видалити частину струни, що лежить по одну сторону від якоїнебудь її точки, то сила натягу, яка замінює дію вилученої частини, скрізь буде спрямована по дотичній до лінії струни.

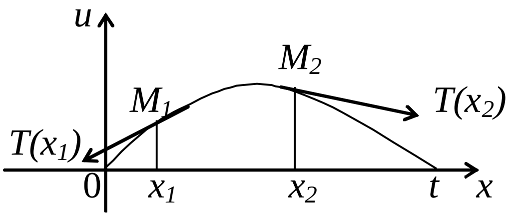


Рис. 1.1

Нехай у положенні рівноваги струна спрямована по осі *Ox*. Будемо розглядати тільки поперечні коливання струни, припускаючи, що рух відбувається в одній площині і всі точки струни рухаються перпендикулярно до осі *Ox* (рис. 1.1).

Позначимо через $u(x,t)$ відхилення точки струни в момент часу *t* від положення рівноваги. При кожному фіксованому значенні *t* графік функції $u(x,t)$ визначає форму струни в цей момент часу. Розглядаючи далі тільки малі коливання струни, будемо вважати, що відхилення $u(x,t)$, а також похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$ настільки малі, що їхніми квадратами й добутками можна знехтувати порівняно із самими цими величинами ($u^2 << u; (u'_x)^2 << u'_x$).

Виділимо довільну ділянку $\left(x_1,x_2\right)$ струни, що при її коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу *t* дорівнює

$$l' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x'^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = l\,,$$

внаслідок чого можна вважати, що в процесі малих коливань подовження ділянок струни не відбувається. Звідси, за законом Гука, виходить, що величина натягу *T* у кожній точці струни не змінюється з часом.

Таким чином, при прийнятих припущеннях зміною величини натягу струни, що виникає під час її руху, можна нехтувати порівняно з натягом в положенні рівноваги.

Покажемо, що величину натягу *T* можна вважати також не залежною від *x*, тобто $T\left(x\right)=T_0$. Дійсно, на ділянку M_1M_2 струни діють сили натягу, спрямовані вздовж дотичних до струни в точках M_1 і M_2, зовнішні сили й сили інерції. Сума проекцій на вісь *Ox* всіх цих сил повинна дорівнювати нулю. Оскільки розглядаємо тільки поперечні коливання, то сили інерції й зовнішні сили спрямовані паралельно осі Ou, тоді маємо, що

$$T\left(x_1\right)\cos\alpha\left(x_1\right)+T\left(x_2\right)\cos\alpha\left(x_2\right)=0,$$

де $\alpha\left(x\right)$ – кут між дотичною в точці з абсцисою *x* до струни в момент часу *t* з додатним напрямком осі *Ox*. Внаслідок малості коливань маємо, що

$$\cos\alpha\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha\left(x\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2}}\approx 1.$$

Отже, $T\left(x_1\right)\approx T\left(x_2\right)$. Звідси, через довільність x_1 і x_2, випливає, що величина натягу *T* не залежить від *x*. Таким чином, можна вважати, що $T \approx T_0$ для всіх значень *x* і *t*.

Перейдемо до виведення рівняння. На елемент струни $\left(x,x+\Delta x\right)$ діють сили натягу $\vec{T}\left(x+\Delta x,t\right),\ -\vec{T}\left(x,t\right)$ й зовнішня сила. Відповідно до закону Ньютона, сума цих сил повинна дорівнювати добутку маси цього елемента на прискорення, тобто $\vec{F}=m\vec{a}$. Проектуючи цю векторну рівність на вісь *u*, одержимо

$$T_0\sin\alpha\big|_{x_2=x+\Delta x}-T_0\sin\alpha\big|_{x_1=x}+F\left(x,t\right)\Delta x=\rho\left(x\right)\Delta x\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}, \qquad (1.13)$$

де $\rho\left(x\right)$ – щільність матеріалу струни.

Але в рамках наближення, яке розглядаємо,

$$\sin\alpha(x)=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\approx\mathrm{tg}\alpha\approx\frac{\partial u}{\partial x},$$

а тому з (1.13) маємо

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+F(x,t).$$

Переходячи до границі в останній рівності, коли $\Delta x\to 0$ одержимо

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t).$$

Це і є рівняння малих поперечних коливань струни. Якщо щільність ρ постійна, $\rho(x)=\rho$, то рівняння коливань струни набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f, \tag{1.14}$$

де $a^2=\frac{T_0}{\rho}$; $f=\frac{F}{\rho}$. Рівняння (1.14) будемо також називати одновимірним хвильовим рівнянням.

Якщо зовнішня сила відсутня, то $F(x,t)=0$. Тоді одержуємо рівняння вільних коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Рівняння (1.14) має нескінченну множину частинних розв'язків. Тому одного рівняння (1.14) недостатньо для повного опису руху струни. Потрібні ще деякі додаткові умови, що випливають із фізичного змісту задачі. Так у початковий момент $t=0$ потрібно задати положення й швидкість всіх точок струни

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{1.15}$$

Умови (1.15) називаються ***початковими***. Далі, через те що струна обмежена, потрібно вказати, що відбувається на її кінцях. Для закріпленої струни на кінцях повинно бути

$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0 \tag{1.16}$$

при $\forall t>0$. Умови (1.16) називаються ***крайовими***. Отже, фізичну задачу про коливання струни зведено до математичної задачі:

знайти розв'язки рівняння (1.14), які задовольняють початкові (1.15) і крайові умови (1.16). Одержана задача називається початково-крайовою.

Нехай один з кінців, наприклад лівий, з'єднаний із пружно закріпленим повзуном (рис. 1.2). Оскільки, як вже говорилося, $T_u = T\sin\alpha \approx T\mathrm{tg}\alpha = Tu'_x$, то II закон Ньютона для повзунка має вигляд

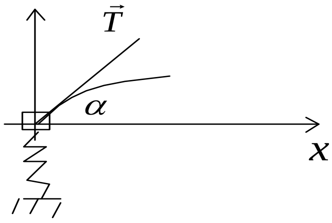


Рис. 1.2

$$mu''_{tt}(0,t) = Tu'_x(0,t) - cu(0,t),$$

де m – маса повзунка, а c – коефіцієнт пружності пружини. Якщо m величина, якою можна нехтувати, то одержуємо таку рівність:

$$u'_x(0,t) = \frac{c}{T}u(0,t).$$

Звісно, що повзунка може не бути, оскільки струну можна припаяти кінцем до самої пружини. Якщо пружина відсутня, то $c = 0$ і одержуємо так звані умови вільного краю

$$u'_x(0,t) = 0.$$

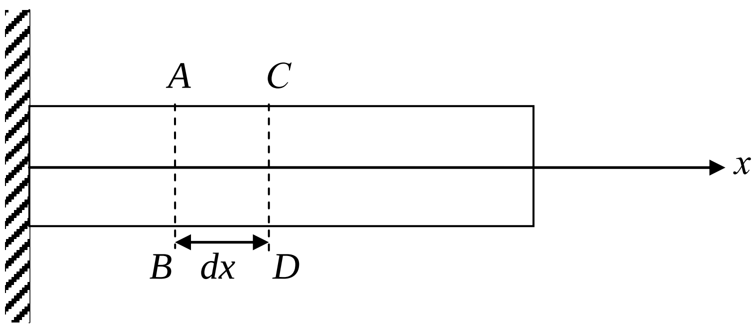
Зауваження. Виведення рівняння коливань струни можливо одержати за допомогою методів варіаційного числення.

2.2. Рівняння малих поздовжніх коливань пружного стрижня

Рівняння малих поздовжніх коливань пружного стрижня має вигляд:

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t),$$

де ρ – щільність матеріалу стрижня, $S(x)$ – площа поперечного перерізу стрижня й $E(x)$ – модуль Юнга. Виведемо це рівняння. Розглянемо прямолінійний стрижень, діаметр поперечного перерізу якого значно менше його довжини. Припустимо далі, що один кінець цього стрижня закріплений, а другий – вільний. Ці умови несуттєві й приймаються для визначеності.



Будемо вважати, що всі поперечні перерізи стрижня однакові. Виберемо вісь стрижня як лінію, що проходить через центри ваги поперечних перерізів. Координату уздовж осі стрижня позначимо x. Природно розглядати тонкий стрижень як матеріальну лінію, тобто об'єкт, позбавлений об'єму, але наділений масою. Масу стрижня зручно задавати за допомогою лінійної масової щільності: $dm = \rho S dx$. Якщо відтягнути уздовж осі x й відпустити правий кінець стрижня, то стрижень почне коливатися. Такі коливання називаються *поздовжніми коливаннями* стрижня. Змоделюємо цей стан. Для цього введемо функцію $u(x,t)$ – переміщення точки стрижня з координатою x в момент часу t уздовж осі стрижня. У процесі руху стрижня в момент часу t поперечний переріз AB стрижня зміститься уздовж осі на відстань $u(x,t)$ так, що його координата дорівнює $x+u(x,t)$. Поперечний переріз CD стрижня також зміститься, і його координата визначається як

$$x + dx + u(x+dx,t) = x + dx + u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx.$$

Відстань між перерізами AB й CD у момент часу t буде

$$\left[x + dx + u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right] - \left[x + u(x,t)\right] = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx.$$

Поздовжньою деформацією стрижня називається відносна зміна довжини нескінченно малих відрізків стрижня. У нашому випадку відносне подовження відрізка dx між перерізами AB й CD, відповідно до останньої формули, дорівнює

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Складемо рівняння руху стрижня. На елемент стрижня $(x, x+dx)$ діють сили натягу $\vec{T}(x+dx,t)$, $-\vec{T}(x,t)$ й зовнішня масова сила, що розподілена по довжині стрижня і змінюється з часом. Зусилля $\vec{T} = T(x,t)\vec{i}$ моделює вплив частини стрижня, що перебуває праворуч точки з координатою x, на частину стрижня, що перебуває ліворуч точки з координатою x. Якщо $T(x,t) > 0$, то зусилля T називається тим, що розтягує, інакше – тим, що стискає. Сума всіх цих сил, відповідно до закону Ньютона, повинна дорівнювати добутку маси розглянутого елемента на прискорення:

$$T(x+dx,t) - T(x,t) + F(x,t)dx = \rho(x)S(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx + F(x,t)dx = \rho(x)S(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + F(x,t) = \rho(x) S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Останнє рівняння містить дві невідомі функції: T, u. Таким чином, необхідна додаткова умова. Оскільки розглядаються малі поздовжні коливання, то використаємо закон Гука про пропорційність сили й переміщення:

$$T(x,t) = ES\varepsilon = ES\frac{\partial u}{\partial x},$$

де коефіцієнт пропорційності ES називається жорсткістю стрижня на розтягання.

Остаточно одержимо рівняння:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x,t),$$

що й було потрібно довести.

2.3. Рівняння поперечних коливань мембрани

Мембраною називають тонку пружну пластинку, що не чинить опору згину. Будемо вивчати її поперечні коливання. Відхилення в момент часу t точки (x,y) мембрани від площини xOy позначимо функцією $u(x,y,t)$.

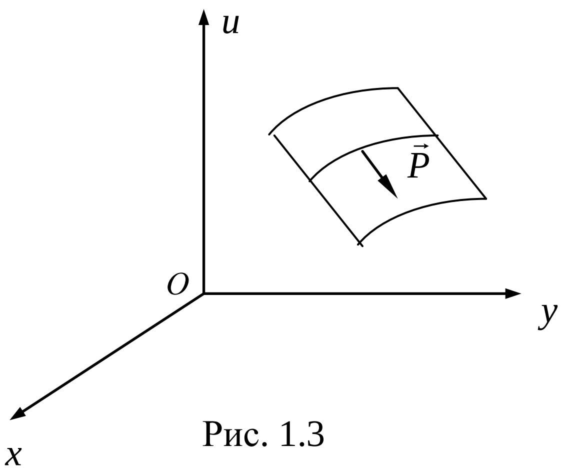


Рис. 1.3

Нехай мембрана перебуває під дією рівномірного натягу P, прикладеного до її країв. Тобто якщо її уявно поділити на дві частини деякою лінією, то сила впливу однієї частини на іншу, прикладена до даного елемента Δs подільної лінії, спрямована через відсутність опору згину, по нормалі до цієї лінії та лежить у дотичній площині до поверхні мембрани й дорівнює за величиною $P\Delta s$ (рис. 1.3).

Виділимо на мембрані (рис 1.4) довільну частину Σ із площею σ. Нехай D – проекція Σ на площину xOy, а S – її площа. Тоді за формулою для площі поверхні маємо

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + {u'_x}^2 + {u'_y}^2}\, dS.$$

Вважаючи коливання малими, будемо нехтувати величиною ${u'_x}^2 + {u'_y}^2$, тоді

$$\sigma = \iint_D dS = S.$$

Таким чином, у процесі малих коливань натяг P мембрани залишається постійним, і її площа не змінюється.

Нехай L' – контур, що обмежує поверхню Σ, а $\Delta s'$ – елемент дуги контуру L'. Нехай, далі, L і Δs – проекції контуру L' й елемента дуги $\Delta s'$ на площину xOy. Позначимо через $\alpha(x,y,t)$ кут нахилу до площини xOy вектора натягу, прикладеного в точці (x,y,u), а через $\vec{n}$ – напрямок зовнішньої нормалі до контуру L в точці (x,y) на рис. 1.4. Тоді, як відомо,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Але

$$\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2}}.$$

Отже, виходить, у рамках обраного ступеня точності, $\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha.$ Тому проекція вектора $\vec{P}$ на вісь Ou дорівнює

$$P_u = P\sin\alpha = P\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Отже, проекція на вісь Ou сили, прикладеної до елемента $\Delta s'$, дорівнює $P\dfrac{\partial u}{\partial n}\Delta s'$. Але тоді проекція на вісь Ou сумарної сили натягу, прикладеної до всього контуру L', дорівнює $P\int_{L'}\dfrac{\partial u}{\partial n}ds'$. Оскільки, за припущенням, $u_x'^2 + u_y'^2 = 0$, то $\cos\alpha = 1$. Тоді останній інтеграл дорівнює $P\int_{L}\dfrac{\partial u}{\partial n}ds$. Це криволінійний інтеграл 1-го роду, тобто інтеграл за довжиною дуги.

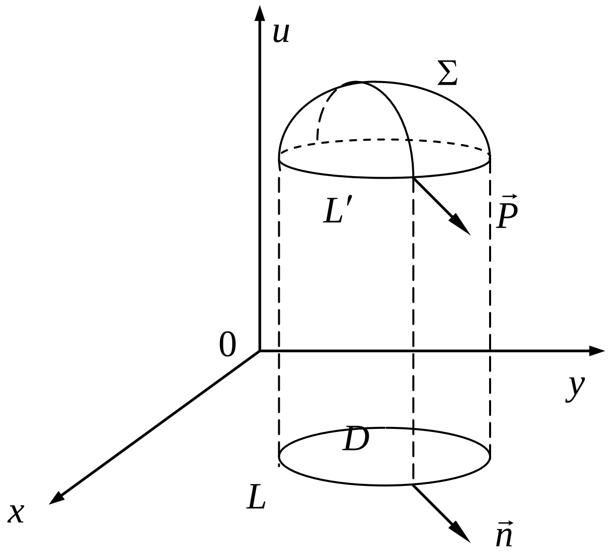


Рис. 1.4

Нехай φ – кут між вектором $\vec{n}$ і віссю Ox (рис. 1.5). Тоді, використовуючи формулу для похідної за напрямком, одержимо

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\varphi \right) ds,$$

оскільки

$$ds \cdot \cos\varphi = dy, \quad ds \cdot \sin\varphi = -dx,$$

то

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Останній інтеграл є вже криволінійним інтегралом 2-го роду. Застосовуючи до нього формулу Гріна

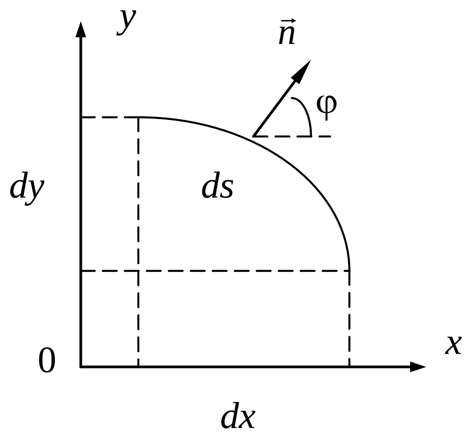


Рис. 1.5

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS,$$

будемо мати

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS.$$

Нехай $\rho(x,y)$ – поверхнева щільність мембрани. Тоді застосуємо до поверхні Σ другий закон Ньютона в проекції на вісь Ou:

$$\iint_D \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS = P \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS,$$

або

$$\iint_D \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dS = 0.$$

Оскільки область D – довільна, то остання рівність виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Припустимо, що мембрана однорідна, тобто $\rho(x,y) = \rho = \text{const}$. Вважаючи $\frac{P}{\rho} = a^2$, знаходимо остаточно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Це і є рівняння вільних малих поперечних коливань мембрани.
У випадку наявності зовнішніх сил будемо мати

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \qquad (1.17)$$

де $f(x,y,t)$ – зовнішня сила, що припадає на одиницю маси мембрани.

2.4. Телеграфне рівняння

Нехай є прямолінійний провідник, що займає відрізок $[0,l]$ осі Ox. У кожен момент часу t в кожній точці з абсцисою x задано струм i та напругу υ. Ці дві функції: $i(x,t)$ та $\upsilon(x,t)$ підлягають визначенню. При цьому повинні бути відомі чотири характеристики провідника: опір R, ємність C, самоіндукція L й витік A; всі ці величини розраховані на одиницю довжини. Провідник будемо вважати однорідним, тоді величини R,C,L і A є відомими сталими.

Виділимо на провіднику елемент $[x,x+dx]$. На його лівому кінці напруга дорівнює $\upsilon(x,t)$, а на правому – $\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}dx$. Отже, падіння напруги на даній ділянці є $-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}dx$. За законом Ома

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}dx = Rdx \cdot i + Ldx\frac{\partial i}{\partial t}.$$

Отже, маємо перше з рівнянь:

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = R \cdot i + L\frac{\partial i}{\partial t}.$$

Візьмемо тепер проміжок часу $[t,t+dt]$. Через лівий кінець елемента $[x,x+dx]$ входить за цей час кількість електрики idt, а через правий – $\left(i + \frac{\partial i}{\partial x}\right)dt$. Отже, усього ввійде кількість електрики $-\frac{\partial i}{\partial x}dxdt$. Ця кількість електрики йде на підняття потенціалу й на витік. Але підняття потенціалу дорівнює $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}dt$. Отже, на це збільшення потенціалу буде потрібно кількість електрики $Cdx + \frac{\partial \upsilon}{\partial t}dt$. Витік же, як відомо, пропорційний напрузі υ, довжині dx й часу dt, а значить він дорівнює $A\upsilon dxdt$.

Отже,

$$-\frac{\partial i}{\partial x}dxdt = Cdx\frac{\partial \upsilon}{\partial t}dt + A\upsilon dxdt,$$

тобто маємо друге рівняння

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = A\upsilon + C\frac{\partial \upsilon}{\partial t}.$$

Отже, отримуємо два рівняння:

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{1.18}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + A\upsilon. \tag{1.19}$$

Виключимо із цієї системи функцію $i(x,t)$.

Диференціюючи рівняння (1.18) за x, а рівняння (1.19) – за t, одержимо

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = R\dfrac{di}{dx} + L\dfrac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \\ -\dfrac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} + A\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} \end{cases}.$$

Звідси

$$-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = R\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} - AL\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$$

або, з урахуванням рівнянь (1.18) і (1.19), маємо

$$-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = -CR\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - AR\upsilon - CL\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} - AL\frac{\partial \upsilon}{\partial t},$$

тобто

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} + (AL + CR)\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + AR\upsilon. \tag{1.20}$$

Таке саме рівняння можна одержати й для $i(x,t)$.

Для спрощення розв'язку рівняння (1.20) припустимо, що $A = 0$, тобто будемо нехтувати витоком. Тоді замість (1.20) одержимо рівняння

$$CL\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} + CR\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}. \tag{1.21}$$

Це рівняння відрізняється від рівняння коливання струни тільки наявністю доданка $CR\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}$.

У рівнянні (1.21) введемо нову невідому функцію $u(x,t)$ за формулою

$$\upsilon = e^{\mu t}u, \tag{1.22}$$

де $\mu = \text{const}$. Підберемо μ так, щоб був відсутній член з $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

З (1.22) маємо

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \mu e^{\mu t} u + e^{\mu t}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = \mu^2 e^{\mu t} u + 2\mu e^{\mu t}\frac{\partial u}{\partial t} + e^{\mu t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Підставляючи це в (1.21) і скорочуючи на $e^{\mu t}$, одержимо

$$CL\left(\mu^2 u + 2\mu\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + CR\left(\mu u + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.23}$$

Вимагаючи, щоб коефіцієнт при $\frac{\partial u}{\partial t}$ дорівнював нулю, одержимо $2\mu CL + CR = 0$, звідки $\mu = -\frac{R}{2L}$. У цьому випадку замість (1.22) одержимо, що

$$\upsilon = e^{-\frac{R}{2L}t} u,$$

і рівняння (1.23) набуде вигляду

$$CL\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(CL\mu^2 + 2CR\mu\right)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

або

$$CL\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{CR^2}{4L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.24}$$

2.5. Рівняння теплопровідності

Нехай у деякому середовищі (тілі) є поле температури *u*, що змінюється з часом, тобто $u = u(x, y, z, t)$. Виділимо в розглянутому середовищі довільну замкнуту поверхню σ, яка обмежує тіло об'ємом *V*. На σ виділимо елементарну частину поверхні $d\sigma$, орт зовнішньої нормалі, до якої позначимо $\vec{n}^0$ $\left(\left|\vec{n}^0\right| = 1\right)$.

Підрахуємо кількість тепла dQ_1, що протікає за час *dt* через частину поверхні $d\sigma$ (для визначеності зсередини назовні). З фізики відомо, що ця кількість тепла dQ_1 пропорційна часу *dt*, площі $d\sigma$ й зміні температури *u* в напрямку нормалі до поверхні, тобто похідній $\frac{\partial u}{\partial n}$. Отже,

$$dQ_1 = -k\, dt\, d\sigma\frac{\partial u}{\partial n},$$

де *k* – коефіцієнт пропорційності, який називають коефіцієнтом внутрішньої теплопровідності. Знак мінус забезпечує додатність величини dQ_1, оскільки при перетіканні тепла зсередини назовні температура в напрямку зовнішньої нормалі падає й $\frac{\partial u}{\partial n}<0$.

Сумарна кількість тепла, що протікає через всю поверхню σ, визначається поверхневим інтегралом

$$Q_1 = -dt\iint_{\sigma} k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma. \qquad (1.25)$$

Виділимо тепер в об'ємі *V* елементарний об'єм *dV* і підрахуємо кількість тепла dQ_2, що втрачає об'єм *dV* за час *dt* через перетікання тепла крізь поверхню σ зсередини назовні. З фізики відомо, що ця кількість тепла пропорційна часу *dt*, масі тіла ($dm = \rho dV$, де ρ – щільність) і зміні температури тіла за одиницю часу, тобто похідній $\frac{\partial u}{\partial t}$. Отже, $dQ_2 = -cdt\rho dV\frac{\partial u}{\partial t}$, де *c* – коефіцієнт пропорційності, який називається питомою теплоємністю. Знак мінус забезпечує додатність dQ_2, оскільки якщо об'єм втрачає тепло, то його температура *u* падає і $\frac{\partial u}{\partial t}<0$.

Сумарна кількість тепла, що втрачена тілом за час *dt*, визначається інтегралом

$$Q_2 = -dt\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV. \qquad (1.26)$$

У розглянутому середовищі можливо так само виділення або поглинання тепла (через хімічні перетворення й інші причини).

Нехай відома функція $F(x,y,z,t)$ визначає кількість тепла, що виділяється (поглинається) за одиницю часу одиницею маси даного середовища. Тоді кількість dQ_3 тепла, яке виділяється в об'ємі *dV* за час *dt* виразиться як

$$dQ_3 = \rho F(x,y,z,t)dtdV,$$

а сумарна кількість тепла, що була втрачена об'ємом *V* за час *dt*, визначається об'ємним інтегралом

$$Q_3 = dt\iiint_V \rho F(x,y,z,t)dV. \qquad (1.27)$$

Скористаємося тепер рівнянням балансу тепла

$$Q_1 = Q_2 + Q_3,$$

яке означає, що сумарна кількість тепла, яке протікає крізь поверхню σ, складається з тепла, втраченого (набутого) тілом і тепла, що виділилося (поглинулося) у цьому тілі, припустимо, через хімічні перетворення.

Підставляючи вирази (1.25)–(1.27) для Q_1, Q_2 й Q_3, одержимо

$$\iint_{\sigma} k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint_{V}\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\rho F\right)dV . \tag{1.28}$$

З того, що $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\left(gradu,\vec{n}^{0}\right)=grad_n u$

і за теоремою Гаусса-Остроградського одержимо

$$\iint_{\sigma} k\cdot grad_n u d\sigma = \iiint_{V} div\left(k\cdot gradu\right)dV ,$$

причому $div\left(k\cdot gradu\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial z}\right).$

Тоді (1.28) можна записати так:

$$\iiint_{V}\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\rho F-div\left(k\cdot gradu\right)\right)dV=0.$$

Позначимо $\Phi\left(M\right)=c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}-\rho F-div\left(k\cdot gradu\right)$, тоді

$$\iiint_{V}\Phi\left(M\right)dV=0\Rightarrow\Phi\left(M\right)\equiv 0$$

(на підставі довільності виділеного об'єму *V* при неперервній підінтегральній функції). Дійсно, якщо припустити, що в деякій точці $M_0, \Phi\left(M_0\right)\neq 0$, наприклад $\Phi\left(M_0\right)>0$, то через неперервність функції $\Phi\left(M\right)$ існує такий об'єм V_1, що містить точку M_0, в якому $\Phi\left(M\right)>0\ \forall M\in V_1$, а тоді $\iiint_{V_1}\Phi\left(M\right)dV>0$, що суперечить умові.

Таким чином, одержуємо рівняння

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\rho F-div\left(k\cdot gradu\right)=0$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{c\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{c}F .$$

Це рівняння називається рівнянням теплопровідності.

Рівняння теплопровідності отримане у припущенні неперервної диференційованості параметра *k*, неперервності функцій F, c, ρ, а також неперервності *u* разом з її частинними похідними до другого порядку за координатами і першою похідною за часом.

Якщо фізичні параметри k, c, ρ постійні, то позначивши $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ й включивши множник $\frac{1}{c}$ до складу функції *F*, одержимо канонічну форму рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + F(x, y, z, t)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(x, y, z, t). \tag{1.29}$$

Якщо температура *u* є функцією часу *t* і тільки двох координат *x*, *y* (плоска задача), то рівняння спрощується й набуває вигляду

$$u'_t = a^2 \left(u''_{xx} + u''_{yy} \right) + F(x, y, t),$$

де $u = u(x, y, t)$.

Якщо ж температура *u* залежить від часу *t* і тільки від однієї просторової координати, наприклад *x* (одновимірна задача), то рівняння ще більше спрощується й набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \tag{1.30}$$

де $u = u(x, t)$.

Рівняння (1.30) описує поширення тепла в прямолінійному стержні, за напрямок якого прийнято вісь *Ox*.

Як вказувалося в § 1, рівняння в частинних похідних мають нескінченну множину розв’язків, що залежать від довільних функцій. Для виділення єдиного розв’язку необхідно на шуканий розв’язок диференціального рівняння накласти додаткові умови.

Для рівняння теплопровідності початкові умови задаються у вигляді $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$ та означають розподіл температури у всьому розглянутому об'ємі в початковий момент часу. На практиці найчастіше використовують такі крайові умови.

Крайові умови I роду

$$u\big|_S = f(M_S, t),$$

де *f* – задана функція точок M_S межі *S* і часу *t*. Ця умова відповідає заданню на межі *S* певного розподілу температури.

Задача розв’язку диференціального рівняння при крайових умовах I-го роду називається ***задачею Діріхле***.

Крайові умови II роду

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f\left(M_S, t\right),$$

де $\vec{n}$ – напрямок нормалі до межі S (звичайно зовнішньої). Ця умова відповідає заданню на межі S теплової течії, тому що $dQ = -kdtdS\frac{\partial u}{\partial n}$, тобто $\frac{\partial u}{\partial n}$ – пропорційно тепловій течії dQ.

Задача розв’язку диференціального рівняння при крайових умовах II-го роду називається ***задачею Неймана***.

Крайові умови III роду

$$\left.\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right]\right|_S = f\left(M_S, t\right),$$

де $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ (у найпростішому випадку α й β – сталі).

З'ясуємо фізичний зміст III крайової умови в теплових задачах. Припустимо, що крізь поверхню тіла має місце теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого u_0 розподілена за законом $u_0 = f\left(M, t\right)$. Кількість тепла dQ, що протікає крізь елемент $d\sigma$ поверхні σ за час dt, дорівнює

$$dQ = -kdtd\sigma\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_S}.$$

Цю ж кількість тепла можна виразити через різницю температур межі й навколишнього середовища:

$$dQ = k_1 dtd\sigma\left[\left.u\right|_{M_S} - f\left(M_S, t\right)\right],$$

де k_1 – коефіцієнт теплопередачі.

Прирівнюючи отримані для dQ вирази, одержимо

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_S} = k_1\left[\left.u\right|_{M_S} - f\left(M_S, t\right)\right]$$

або, з огляду на те, що ця рівність виконується для будь-якої точки поверхні S, маємо

$$\left.\left(k_1 u + k\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = k_1 f\left(M_S, t\right).$$

Таким чином, крайова умова III роду відповідає теплообміну із зовнішнім середовищем. Цю умову звичайно записують у вигляді

$$\left.\left(u + h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = f\left(M_S, t\right),$$

де $h = \dfrac{k}{k_1}$.

Якщо процес розподілу тепла стаціонарний, тобто температура u від часу не залежить ($u'_t = 0$), то рівняння теплопровідності набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f\left(x, y, z\right), \tag{1.31}$$

де $f\left(x, y, z\right) = -F\left(x, y, z\right)$ – відома функція координат.

Рівняння (1.31) називають неоднорідним рівнянням Лапласа, або ***рівнянням Пуассона***. Якщо в розглянутому середовищі відсутнє виділення (поглинання) тепла, то $f\left(x, y, z\right) \equiv 0$ й рівняння (1.31) набуде вигляду:

$$\Delta u = 0. \tag{1.32}$$

Рівняння (1.32) називається ***рівнянням Лапласа***. Отже, всі можливі стаціонарні процеси поширення тепла в однорідному середовищі описуються рівнянням Лапласа.

§ 3. Класифікація диференціальних рівнянь другого порядку з *n* незалежними змінними

У загальному випадку лінійне диференціальне рівняння другого порядку з n незалежними змінними має вигляд

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = g\left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \tag{1.33}$$

Припустимо, що коефіцієнти цього рівняння a_{ik}, b_i, c – сталі, при цьому будемо вважати, що $a_{ik} = a_{ki}$.

Перш ніж почати розв'язок такого рівняння, необхідно перетворити його до більш простого виразу за допомогою заміни змінних. Позначимо символічно другі похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ як добуток змінних $\xi_i \xi_k$, а перші $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – як ξ_i. Тоді першій сумі в рівнянні (1.33) можна поставити у відповідність квадратичну форму $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k$, яку методами лінійної алгебри можна звести до канонічного вигляду, тобто відповідною заміною змінних можна домогтися, щоб у канонічному вигляді коефіцієнти були б рівні «+1» або «-1». Якщо заміну змінних виконувати за допомогою перетворення $\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_{ij} \eta_j$, де ω_{ij} – сталі, то квадратична форма набуває вигляду

$$F=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k=\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_r\eta_r^2 \text{, де } \varepsilon_r=\begin{cases}+1\\-1\\0\end{cases}.$$

Дійсно, $F=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\eta_j\sum_{r=1}^{n}\omega_{kr}\eta_r=\|$ змінимо порядок підсумовування $\|=\sum_{j,r=1}^{n}\eta_j\eta_r\left(\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\omega_{ij}\omega_{kr}\right)$.

Вираз у круглих дужках відіграє роль коефіцієнтів, які дорівнюють 0, якщо $j\neq r$, оскільки квадратична форма повинна бути зведена до канонічного вигляду. Тому маємо

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\omega_{ij}\omega_{kr}=0, \qquad \text{при } j\neq r$$

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\omega_{ir}\omega_{kr}=\varepsilon_r.$$

Повернемося знову до вихідного рівняння (1.33). Зробимо заміну змінних таким чином

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ji}x_j,\ i=\overline{1,n}, \tag{1.34}$$

де $\{\omega_{ji}\}$ – матриця перетворення.

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, припускаючи, що u є функцією від y, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}.$$

Визначимо $\frac{\partial y_r}{\partial x_i}$, з огляду на те, що

$$y_r=\sum_{j=1}^{n}\omega_{jr}x_j, \qquad \frac{\partial y_r}{\partial x_i}=\omega_{ir},$$

тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_r}\omega_{ir}. \tag{1.35}$$

Знайдемо другу похідну

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}=\sum_{r,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_r\partial y_j}\omega_{ir}\omega_{kj}. \tag{1.36}$$

Підставимо знайдені вирази (1.35) і (1.36) для похідних у рівняння (1.33)

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{r,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_j} \omega_{ir}\omega_{kj} + \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_r} \omega_{ir} + cu - g\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0 .$$

Позначимо $J = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_r} \omega_{ir} + cu - g\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$, тоді

$$\sum_{r,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_j} \cdot \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\omega_{ir}\omega_{kj} + J = 0 .$$

Коефіцієнти перетворення (1.34) такі, що члени, які містять мішані похідні, зникають. У результаті одержуємо

$$\sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \frac{\partial^2 u}{\partial y_r^2} + J = 0$$

або у розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial y_p^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{p+1}^2} - ... - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{p+q}^2} + J = 0 . \quad (1.37)$$

Отримане рівняння називається канонічним.

Сума індексів $p+q$ дорівнює рангу матриці квадратичної форми, складеної з коефіцієнтів a_{ij} при похідних другого порядку. Очевидно, що $p + q \le n$.

Кожне лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами характеризується такими арифметичними ознаками.

1. Число n визначає кількість змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

2. Числа p і q збігаються з кількістю додатних і від’ємних коефіцієнтів при квадратах у зведеній до канонічного вигляду квадратичній формі, утвореній коефіцієнтами при других похідних.

Класифікація цих рівнянь виконується таким чином:

1. Якщо $q = 0$ й $p = n$, тобто у канонічному рівнянні немає від’ємних і нульових коефіцієнтів, то рівняння (1.33), а отже, й (1.37) називаються рівняннями ***еліптичного*** типу.

2. Якщо $q>0$, $p>0$, $p+q = n$, тобто нульових коефіцієнтів немає, то рівняння називається рівнянням ***гіперболічного*** типу.

3. Якщо $p+q<n$, то рівняння називається рівнянням ***параболічного*** типу.

Застосуємо цю класифікацію до розглянутих раніше рівнянь: хвильового, теплопровідності й Пуассона. Рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\left(x, t\right).$$

Тут $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$, отже це рівняння гіперболічного типу.

Рівняння коливань мембрани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g\left(x, y, t\right).$$

У цьому рівнянні $n = 3$, $p = 2$, $q = 1$, тобто також маємо рівняння гіперболічного типу.

Рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g\left(x, y, z, t\right);$$

$n = 4$, $p = 3$, $q = 0$, отже, це рівняння параболічного типу.

Рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g\left(x, y, z\right);$$

$n = 3$, $p = 3$, $q = 0$, тобто це рівняння еліптичного типу.

§ 4. Зведення до канонічної форми диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними

Велика кількість фізичних задач приводить до диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку із двома незалежними змінними. Дуже часто ці рівняння є лінійними відносно старших похідних (такі рівняння називаються квазілінійними). У загальному випадку такі рівняння можуть бути подані, як

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \tag{1.38}$$

Лінійні рівняння другого порядку наводяться у вигляді

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E\frac{\partial u}{\partial x} + F\frac{\partial u}{\partial y} + Ku + G = 0, \tag{1.39}$$

де A, B, C, E, F, K, G – деякі функції змінних x, y.

Будь-яке рівняння (1.38) або (1.39) за допомогою заміни незалежних змінних може бути зведено до більш простого – канонічного вигляду. Із цією метою зробимо в рівнянні (1.38) заміну незалежних змінних за формулами

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Вважаючи функції φ й ψ поки що невідомими, будемо вимагати, щоб вони були неперервні разом зі своїми похідними першого й другого порядків, установлювали взаємно однозначну відповідність між точками (ξ,η) й (x,y) відповідних областей. Аналітично остання умова співпадає з вимогою

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.41}$$

тобто якобіан в області перетворення не дорівнює нулю. Перейдемо в (1.38) до нових незалежних змінних ξ й η.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Аналогічно, знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}.$$

Підставляючи ці значення похідних у рівняння (1.38), одержимо перетворене рівняння, яке також лінійне і має вигляд

$$\bar{A}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\bar{F}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,$$

де

$$\bar{A}=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\bar{B}=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+B\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right)+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right);$$

$$\bar{C}=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

Безпосередньою перевіркою можна встановити справедливість тотожності

$$\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} \equiv \left(B^2 - AC\right)\left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right]^2. \qquad (1.42)$$

Тепер можемо прийняти таку класифікацію рівнянь виду (1.38).

Якщо в деякій області Ω дискримінант $\Delta = B^2 - AC$ додатний $(\Delta > 0)$, то рівняння (1.38) називається ***гіперболічним*** в Ω (або гіперболічного типу). Якщо дискримінант від'ємний $(\Delta < 0)$, то рівняння (1.38) називається ***еліптичним*** в Ω (еліптичного типу). Якщо дискримінант дорівнює нулю $(\Delta \equiv 0)$ у всіх точках області Ω, то рівняння називається ***параболічним*** в Ω (параболічного типу). З тотожності (1.42) випливає, що при заміні незалежних змінних за формулами (1.40) тип рівняння (1.38) не змінюється.

Для кожного типу рівнянь існує своя канонічна форма, яка узгоджується з визначеннями §3.

1. Якщо рівняння (1.38) гіперболічне в області Ω, то існують такі функції $\varphi(x,y)$ й $\psi(x,y)$, що заміною змінних (1.40) рівняння (1.38) приводиться до найпростішої форми

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad (1.43)$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0, \qquad (1.44)$$

які називаються ***канонічними.***

2. Канонічний вигляд рівнянь еліптичного типу подається як

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

3. Канонічний вигляд рівнянь параболічного типу є таким:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Опишемо процедуру пошуку функцій $\xi = \varphi(x,y)$ і $\eta = \psi(x,y)$, за допомогою яких може бути виконане спрощення.

4.1. Зведення до канонічного вигляду рівнянь гіперболічного типу

1) Якщо $A=C=0$ в області Ω, то B не перетворюється в нуль у точках цієї області. Розділивши обидві частини рівняння (1.38) на $2B$, одержимо канонічну форму (1.43).

2) Нехай $A^2+C^2\neq 0$ у точках області Ω. Для визначеності будемо вважати, що $A\neq 0$. Виберемо $\varphi(x,y)$ й $\psi(x,y)$ у формулах (1.40) такими, щоб коефіцієнти $\overline{A},\overline{C}$ перетвореного рівняння дорівнювали 0, тобто $\varphi(x,y)$ й $\psi(x,y)$ були розв'язками рівнянь

$$\begin{gathered}A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0;\\ A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=0.\end{gathered}\qquad(1.45)$$

Рівняння (1.45) можна записати у вигляді

$$\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0.$$

Отримане рівняння розпадається на два:

$$\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0,$$

$$\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0.$$

Для інтегрування одержаних рівнянь складемо відповідну їм систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}},$$

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}},$$

яка еквівалентна одному рівнянню

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0.\qquad(1.46)$$

Рівняння (1.46) має ключове значення для розв'язку цієї задачі й називається характеристичним рівнянням. Очевидно, що це рівняння розпадається на два рівняння, якщо його розв'язати відносно $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

Якщо $\Delta=B^2-AC>0 \ \forall(x,y)\in\Omega$, то існує два дійсних розв'язки рівняння (1.46)

$$\varphi(x,y)=C_1, \ \psi(x,y)=C_2.$$

Ці розв'язки називаються ***характеристиками.*** Таким чином, у випадку рівнянь гіперболічного типу існує два сімейства характеристик. Якщо зробити заміну змінних за допомогою знайдених характеристик, тобто покласти

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y),$$

то коефіцієнти $\overline{A},\overline{C}$ перетворюються в нуль, і рівняння набуває канонічного вигляду.

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

і знайти його розв'язок.

Розв'язання. У цьому випадку $A=1,\ B=-\sin x,\ C=-\cos^2 x$. Складемо дискримінант

$$B^2-AC=\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1>0.$$

Отже, дане рівняння є рівнянням гіперболічного типу. Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0,$$

тобто

$$dy^2+2\sin x\,dxdy-\cos^2 x\,dx^2=0$$

або

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\sin x\frac{dy}{dx}-\cos^2 x=0.$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x\pm\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=-\sin x\pm 1.$$

Звідки

$$y=\int(-\sin x\pm 1)dx.$$

Таким чином, характеристики рівняння мають вигляд

$$y=\cos x+x+C_1,$$

$$y=\cos x-x+C_2.$$

Зробимо заміну змінних за допомогою отриманих характеристик, а саме покладемо

$$\xi(x,y) = y - \cos x - x,$$
$$\eta(x,y) = y - \cos x + x.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\sin x - 1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\sin x + 1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\sin x - 1)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin x - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\sin x + 1)\right] + \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi} +$$

$$= (\sin x + 1)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\sin x - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin x + 1)\right] + \cos x \frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin x - 1)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\sin^2 x - 1\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin x + 1)^2 + \cos x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (\sin x - 1)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] + (\sin x + 1)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin x - 1) + 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin x + 1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Підставимо отримані вирази у вихідне рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[(\sin x - 1)^2 - 2\sin x(\sin x - 1) - \cos^2 x\right] +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left[\sin^2 x - 1 - 2\sin^2 x - \cos^2 x\right] +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[(\sin x + 1)^2 - 2\sin x(\sin x + 1) - \cos^2 x\right] +$$

$$+\cos x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \cos x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[\sin^2 x - 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x\right] -$$

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 2\sin x - \cos^2 x\right] = 0.$$

Остаточно одержимо

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

Це рівняння легко інтегрується, оскільки

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,$$

то $\frac{\partial u}{\partial\eta}=C_1(\eta)$.

Звідси $u=\int C_1(\eta)d\eta+C_2(\xi)=C_3(\eta)+C_2(\xi)$.

Відповідь: $u=C_3(y-\cos x+x)+C_2(y-\cos x-x)$.

4.2. Зведення до канонічного вигляду рівнянь параболічного типу

Нехай $B^2-A\cdot C=0$.

Зробимо заміну змінних

$$\xi=\varphi(x,y),\ \ \eta=\psi(x,y).$$

Тоді, як було зазначено раніше, після перетворення до нових незалежних змінних буде виконуватися тотожність

$$\bar{B}^2-\bar{A}\cdot\bar{C}=\left(B^2-A\cdot C\right)\left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right]^2,$$

звідки

$$\bar{B}^2-\bar{A}\cdot\bar{C}=0.$$

Отже,

$$\bar{B}^2=\bar{A}\cdot\bar{C}.$$

Якщо функцію $\xi(x,y)$ вибрати так, щоб вона збігалася з однією з характеристик, тобто була розв'язком диференціального (характеристичного) рівняння

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0,$$

то коефіцієнт $\bar{A}=0$, оскільки $\xi(x,y)$ буде розв'язком рівняння

$$\bar{A}=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=0.$$

Але тоді й $\bar{B}=0$.

Таким чином, якщо за другу функцію $\eta=\eta(x,y)$ виберемо довільну функцію, яка задовольняє взаємно однозначній відповідності точок (ξ,η) й (x,y), тобто таку, що задовольняє всюди в області умові

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то вихідне рівняння буде зведено до вигляду

$$\bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\bar{F}=0.$$

Після ділення на $\bar{C}$ остаточно одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (1.47)$$

Рівняння (1.47) співпадає з канонічною формою рівняння параболічного типу.

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial xy}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad x>0$$

і знайти його розв’язок.

Розв’язання. З рівняння маємо, що $y\neq 0$, тому що в протилежному випадку рівняння не потрібно розв’язувати (очевидно $u=Ax+B$).

$$A=x^2, B=xy, C=y^2;$$

$$B^2-AC=x^2y^2-x^2y^2=0.$$

Отже, дане рівняння є рівнянням параболічного типу. Складемо характеристичне рівняння

$$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0;$$

$$(xdy-ydx)^2=0 \quad\Rightarrow\quad xdy=ydx \;\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\frac{y}{x}=c.$$

Нехай функція $\xi=\xi(x,y)$ співпадає з отриманою характеристикою, тобто

$$\xi=\xi(x,y)=\frac{y}{x}.$$

Виберемо функцію $\eta=\eta(x,y)$ так, щоб вона була якомога простішою і щоб якобіан перетворення був відмінний від нуля. Наприклад, покладемо $\eta(x,y)=y$. Тоді всюди в розглянутій області $x>0$ $(y\neq 0)$.

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0.$$

Виконаємо заміну змінних :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 0 = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -y\left[-2\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right] = \frac{y}{x^3}\left[2\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right];$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{y}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Підставляючи отримані вирази у вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Отримане рівняння легко інтегрується

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = C_1(\xi); \qquad u = \int C_1(\xi)d\eta + C_2(\xi) = C_1(\xi)\cdot\eta + C_2(\xi),$$

де $C_1(\xi)$ і $C_2(\xi)$ – довільні функції.

Повертаючись до старих змінних, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u = C_1\left(\frac{y}{x}\right)\cdot y + C_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

4.3. Зведення до канонічного вигляду рівнянь еліптичного типу

Нехай $B^2 - A\cdot C < 0$, а отже, і $\overline{B}^2 - \overline{A}\cdot\overline{C} < 0$.

Тоді розв'язками характеристичного рівняння будуть комплексно спряжені функції φ й $\overline{\varphi}$. Якщо перейти до комплексних змінних $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \overline{\varphi}(x,y)$, то, відповідно до загальної теорії, вихідне рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

тобто до такої ж форми, як і гіперболічне рівняння, однак функція Φ буде комплексною функцією, що залежить від комплексних змінних. Щоб залишитися в дійсній області, зробимо ще одну заміну змінних

$$\alpha = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}, \qquad \beta = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i},$$

де α і β – нові змінні. Звідси

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{Re}\varphi = \operatorname{Re}\xi \\ \beta = \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\xi \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = \alpha + \beta i = \xi \\ \overline{\varphi} = \alpha - \beta i = \eta \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \dfrac{\xi - \eta}{2i} \end{cases}.$$

Після заміни змінних одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{2i};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\left(-\frac{1}{2i}\right)\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\cdot\left(-\frac{1}{2i}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{4i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right).$$

Таким чином, рівняння зведено до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right),$$

який збігається з канонічною формою рівнянь еліптичного типу.

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x > 0.$$

Розв'язання. $A = 1$, $B = 0$, $C = x^2$.

$B^2 - AC = -x^2 < 0$.

$dy^2 + x^2 dx^2 = 0$;

$(dy - xidx)(dy + xidx) = 0$;

$dy = i \cdot x \cdot dx$, $\quad dy = -i \cdot x \cdot dx$;

$$y = i\frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = -i\frac{x^2}{2} + C_2;$$

$$C_1 = y - i\frac{x^2}{2}; \quad C_2 = y + i\frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \xi = y - i\frac{x^2}{2}; \quad \eta = y + i\frac{x^2}{2}.$$

Виконаємо заміну змінних за допомогою таких формул перетворення:

$\alpha = \operatorname{Re}\xi = y; \quad \beta = \operatorname{Im}\xi = \dfrac{x^2}{2};$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 0 + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\cdot x; \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1;$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial \beta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\cdot 0 \cdot x + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} x^2 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\cdot x^2 + \dfrac{\partial u}{\partial \beta};$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}.$

Підставимо у вихідне рівняння:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\cdot x^2 + \dfrac{\partial u}{\partial \beta} + x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0;$

$x^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) + \dfrac{\partial u}{\partial \beta} = 0;$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \dfrac{1}{2\beta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$

Таким чином, *для зведення до канонічного вигляду диференціального рівняння 2-го порядку у частинних похідних для випадку функції двох змінних необхідно*:

1) визначити тип цього рівняння за допомогою дискримінанта $\Delta = B^2 - AC$;

2) скласти характеристичне рівняння

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0$$

(зверніть увагу на знак перед $2B$ та подання коефіцієнтів A й C порівняно з вихідним рівнянням (1.38);

3) знайти розв’язки характеристичного рівняння, тобто знайти характеристики

$$\varphi(x, y) = C_1;$$

$$\psi(x, y) = C_2;$$

4)

► для рівнянь гіперболічного типу покласти

$$\xi(x, y) = \varphi(x, y);$$

$$\eta(x, y) = \psi(x, y).$$

► Для рівнянь параболічного типу покласти

$$\xi(x, y) = \varphi(x, y),$$

а як $\eta(x,y)$ вибрати, по можливості, будь-яку просту, двічі неперервно диференційовану функцію, що задовольняє умову (1.41).

► Для рівнянь еліптичного типу покласти

$$\xi(x,y) = \mathrm{Re}\,\varphi(x,y);$$

$$\eta(x,y) = \mathrm{Im}\,\varphi(x,y);$$

5) виконати заміну змінних, користуючись правилом диференціювання складної функції й підставити отримані вирази для похідних, функції, а також для незалежних змінних у вихідне рівняння. Після зведення подібних рівняння повинне прийняти канонічний вигляд.

Зауваження. Тип диференціального рівняння може бути різним у різних областях.

4.4. Застосування системи MAPLE для зведення рівнянь другого порядку до канонічного вигляду

Для розв'язку математичних задач можна використовувати різні комп'ютерні програми. Скористаємося однією з таких програм для розв'язку задач за курсом математичної фізики. У системі комп'ютерної математики MAPLE 6 розроблений пакет PDEtools, що дозволяє виконувати дії над диференціальними рівняннями в частинних похідних. Зокрема, з його допомогою можна зробити перехід до інших змінних. Наприклад, щоб знайти оператор Лапласа в полярній системі координат, необхідно записати таке:

```
> restart:with(PDEtools,dchange);
PDE := diff(f(x,y),x,x)+diff(f(x,y),y,y);
```

$$[dchange]$$

$$PDE := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{f}(x,y)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{f}(x,y)\right)$$

```
> itr := { rho=sqrt(x^2+y^2),phi=arctan(y/x)};
tr:=solve(itr,{x,y}):tr1:=dchange(tr,PDE): simplify(tr1);
# вираз змінних x,y; заміна змінних; спрощення
```

$$itr := \left\{\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\mathrm{f}(\phi,\rho)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\mathrm{f}(\phi,\rho)\right)\rho + \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\mathrm{f}(\phi,\rho)\right)\rho^2}{\rho^2}$$

Кожну задачу найкраще починати з оператора restart. Далі підключається пакет PDEtools і задається диференціальний оператор PDE. Визначаються формули переходу від старих координат x, y до нових ρ, ϕ і за допомогою функції solve знаходимо зворотний зв'язок. Нарешті виконуємо заміну змінних і спрощуємо отриманий вираз.

У лабораторній роботі 2 необхідно зводити диференціальні рівняння у частинних похідних до канонічного вигляду. Для цього, по-перше, обчислюється дискримінант $\Delta = B^2 - AC$. Далі визначається тип заданого рівняння залежно від знака Δ. Складається характеристичне рівняння, розв’язуючи яке знаходимо два звичайних диференціальних рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}$. Одержуємо два сімейства характеристик і робимо заміну змінних. Реалізуємо за допомогою системи MAPLE усе вищезгадане у таких задачах.

Задача 1. Звести до канонічного вигляду рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв’язання.

> restart:with(PDEtools,dchange);
A:=1;B:=-cos(x);C:=-(3+sin(x)^2);
F:=-y*diff(u(x,y),y); # частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial y}$
PDE:=A*diff(u(x,y),x,x)+2*B*diff(u(x,y),x,y)+C*diff(u(x,y),y,y)+F=0;

$$A := 1$$

$$B := -\cos(x)$$

$$C := -3 - \sin(x)^2$$

$$F := -y\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x, y)\right)$$

$$PDE := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x, y)\right) - 2\cos(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x, y)\right) + (-3 - \sin(x)^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x, y)\right) - y\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x, y)\right) = 0$$

> **Delta:=simplify(B^2-A*C);** # спрощення виразу

$$\Delta := 4$$

> **ode1:=diff(y(x),x)=subs(y=y(x),(B+sqrt(Delta))/A);**
ode2:=diff(y(x),x)=subs(y=y(x),(B-sqrt(Delta))/A);

побудова диференційних рівнянь: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}$

$$ode1 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = -\cos(x) + 2$$

$$ode2 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = -\cos(x) - 2$$

> **sol1:=dsolve(ode1);sol2:=dsolve(ode2);**

розв’язання цих диференційних рівнянь

$$sol1 := \mathrm{y}(x) = -\sin(x) + 2\,x + \_C1$$

$$sol2 := \mathrm{y}(x) = -\sin(x) - 2\,x + \_C1$$

> **C1:=solve(sol1,_C1);C2:=solve(sol2,_C1);**

$$C1 := \mathrm{y}(x) + \sin(x) - 2\,x$$

$$C2 := \mathrm{y}(x) + \sin(x) + 2\,x$$

> **subs(y(x)=y); itr := {xi=subs(y(x)=y,C1),eta=subs(y(x)=y,C2)};**

підстановка замість функції y(x) змінної y

tr:=solve(itr,{x,y}):tr1:=dchange(tr,PDE): PDE1:=simplify(tr1);

$$\mathrm{y}(x) = y$$

$$itr := \{\eta = y + \sin(x) + 2\,x,\ \xi = y + \sin(x) - 2\,x\}$$

$$PDE1 := -16\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) - \frac{1}{2}\,\xi\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) - \frac{1}{2}\,\xi\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) - \frac{1}{2}\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) - \frac{1}{2}\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) = 0$$

> **PDE1/(-16):**
collect(%,diff(u(eta,xi),eta)):collect(%,diff(u(eta,xi),xi));

зведення подібних

$$\left(\frac{1}{32}\,\xi + \frac{1}{32}\,\eta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) + \left(\frac{1}{32}\,\xi + \frac{1}{32}\,\eta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\,\mathrm{u}(\eta,\xi)\right) = 0$$

У цій задачі $\Delta > 0$, отже, вихідне рівняння має гіперболічний тип. Останнє рівняння має канонічний вигляд.

Задача 2. Звести до канонічного вигляду таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Розв’язання.

> **restart:with(PDEtools,dchange);**

$$[dchange]$$

> **A:=1;B:=-x;C:=x^2;**
F:=0*diff(u(x,y),x)-2*diff(u(x,y),y);
PDE:=A*diff(u(x,y),x,x)+2*B*diff(u(x,y),x,y)+C*diff(u(x,y),y,y)+F=0;

$$A:=1$$

$$B:=-x$$

$$C:=x^2$$

$$F:=-2\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right)$$

$PDE:=$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right)-2\,x\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right)+x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right)-2\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right)=0$$

> **Delta:=simplify(B^2-A*C);**

$$\Delta:=0$$

> **ode1:=diff(y(x),x)=subs(y=y(x),(B+sqrt(Delta))/A);**

$$ode1:=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)=-x$$

> **sol1:=dsolve(ode1);C1:=solve(sol1,_C1);**

$$sol1:=\mathrm{y}(x)=-\frac{1}{2}x^2+\_C1$$

$$C1:=\mathrm{y}(x)+\frac{1}{2}x^2$$

> **itr := { xi=subs(y(x)=y,C1),eta=x};**
tr:=solve(itr,{x,y}):tr1:=dchange(tr,PDE): PDE1:=simplify(tr1);

$$itr:=\{\eta=x,\ \xi=y+\frac{1}{2}x^2\}$$

$$PDE1:=\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\mathrm{u}(\eta,\xi)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{u}(\eta,\xi)\right)=0$$

Задача 3. Звести до канонічного вигляду таке рівняння:

$$\left(1+x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Розв'язання.

```
> restart:with(PDEtools,dchange);
A:=1+x^2;B:=0;C:=(1+y^2);
F:=x*diff(u(x,y),x)+y*diff(u(x,y),y);
PDE:=A*diff(u(x,y),x,x)+2*B*diff(u(x,y),x,y)+C*diff(u(x,y),y,y)+F=0;
```

$$[dchange]$$

$$A := 1 + x^2$$

$$B := 0$$

$$C := 1 + y^2$$

$$F := x\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + y\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right)$$

$$PDE := (1+x^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + (1+y^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{u}(x,y)\right) + x\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,y)\right) + y\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,y)\right) = 0$$

```
> Delta:=simplify(B^2-A*C);
```

$$\Delta := -(1+x^2)(1+y^2)$$

```
> ode1:=(diff(y(x),x)=subs(y=y(x),simplify((B+sqrt(Delta))/A,power,
symbolic)));
ode2:=(diff(y(x),x)=subs(y=y(x),simplify((B-sqrt(Delta))/A,power,
symbolic)));
```

$$ode1 := \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x) = \frac{I\sqrt{1+\mathrm{y}(x)^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$ode2 := \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x) = \frac{-I\sqrt{1+\mathrm{y}(x)^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

```
> sol1:=dsolve(ode1);sol2:=dsolve(ode2);
```

$$sol1 := \mathrm{y}(x) = I\sin(\mathrm{arcsinh}(x) + \_C1)$$

$$sol2 := \mathrm{y}(x) = -I\sin(\mathrm{arcsinh}(x) + \_C1)$$

$\mathrm{arcsinh}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ – ареасинус, функція обернена до

гіперболічного синусу $y=\mathrm{sh}x$

```
> C1:=solve(sol1,_C1);
```

$$C1 := -\operatorname{arcsinh}(x) - I \operatorname{arcsinh}(y(x))$$

```
> itr := { alpha=-arcsinh(x),beta=-arcsinh(y)};
tr:=solve(itr,{x,y}):tr1:=dchange(tr,PDE): PDE1:=simplify(tr1);
```

$$itr := \{\alpha = -\operatorname{arcsinh}(x), \beta = -\operatorname{arcsinh}(y)\}$$

$$PDE1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \mathrm{u}(\alpha, \beta)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \mathrm{u}(\alpha, \beta)\right) = 0$$

Лабораторна робота 2
Зведення до канонічного вигляду рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними

Завдання 1. Звести до канонічного вигляду такі рівняння

2.1.1.

а) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

â) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2.1.2.

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos x \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

á) $\sin^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2.1.3.

а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2.1.4.

а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

â) $\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ |x|<1.$

2.1.5.

а) $4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0,$

á) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2.1.6.

а) $(2-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}u=0\quad(2-x>0),$

á) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

â) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

2.1.7.

а) $\left(4-x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{4}u=0\quad\left(4-x^2>0\right),$

á) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial x}+ye^{\frac{y}{x}}=0,$

â) $2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2.1.8.

a) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}+4y\frac{\partial u}{\partial y}+16x^4u=0,\ \left(x>0,y>0\right),$

á) $xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0,$

â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(2-\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2.1.9

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\left(1+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

á) $tg^2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2ytgx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+tg^3x\frac{\partial u}{\partial x}=0,$

â) $\left(1+x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\left(1+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

2.1.10.

a) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1+y\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2.1.11.

a) $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$

á) $e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2e^{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

â) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

2.1.12.

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

á) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,$

â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

2.1.13.

a) $4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

á) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

â) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(x+1)\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

2.1.14.

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x>0,\ y<0),$

á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

â) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

2.1.15.

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x<0,\ y<0),$

á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

â) $\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2.1.16.

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x>0,\ y>0),$

á) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(3+\sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

â) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\frac{\partial u}{\partial x}-15\frac{\partial u}{\partial y}-50u+x-2y=0.$

2.1.17.

a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(x-1\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \left(x>0\right),$

á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-24\dfrac{\partial u}{\partial x}+42\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\left(x+y\right)=0,$

â) $tg^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2ytgx\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+tg^3 x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

2.1.18.

a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(x+1\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \left(x<0\right),$

á) $\left(1+x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1+y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,$

â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\dfrac{\partial u}{\partial x}+9\dfrac{\partial u}{\partial y}-9u=0.$

2.1.19.

a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \left(x>0\ y>0\right),$

á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-24\dfrac{\partial u}{\partial x}+42\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\left(x+y\right)=0,$

â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

2.1.20.

à) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \left(x>0\ y<0\right),$

á) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\dfrac{\partial u}{\partial x}+4\dfrac{\partial u}{\partial y}-2u=0,$

â) $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\dfrac{\partial u}{\partial x}-15\dfrac{\partial u}{\partial y}-50u+x-2y=0.$

2.1.21.

à) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+13\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+24\dfrac{\partial u}{\partial y}-9u+9\left(x+y\right)=0,$

â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2.1.22.

à) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x < 0),$

á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial x} - 15\dfrac{\partial u}{\partial y} + 27x = 0,$

â) $16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

2.1.23.

à) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (y > 0),$

á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

â) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2.1.24.

à) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0),$

á) $\left(1 + x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\left(1 + x^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,$

â) $xy^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2 y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

2.1.25.

à) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0 \quad y > 0),$

á) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0,$

â) $e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{x+y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xu = 0.$

Розділ ІІ. Методи розв'язку задач математичної фізики в обмежених областях

§ 1. Проблеми математичної фізики для обмеженої області. Загальна схема застосування методу Фур'є

Кожна задача математичної фізики ставиться як задача розв'язку деякого рівняння у частинних похідних при певних додаткових умовах, які в більшості випадків диктуються фізичними властивостями системи.

Крайова задача повинна бути поставлена так, щоб:

1) розв'язок існував,

2) розв'язок був єдиним,

3) розв'язок був стійким.

Вимога стійкості розв'язку пояснюється тим, що в основі визначення фізичних величин лежить процес вимірювання, що завжди пов'язаний з деякою похибкою. Очевидно, з похибкою визначаються й дані задачі, у тому числі і крайові умови можуть наближено моделювати реальні умови. Тому виникає запитання: як похибка у даних крайової задачі впливає на її розв'язок? Очевидно, якщо незначні зміни початкових даних приведуть до незначної зміни розв'язку крайової задачі, то отриманий розв'язок можна вважати стійким, що правильно відбиває фізичний процес. У протилежному випадку знайдений розв'язок не можна вважати задовільним.

Якщо поставлена задача задовольняє вимогам 1–3, то її називають коректно поставленою проблемою.

Будемо розглядати процес, що описується однією функцією u (u – температура або відхилення при коливанні й т.ін., тобто u є функцією, що характеризує задане поле). Нехай u задовольняє такому диференціальному рівнянню

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + g(x,y,z,t). \qquad (2.1)$$

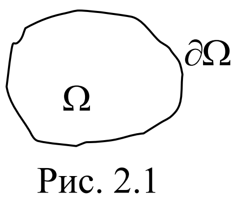


Рис. 2.1

Оператор L не містить змінної за часом t. Будемо вважати, що розглянутий процес відбувається в скінченій області Ω, яка обмежена поверхнею $\partial\Omega$ (рис. 2.1). У цьому випадку, щоб знайти частинний розв'язок рівняння, необхідно визначити додаткові умови, які складаються із початкових умов, а також умов на межі області, тобто крайових умов. Припустимо, що крайові умови однорідні. Тоді залежно від фізичного змісту умов на межі, вони задаються одним з таких виглядів:

$$u\big|_{\partial\Omega}=0 \qquad \text{або} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 \quad \text{або} \quad \lambda u+\mu\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.$$

Якщо $\alpha\neq 0$ в рівнянні (2.1), то початкові умови для цього рівняння визначаються у вигляді

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y,z). \tag{2.2}$$

Якщо ж $\alpha=0$, то початковою умовою для такого рівняння буде таке:

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z).$$

Розглянемо спочатку однорідне рівняння

$$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial w}{\partial t}=L[w] \tag{2.3}$$

з однорідними крайовими умовами

$$\Lambda_k[w]\big|_{\partial\Omega}=0 \quad (k=1,2,...,r). \tag{2.4}$$

Очевидно, що одним з розв'язків, який задовольняє рівнянню (2.3) і крайовим умовам (2.4), є тривіальний, тобто $w=0$. Будемо шукати ***нетривіальний*** (ненульовий) розв'язок. Для цього скористаємося **методом Фур'є**.

Головна ідея методу Фур'є полягає в тому, щоб відокремити змінні та звести розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь. З цією метою розв'язок подамо у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від часу, а друга тільки від координат точки:

$$w(x,y,z,t)=T(t)\cdot v(x,y,z). \tag{2.5}$$

Підставимо (2.5) у рівняння (2.3). Тоді

$$v(x,y,z)\big(\alpha T''(t)+\beta T'(t)\big)=T(t)\cdot L[v].$$

Виконаємо відокремлення змінних

$$\frac{\alpha T''+\beta T'}{T}=\frac{L[v]}{v}=\lambda.$$

У правій частині останньої рівності функція не залежить від часу, а в лівій – від координат. Така рівність має місце тільки в тому разі, якщо кожна частина дорівнює одній і тій же сталій величині, яку позначили λ. Тоді одержимо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} L[v]=\lambda v; \\ \alpha T''+\beta T'-\lambda T=0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Оператор Λ_k крайових умов від часу не залежить. Тоді крайові умови з урахуванням (2.5) запишуться як

$$T\Lambda_k[v]\big|_{\partial\Omega}=0 \quad (k=1,2,...,r).$$

Останню рівність можна скоротити на T, тому що $T \neq 0$ (оскільки шукається ненульовий розв'язок), тоді

$$L[v] = \lambda v, \tag{2.7}$$

$$\Lambda_k[v] = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,r) \tag{2.8}$$

і крім того

$$\alpha T'' + \beta T' - \lambda T = 0. \tag{2.9}$$

Таким чином, розв'язок вихідної задачі зведено до розв'язку двох задач (2.7)–(2.8) і (2.9). Задачу (2.7)–(2.8) називають задачею на власні значення. Якщо λ вибрати довільно, то, загалом кажучи, задача (2.7)–(2.8) може мати тільки тривіальний розв'язок. Але існують такі λ (дискретні), при яких рівняння (2.7) має нетривіальний розв'язок. Такі значення λ називаються власними значеннями (власними числами) оператора *L* при крайових умовах (2.8), а відповідні їм нетривіальні розв'язки рівняння (2.7) – власними функціями оператора *L*. Якщо одному значенню λ відповідає декілька лінійно незалежних власних функцій, то таке λ називається кратним.

Усі власні значення можна перенумерувати так, щоб модуль наступного був не менше модуля попереднього власного значення. Кожному власному значенню λ_k відповідає власна функція v_k: λ_1 відповідає v_1, $\lambda_2 - v_2$ і т.д. Набір функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ можна розглядати як базис простору, за допомогою якого можна розвинути в ряд інші функції.

Власні функції оператора *L* при розглянутих крайових умовах відіграють роль базису, по якому можуть бути розвинені інші функції, які присутні у постановці крайової задачі. Звичайно, є і такі задачі, де кінцевою метою є знаходження власних чисел λ_k. Це, наприклад, задачі квантової механіки й теорії коливань.

Визначення. Сукупність усіх власних значень λ_k такого диференціального оператора *L* при даних крайових умовах називають ***спектром*** цього оператора *L* при заданих крайових умовах.

Зафіксуємо деяке власне значення λ_k, якому відповідає власна функція $v_k(x, y, z)$. Підставимо це значення у рівняння (2.9)

$$\alpha T'' + \beta T' - \lambda_k T = 0. \tag{2.10}$$

Знайдемо частинні розв'язки цього рівняння $e^{s'_k t}$ й $e^{s''_k t}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.10) запишеться, як

$$T_k = A_k e^{s'_k t} + B_k e^{s''_k t}.$$

Власні значення λ_k утворюють нескінченну множину. Складемо ряд

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{s'_k t} + B_k e^{s''_k t} \right) \cdot v_k \,. \qquad (2.11)$$

У випадку збіжності цей ряд буде розв'язком однорідного рівняння (2.3) при заданих крайових умовах (2.4). Ряд (2.11) можна буде розглядати як розв'язок вихідної задачі, якщо його можна буде потрібне число раз диференціювати, тобто ряд буде рівномірно збіжним. Тому коефіцієнти A_k й B_k повинні спадати досить швидко при $k \to \infty$.

Припустимо, що ряд (2.11) задовольняє необхідним умовам. Виберемо коефіцієнти A_k й B_k так, щоб розв'язок (2.11) задовольняв початковим умовам. Нехай початкові умови для рівняння (2.3) мають вигляд

$$\begin{cases} w\big|_{t=0} = \phi(x, y, z), \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z). \end{cases} \qquad (2.12)$$

Тоді

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \cdot v_k(x,y,z), \qquad (2.13)$$

$$\psi(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k s'_k + B_k s''_k) \cdot v_k(x,y,z). \qquad (2.14)$$

Будемо вважати, що функції $\varphi(x,y,z)$ й $\psi(x,y,z)$ можуть бути розвинені в ряди за власними функціями, а саме

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x,y,z), \qquad (2.15)$$

$$\psi(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x,y,z). \qquad (2.16)$$

Тоді, використовуючи рівності (2.13)–(2.16), одержуємо, що

$$\begin{cases} A_k + B_k = a_k \\ A_k s'_k + B_k s''_k = b_k \end{cases}, \text{ де } s'_k \neq s''_k.$$

У випадку $s'_k = s''_k$ мали б інші частинні розв'язки, а не $e^{s'_k t}$ й $e^{s''_k t}$. Із останньої системи визначаються коефіцієнти A_k й B_k, а отже, і розв'язок w.

Таким чином, дійсно задачу зведено до послідовного розв'язання задачі (2.7)–(2.8), а потім розв'язання рівняння (2.9). Відзначимо, що головним моментом при використанні методу Фур'є є знаходження власних функцій, які виступають в ролі базису для розвинення в ряди всіх необхідних функцій та розв'язків. Тому більш детально зупинимося на властивостях власних функцій та власних значень.

§ 2. Самоспряжений оператор. Властивості власних функцій та власних значень самоспряженого оператора

Зазвичай задача на власні значення формулюється таким чином: знайти ненульовий розв'язок v, який задовольняє рівнянню

$$L[v] = \lambda v \tag{2.17}$$

та однорідним крайовим умовам

$$\Lambda_k[v]\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., r). \tag{2.18}$$

Будемо вважати функцію припустимою, якщо до неї можна застосувати оператор L і вона задовольняє заданим крайовим умовам (2.18).

Визначення. Значення параметра λ, при яких існують ненульові розв'язки рівняння (2.17), що задовольняють крайові умови (2.19), називають власними значеннями оператора L, а самі розв'язки – власними функціями

Визначення. Оператор L називають самоспряженим при розглянутих крайових умовах, якщо для будь-яких двох припустимих функцій Φ і Ψ виконується рівність

$$(L[\Phi], \Psi) = (\Phi, L[\Psi]), \tag{2.19}$$

де (U, W) є скалярним добутком функцій. Один з можливих способів задання скалярного добутку у функціональному просторі L_2 й у C_Ω визначається як

$$(U, W) = \iiint\limits_{\Omega} UW dV .$$

Простір $\bar{C}_\Omega$ – це простір функцій, неперервних у замкнутій області Ω, L_2 – множина функцій, для яких $\iiint\limits_{V} U^2 dV < \infty$.

З урахуванням викладеного, рівність (2.19) у розгорнутому вигляді для тривимірного випадку має вигляд

$$\iiint\limits_{\Omega} \Phi L[\Psi] dV = \iiint\limits_{\Omega} L[\Phi] \Psi dV .$$

Визначення. Дві функції називаються ортогональними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Визначення. Дві функції $u(x)$, $v(x)$ називаються ортогональними з вагою $\rho(x)$, де $\rho(x)$ дана додатна функція, якщо виконується рівність

$$\int u(x)v(x)\rho(x)dx = 0.$$

Теорема 1. Нехай оператор L рівняння (2.18) при розглянутих крайових умовах (2.19) є самоспряженим, тоді дві власні функції, що відповідають різним власним значенням, будуть ортогональними.

Доказ.

Нехай λ і μ два різних власних значення. При цьому λ відповідає власна функція v, а μ – w. Тоді

$$L[v] = \lambda v, \qquad | \, w$$
$$L[w] = \mu w. \qquad | \, v$$
$$\Lambda_k[v]\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \Lambda_k[w]\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Помножимо першу рівність на w, а другу на v скалярно й віднімемо від першої другу. Тоді

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(wL[v] - vL[w]\right)dV = (\lambda - \mu)\iiint\limits_{\Omega} vwdV.$$

Ліворуч інтеграл дорівнює нулю, тому що оператор L є самоспряженим. Тоді з того, що $\lambda \neq \mu$, випливає $\iiint\limits_{\Omega} vwdV = 0$, тобто функції v, w ортогональні і теорему доведено.

Теорема. Якщо оператор L при розглянутих крайових умовах є самоспряженим, то всі його власні значення є дійсними.

Доказ. Якщо оператор L є самоспряженим, то скалярний добуток (Lv, v) є дійсним числом. Переконатися в цьому можна за допомогою властивостей скалярного добутку самоспряженого оператора. Дійсно, з визначення самоспряженого оператора випливає рівність $(Lv, v) = (v, Lv)$, а за властивістю скалярного добутку $(Lv, v) = \overline{(v, Lv)}$. З одержаних рівностей маємо, що $(v, Lv) = \overline{(v, Lv)}$, а це можливо тільки, якщо (Lv, v) дійсне число.

Якщо λ є власне значення оператора, а v відповідна власна функція, тоді справедлива рівність $L[v] = \lambda v$. Помножуючи останню рівність скалярно на v одержимо, що

$$(Lv, v) = \lambda(v, v). \tag{2.20}$$

Знайдемо λ з (2.20)

$$\lambda = \frac{(Lv, v)}{(v, v)}.$$

Чисельник та знаменник одержаного дробу є дійсними числами, тому і λ є дійсним числом.

2.1. Оператор Штурма–Ліувілля

Як приклад самоспряженого оператора розглянемо оператор Штурма–Ліувілля.

Диференціальне рівняння

$$\left[\varphi(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \qquad (2.21)$$

називають рівнянням Штурма–Ліувілля. Тут функції $\varphi'(x), q(x), \rho(x)$ – неперервні на $[a;b]$, $\lambda = \mathrm{const}$ – параметр рівняння. Крім того, припустимо, що на $[a;b]$ $\varphi(x) > 0, q(x) \geq 0, \rho(x) > 0$. Будемо відшукувати розв'язок цього рівняння, що задовольняє однорідним крайовим умовам

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases} \qquad (2.22)$$

Очевидно, при будь-якому λ таким розв'язком є тотожний нуль. Однак зовсім не виключена можливість існування й інших розв'язків.

Визначення. Значення параметра λ, при яких існують ненульові розв'язки рівняння Штурма–Ліувілля, які задовольняють однорідним крайовим умовам, називаються власними числами, а самі ці розв'язки – власними функціями задачі Штурма–Ліувілля. Оператор, який визначається як

$$Ly = -\frac{d}{dx}(\varphi(x)y') - q(x)y,$$

називають оператором Штурма–Ліувілля. За допомогою символічного позначення оператора Штурма–Ліувілля рівняння (2.21) запишеться у вигляді

$$Ly + \lambda\rho(x)y = 0.$$

Скалярний добуток для функцій, заданих на проміжку $[a,b]$, неперервних, двічі диференційованих і таких, що задовольняють крайові умови (2.22), будемо визначати за допомогою формули $(u, v) = \int\limits_a^b u(x)v(x)dx$.

Теорема 1. Оператор L – Штурма–Ліувілля є самоспряженим на проміжку $[a,b]$.

Доказ.

$$(Lu,v) = \int\limits_a^b \left[\frac{d}{dx}(\varphi u') - qu\right] vdx = \int\limits_a^b \frac{d}{dx}(\varphi u')vdx - \int\limits_a^b (qu)vdx = \| \text{ частинами } \| =$$

$$= \varphi u' v\Big|_a^b - \int\limits_a^b \varphi u' v' dx - \int\limits_a^b quvdx = \varphi u' v\Big|_a^b - \varphi v' u\Big|_a^b + \int\limits_a^b (\varphi v')' udx - \int\limits_a^b quvdx.$$

Розглянемо позаінтегральний член

$\varphi u'v\big|_a^b - \varphi v'u\big|_a^b = \varphi(b)u'(b)v(b) - \varphi(a)u'(a)v(a) - \varphi(b)v'(b)u(b) + \varphi(a)v'(a)u(a)$.

Крайові умови для u й v мають вигляд

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0, \end{cases}$$

де $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

Остання умова виконується, якщо визначник одержаної системи дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(a)v'(a) = u'(a)v(a). \tag{2.23}$$

З огляду на (2.23) одержимо

$(Lu,v) = 0 + \int\limits_a^b \left[\frac{d}{dx}(\varphi v') - qv \right] u dx = (u,Lv)$ і теорему доведено.

Наслідок. Власні значення оператора Штурма–Ліувілля дійсні.

Теорема 2. Якщо в рівнянні $[\varphi(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$, де $\varphi(x) > 0,\ q(x) \geq 0,\ \rho(x) > 0$ і коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ додатні в однорідних крайових умовах

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.24}$$

то власні значення задачі Штурма–Ліувілля додатні.

Доказ. Нехай λ_k – деяке власне число оператора Штурма–Ліувілля, а y_k – відповідна йому власна функція. Тоді

$$Ly_k = -\lambda_k y_k \rho(x).$$

Помножимо скалярно обидві частини рівності на y_k, тоді одержимо, що

$\int\limits_a^b y_k L y_k dx = -\lambda_k \int\limits_a^b \rho(x) y_k^2 dx$.

$\int\limits_a^b y_k L y_k dx = \int\limits_a^b y_k \left[\left(\varphi(x) y_k' \right)' - q(x) y_k \right] dx = \int\limits_a^b y_k \left(\varphi(x) y_k' \right)' dx - \int\limits_a^b q(x) y_k^2 dx =$

$= -\lambda_k \int\limits_a^b \rho(x) y_k^2 dx$.

Отже, $\lambda_k = \left(-y_k \left(\varphi y_k' \right)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \varphi y_k'^2 dx + \int\limits_a^b q(x) y_k^2 dx \right) \Big/ \int\limits_a^b \rho(x) y_k^2 dx$.

Доведемо, що $-y_k\left(\varphi y_k'\right)\Big|_a^b > 0$.

Із граничних умов (2.24) одержимо

$$\begin{cases} y'(a) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} y(a); \\ y'(b) = -\dfrac{\beta_1}{\beta_2} y(b). \end{cases}$$

Тоді

$$-y_k\left(\varphi y_k'\right)\Big|_a^b = -\left[y_k(b)\varphi(b)y_k'(b) - y_k(a)\varphi(a)y_k'(a)\right] =$$

$$= -\left[-y_k(b)\varphi(b)\frac{\beta_1}{\beta_2}y_k(b) - y_k(a)\varphi(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y_k(a)\right] =$$

$$= -\left[-y_k^2(b)\varphi(b)\frac{\beta_1}{\beta_2} - y_k^2(a)\varphi(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right] > 0.$$

Отже, $\lambda_k > 0$ і теорему доведено.

Теорема 3. Кожному власному числу оператора Штурма–Ліувілля відповідає єдина (з точністю до постійного множника) власна функція.

Доказ. Нехай $\phi(x)$ й $\psi(x)$ – власні функції, що відповідають власному числу λ_k. Тоді на [a;b] маємо тотожності

$$\left[\varphi(x)\phi'(x)\right]' - q(x)\phi(x) \equiv -\lambda_k\rho(x)\phi(x),$$

$$\left[\varphi(x)\psi'(x)\right]' - q(x)\psi(x) \equiv -\lambda_k\rho(x)\psi(x).$$

Помножимо перше з них на $\psi(x)$, друге на $\phi(x)$ й віднімемо друге від першого:

$$\psi(x)\left[\varphi(x)\phi'(x)\right]' - \phi(x)\left[\varphi(x)\psi'(x)\right]' \equiv 0.$$

Цю тотожність можна записати у вигляді

$$\left\{\psi(x)\left[\varphi(x)\phi'(x)\right] - \phi(x)\left[\varphi(x)\psi'(x)\right]\right\}' \equiv 0.$$

Але звідси треба, щоб

$$\varphi(x)\left[\psi(x)\phi'(x) - \phi(x)\psi'(x)\right] = \text{const}, \ \forall x \in [a;b].$$

Функції $\psi(x)$ й $\phi(x)$ повинні задовольняти крайовим умовам, тому, наприклад, у точці $x = a$ виконуються співвідношення

$$\begin{cases} \alpha_1\psi(a) + \alpha_2\psi'(a) = 0, \\ \alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) = 0. \end{cases}$$

Записані дві рівності можна розглядати як систему однорідних рівнянь першого порядку відносно α_1 й α_2. За припущенням, принаймні, одне із цих чисел відмінне від нуля, отже, система має ненульовий розв'язок і визначник її дорівнює нулю:

$\psi(a)\phi'(a)-\phi(a)\psi'(a)=0$.

Вираз $\varphi(x)\left[\psi(x)\phi'(x)-\phi(x)\psi'(x)\right]$ на $[a;b]$ не залежить від x, а при $x = a$ воно, по доведеному, звертається в 0; $\varphi(x)\neq 0$ на $[a;b]$, тому $\forall x\in[a;b]$ маємо, що

$$\begin{vmatrix} \psi(x) & \phi(x) \\ \psi'(x) & \phi'(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Тим самим доведено лінійну залежність функцій $\psi(x)$ й $\phi(x)$. Отже, на $[a;b]$:

$$\psi(x)=C\phi(x).$$

Теорема 4. Власні функції задачі Штурма–Ліувілля, що відповідають різним власним числам, попарно ортогональні на $[a;b]$ з вагою $\rho(x)$, тобто

$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_l(x)\rho(x)dx=0,\ k\neq l.$$

Доказ. Оскільки $\phi_k(x)$ й $\phi_l(x)$ – власні функції, що відповідають власним числам λ_k й λ_l $(k\neq l)$, то вони тотожно задовольняють такі рівняння

$$L\phi_k=\lambda_k\phi_k\rho,$$
$$L\phi_l=\lambda_l\phi_l\rho$$

помножимо скалярно перше рівняння на $\phi_l(x)$, а друге на $\phi_k(x)$ та розглянемо їхню різницю

$$\left(L\phi_k(x),\phi_l(x)\right)-\left(L\phi_l(x),\phi_k(x)\right)\equiv\left(\lambda_k-\lambda_l\right)\left(\rho(x)\phi_k(x),\phi_l(x)\right).$$

Оскільки $\left(L\phi_k(x),\phi_l(x)\right)=\left(L\phi_l(x),\phi_k(x)\right)$, тому що оператор самоспряжений, то ліва частина останньої рівності дорівнює нулю. Враховуючи, що $\lambda_k\neq\lambda_l$, одержимо, що скалярний добуток $\left(\rho\phi_k,\phi_l\right)$ повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\int_a^b \rho(x)\phi_k(x)\phi_l(x)dx=0,$$

що й доводить теорему.

Власні функції задачі Штурма–Ліувілля лінійно незалежні, та утворюють повну систему, тобто довільну функцію $f(x)$ з будь-яким ступенем точності можна апроксимувати рядом, що складається із власних функцій

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n ,$$

тому їх можна взяти як базисні функції. Щоб визначити C_n помножимо ряд на $\rho(x) y_k(x)$ та проінтегруємо на проміжку $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)y_k(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n \rho(x) y_k(x)dx .$$

Внаслідок ортогональності власних функцій праворуч залишається один доданок при $k = n$

$$\int_a^b f(x)\rho(x)y_k(x)dx = \int_a^b C_k \rho(x) y_k^2(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$C_k = \frac{\int_a^b f(x)\rho(x)y_k(x)dx}{\int_a^b \rho(x)y_k^2(x)dx} .$$

Отримані коефіцієнти називаються коефіцієнтами Бесселя–Фур'є, а ряд з такими коефіцієнтами – рядом Бесселя–Фур'є.

Теорема Стеклова (без доказу). Якщо кусочно-неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має неперервну похідну, то ряд Бесселя–Фур'є для цієї функції збігається абсолютно й рівномірно.

Приклад 1. Знайти власні функції й власні значення крайової задачі Штурма–Ліувілля для рівняння

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < l) \qquad (2.25)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(l) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Рівняння (2.25) є окремим випадком загального рівняння Штурма–Ліувілля, в якому $\varphi(x) = 1, q(x) = 0, \rho(x) = 1$. Крайові умови однорідні, так що крайова задача Штурма–Ліувілля поставлена коректно. Власні значення, які, відповідно до теорії, дійсні та додатні, тому можна покласти $\lambda = \mu^2$. Рівняння (2.25) – це лінійне однорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння ($k^2 = -\mu^2$) має комплексні (уявні) корені $k = \pm i\mu$, тому загальний розв'язок цього рівняння

$$y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x, \tag{2.26}$$

де C_1 й C_2 – довільні сталі, які знаходяться з крайових умов.

$$y(0) = C_1 = 0, \quad y(l) = C_1 \cos \mu l + C_2 \sin \mu l = C_2 \sin \mu l = 0. \tag{2.27}$$

Оскільки відшукується ***ненульовий*** розв'язок рівняння (2.25), C_1 і C_2 не повинні одночасно перетворюватися в 0. Отже, $C_1 = 0 \Rightarrow C_2 \neq 0$. Тоді з (2.27)

$$\sin \mu l = 0 \Rightarrow \mu l = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{l} \Rightarrow \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2}.$$

Зверніть увагу на повний збіг отриманих результатів з теорією: власні значення дійсні, додатні, утворюють рахункову множину. Справді, кожному k відповідає своє λ, якому надається номер, тобто $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$. Причому кожному номеру k відповідає тільки одне λ_k, тобто всі власні значення різні, і послідовність λ_k зростає зі зростанням номера k. Підставляючи $\mu = \mu_k = \frac{k\pi}{l}$ у (2.26), одержимо нескінченну множину власних функцій

$$y_k(x) = C_{2k} \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

причому кожному власному значенню відповідає (з точністю до постійного множника) одна власна функція. Покладемо $C_{2k} = 1$ й одержимо $y_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x$.

Обчислимо норми власних функцій

$$\|y_k(x)\|^2 = \int_0^l \rho(x) y_k^2(x)\,dx = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_0^l \frac{1 - \cos \frac{2k\pi x}{l}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{l}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi x}{l} \right)\Bigg|_0^l = \frac{l}{2},$$

$$\|y_k(x)\| = \sqrt{\frac{l}{2}}.$$

Побудуємо графіки трьох перших власних функцій (рис. 2.2):

$y_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$;

$$y_2(x) = \sin\frac{2\pi x}{l};$$

$$y_3(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}.$$

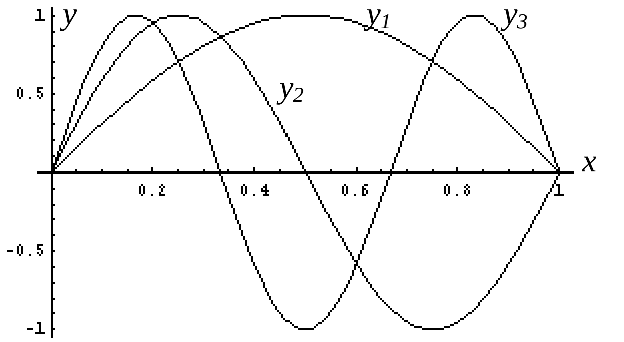


Рис. 2.2

Приклад 2

Знайти власні функції й власні значення крайової задачі Штурма–Ліувілля для рівняння $y'' + \lambda y = 0 \quad (1 < x < 5)$ із крайовими умовами $\begin{cases} y'(1) = 0, \\ y(5) = 0. \end{cases}$

Розв'язання

Розв'язок рівняння:

$$y(x) = C_1 \cos\mu x + C_2 \sin\mu x; \tag{2.28}$$

$$y'(x) = -\mu C_1 \sin\mu x + \mu C_2 \cos\mu x.$$

Для відшукання констант одержуємо систему двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} \mu(-C_1 \sin\mu + C_2 \cos\mu) = 0, \\ C_1 \cos 5\mu + C_2 \sin 5\mu = 0. \end{cases}$$

Відзначимо, що $\mu \neq 0$. Тому система набуває вигляду

$$\begin{cases} -C_1 \sin\mu + C_2 \cos\mu = 0, \\ C_1 \cos 5\mu + C_2 \sin 5\mu = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Ця система має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} -\sin\mu & \cos\mu \\ \cos 5\mu & \sin 5\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи його, одержимо:

$$-\sin 5\mu \sin\mu - \cos 5\mu \cos\mu = 0 \Rightarrow \cos(5\mu - \mu) = 0 \Rightarrow \cos 4\mu = 0 \Rightarrow$$

$$4\mu = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \mu_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}.$$

Якщо тепер підставити μ_k в систему (2.29), то остання перетвориться до вигляду:

$$\begin{cases} -C_1 \sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)+C_2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)=0, \\ C_1\cos 5\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)+C_2\sin 5\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)=0. \end{cases}$$

Ранг цієї системи дорівнює 1, а базисним мінором є, наприклад, елемент $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)$.

Тоді з першого рівняння системи (2.29) одержимо $\tilde{N}_2 = \tilde{N}_1\, tg\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)$, C_1 – довільна стала). Підставляючи знайдені μ_k і C_2 у (2.28), одержимо всі власні функції

$$y_k(x)=C_1\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)x\right).$$

Цьому виразу можна надати більш симетричного вигляду

$$y_k(x)=\frac{C_1}{\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)x\right)=\frac{C_1}{\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)(x-1).$$

Позначимо $\dfrac{C_1}{\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)}$ через C_k.

Тоді

$$y_k(x)=C_k\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)(x-1).$$

Побудуємо графіки трьох перших власних функцій, вибираючи $C_k=1$ (рис. 2.3):

$$y_1(x)=\cos\frac{\pi(x-1)}{8};$$

$$y_2(x)=\cos\frac{3\pi(x-1)}{8};\quad y_3(x)=\cos\frac{5\pi(x-1)}{8}.$$

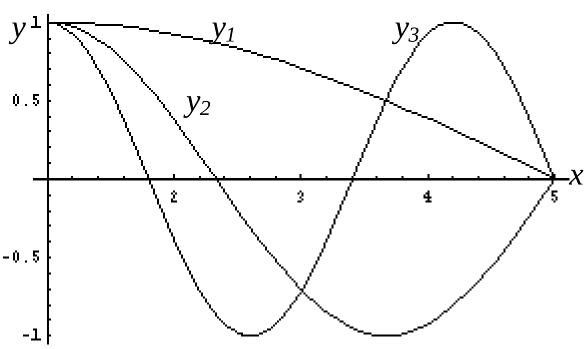


Рис. 2.3

Приклад 3

Знайти власні функції й власні значення крайової задачі Штурма–Ліувілля для рівняння $y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < l)$

із крайовими умовами $\begin{cases} -y'(0) + hy(0) = 0, \\ y'(l) = 0. \end{cases}$

Розв'язання

Відразу виписуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x,$$

$$y'(x) = -\mu C_1 \sin \mu x + \mu C_2 \cos \mu x.$$

Із крайових умов (з огляду на те, що $\mu \neq 0$) одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} hC_1 \quad - \mu C_2 = 0, \\ -\sin \mu l \cdot C_1 + \cos \mu l \cdot C_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} h & -\mu \\ -\sin \mu l & \cos \mu l \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи його, одержимо

$h \cos \mu l - \mu \sin \mu l = 0 \Rightarrow h ctg \mu l - \mu = 0$.

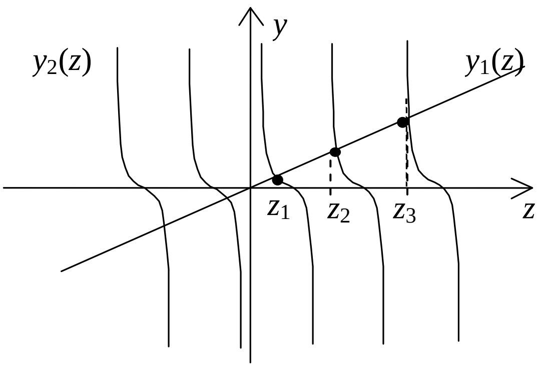


Рис. 2.4

Позначимо $\mu l = z$, тоді це рівняння набуде вигляду:

$$ctg z - \frac{z}{hl} = 0. \qquad (2.30)$$

Корені рівняння не можуть бути визначені безпосередньо. Розв'яжемо це рівняння графічно. З цією метою розглянемо функції $y_1(z) = ctg z$ й $y_2(z) = \frac{z}{hl}$. Рівняння (2.30) перетвориться до вигляду $y_1(z) = y_2(z)$. Очевидно, абсциси точок перетину кривих $y_1(z)$, $y_2(z)$ і будуть коренями рівняння (2.30). Із графіка (рис. 2.4) видно, що коренів (нулів) нескінченна множина, всі ці нулі ізольовані, розташовані симетрично відносно початку координат. За графіком можна визначити інтервал ізоляції кожного кореня z_k, а далі проводити уточнення кожним з відомих методів (половинного ділення, хорд, дотичних, комбінованим методом хорд і дотичних, методом послідовних наближень чи іте-

раційним і т.д.). Оскільки власні значення $\lambda = \mu^2 = \frac{z^2}{l^2}$, то можна обмежитися лише додатними коренями z. Занумеруємо їх. Тоді додатним μ теж можна надати ті ж номери, і власні значення $\lambda_k = \mu_k^2 = \frac{z_k^2}{l^2}$ будуть знайдені. Підставляючи μ_k в систему, одержимо із другого її рівняння $C_2 = C_1 tg \mu_k l$.
Власні функції визначаються як

$$y_k(x) = C_1\left(\cos\mu_k x + tg\mu_k l \cdot \sin\mu_k x\right) = \frac{C_1}{\cos\mu_k l}\cos\mu_k(l-x) = C_k\cos\mu_k(l-x).$$

Для проведення обчислень покладемо $l = 5,\ h = 1$. Тоді $z_1 = 1{,}31$ (з точністю до 10^{-2}), $\mu_1 = 0{,}262$.

$y_1(x) = C_1\cos 0{,}262(5-x)$.

Покладемо $C_1 = 1$. Наведемо таблицю значень y_1 залежно від x.

x	0	1	2	3	4	5
y	0,2588	0,5000	0,7071	0,8660	0,9659	1,0000

Графік першої власної функції $y_1(x)$ (рис. 2.5):

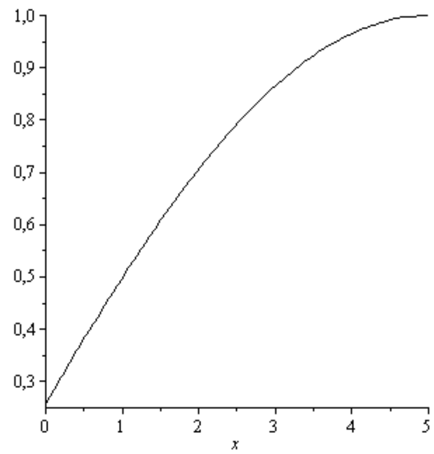


Рис. 2.5

Лабораторна робота 3

Завдання 1. Знайти власні значення й власні функції крайової задачі Штурма–Ліувілля для рівняння

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < l)$$

при таких крайових умовах:

1. $y(0)=0$ $\qquad y(l)=0$.
2. $y(0)=0$ $\qquad y'(l)=0$.
3. $y'(0)=0$ $\qquad y(l)=0$.
4. $y'(0)=0$ $\qquad y'(l)=0$.
5. $y(0)=0$ $\qquad y'(l)+hy(l)=0$.
6. $-y'(0)+hy(0)=0$ $\qquad y(l)=0$.
7. $y'(0)=0$ $\qquad y'(l)+hy(l)=0$.
8. $-y'(0)+hy(0)=0$ $\qquad y'(l)=0$.

У завданнях 1–4 побудувати графіки трьох перших власних функцій; у завданнях 5–8 знайти приблизно перше власне значення (з точністю до 10^{-2}) і побудувати графік першої власної функції. Значення l і h взяти з таблиці.

Завдання 2. Знайти власні значення й власні функції крайової задачі Штурма–Ліувілля для рівняння

$$y''+\lambda y=0 \quad (a<x<b)$$

при таких крайових умовах:

1. $y(a)=0$ $\qquad y(b)=0$.
2. $y(a)=0$ $\qquad y'(b)=0$.
3. $y'(a)=0$ $\qquad y(b)=0$.
4. $y'(a)=0$ $\qquad y'(b)=0$.

У кожному завданні 1–4 побудувати графіки трьох перших власних функцій. Значення a і b взяти з таблиці.

Завдання 3. Знайти власні значення й власні функції крайової задачі Штурма–Ліувілля для рівняння

$$(xy')'+\lambda\frac{1}{x}y=0 \quad (a<x<b)$$

при таких крайових умовах:

1. $y(a)=0$ $\qquad y(b)=0$.
2. $y'(a)=0$ $\qquad y(b)=0$.

У кожному завданні 1–2 побудувати графіки трьох перших власних функцій. Значення a і b взяти з таблиці.

№	1	2	3	4	5	6
l	2,8	3,1	5,4	4,2	6,1	7,2
h	3	2,7	1,3	3,1	1,7	1,5
a	1,1	5,2	2,5	1,7	2,1	2,5
b	3,6	7,7	6,1	5,4	5,7	6,6

№	7	8	9	10	11	12	
l	4,8	3,7	5,3	3,9	4,3	2,8	
h	2,5	2,9	2,2	3,1	2,5	4,1	
a	4,3	3,9	3,2	2,9	3,4	1,8	
b	7,6	6,8	5,9	4,8	5,7	3,9	
№	13	14	15	16	17	18	
l	7,2	6,7	6,3	5,8	5,7	5,5	
h	1,7	2,1	1,9	2,2	2,3	2,4	
a	2,2	2,5	2,7	2,9	3,1	2,0	
b	6,3	6,8	7,4	7,8	7,6	5,9	
№	19	20	21	22	23	24	25
l	5,3	5,1	4,9	4,7	4,5	4,3	3,8
h	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,3
a	1,9	1,7	1,4	1,3	0,9	0,8	0,7
b	5,4	4,8	4,5	5,2	4,8	5,1	5,8

2.2. Оператор Лапласа

Інший приклад самоспряженого оператора є оператор Лапласа, а саме

$$\Delta[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\Lambda[u]\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha u = 0. \tag{2.31}$$

Покажемо, що оператор Лапласа при заданих крайових умовах є самоспряженим. Нехай Φ і Ψ дві припустимі функції. Розглянемо різницю $\left(L[\Phi],\Psi\right)-\left(\Phi,L[\Psi]\right)=\iiint\limits_V\left\{\Psi\Delta\Phi-\Phi\Delta\Psi\right\}dV=\|$ за формулою Гріна $\|=$

$=\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)d\sigma=\|$ оскільки Φ і Ψ припустимі функції, тобто задовольняють умові (2.31) $\|=\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\Phi\alpha\Psi-\Psi\alpha\Phi\right)d\sigma=0$, тобто

$$\iiint\limits_V \Phi\Delta\Psi dV = \iiint\limits_V \Psi\Delta\Phi dV.$$

Таким чином оператор Лапласа дійсно є самоспряженим.

Подивимося, що буде у випадку виродження. Нехай деякому власному значенню λ відповідає кілька власних функцій

$$\begin{cases} L\left[v_i\right]=\lambda v_i, \quad i=1,2,\ldots,m \\ \Lambda_k\left[v_i\right]=0. \end{cases}$$

Якщо $v_1, v_2, \ldots, v_m$ є власними функціями, то будь-яка їхня лінійна комбінація $v=C_1 v_1+C_2 v_2+\ldots+C_m v_m$ також є власною функцією, що відповідає тому ж власному значенню. Це випливає з лінійності оператора

$$L[v]=C_1 L[v_1]+\ldots+C_m L[v_m]=\lambda\left(C_1 v_1+\ldots+C_m v_m\right).$$

Сукупність усіх лінійних комбінацій лінійно незалежних власних функцій $v_1, v_2, \ldots, v_m$, які відповідають даному кратному власному значенню λ, утворять m-вимірний лінійний простір. За відомими теоремами лінійної алгебри в цьому просторі можна, і притому нескінченною множиною способів, побудувати ортогональний базис, тобто побудувати m попарно ортогональних власних функцій. Таким чином, для кожного кратного власного значення можна одержати систему власних функцій таку, що будь-які дві функції будуть ортогональні між собою.

Розглядаючи задачу на власні значення, потрібно пам'ятати, що диференціальне рівняння $L[v]=\lambda v$ і крайові умови $\lambda_k\left[v\right]\Big|_{\partial\Omega}=0$ ***однорідні***, тому розв'язок, що задовольняє рівняння й крайові умови, визначається із точністю до сталого множника, тобто якщо v – власна функція, то $w = Cv$ – теж власна функція. Можна C підібрати так, щоб $\|w\|=\iiint\limits_V w^2 dV=1$, тобто

$$\iiint\limits_V w^2 dV=C^2\iiint\limits_V v^2 dV=1.$$

Інтеграл праворуч відмінний від нуля, оскільки в протилежному випадку $v\equiv 0$, а ми розглядаємо ненульові розв'язки. Тоді покладемо $C^2=\dfrac{1}{\iiint\limits_V v^2 dV}$ й одержимо, що

$$\|w\|=\iiint\limits_V w^2 dV=1,$$

Отже, w буде нормованою функцією. Таким чином, будь-яку власну функцію можна нормувати, тоді отримана система власних функцій буде ортонормованою.

§ 3. Розвинення в ряд за власними функціями

Нехай $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ є ортонормованою системою власних функцій, їм відповідають власні числа – $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$. Виберемо довільну функцію $f(x,y,z)$ і поставимо їй у відповідність ряд такого вигляду

$$f(x,y,z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(x,y,z),$$

де C_k – коефіцієнти розвинення, які можуть бути знайдені так само, як коефіцієнти ряду Фур'є, тобто

$$C_k = \iiint\limits_V f(x,y,z) v_k(x,y,z) dV .$$

Теорема. Якщо деяка функція $f(x,y,z)$ подана у вигляді рівномірно збіжного ряду за власними функціями, тобто

$$f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k v_k(x,y,z), \tag{2.32}$$

то коефіцієнти D_k обчислюються за формулами Фур'є, тобто є коефіцієнтами Фур'є.

Доведення. Помножимо обидві частини рівності (2.32) на $v_i(x,y,z)$ скалярно, тобто

$$(f(x,y,z), v_i) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k (v_k(x,y,z), v_i(x,y,z)).$$

Остання рівність у розгорнутому вигляді:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z) v_i(x,y,z) dV = D_i \iiint\limits_V v_i^2(x,y,z) dV = D_i = C_i . \tag{2.33}$$

Ряд (2.32) рівномірно збігається; після помноження на v_i знову одержали рівномірно збіжний ряд, тому його можна інтегрувати почленно. Таким чином, рівність (2.33) доводить теорему.

§ 4. Загальна схема розв’язання неоднорідного рівняння методом Фур'є

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + g(x,y,z,t) \tag{2.34}$$

з однорідними крайовими умовами

$$\Lambda_i [u]\big\|_{\partial\Omega} = 0$$

і неоднорідними початковими умовами

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z).$$

Будемо вважати, що нам відомі всі власні функції оператора L. Функцію $g(x,y,z,t)$, що знаходиться в правій частині диференціального рівняння (2.34), розвинемо в ряд за власними функціями оператора L.

$$g(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) v_k(x,y,z). \tag{2.35}$$

Змінну t розглядаємо при цьому як параметр, тобто розв'язок $u(x,y,z,t)$ будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k(x,y,z). \tag{2.36}$$

При цьому, оскільки $v_k(x,y,z)$ є власними функціями оператора L при крайових умовах Λ_i, то при будь-якому виборі $u_k(t)$ крайові умови будуть виконуватися. Однак ці функції необхідно вибрати так, щоб виконувалися й початкові умови. Тому розвинемо в ряд за власними функціями функції φ та ψ

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) v_k(x,y,z),$$

$$\psi(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) v_k(x,y,z).$$

Зрозуміло, що коефіцієнти цього розвинення можна визначити таким чином:

$$u_k(0) = \iiint\limits_{\Omega} \varphi(x,y,z) v_k(x,y,z) dV \Big/ \iiint\limits_{\Omega} v_k^2(x,y,z) dV, \tag{2.37}$$

$$u_k'(0) = \iiint\limits_{\Omega} \psi(x,y,z) v_k(x,y,z) dV \Big/ \iiint\limits_{\Omega} v_k^2(x,y,z) dV. \tag{2.38}$$

Якщо система власних функцій $\{v_i\}$ ортонормована, то

$$\|v_k\| = \iiint\limits_{V} w_k^2 dV = 1$$

і вигляд (2.37), (2.38) спрощується.

Підставимо вираз (2.36) замість u і (2.35) замість $g(x,y,z,t)$ у рівняння (2.34), тоді одержимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha u_k''(t)+\beta u_k'(t)\right\}v_k(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(t)v_k(x,y,z)+\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)v_k(x,y,z)$$

або

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha u_k''(t)+\beta u_k'(t)-\lambda_k u_k(t)-g_k(t)\right\}v_k(x,y,z)=0.$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на v_i й проінтегруємо (тобто помножимо скалярно), тоді одержимо

$$\alpha u_i''(t)+\beta u_i'(t)-\lambda_i u_i(t)+g_i(t)=0\,.$$

Отримане рівняння є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з початковими умовами (2.37) і (2.38). Визначивши розв'язок цього рівняння, практично вирішимо вихідну задачу.

§ 5. Застосування методу Фур'є до розв'язання рівнянь гіперболічного типу в одновимірних областях

5.1. Задача про вільні коливання закріпленої струни

Нехай задана однорідна струна довжиною l, закріплена в точках $x = 0$ і $x = l$. Як було вже показано, математична постановка задачі про вільні коливання такої струни зводиться до знаходження розв'язку $u(x,t)$ однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad (2.39)$$

який повинен задовольняти початкові умови

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x);$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x);$$

(2.40) та однорідні крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0;\quad u(x,t)\big|_{x=l}=0. \qquad (2.41)$$

Розв'язок цієї задачі методом Фур'є складається із двох етапів.

1. Згідно з методом Фур'є розв'язок будемо шукати у вигляді добутку двох ненульових функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша – тільки від t, тобто

$$u(x,t)=X(x)T(t). \qquad (2.42)$$

Продиференціюємо вираз (2.42) двічі, спочатку за *x*, а потім за *t*. Тоді одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t).$$

Підставимо ці вирази у вихідне рівняння (2.39)

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Після відокремлення змінних, одержимо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (2.43)$$

Звернемо увагу на те, що ліва частина рівності (2.43) залежить тільки від *t*, а права частина – тільки від *x*. Виходить, якщо в правій частині цієї рівності зафіксувати *x*, поклавши $x = x_0$, то ліва частина при всіх значеннях *t* буде величиною сталої. Точно такий же висновок можна зробити щодо правої частини рівності. Звідси отримаємо, що відношення $\frac{T''}{a^2 T}$ і $\frac{X''}{X}$ є сталими, тобто

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C,$$

де $C = \mathrm{const}$. З останнього співвідношення одержимо два рівняння

$$T''(t) - Ca^2 T(t) = 0, \qquad (2.44)$$

$$X''(x) - CX(x) = 0. \qquad (2.45)$$

Таким чином, розділили змінні в рівнянні. У результаті замість одного диференціального рівняння в частинних похідних (2.39) одержали два звичайних диференціальних рівняння (2.44) і (2.45), яким повинні задовольняти функції $T(t)$ і $X(x)$ відповідно.

Розділимо змінні в крайових умовах

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(0,t) = X(0)T(t) = 0;$$

$$u(x,t)\big|_{x=l} = u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Звідси $X(0) = 0,\ X(l) = 0$, інакше розв'язок (2.42) був би тривіальним, що виключено умовою.

Таким чином, для визначення функції $X(x)$ одержали крайову задачу Штурма–Ліувілля для рівняння (2.45) із крайовими умовами:

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Оскільки власні значення оператора Штурма–Ліувілля в даному випадку будуть додатними (див. теорему 2 для оператора Штурма–Ліувілля), то можна «–*C*» замінити на λ або μ^2, тобто покласти $-C=\mu^2$. Тоді рівняння (2.45) набуває вигляду

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0; \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Ця задача розв'язана раніше.
Множина власних значень визначається рівністю

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}.$$

Кожному власному числу відповідає власна функція

$$X_k(x) = C_k \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{2.46}$$

Тепер знайдемо функції $T(t)$. Для цього розв'яжемо рівняння (2.44), підставивши в нього замість $-C$ знайдене $\lambda_k = \mu_k^2$. Кожному конкретному значенню λ_k буде відповідати певна функція T_k, яка задовольняє рівняння

$$T_k''(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = 0.$$

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння:

$$k^2 + a^2\lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm ia\sqrt{\lambda_k} \quad \left(\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{l}\right),$$

$$T_k = A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t, \tag{2.47}$$

де A_k і B_k – довільні сталі.

Підставляючи (2.46) і (2.47) у рівність (2.42), одержимо нескінченну множину нетривіальних розв'язків рівняння (2.39), кожне з яких задовольняє крайові умови (2.41)

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\cdot \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

де k=1,2,3,…

Якби вдалося зараз підібрати коефіцієнти A_k і B_k знайдених розв'язків так, щоб останні задовольняли початкові умови (2.40), то задача була б вирішена остаточно.

На жаль, це вдається зробити лише для дуже вузького класу початкових функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$, що нас ніякою мірою задовольнити не може. Тому перейдемо до другого етапу.

2. Складемо ряд з отриманої послідовності частинних розв’язків рівняння. Відповідно до принципу суперпозиції сума ряду буде також задовольняти однорідне рівняння (2.39) та однорідні крайові умови (2.41):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x. \qquad (2.48)$$

Підставляючи в останній вираз значення $t = 0$ і з огляду на початкові умови (2.40), одержимо рівність

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot\underbrace{\sin\frac{k\pi}{l}x}_{X_k}, \qquad (2.49)$$

яка повинна виконуватися для $\forall x\in(0,l)$. Рівність (2.49) являє собою розвинення функції $f(x)$ в ряд за власними функціями $X_k(x)$ крайової задачі Штурма–Ліувілля. Використовуючи ортогональність (у розглядуваному випадку вагова функція $\rho(x)=1$) власних функцій, які відповідають різним власним значенням, помножимо обидві частини рівності (2.49) на $X_n(x)$ й проінтегруємо за відрізком $[0,l]$:

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx.$$

Аналогічним способом визначають і коефіцієнти B_k, тільки попередньо потрібно продиференціювати $u(x,t)$ за t, а потім підставити $t = 0$.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-A_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi a}{l}t+B_k\frac{k\pi a}{l}\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x;$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x). \qquad (2.50)$$

Рівність (2.50) являє собою розвинення функції $\varphi(x)$ в ряд за власними функціями $X_k(x)$ крайової задачі Штурма–Ліувілля. Помножуючи обидві частини рівності (2.50) на $X_n(x)$ й інтегруючи за відрізком $[0,l]$, одержимо:

$$B_k\frac{k\pi a}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx.$$

Звідси

$$B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx.$$

Підкреслимо, що розділити просторові та часові змінні й одержати крайову задачу Штурма–Ліувілля для функції $X(x)$ вдалося тільки тому, що і рівняння (2.39), і крайові умови (2.41) є **однорідними.**

Становить великий інтерес фізична інтерпретація розв'язку (2.48), що описує вільні коливання закріпленої струни.

У зв'язку з тим, що розв'язок (2.48) отримано накладенням окремих коливань, які описуються функціями $u_k(x,t)$, природно почати аналіз розв'язку саме із цих функцій. Для цього представимо окремий член ряду (2.48) у більш зручному для аналізу вигляді

$$u_k(x,t)=\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x=$$

$$=N_k\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t+\psi_k\right),\text{ де } N_k=\sqrt{A_k^2+B_k^2},\quad tg\psi_k=\frac{A_k}{B_k}.$$

Отримане подання дозволяє зробити ряд висновків.

По-перше, кожна точка струни $x = x_0$ виконує гармонійне коливання

$$N_k\sin\frac{k\pi}{l}x_0\cdot\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t+\psi_k\right)$$

з амплітудою $N_k\sin\frac{k\pi}{l}x_0$, частотою $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$ і початковою фазою ψ_k.

При цьому, якщо амплітуда цього коливання залежить від абсциси точки, то частота й фаза будуть для всіх точок однакові. Це означає, що всі точки струни під час руху одночасно (синхронно) досягають максимального відхилення в ту або іншу сторону. На відміну від хвиль, що розбігаються, такі коливання струни ***називаються стоячими*** хвилями.

По-друге, профіль хвилі в будь-який момент часу $t=t_0$ являє собою синусоїду (рис. 2.6)

$$N_k\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t_0+\psi_k\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Привертають увагу точки струни, які залишаються в спокої під час руху. Такі точки називаються ***вузловими***.

Щоб знайти всі вузли стоячої хвилі $u_k(x,t)$, потрібно визначити корінь рівняння $\sin\frac{k\pi}{l}x=0$ на відрізку $[0,l]$.

Точки струни, які виконують коливання з максимальною амплітудою, називаються ***пучностями*** стоячої хвилі.

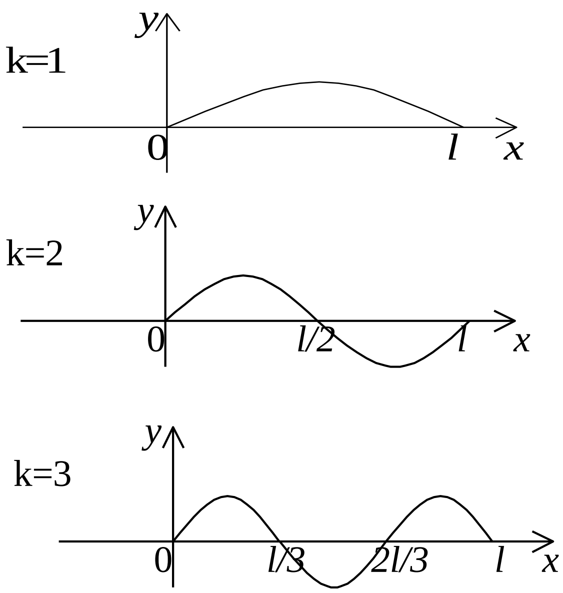


Рис. 2.6

У повсякденному житті ми сприймаємо коливання струни за звуком, який вона видає. Очевидно, звук струни є результатом накладення коливань, що відповідають стоячим хвилям $u_k\left(x,t\right)$. Сила звуку струни визначається її амплітудою N_k, а висота звуку залежить від частоти

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l} a = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Самий нижній тон, що може видавати струна, відповідає найменшій частоті

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Цей тон називається ***основним тоном*** струни. Формула красномовно свідчить про те, що звук буде тим вище, ніж буде більше натяг T і чим коротше струна.

5.2. Задача про вимушені коливання закріпленої струни

Нехай однорідна струна довжиною l, що закріплена в точках $x = 0$ і $x = l$ знаходиться під дією поперечного навантаження, що задано за допомогою функції $g\left(x,t\right)$. Задача про вимушені коливання такої струни може бути сформульована таким чином: знайти розв’язок *u(x,t)* неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\left(x,t\right), \tag{2.51}$$

який задовольняє початкові умови

$$u\left(x,t\right)\Big|_{t=0} = f\left(x\right);$$

$$\left.\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi\left(x\right);$$

та однорідні крайові умови

$$u\left(x,t\right)\Big|_{x=0} = u\left(0,t\right) = 0;$$

$$u\left(x,t\right)\Big|_{x=l} = u\left(l,t\right) = 0.$$

Розділити змінні в рівнянні (2.51) не вдається (перевірте!). Тому будемо відшукувати розв’язок у вигляді суми двох функцій, одна з яких є *розв’язком неоднорідного рівняння* (при зручно обраних, звичайно однорідних, додаткових умовах), а друга – *розв’язком відповідного однорідного рівняння* при заданих додаткових крайових і початкових умовах. Тобто

$$u\left(x,t\right) = v\left(x,t\right) + w\left(x,t\right),$$

1) функція $v\left(x,t\right)$ є розв’язком однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

який задовольняє задані початкові умови

$$v\left(x,t\right)\Big|_{t=0} = f\left(x\right); \quad \left.\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi\left(x\right);$$

і крайові умови

$$v\left(x,t\right)\Big|_{x=0} = 0; \quad v\left(x,t\right)\Big|_{x=l} = 0.$$

2) функція $w\left(x,t\right)$ є розв’язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\left(x,t\right), \tag{2.52}$$

який задовольняє однорідні початкові умови

$$w\left(x,t\right)\Big|_{t=0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial w\left(x,t\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0;$$

та однорідні крайові умови

$$w(x,t)\big|_{x=0} = 0; \quad w(x,t)\big|_{x=l} = 0.$$

Шляхом безпосередньої перевірки переконуємося, що складена таким чином функція $u(x,t)$ буде розв'язком заданої крайової задачі.

Розв'язок $v(x,t)$ першої початково-крайової задачі описує, як відомо, вільні коливання струни, які відбуваються без дії зовнішньої сили, а тільки внаслідок додання точкам струни початкових відхилень і швидкостей. Перша задача була вирішена.

Тому подальші зусилля будуть спрямовані на відшукання розв'язку неоднорідного рівняння, тобто функції $w(x,t)$.

Розв'язок $w(x,t)$ другої початково-крайової задачі описує вимушені коливання струни, які відбуваються під дією зовнішньої сили, при відсутності початкових відхилень.

Оскільки власні функції відповідної крайової задачі $X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$, що задовольняють однорідні крайові умови $X_k(0) = X_k(l) = 0$, відомі, то шукаємо розв'язок $w(x,t)$ неоднорідної крайової задачі у вигляді ряду за цими власними функціями

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \underbrace{\sin\frac{k\pi}{l}x}_{X_k}. \tag{2.53}$$

Тепер залишається підібрати функції $T_k(t)$ таким чином, щоб ряд (2.53) задовольняв рівняння (2.52) та однорідні початкові умови. Останні умови будуть виконуватися, якщо функції $T_k(t)$ задовольняють умови

$$T_k(0) = 0; \quad T_k'(0) = 0.$$

Підставимо ряд (2.53) у рівняння (2.52), тоді одержимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t) + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x = g(x,t).$$

Фіксуючи *t*, розвинемо функцію $g(x,t)$ в ряд за власними функціями X_k однорідної задачі

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

де $g_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(\eta,t)\sin\frac{k\pi}{l}\eta d\eta$.

Підставляємо це розвинення в попередню рівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Остання рівність можлива тільки тоді, коли коефіцієнти розвинення його правої й лівої частин рівні.

Звідси одержуємо звичайне диференціальне рівняння відносно визначення невідомих функцій $T_k(t)$:

$$T_k''(t)+\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}T_k(t)=g_k(t),$$

до якого потрібно приєднати відомі вже початкові умови $T_k(0)=T_k'(0)=0$.

Задача Коші, до якої звелося знаходження функції $T_k(t)$, може бути розв'язана звичайним прийомом варіації довільних сталих.

5.3. Задача про вимушені коливання струни з рухливими кінцями

Розглянемо вимушені коливання однорідної струни під дією зовнішньої сили, коли кінці струни не закріплені, а рухаються за заданим законом. Задача формулюється таким чином: знайти розв'язок $u(x,t)$ неоднорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t), \tag{2.54}$$

який задовольняє неоднорідні початкові умови

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x);\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x); \tag{2.55}$$

та неоднорідні крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\psi_1(t);\quad u(x,t)\big|_{x=l}=\psi_2(t). \tag{2.56}$$

Ідея розв'язання цієї задачі полягає в тім, щоб звести її до задачі з однорідними крайовими умовами, яку вже вміємо вирішувати для неоднорідного рівняння. З метою реалізації цієї ідеї візьмемо яку-небудь функцію $p(x,t)$, що задовольняє заданим крайовим умовам (2.56). Звичайно намагаються обрати цю функцію так, щоб вона була досить простою, але диференційованою. Легко зміркувати, що в розглянутому випадку функцію $p(x,t)$ можна обрати у вигляді

$$p(x,t)=\psi_1(t)+\frac{\psi_2(t)-\psi_1(t)}{l}x. \tag{2.57}$$

Дійсно, тут

$$p(x,t)\big|_{x=0} = \psi_1(t);$$
$$p(x,t)\big|_{x=l} = \psi_2(t).$$

Тоді функція
$$v(x,t) = u(x,t) - p(x,t) \tag{2.58}$$
буде задовольняти вже однорідним крайовим умовам. Відмітимо, що якщо крайові умови (2.56) будуть іншого виду, то й функцію $p(x,t)$ потрібно підбирати в іншому вигляді.

Для функції $v(x,t)$, що задовольняє однорідні крайові умови, складемо крайову задачу з огляду на задане диференціальне рівняння (2.54) і початкових умов (2.55). Для цього підставимо (2.58) у рівняння (2.54). Тоді отримаємо рівняння
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g(x,t)$$
або з урахуванням (2.57)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \overline{g}(x,t),$$
де
$$\overline{g}(x,t) = g(x,t) - \psi_1''(t) - \left[\psi_2''(t) - \psi_1''(t)\right]\frac{x}{l}.$$
Знайдемо тепер початкові умови для $v(x,t)$:
$$v(x,0) = u(x,0) - p(x,0) = f(x) - \psi_1(0) - \frac{\psi_2(0) - \psi_1(0)}{l}x = \overline{f}(x),$$
$$v_t'(x,0) = u_t'(x,0) - p_t'(x,0) = \varphi(x) - \psi_1'(0) - \frac{\psi_2'(0) - \psi_1'(0)}{l}x = \overline{\varphi}(x).$$

Таким чином, отримаємо таку крайову задачу для функції $v(x,t)$: знайти розв'язок неоднорідного рівняння
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \overline{g}(x,t),$$
який задовольняє початкові умови
$$v(x,0) = \overline{f}(x); \quad v_t'(x,0) = \overline{\varphi}(x)$$
та однорідні крайові умови
$$v(x,t)\big|_{x=0} = 0; \quad v(x,t)\big|_{x=l} = 0.$$

Вирішивши цю задачу методом, викладеним раніше, і підставивши знайдене значення $v(x,t)$, визначимо шуканий розв’язок $u(x,t)$ як суму $u(x,t)=v(x,t)+p(x,t)$.

5.4. Розв’язок телеграфного рівняння методом Фур'є

Розглянемо окремий випадок телеграфного рівняння (1.20) при A = 0:

$$L\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}+R\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{1}{C}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}. \tag{2.59}$$

Проводячи аналогію з рівнянням механічного руху

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-r\frac{\partial x}{\partial t}+k^2x,$$

зауважимо, що в електротехніці L є аналогом маси, R – аналогом опору середовища, а $\frac{1}{C}$ – електродинамічним аналогом пружності.

Отже, замість рівнянь (1.18) і (1.19) маємо тепер ті ж рівняння (2.59), а також рівняння

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=C\frac{\partial \upsilon}{\partial t}. \tag{2.60}$$

Далі рівність $\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ можна замінити умовою $i|_{t=0}=0$. Дійсно, якщо $i|_{t=0}=0$, то й $\left.\frac{\partial i}{\partial x}\right|_{t=0}=0$. Взявши до уваги рівність (2.60), і те що $\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ одержимо, що умови $\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ та $i|_{t=0}=0$ рівноцінні.

Аналогічно, з умови $i(l,t)=0$ маємо, що і $\frac{\partial i(l,t)}{\partial t}=0$. Тоді, на підставі рівняння (1.18) одержимо, що і $\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right|_{x=l}=0$.

Звертаючись тепер до рівняння (2.59) із крайовими умовами

$$\begin{cases} \upsilon|_{x=0}=0 \\ \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right|_{x=l}=0, \end{cases}$$

бачимо, що в цьому випадку потрібно покласти

$$L[\upsilon]=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}.$$

Покажемо, що оператор L – самоспряжений, тобто виконується рівність

$$\int_0^l \upsilon_1 L[\upsilon_2]dx=\int_0^l \upsilon_2 L[\upsilon_1]dx$$

або у цьому випадку

$$\int_0^l \upsilon_1\frac{\partial^2\upsilon_2}{\partial x^2}dx=\int_0^l \upsilon_2\frac{\partial^2\upsilon_1}{\partial x^2}dx.$$

Дійсно, інтегруючи частинами і використовуючи крайові умови, дістанемо

$$\int_0^l \upsilon_1\frac{\partial^2\upsilon_2}{\partial x^2}dx=\int_0^l \upsilon_1 d\left(\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x}\right)=\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x}\Big|_0^l-\int_0^l\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x}\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x}dx=-\int_0^l\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x}d\upsilon_2=$$

$$=-\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x}\Big|_0^l+\int_0^l \upsilon_2 d\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x}\right)=\int_0^l \upsilon_2\frac{\partial^2\upsilon_1}{\partial x^2}dx,$$

що й треба було довести. З доведеної самоспряженості оператора L випливає, що всі його власні значення дійсні.

Застосовуючи метод Фур'є, вважаємо $\upsilon(x,t)=w(x)T(t)$. Після підстановки в (2.59), отримаємо

$$CLT''w+CRT'w=Tw'',$$

звідки

$$\frac{CLT''+CRT'}{T}=\frac{w''}{w}=\lambda.$$

Для $w(x)$ одержуємо рівняння

$$w''=\lambda w.$$

Це рівняння для власних функцій $w(x)$. Множачи обидві його частини на w й інтегруючи, маємо

$$\int_0^l ww''dx=\lambda\int_0^l w^2dx,$$

тобто

$$ww'\big|_0^l-\int_0^l (w')^2dx=\lambda\int_0^l w^2dx,$$

а оскільки $w(0)=0, w'(l)=0$, то

$$-\int_0^l w'^2 dx = \lambda \int_0^l w^2 dx,$$

звідки випливає, що $\lambda < 0$, оскільки при $\lambda = 0$ одержимо $w'^2 = 0$, тобто $w \equiv \text{const}$, і крайова умова $w(0) = 0$ не виконується.

Отже, покладемо $\lambda = -\mu^2$, причому $\mu > 0$. Тоді рівняння для w отримаємо у вигляді

$$w'' + \mu^2 w = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$w = A\sin \mu x + B\cos \mu x.$$

Покладемо $x = 0$ й одержимо, що $B = 0$, а значить

$$w = \sin \mu x.$$

Крайова умова $w'(l) = 0$ дає

$$\cos \mu l = 0,$$

тобто

$$\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Отже,

$$w_n = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Для $T(t)$ маємо тепер рівняння

$$CLT'' + CRT' + \mu_n^2 T = 0,$$

Його характеристичне рівняння

$$CLr^2 + CRr + \mu_n^2 = 0,$$

звідки

$$r_{1,2} = \frac{-CR \pm \sqrt{C^2R^2 - 4CL\mu_n^2}}{2CL}. \qquad (2.61)$$

Будемо вважати, що $\mu_n \ge \mu_0 = \dfrac{\pi}{2l}$, тоді

$$C^2R^2 - 4CL\frac{\pi^2}{4l^2} < 0.$$

Підкоренева величина буде від'ємною й при інших $\mu = \mu_n$.

Вираз (2.61) запишемо у вигляді

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega_n,$$

де

$$\omega_n = \frac{\sqrt{4CL\mu_n^2 - C^2R^2}}{2CL}. \tag{2.62}$$

Тепер одержимо, що

$$T_n = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega_n t + Be^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega_n t$$

або

$$T_n(t) = K_n e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega_n t + \varphi_n).$$

Функцію $\upsilon(x,t)$ шукаємо у вигляді

$$\upsilon = e^{-\frac{R}{2L}t}\sum_{n=0}^{\infty} K_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Тут величини ω_n відомі, оскільки вони визначаються формулою (2.62). Як правило в методі Фур'є числа K_n й φ_n знаходимо з початкової умови:

$$\upsilon\big|_{t=0} = \upsilon_0.$$

Отже,

$$\upsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \sin\varphi_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \tag{2.63}$$

– розвинення сталої в інтервалі $(0,l)$.

Збіжність ряду (2.63) нерівномірна, оскільки $\upsilon(0,t) = 0$ при $t \to +0$. Тому при $t = 0$ має місце стрибок від 0 до υ_0. Іншими словами, між початковою умовою $\upsilon\big|_{t=0} = \upsilon_0$ і крайовою умовою $\upsilon\big|_{x=0} = 0$ немає погодженості. Тому, щоб визначити коефіцієнти ряду (2.63), потрібно використати ортогональність власних функцій. Загальна теорія дозволяє для визначення коефіцієнтів ряду застосувати його почленне інтегрування.

Помножимо обидві частини рівності (2.63) на $\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2l}$ й проінтегруємо від 0 до l. Тоді одержимо

$$\upsilon_0\int_0^l \sin\frac{(2m+1)\pi x}{2l}dx = K_m \sin\varphi_m \int_0^l \sin^2\frac{(2m+1)\pi x}{2l}dx,$$

причому

$$\int_0^l \sin^2\frac{(2m+1)\pi x}{2l}dx = \frac{1}{2}\int_0^l\left[1 - \cos\frac{(2m+1)\pi x}{l}\right]dx.$$

Після обчислення інтеграла у правій частині, остаточно маємо

$$K_m = \frac{4\upsilon_0}{\pi(2m+1)\sin\varphi_m}. \tag{2.64}$$

Одержимо тепер

$$\upsilon = e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{4\upsilon_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\omega_n t+\varphi_n)}{(2n+1)\sin\varphi_n}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \qquad (2.65)$$

Отриману суму будемо розглядати як ряд Фур'є відносно змінної x, приймаючи t за параметр. Тоді коефіцієнтом Фур'є є

$$e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{4\upsilon_0}{\pi}\frac{\sin(\omega_n t+\varphi_n)}{(2n+1)\sin\varphi_n}.$$

Але, як відомо із загальної теорії рядів Фур'є, цей коефіцієнт дорівнює

$$\frac{2}{l}\int_0^l \upsilon(x,t)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx.$$

Таким чином,

$$e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{4\upsilon_0}{\pi}\frac{\sin(\omega_n t+\varphi_n)}{(2n+1)\sin\varphi_n} = \frac{2}{l}\int_0^l \upsilon(x,t)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx.$$

Продиференціюємо цю рівність за t:

$$e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{4\upsilon_0}{\pi}\frac{\omega_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)}{(2n+1)\sin\varphi_n} - \frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{4\upsilon_0}{\pi}\frac{\sin(\omega_n t+\varphi_n)}{(2n+1)\sin\varphi_n} =$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx. \qquad (2.66)$$

Але $\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, тоді поклавши в рівності (2.66) $t=0$, будемо мати, після скорочення на $\frac{4\upsilon_0}{\pi}\frac{1}{(2n+1)sin\varphi_n}$, таку рівність

$$-\frac{R}{2L}\sin\varphi_n + \omega_n\cos\varphi_n = 0.$$

Звідки отримаємо, що

$$tg\varphi_n = \frac{2L\omega_n}{R}. \qquad (2.67)$$

Рівність (2.65) з урахуванням (2.67) є розв'язком поставленої задачі.

5.5. Коливання струни, що складається із двох частин

1. Нехай струна складається із двох частин довжини l_1 й l_2 з різними щільностями рис. 2.7.

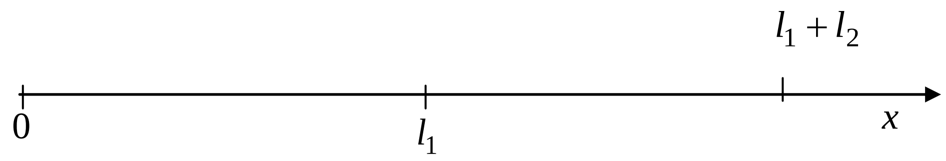


Рис. 2.7

Для кожної із частин маємо своє рівняння:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \qquad a_1^2 = \frac{p}{\rho_1^2};$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}; \qquad a_2^2 = \frac{p}{\rho_2^2}.$$

Крайові умови:

$u_1\big|_{x=0} = 0$, $\qquad u_1\big|_{x=l_1} = u_2\big|_{x=l_1}$ $\qquad$ (відсутність розриву)

$u_2\big|_{x=l_1+l_2} = 0$, $\qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l_1} = \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l_1}$ $\qquad$ (єдиний нахил).

Оскільки шукається загальне коливання (коливання в цілому), то частота для обох частин повинна бути однаковою, тобто вважаємо

$$u_1 = \upsilon_1(x)\sin\omega t,$$

$$u_2 = \upsilon_2(x)\sin\omega t.$$

Підставляючи це у вихідні рівняння, одержимо

$$a_1^2 \upsilon_1'' = -\omega^2 \upsilon_1,$$

$$a_2^2 \upsilon_2'' = -\omega^2 \upsilon_2,$$

тобто

$$\upsilon_1'' + \frac{\omega^2}{a_1^2}\upsilon_1 = 0,$$

$$\upsilon_2'' + \frac{\omega^2}{a_2^2}\upsilon_2 = 0.$$

З першого рівняння знаходимо

$$\upsilon_1 = A\sin\frac{\omega x}{a_1} + B\cos\frac{\omega x}{a_2},$$

оскільки $\upsilon_1(0) = 0$, то $B = 0$, а значить $\upsilon_1 = A\sin\frac{\omega x}{a_1}$.

Далі,

$$\upsilon_2 = C\sin\frac{\omega\left(x-l_1-l_2\right)}{a_2} + D\cos\frac{\omega\left(x-l_1-l_2\right)}{a_2},$$

оскільки $\upsilon_1\left(l_1+l_2\right)=0$, то $D=0$, і

$$\upsilon_2 = C\sin\frac{\omega\left(x-l_1-l_2\right)}{a_2}.$$

З умови відсутності розриву маємо, що:

$$A\sin\frac{\omega l_1}{a_1} = -C\sin\frac{\omega l_2}{a_2}. \tag{2.68}$$

З умови єдиного нахилу дістанемо

$$A\frac{\omega}{a_1}\cos\frac{\omega l_1}{a_1} = \frac{\omega}{a_2}C\cos\frac{\omega l_2}{a_2}. \tag{2.69}$$

Розділивши рівність (2.68) на (2.69), одержимо

$$a_1 tg\frac{\omega l_1}{a_1} + a_2 tg\frac{\omega l_2}{a_2} = 0.$$

Це рівняння розв'язуємо графічно, тобто шукаємо точки перетину двох кривих (рис. 2.8): $y = a_1 tg\dfrac{\omega l_1}{a_1}$ і

$$y = -a_2 tg\frac{\omega l_2}{a_2}.$$

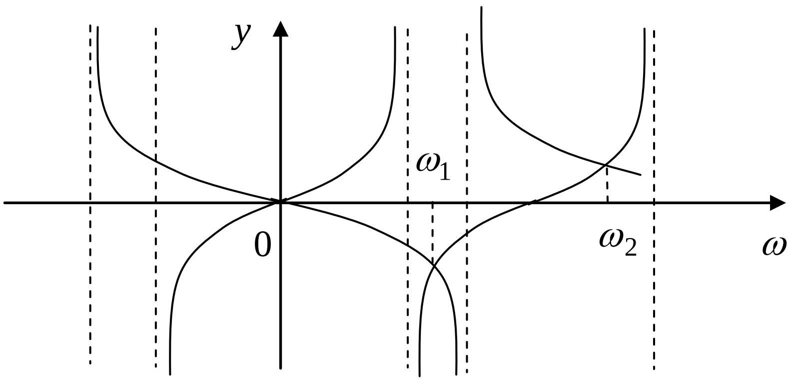


Рис. 2.8

Очевидно, точок перетину буде нескінченна множина. При цьому для кожного ω_n буде знайдене відповідне значення C_n.

2. Розглянемо тепер ту ж саму задачу, але в точці l_1 вже не буде єдиного нахилу. У точці «склеювання» будемо припускати наявність точкової маси m.

Знову для кожної зі складових частин маємо:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

Додаткові умови:

$$u_1\big|_{x=0} = 0, \qquad u_2\big|_{x=l_1+l_2} = 0,$$

$$u_1\big|_{x=l_1} = u_2\big|_{x=l_1}.$$

Запишемо для точкової маси другий закон Ньютона

$$m\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l_1} = m\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=l_1}.$$

Кожна із цих величин повинна дорівнювати силі натягу, а точніше, проекції цієї сили на вертикаль, прикладеної до точки маси m. З огляду на малість кута, можна, з точністю до малих вищого порядку, замінити $\sin\alpha$ на $\operatorname{tg}\alpha$, тоді сумарна вертикальна проекція сили дорівнює

$$p\frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=l_1} - p\frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=l_1}$$

(знак "–" перед другим доданком пояснюється тим, що сама величина $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=l_1}$ від'ємна).

Тепер маємо

$$m\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l_1} = m\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=l_1} = p\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=l_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=l_1}\right).$$

Подальший розв'язок буде аналогічним наведеному в попередній задачі.

Лабораторна робота 4

Завдання 1.

Знайти вільні коливання струни, закріпленої на кінцях $x=0, x=l$, якщо початкове відхилення задається функцією $f(x)=x(x-l)$, а початкові швидкості відсутні. Значення a й l наведені в таблиці.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	1	3	2	$1/2$	2	$2/3$	2	1	4	4	3	$1/3$	1	4
l	1	$3/2$	3	2	$1/2$	1	$2/3$	$1/2$	2	3	2	1	$1/2$	3	1

№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	2	3	$1/2$	1	$1/2$	$3/2$	$1/3$	3	$2/3$	$3/2$	3	$1/2$	$2/3$	$1/2$	$1/3$
l	3	$3/2$	1	$1/2$	2	$3/2$	1	$1/2$	2	3	2	3	1	$3/2$	2

Завдання 2. Знайти розв'язок таких задач в області $0 < x < l$, $t > 0$.

4.2.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t$$
$$u(0,t) = t - 1,\ u(x,0) = x.$$
$$u(l,t) = 2,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4.$$

4.2.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2t$$
$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a}.$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \frac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t.$$

4.2.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t$$
$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1.$$
$$u(0,t) = t,\ u(l,t) = t - 2.$$

4.2.4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt$$
$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2.$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = t^2.$$

4.2.5.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a^2}{l}\left(t - t^2\right) - \frac{x^2}{l} + 2x + xt$$
$$u(x,0) = x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$
$$u(0,t) = t^2,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = t.$$

4.2.6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2a^2}{l^2} t - \frac{x^2}{2l} \cos t$$

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2x - \frac{x^2}{2l}.$$

$$u(0,t) = 2t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \cos t.$$

4.2.7.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\cos t + xe^t$$

$$u(x,0) = x+1,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$u(0,t) = \cos t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0.$$

4.2.8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin t + xt$$

$$u(x,0) = x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2x+1.$$

$$u(0,t) = \sin t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 2t.$$

4.2.9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\cos t$$

$$u(x,0) = 2,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$u(0,t) = t+2,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = t^2 + \cos t.$$

4.2.10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x-l)\cos t - \sin t$$

$$u(x,0) = -l,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1.$$

$$u(0,t) = t^2 + \cos t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \sin t.$$

4.2.11.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x-l)\left(l^t - \sin t\right) + x$$

$$u\left(x,0\right) = x - l,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2l.$$

$$u(0,t) = l^t + \sin t,\ u(l,t) = -t^2.$$

4.2.12.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - 4$$

$$u\left(x,0\right) = x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = t^2,\ u(l,t) = \cos t + 5.$$

4.2.13.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u\left(x,0\right) = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x + 3.$$

$$u(0,t) = \cos 2t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = t - 1.$$

4.2.14.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{4 - l^{2x}}{2l} x^2$$

$$u\left(x,0\right) = 5x - 2,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = l^{2t},\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 4.$$

4.2.15.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sin t}{2l} x^2 + x^2 t$$

$$u\left(x,0\right) = 3x - 4,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 10.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 5t - 4,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \sin t.$$

4.2.16.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{9}{l} e^{3t} x + (t-1)x$$

$$u(x,0) = 2x - x^2, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$u(0,t) = e^{3t}, \ u(l,t) = t.$$

4.2.17.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 3x + 2, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x - 1.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \cos 3t, \ u(l,t) = t^2.$$

4.2.18.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = x - 8, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 2\sin 2t, \ u(l,t) = 2t.$$

4.2.19.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$u(0,t) = 4t - 1, \quad u(l,t) = \sin t.$$

4.2.20.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = x - 9, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 4\sin 3t, \ u(l,t) = 0.$$

4.2.21.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 3\cos 2t.$$

4.2.22.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$u(0,t) = e^t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \sin t.$$

4.2.23.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 5x^2,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x.$$

$$u(0,t) = 2\sin 4t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = t.$$

4.2.24.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 2\sin\frac{2x}{a},\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 2\cos 2t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 1.$$

4.2.25.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = e^x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = t.$$

$$u(0,t) = 1 - t,\ u(l,t) = \cos 4t.$$

4.2.26.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u(0,t)=t^2, \quad u(\pi,t)=t^3, \quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad 0<x<\pi.$$

4.2.27.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u(0,t)=e^{-t}, \quad u(\pi,t)=t, \quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin x\cos x, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=1, \quad 0<x<\pi.$$

4.2.28.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u(0,t)=t, \quad u(\pi,t)=1, \quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin\frac{1}{2}x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=1, \quad 0<x<\pi.$$

4.2.29.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=Ae^{-t}, \quad t>0$$

$$u(x,0)=\frac{Aa\,ch\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}}, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-\frac{Aa\,ch\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}}, \quad 0<x<\pi.$$

4.2.30.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin 2t$$

$$u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\frac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t, \quad t>0$$

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-2\cos\frac{2x}{a}, \quad 0<x<\pi.$$

Завдання 3. Розв’язати наведені задачі, користуючись методом Фур'є.

4.3.1. Знайти закон коливання струни довжини l, якщо в початковий момент всім точкам струни повідомлена швидкість, рівна $\frac{a}{10}$ (де a – стала, що фігурує в рівнянні струни). Початкове відхилення відсутнє. Кінці струни закріплені. Зовнішні сили відсутні.

4.3.2. Знайти закон вільних коливань струни, розташованої на відрізку $[0,l]$, якщо в початковий момент струні була надана форма кривої $u=\frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{2l}$ і потім струна була відпущена без початкової швидкості. Струна закріплена в лівому кінці, а правий може вільно переміщатися так, що дотична в правому кінці увесь час залишається горизонтальною.

4.3.3. На струну довжини l постійно діє зовнішня сила рівна (розраховуючи на одиницю маси струни) $\frac{a^2}{10l}\sin\frac{a\pi t}{l}$; тут a – постійна, що фігурує в рівнянні струни. Знайти закон коливання струни, якщо початкове відхилення й початкова швидкість дорівнюють нулю, а кінці струни закріплені.

4.3.4. Знайти закон коливання струни довжиною l, якщо щільність зовнішньої сили (розраховуючи на одиницю маси струни) постійна й дорівнює $\frac{a^2}{10l}$. Лівий кінець струни закріплений, а правий може вільно переміщатися так, що дотична в правому кінці увесь час залишається горизонтальною. Початкове відхилення й початкова швидкість дорівнюють нулю; a – коефіцієнт у рівнянні коливання струни.

4.3.5. Лівий кінець струни рухається за законом $u(0,t)=\frac{l}{10}\sin\frac{a\pi t}{l}$ (де a – постійна в рівнянні коливання струни, l – довжина струни), а правий кінець закріплений: $u(l,t)=0$. Знайти закон коливання цієї струни, якщо зовнішня сила, початкове відхилення й початкова швидкість рівні нулю.

4.3.6. Знайти закон вільних коливань струни довжиною l, якщо лівий кінець закріплений, а правий може вільно рухатися у вертикальному напрямку так, що дотична увесь час нахилена до осі абсцис під кутом $-\mathrm{arctg}\frac{1}{10}$.

Початкове відхилення $u(x,t)=-\frac{x^2}{10l}$, початкова швидкість дорівнює нулю.

4.3.7. Однорідна струна закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$, має в початковий момент часу форму параболи, симетричної відносно перпендикуляра, проведеного через точку $x = \frac{l}{2}$. Визначити відхилення точок струни від прямолінійного положення рівноваги, припускаючи, що початкові швидкості відсутні.

4.3.8. Однорідна струна довжиною l натягнута між точками $x = 0$ й $x = l$. У точці $x = c$ струна відтягається на невелику відстань h від положення рівноваги й у момент $t = 0$ відпускається без початкової швидкості. Визначити відхилення $u(x,t)$ струни для будь-якого моменту часу.

4.3.9. Один кінець стрижня закріплений, а на другий діє сила. Знайти поздовжні коливання стрижня, якщо в початковий момент сила припиняє діяти.

4.3.10. Вивчити вимушені поперечні коливання струни, закріпленої на кінці $x = 0$, а на кінці $x = l$ діє гармонійна сила, що викликає переміщення $A\sin\omega t$.

4.3.11. Стрижень довжиною l, кінець якого $x = 0$ закріплений, перебуває в стані спокою. У момент часу $t = 0$ до вільного кінця прикладено силу Q (на одиницю площі), спрямовану уздовж стрижня. Знайти переміщення $u(x,t)$ стрижня в будь-який момент часу $t > 0$.

4.3.12. Однорідна струна довжиною l, закріплена на обох кінцях, перебуває в прямолінійному положенні рівноваги. Струна збуджується початковою швидкістю $\frac{\partial U}{\partial x} = \begin{cases} v, & |x - c| < \frac{\pi}{2h} \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h} \end{cases}$.

Знайти відхилення $U(x,t)$ струни для будь-якого моменту часу.

4.3.13. Однорідна струна довжиною l, закріплена на обох кінцях, перебуває в прямолінійному положенні рівноваги. Струна збуджується початковою швидкістю $\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{cases} v_0 \cos h(x - c), & |x - c| < \frac{\pi}{2h} \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}. \end{cases}$

Знайти відхилення $U(x,t)$ струни для будь-якого моменту часу.

4.3.14. Стрижень підвішений вертикально й затиснений так, що зсув у всіх точках дорівнює нулю. У момент часу $t = 0$ стрижень звільняється, залишаючись закріпленим у верхній точці. Вивчити вимушені коливання стрижня.

4.3.15. Розв’язати задачу про поздовжні коливання стрижня, один кінець якого $(x=0)$ закріплений жорстко, а інший $(x=l)$ вільний, якщо стрижню надано початкове розтягання $U(x,0)=Ax$, початкові швидкості відсутні.

4.3.16. Розв’язати задачу про поздовжні коливання стрижня, один кінець якого $(x=0)$ закріплений жорстко, а інший $(x=l)$ закріплений пружно, якщо стрижню надано початкове розтягання $U(x,0)=Ax$ (початкові швидкості відсутні).

4.3.17. Один кінець стрижня $(x=l)$ закріплений пружно, а до іншого $(x=0)$ прикладена поздовжня сила $F_0=\mathrm{const}$, під дією якої стрижень перебуває в стані рівноваги. Знайти коливання стрижня після того, як у початковий момент часу сила миттєво зникає, якщо початкові швидкості відсутні.

4.4.18. Знайти коливання струни з жорстко закріпленими кінцями під дією сили щільністю $g(x,t)=\varphi(x)t$, прикладеної з моменту $t=0$. Початкові переміщення й початкові швидкості відсутні.

4.3.19. Знайти поздовжні коливання стрижня, лівий кінець якого закріплений жорстко, а до правого з моменту $t=0$ прикладена сила $F(t)=At$ (початкові зсуви й початкові швидкості відсутні).

4.3.20. Знайти поздовжні коливання стрижня, лівий кінець якого закріплений жорстко, а до правого з моменту $t=0$ прикладена сила $F(t)=A\sin\omega t$ (початкові зсуви й початкові швидкості відсутні).

§6. Застосування методу Фур'є до розв'язання рівнянь параболічного типу

6.1. Розв'язок задачі теплопровідності з теплообміном на кінцях

Будемо розглядати рівняння теплопровідності для стрижня

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.70}$$

з початковою умовою

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2.71}$$

Крайові умови запишемо із припущення, що на обох кінцях має місце теплообмін. У точці $x=0$ ця умова має вигляд

$$\left.\left(u - h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = 0; \tag{2.72}$$

на правому кінці, тобто якщо $x=l$

$$\left.\left(u + H\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0. \tag{2.73}$$

Умова (2.73) випливає з такого: на підставі закону Ньютона швидкість зміни температури на правому кінці пропорційна різниці температур стрижня й навколишнього середовища υ:

$$u'_x(l,t) = -H\left[u(l,t) - \upsilon\right],$$

де H – число, яке пропорційне коефіцієнту теплообміну. Вважаючи, що $\upsilon(t) \equiv 0$, одержимо звідси вираз (2.73). Аналогічно одержимо умову (2.72).

Розв'язок рівняння (2.70) подамо відповідно до методу Фур'є у вигляді

$$u(x,t) = T(t)W(x).$$

Тоді, після підстановки $u(x,t)$ у рівняння (2.70) та відокремлення змінних, отримаємо рівність

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{W''(x)}{W(x)} = -\lambda.$$

Звідки маємо два рівняння відносно $W(x)$ та $T(t)$.

$$W'' + \lambda W = 0, \qquad T' + \lambda a^2 T = 0.$$

Для $W(x)$ з урахуванням (2.72), (2.73) одержуємо:

$$W'' = -\lambda W;$$

$$\left.(W - hW')\right|_{x=0} = 0; \tag{2.74}$$

$$\left.(W + HW')\right|_{x=l} = 0. \tag{2.75}$$

Перевіримо самоспряженість оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ при даних крайових умовах, тобто покажемо, що

$$\int_0^l W_1 W_2'' dx = \int_0^l W_2 W_1'' dx . \tag{2.76}$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int_0^l W_1 W_2'' dx = W_1 W_2' \Big|_0^l - \int_0^l W_1' W_2' dx = W_1 W_2' \Big|_0^l - W_1' W_2 \Big|_0^l + \int_0^l W_2 W_1'' dx .$$

Але на підставі (2.74) і (2.75) маємо

$$W_1 W_2' \Big|_0^l - W_1' W_2 \Big|_0^l = -HW_1'(l) W_2'(l) - hW_1'(0) W_2'(0) +$$
$$+HW_1'(l) W_2'(l) + hW_1'(0) W_2'(0) = 0 ,$$

тобто рівність (2.76) доведено.

Отже, ми довели, що власні значення λ цієї задачі дійсні. Легко переконатися, що вони додатні. Дійсно, запишемо рівність

$$\lambda W = -W'' .$$

Помножимо скалярно на W обидві частини цієї рівності. Тоді одержимо

$$\lambda \int_0^l W^2 dx = -\int_0^l W W'' dx .$$

Обчислимо праву частину

$$-\int_0^l W W'' dx = -W W' \Big|_0^l + \int_0^l W'^2 dx = HW'^2(l) + hW'^2(0) + \int_0^l W'^2 dx .$$

Таким чином,

$$\lambda \int_0^l W^2 dx > 0 ,$$

а значить $\lambda > 0$. Тому загальний розв'язок рівняння $W'' + \lambda W = 0$ має вигляд

$$W = A\cos\sqrt{\lambda} x + B\sin\sqrt{\lambda} x$$

або

$$W = A\cos\mu x + B\sin\mu x .$$

Звідси

$$W' = -\mu A\sin\mu x + \mu B\cos\mu x .$$

Використовуючи крайові умови (2.74) і (2.75), одержимо

$$\begin{cases} A - \mu h B = 0 \\ A\cos\mu l + B\sin\mu l + H(-\mu A\sin\mu l + \mu B\cos\mu l) = 0. \end{cases}$$

Це однорідна система відносно A і B. Вона має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли дорівнює нулю її визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu h \\ \cos\mu l - \mu H\sin\mu l & \sin\mu l + H\mu\cos\mu l \end{vmatrix} = 0. \tag{2.77}$$

Звідси визначимо μ. Без обмеження загальності покладемо для зручності $B=1$, тоді знайдемо A.

Перепишемо рівняння (2.77) так

$$\sin\mu l + H\mu\cos\mu l + \mu h\cos\mu l - \mu^2 hH\sin\mu l = 0,$$

або, поклавши $z=\mu l$, знаходимо

$$\frac{h+H}{l} z\cos z - \left(\frac{hH}{l^2}z^2 - 1\right)\sin z = 0. \tag{2.78}$$

Відомо, що власні значення λ даної задачі дійсні та додатні. Однак, ліва частина рівняння (2.78) непарна, і виходить, якщо z – корінь, то й $-z$ – корінь. Покажемо безпосередньо, що всі корені рівняння (2.78) дійсні. Нехай для визначеності $h=0, H>0$ (це значить, що ліворуч підтримується нульова температура, а праворуч має місце теплообмін). Але, якщо $h=0$, то $A=0$, а значить

$$W = B\sin\mu x. \tag{2.79}$$

Рівняння (2.78) у цьому випадку набуде вигляду

$$\frac{H}{l} z\cos z + \sin z = 0, \tag{2.80}$$

тобто

$$\mathrm{tg} z = -\frac{H}{l} z.$$

Це рівняння розв'язується графічним шляхом.

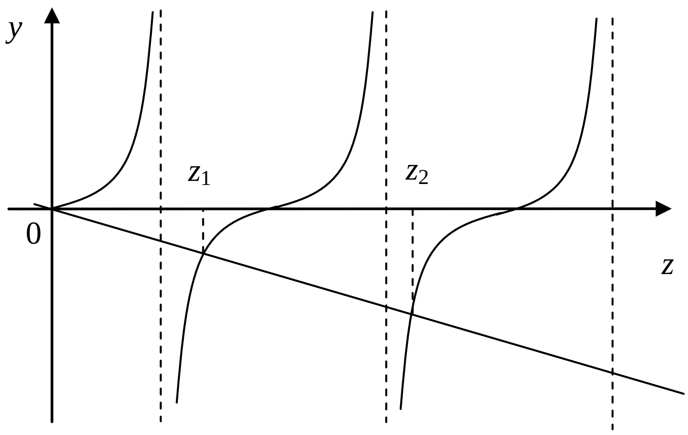


Рис. 2.9

Легко бачити (рис. 2.9), що воно має незліченну множину коренів $z_1, z_2, z_3, \ldots$ При цьому, чим більше n, тим ближче z_n до абсциси асимптоти. Іншими словами, при будь-якому n

$$z_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} + \varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_n > 0$ при всіх n.

Звертаючись тепер до функції (2.79), запишемо її так:

$$W_n = \sin\frac{z_n x}{l}.$$

На підставі загальної теорії власні функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_0^l \sin\frac{z_n x}{l}\sin\frac{z_m x}{l}dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Для $T(t)$ маємо

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n a^2 t}, \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

з урахуванням $\lambda = \mu^2 = \left(\frac{z}{l}\right)^2$

$$T_n(t) = e^{-z_n^2 \frac{a^2 t}{l^2}}.$$

Розв’язок вихідної задачі, відповідно до загальної теорії методу Фур’є, шукаємо у вигляді ряду

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-z_n^2 \frac{a^2 t}{l^2}} \sin\frac{z_n x}{l}.$$

Він збігається досить швидко завдяки множникам $e^{-z_n^2 \frac{a^2 t}{l^2}}$.
З початкової умови одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{z_n x}{l} = \varphi(x).$$

Функція $\varphi(x)$ розвинена в ряд за синусами, отже,

$$A_n = \frac{1}{\int_0^l \sin^2\frac{z_n x}{l}dx}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{z_n x}{l}dx.$$

Лабораторна робота 5

Завдання 5.1.

Знайти закон розподілу температури усередині стрижня з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо на кінцях стрижня підтримується температура, рівна 0^0, а початкова температура задається функцією

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{l}, 0\le x\le \dfrac{l}{2}\\ l-x, \dfrac{l}{2}<x\le l\end{cases}.$$

Побудувати графіки розподілу температури по довжині стрижня для моментів часу $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$. (Обчислення провести приблизно, утримуючи 3 члени розвинення розв'язку в ряд).
Значення a й l наведені в таблиці.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	4	1	5	4	2	1	5	3	4	2	3	5	3	1	2
l	3	2	5	4	5	3	8	2	1	4	10	9	3	5	7

№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	5	3	1	2	4	1	5	4	2	3	5	1	4	2	6
l	1	4	10	2	8	1	4	6	1	5	6	12	2	6	3

Завдання 5.2. Розв'язати завдання, користуючись методом Фур'є.

5.2.1. Знайти розподіл температури в однорідній кулі радіусом R, усередині якої, починаючи з моменту часу $t=0$, діє джерело тепла з постійною щільністю Q, а поверхня підтримується при температурі, рівній нулю. Початкова температура кулі дорівнює нулю.

5.2.2. Дано однорідну кулю радіусом R, центр якого розташовано на початку координат. Відомо, що початкова температура будь-якої точки кулі залежить тільки від відстані r цієї точки від центра кулі. Весь час спостереження зовнішня поверхня кулі вільно охолоджується в середовищі, що має температуру, рівну нулю. Визначити температуру будь-якої точки кулі в будь-який момент часу.

5.2.3. Знайти розподіл температури в однорідній кулі радіусом R, усередині якого, починаючи з моменту часу $t=0$, діє джерело тепла з постійною щільністю Q, а на поверхні відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Температура навколишнього середовища дорівнює нулю. Початкова температура кулі дорівнює нулю.

5.2.4. Однорідна куля радіусом R перебуває при постійній температурі u_0 й оточена сферичною оболонкою з того ж матеріалу товщиною R, що перебуває при температурі, рівній нулю. Все це охолоджується в середовищі з температурою, рівною нулю. Визначити температуру будь-якої точки кулі в будь-який момент часу.

5.2.5. Дано однорідну кулю радіусом R при температурі, рівній нулю. Починаючи з моменту часу $t=0$ температура навколишнього середовища зростає лінійно з часом, так що $U\Big|_{\text{ñô åðí}}=bt$, де b – постійна. Теплообмін між поверхнею кулі й навколишнім середовищем відбувається за законом Ньютона. Нагрівання відбувається рівномірно (симетричне задання). Знайти розподіл температури за радіусом кулі в будь-який момент часу.

5.2.6. Дано однорідну кулю радіусом R при температурі, рівній нулю. Куля нагрівається рівномірно (симетричне задання) постійним тепловим потоком q. Знайти розподіл температури за радіусом кулі в будь-який момент часу.

5.2.7. Знайти закон розподілу температури усередині стрижня довжиною l, що лежить на відрізку $[0,l]$, якщо в початковий момент температура усередині стрижня була розподілена таким чином:

$$u(x,t)\Big(_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{x}{l}u_0, & 0<x<\dfrac{l}{2}\\[2mm] \dfrac{l-x}{l}u_0, & \dfrac{l}{2}<x<l,\end{cases}$$

де u_0 = const. На кінцях стрижня підтримується постійна нульова температура. Теплообмін вільний.

5.2.8. Знайти закон розподілу температури усередині стрижня при вільному теплообміні, якщо на лівому кінці стрижня (при $x = 0$) підтримується постійна температура $u=0^0$, а правий кінець стрижня ($x = l$) теплоізольований від навколишнього середовища (тобто похідна за x від температури в правому кінці дорівнює нулю: $u'_x(x,t)\Big|_{x=l}=0$). Початкова температура стрижня задана функцією: $u(x,t)\Big|_{t=0}=x$.

5.2.9. Знайти закон остигання однорідного стрижня довжиною l, якщо в лівому кінці стрижня (при $x = 0$) підтримується постійна температура, рівна 0^0, а правий кінець стрижня ($x = l$) теплоізольований. Початкова температура точок стрижня задається формулою:

$$u(x,t)\Big(_{t=0}=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{l}{2}\\[2mm] u_0, & \dfrac{l}{2}<x<l.\end{cases}$$

Теплообмін вільний.

5.2.10. Знайти закон розподілу температури усередині стрижня довжиною *l*, якщо в початковий момент температура усередині стрижня у всіх точках дорівнювала 0^0, у лівому кінці підтримується увесь час постійна температура m_1, а в правому – постійна температура m_2. Теплообмін вільний.

5.2.11. Знайти закон розподілу температури усередині стрижня довжиною *l,* розташованого на відрізку [0,*l*], якщо в початковий момент температура усередині стрижня рівнялася нулю; у правому кінці температура підтримується увесь час також рівною нулю, а в лівому змінюється за законом $u(0,t)=u_0\cos\omega t$ (де u_0, ω – задані числа). Теплообмін не вільний: усередині стрижня є джерела й поглиначі тепла; їхня інтенсивність (розраховуючи на одиницю маси стрижня) дорівнює $-u_0\omega\frac{l-x}{l}\sin\omega t$.

5.2.12. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стрижні довжиною *l* при вільному теплообміні, якщо початкова температура цього стрижня задана рівністю $u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)$. Лівий кінець цього стрижня теплоізольований, а в правому підтримується постійна температура $u(x,t)\big|_{t=l}=u_0>0$. Розглянути, зокрема, випадок, коли $\varphi(x)=u_0\frac{x^2}{l^2}$.

5.2.13. Дано тонкий однорідний стрижень, початкова температура якого дорівнює 0^0. На кінці $x = l$ температура підтримується рівною 0^0, а на кінці $x = 0$ вона зростає пропорційно минулому часу: $u(0,t)=At$, де A – постійна. Знайти закон зміни температури усередині стрижня.

5.2.14. Дано тонкий однорідний стрижень із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює $f(x)=\frac{x(l-x)}{l^2}$. Кінці стрижня підтримуються при температурі, рівній 0^0. Визначити температуру стрижня в будь-який момент часу.

5.2.15. Розв’язати завдання про остигання тонкого однорідного стрижня з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура дорівнює $f(x)$, уважаючи, що лівий кінець стрижня підтримується при температурі, рівній 0^0, а правий – теплоізольований.

5.2.16. Дано тонкий однорідний стрижень із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює нулю. На кінці $x=l$ підтримується температура, рівна 0^0, а на кінці $x=0$ вона змінюється за законом $U(0,t)=A\sin\omega t$, де A – постійна. Визначити температуру стрижня в будь-який момент часу.

5.2.17. Дано тонкий однорідний стрижень із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює $A\dfrac{x}{l}$. На кінці $x=0$ підтримується температура, рівна 0^0, а на кінці $x=l$ вона змінюється за законом $U(l,t)=Ae^{-t}$, де A – постійна. Визначити температуру стрижня в будь-який момент часу.
5.2.18. Дано тонкий однорідний стрижень із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює $U_0=\text{const}$. На кінці $x=0$ підтримується температура, рівна $U_1=\text{const}$, а на кінці $x=l$ – температура, рівна $U_2=\text{const}$. Визначити температуру стрижня в будь-який момент часу.
5.2.19. Дано тонкий однорідний стрижень із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює $U_0=\text{const}$. На кінці $x=0$ підтримується температура, рівна $U_1=\text{const}$, а на кінець $x=l$ подається постійний тепловий потік Q. Визначити температуру стрижня в будь-який момент часу.
5.2.20. Дано тонкий однорідний стрижень із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого дорівнює нулю. Кінець $x=0$ теплоізольований, а на кінці $x=l$ відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона (температура навколишнього середовища підтримується рівною $U_0=\text{const}$). Визначити температуру стрижня в будь-який момент часу.

§7. Розв'язання задач математичної фізики із зосередженими параметрами

Моделювання деяких практичних задач пов'язано із залученням зосереджених параметрів типу точкових матеріальних мас, точкових сил і моментів, імпульсів, що миттєво діють, точкових джерел тепла і т.ін.

Нижче дані приклади розв'язання задач із зосередженими параметрами на основі застосування δ-функції Дірака.

7.1. δ-функція Дірака

Розглянемо декілька функцій.

1) $Q(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h},\ x\in\left[-\dfrac{h}{2};\dfrac{h}{2}\right],\\ 0,\ x\notin\left[-\dfrac{h}{2};\dfrac{h}{2}\right].\end{cases}$

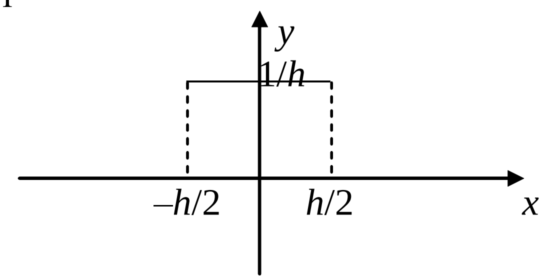


Рис. 2.10

Ця функція задовольняє рівності (рис. 2.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = 1.$$

Дійсно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = 2\int_{0}^{h/2} \frac{dx}{h} = \frac{2}{h}x\Big|_{0}^{h/2} = 1.$$

2) $Q(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

Обчислимо площу під графіком цієї функції (рис. 2.11):

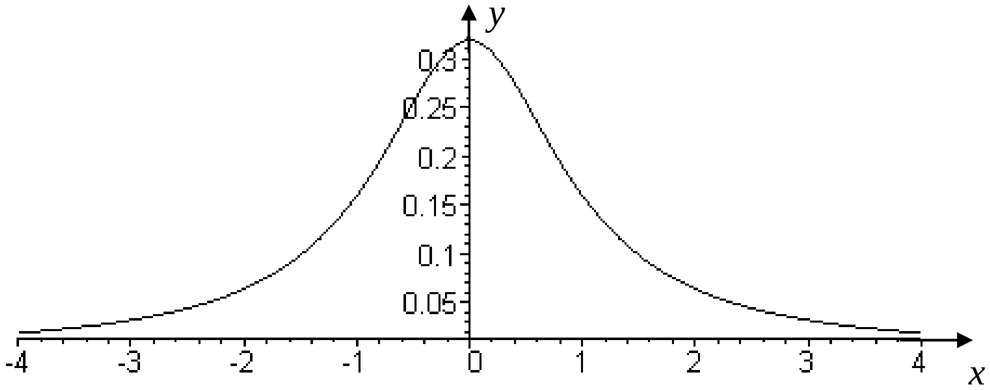


Рис. 2.11

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}x\Big|_{-\infty} = 1.$$

3) $Q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$.

Площа під графіком цієї функції (рис. 2.12) $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = 1$. Дійсно,

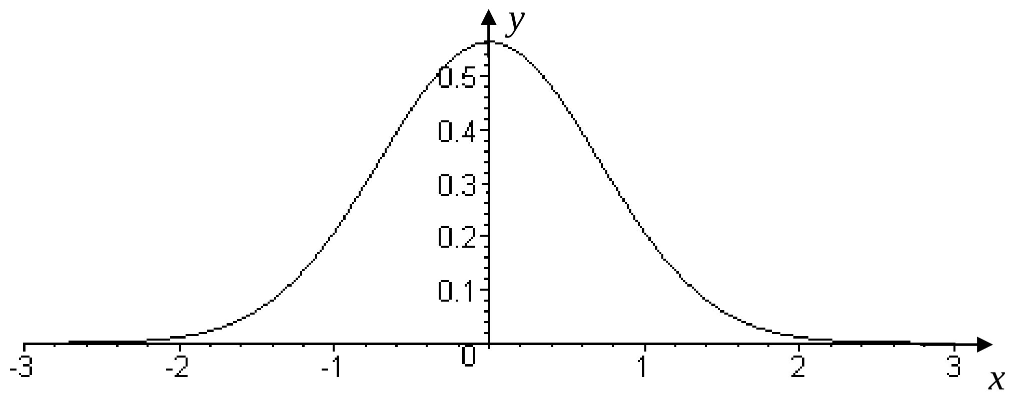


Рис. 2.12

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1.$$

Раніше було доведено, що $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ за властивістю Γ-функції (див. додаток).

Нехай функція $Q(x)$ така, що задовольняє умову $\int_{-\infty}^{+\infty}Q(x)dx=1$. Тоді функція вигляду

$$Q_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

де ε – стала величина, яка може бути як завгодно малою, також буде задовольняти цю умову (рис. 2.13). Дійсно

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Q_\varepsilon(x)dx=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx=\left[\frac{x}{\varepsilon}=t\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)dt=1.$$

При зменшенні сталої ε графіки функцій $Q_\varepsilon(x)$ будуть звужуватися вздовж осі Oy та нескінченно зростати в околі точки $x=0$.

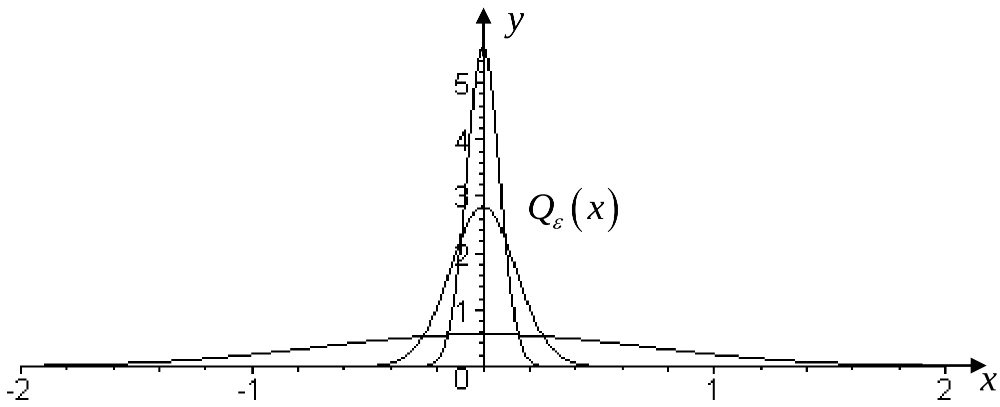


Рис. 2.13

Якщо зробити граничний перехід при $\varepsilon\to 0$, то отримаємо так звану узагальнену функцію Дірака

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}Q_\varepsilon(x).$$

Визначення. Дельта-функцією називається функція, яка задовольняє вимоги

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0\end{cases}\tag{2.81}$$

причому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Ця функція має фільтруючу властивість, яка доведена у такій теоремі.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на всій множині дійсних чисел, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{2.82}$$

або в узагальненій формі

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0). \tag{2.83}$$

Доказ. Доведемо першу рівність. Нехай a – деяке додатне число. Тоді вихідний невласний інтеграл можна представити як

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{-a} f(x)\delta(x)dx + \int_{-a}^{a} f(x)\delta(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx =$$

$\|$ Враховуючи властивості δ-функції одержимо $\|$

$$= \int_{-a}^{a} f(x)\delta(x)dx = \| \text{ Скористаємося тим, що } \delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} Q_\varepsilon(x), \text{ тоді } \|$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-a}^{a} f(x)Q_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)Q_\varepsilon(x)dx =$$

$\|$ за узагальненою теоремою про середнє значення існує $\xi \in [-\varepsilon;\varepsilon]$ таке, що $\|$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Q_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi) = f(0).$$

Рівність доведено.

Щоб довести рівність (2.83), у першій рівності (2.82) виконують заміну $x - x_0 = t$.

Поняття δ-функції дозволяє використовувати метод Фур'є для розв'язання задач із зосередженими факторами. Наприклад, якщо йдеться про розв'язання задачі про коливання струни під дією зосередженої сили в точці $x = x_0$. Тоді, щоб визначити інтенсивність сили в цій точці розподілимо всю силу на проміжку $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ із загальною довжиною 2ε. Тоді інтенсивність сили можливо визначити як

$$P(x)=\begin{cases}\dfrac{P}{2\varepsilon},\ x\in[x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon],\\ 0,\ x\in[0;x_0-\varepsilon)\cup(x_0+\varepsilon;l]\end{cases}$$

або $P(x)=P\cdot Q_\varepsilon(x-x_0)$, де $Q_\varepsilon(x-x_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon},\ x\in[x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon],\\ 0,\ x\in[0;x_0-\varepsilon)\cup(x_0+\varepsilon;l].\end{cases}$

Перейдемо до границі, якщо $\varepsilon\to 0$, тоді одержимо, що
$P(x)=P\cdot \lim\limits_{\varepsilon\to 0} Q_\varepsilon(x-x_0)=P\cdot\delta(x-x_0)$.

Для прикладу розглянемо задачі, які виникають при вивченні малих поперечних коливань пружної струни, малих поздовжніх коливань прямолінійного пружного стержня й одновимірних теплових задач.

7.2. Зосереджений параметр входить у праву частину рівняння

***Приклад* 1.**

Вивчити поперечні коливання струни довжиною l з кінцями, закріпленими в точках $x=0$ і $x=l$. На струну діє сила $A\sin\omega t$, яка зосереджена в деякій точці $x=c$. Визначити форму вимушених коливань, якщо в початковий момент переміщення й швидкості всіх точок струни були нульовими.

Розв'язання. Позначимо через $u=u(x,t)$ прогин струни в точці x у момент t. Функція $u(x,t)$ є розв'язком лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\ 0<x<l,\quad t>0, \tag{2.84}$$

T_0 – натяг струни, ρ – щільність і $f(x,t)$ – інтенсивність навантаження. Умови закріплення кінців струни

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t\ge 0, \tag{2.85}$$

початкові умови

$$u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0\le x\le l.$$

У нашому випадку $f(x,t)=A\sin\omega t\cdot\delta(x-c)$.

Розв'язок неоднорідного рівняння (2.84) будемо знаходити у вигляді суми двох функцій $u=v+w$, де v є розв'язком відповідного однорідного рівняння, а w – розв'язком неоднорідного рівняння.

За методом Фур'є нетривіальний розв'язок $v(x,t)$ однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad 0 < x < l \tag{2.86}$$

має вигляд $v(x,t) = X(x)T(t)$. Задача (2.86) із заданими крайовими умовами була розв'язана раніше.

Загальний розв'язок задачі (2.86) наведемо у вигляді суперпозиції частинних розв'язків:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin\frac{an\pi t}{l} + B_n \cos\frac{an\pi t}{l} \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{2.87}$$

Звертаючись до початкових умов, знаходимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n B_n X_n(x) = 0;$$

з ортогональності випливає, що $A_n = B_n = 0$, $n = 1,2,\ldots$

Отже $v(x,t) \equiv 0$.

Розв'язок неоднорідного рівняння (2.84), відповідно до теореми розвинення за системою функцій $X_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\, sin\frac{n\pi x}{l}$, шукаємо у вигляді:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) X_n(x).$$

Для відшукання невизначених коефіцієнтів $\gamma_n(t)$ підставимо цей ряд у рівняння (2.84). Тоді одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n''(t) + a^2 \lambda^2{}_n \gamma_n(t) \right\} X_n(x) = \frac{1}{\rho} f(x,t). \tag{2.88}$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $X_к$, і результат проінтегруємо на відрізку $[0,l]$. Завдяки ортогональності системи $\{X_n\}$ всі члени ряду (2.88) при $n \neq k$ після інтегрування зникнуть. Як результат отримаємо рівняння

$$\gamma_n''(t) + a^2 \lambda^2{}_n \gamma_n(t) = f_n(t), \tag{2.89}$$

де

$$f_n(t) = \frac{1}{\rho} \int_0^l f(x,t) X_n(x) dx = \frac{A}{\rho} \sin\omega t \cdot X_n(c). \tag{2.90}$$

Частинний розв'язок рівняння (2.89), який відповідає умовам $\gamma_n(0) = \gamma_n'(0) = 0$, знаходимо методом варіації довільних сталих у випадку $\omega \neq a\lambda_n$:

$$\gamma_n(t) = \frac{A}{\rho} X_n(c) \cdot \frac{\lambda_n a\, sin\,\omega t - \omega\, sin\,\lambda_n a t}{\lambda_n a \left(\lambda^2{}_n a^2 - \omega^2 \right)}.$$

У результаті для функції $w(x,t)$ одержуємо розвинення:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot \gamma_n(t).$$

Загальний розв'язок розглянутої задачі є сумою цієї функції та функції (2.87) і записується у вигляді

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = w(x,t).$$

Таким чином, якщо частота сили не збігається з жодною із власних частот вільних коливань струни $a\lambda_n$, (резонанс відсутній), її рух описується рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\rho l} sin \frac{n\pi x}{l} sin \frac{n\pi c}{l} \frac{\lambda_n a\, sin\, \omega t - \omega\, sin\, \lambda_n at}{\lambda_n a\left(\lambda^2{}_n a^2 - \omega^2\right)}. \qquad (2.91)$$

Оскільки $\lambda^2{}_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, отриманий ряд абсолютно та рівномірно збігається при всіх x і t, а його сума залишається обмеженою за часом.

Розглянемо інший випадок, коли ω збігається з однією із власних частот $a\lambda_k$. Розв'язок у цьому випадку можна одержати з (2.91), виконуючи граничний перехід при $\omega \to a\lambda_k$. Використовуючи правило Лопіталя, одержуємо:

$$\lim_{\omega \to a\lambda_k} \frac{\lambda_k a \sin \omega t - \omega \sin \lambda_k at}{\lambda_k a\left(\lambda^2{}_k a^2 - \omega^2\right)} = -\frac{t\lambda_k a \cdot \cos \lambda_k at - \sin \lambda_k at}{2a^2 \lambda_k^2}.$$

Таким чином, у випадку резонансу

$$u(x,t) = \frac{A}{\rho l a^2 \lambda_k{}^2}\left(\sin \lambda_k at - t\lambda_k a \cos \lambda_k at\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi c}{l} +$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{2A}{\rho l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \frac{\lambda_n a \sin \omega t - \omega \sin \lambda_n at}{\lambda_n a\left(\lambda^2{}_n a^2 - \omega^2\right)}.$$

Завдяки появі тут лінійного множника t відхилення необмежено зростає зі збільшенням t. Звичайно, на реальній струні нескінченно велике зростання амплітуди коливань неможливе. Це протиріччя пояснюється тим, що рівняння (2.84) придатне лише для опису малих коливань струни та не може бути застосоване при великих амплітудах.

***Приклад* 2.**

Один кінець тонкого однорідного стержня, розташованого між точками $x = 0$ й $x = l$ числової осі, підтримується при нульовій температурі, інший кінець і вся бічна поверхня теплоізольовані. У момент $t = 0$ у внутрішній точці стержня $x = x_0$ починає діяти теплове джерело інтенсивності Q. Знайти розподіл температури в стержні у довільний момент часу $t > 0$, якщо в початковий момент вона дорівнювала нулю.

Розв'язання. Нехай $u = u(x,t)$ – температура стержня в точці x в момент часу t. Функція $u(x,t)$ задовольняє рівняння теплопровідності

$$c\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{2.92}$$

граничні умови

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0 \tag{2.93}$$

і початкові умови

$$u(x,0) = 0, \; 0 \le x \le l. \tag{2.94}$$

Тут ρ – щільність матеріалу стержня; c – питома теплоємність; k – коефіцієнт теплопровідності; $f(x,t)$ – інтенсивність джерел. У даному випадку функція $f(x,t) = Q \cdot \delta(x - x_0)$.

Спочатку розв'язуємо однорідне рівняння:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \; 0 < x < l, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho} \tag{2.95}$$

методом Фур'є. Якщо покласти $u(x,t) = X(x)T(t)$, то для $T(t)$ одержимо рівняння першого порядку

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

а для $X(x)$ – задачу Штурма–Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \; 0 < x < l \\ X(0) = X'(0) = 0 \end{cases}$$

з невідомим параметром λ. Звідси

$$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

і з першої граничної умови $B = 0$. З другої умови маємо

$$A\lambda\cos\lambda l = 0.$$

Оскільки $A \ne 0$ і $\lambda \ne 0$ (інакше $X(x) \equiv 0$), для знаходження λ одержуємо рівняння $\cos\lambda l = 0$. Отже, власні числа λ^2 набувають дискретних значень

$$\lambda_n{}^2 = \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}, \; n = 1,2,...,$$

яким відповідають власні функції $X_n(x) = A_n\sin\lambda_n x$. Для кожного n знаходимо

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n{}^2 t}$$

і

$$u_n(x,t)=C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}X_n\left(x\right).$$

За принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння (2.95) подається рядом

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}X_n(x)$$

з довільними постійними C_n. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.92) розшукуємо у вигляді ряду:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n(t)X_n(x)$$

з невідомими функціями $D_n(t)$. Підставляючи цей ряд у рівняння (2.92), одержуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(D_n'(x)+\lambda^2{}_n a^2 D_n(t)\right)X_n(x)=\frac{1}{c\rho}f(x,t).$$

Як і в попередній задачі, скористаємося ортогональністю функцій $X_n(x)$. Помножимо обидві частини останньої рівності на $X_m(x)$ і проінтегруємо результат на відрізку $\left[0,l\right]$. Всі доданки ряду, що відповідають $n\neq m$, на підставі ортогональності власних функцій зникнуть, і тоді отримуємо рівняння

$$D_m'(t)+\lambda_m{}^2 a^2 D_m(t)=f_m(t),$$

де

$$f_m=\frac{1}{c\rho}\int_0^l f(x,t)X_m(x)dx.$$

Загальний розв'язок цього рівняння представляється у вигляді

$$D_m(t)=F_m e^{-a^2\lambda_m{}^2 t}+\int_0^t e^{-a^2\lambda_m{}^2(t-\tau)}f_m(\tau)d\tau\ ,\ \ F_m=\text{const},$$

звідки загальний розв'язок рівняння (2.92) знаходимо як

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n e^{-a^2\lambda_n{}^2 t}X_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{-a^2\lambda_n{}^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau X_n(x).$$

З початкової умови

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n X_n(x)=0$$

і на підставі співвідношення ортогональності власних функцій $F_n=0$ для всіх $n\geq 1$. Крім того, за умовою задачі

$f\left(x,t\right)=Q\delta\left(x-x_0\right)$, тому $f_n(t)=\dfrac{Q}{c\rho}X_n(x_0)$.

$$\int_0^t e^{-a^2\lambda_n{}^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{Q}{c\rho}X_n(x_0)\frac{-1}{a^2\lambda_n{}^2}e^{-a^2\lambda_n{}^2(t-\tau)}\Bigg|_0^t=\frac{Q}{a^2c\rho\lambda_n{}^2}X_n(x_0)\left(1-e^{-a^2\lambda_n{}^2t}\right).$$

Таким чином розв'язок рівняння (2.92), що задовольняє умови (2.93) і (2.94), має вигляд:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q}{a^2c\rho\lambda_n{}^2}X_n(x)X_n(x_0)\left(1-e^{-a^2\lambda_n{}^2t}\right). \tag{2.96}$$

Зі збільшенням t експонентний множник у кожному доданку прямує до нуля, і в стержні встановлюється стаціонарний розподіл температури:

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q}{a^2c\rho\lambda_n{}^2}X_n(x)X_n(x_0).$$

Функцією (2.96) можна скористатися для розв'язку задачі теплопровідності при наявності миттєвого точкового джерела, тобто джерела, зосередженого не тільки в просторі, але й у часі. Дійсно, якщо дія точкового джерела, розглянутого вище, починається не в нульовий, а в довільний момент $\left(\tau>0\right)$, то розв'язок задачі теплопровідності має вигляд

$$u_\tau(x,t)=\begin{cases}0,\ t<\tau\\ u\left(x,t-\tau\right),\ t\ge\tau.\end{cases}$$

Будемо вважати, що з моменту τ в точці $x=x_0$ стержня діє джерело інтенсивності $\dfrac{Q}{\Delta\tau}$, а в момент $\tau+\Delta\tau$ у тій же точці одночасно включається джерело інтенсивності $-\dfrac{Q}{\Delta\tau}$. Тоді фактична дія теплових джерел припиняється в момент $\tau+\Delta\tau$, а загальна кількість виділеного тепла за час від τ до $\tau+\Delta\tau$ дорівнює Q. Розподіл температури в стержні описується функцією:

$$G_\tau\left(x,x_0,t\right)=\begin{cases}0,\quad t<\tau,\\ \dfrac{Q}{a^2c\rho}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)X_n(x_0)\frac{e^{-a^2\lambda_n{}^2(t-\tau-\Delta\tau)}-e^{-a^2\lambda_n{}^2(t-\tau)}}{\lambda_n{}^2\Delta\tau},t\ge\tau.\end{cases}$$

Після граничного переходу при $\Delta\tau\to0$ одержуємо функцію миттєвого точкового теплового джерела:

$$G(x,x_0,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\sin\frac{\pi(2n-1)x_0}{2l}e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\right)^2(t-\tau)},\ t-\tau\geq 0.$$

Вона задає температуру в точці x стержня за умови, що в момент τ у точці x_0 миттєво виділяється $Q=c\rho$ одиниць тепла. Зі зростанням t ця функція прямує до нуля: стержень остигає до нульової температури завдяки тому, що тепло, яке виділилося в початковий момент, іде через кінець $x=0$, де підтримується нульова температура.

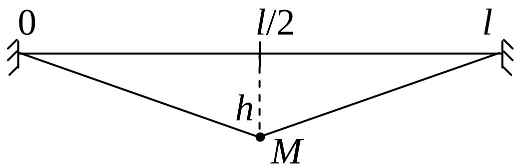
7.3. Зосереджений параметр входить у коефіцієнти рівняння

***Приклад* 3**

Вивчити коливання однорідної струни $0\leq x\leq l$ (щільність ρ) із закріпленими кінцями та зосередженою масою M в точці $x=\frac{l}{2}$ струни, викликані початковим відхиленням струни, яке визначається за формулою

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}\frac{2hx}{l},\ 0\leq x\leq\frac{l}{2}\\ \frac{2h(l-x)}{l},\frac{l}{2}<x\leq l,\end{cases}$$

де h – мале число. Початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю.



Розв’язання. Завдання полягає у відшуканні розв’язку рівняння:

$$\left(\rho+M\delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\right)\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2},\ \ 0<x<l,\ \ t>0, \qquad (2.97)$$

який задовольняє граничні

$$u(0,t)=u(l,t)=0$$

і початкові умови:

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Тут T_0 – сила натягу струни.

Застосовуючи метод поділу змінних для відшукання нетривіального розв’язку однорідного рівняння, покладемо $u(x,t)=X(x)T(t)$. Одержуємо рівняння $T''(t)+\lambda^2T(t)=0$ і крайову задачу Штурма–Ліувілля:

$$\begin{cases} T_0 X''(x) + \lambda^2\left(\rho + M\delta\left(x - \dfrac{l}{2}\right)\right)X(x) = 0, \quad 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{2.98}$$

Коефіцієнт $\rho + M\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)$ має розрив другого роду в точці $x = \frac{l}{2}$. Тому доводиться окремо розглядати це рівняння на ділянках $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ і $\left(\frac{l}{2}, l\right)$ і знайдені на них розв'язки поєднувати в точці $x = \frac{l}{2}$.

Якщо $0 < x < \frac{l}{2}$, то

$$T_0 X''(x) + \lambda^2 \rho X(x) = 0,$$

$$X''(x) + \frac{\lambda^2}{a^2} X(x) = 0,$$

де $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$. Виходить

$$X(x) = A_1 \sin\frac{\lambda}{a}x + B_1 \cos\frac{\lambda}{a}x,$$

і з умови $X(0) = 0$ знаходимо $B_1 = 0$. Таким чином, $X(x) = A_1 \sin\frac{\lambda}{a}x$.

Аналогічно, при $\frac{l}{2} < x < l$ маємо:

$$X''(x) + \frac{\lambda^2}{a^2} X(x) = 0,$$

$$X(x) = A_2' \sin\frac{\lambda}{a}x + B_2' \cos\frac{\lambda}{a}x.$$

Тепер з $X(l) = 0$ одержимо

$$A_2' \sin\frac{\lambda l}{a} + B_2' \cos\frac{\lambda l}{a} = 0$$

і можна прийняти $A_2' = A_2 \cos\frac{\lambda l}{2}$, $B_2' = -A_2 \sin\frac{\lambda l}{2}$, де A_2 – деяке постійне число. Тоді

$$X(x) = A_2\left(\sin\frac{\lambda x}{a}\cos\frac{\lambda l}{a} - \cos\frac{\lambda x}{a}\sin\frac{\lambda l}{a}\right) = A_2 \sin\frac{\lambda(x - l)}{a} \quad \text{і}$$

$$X(x)=\begin{cases} A_1\sin\frac{\lambda}{a}x, & 0\le x<\frac{l}{2},\\ A_2\sin\frac{\lambda}{a}(x-l), & \frac{l}{2}<x\le l. \end{cases} \tag{2.99}$$

У виразі для функції $X(x)$ залишаються невизначеними сталі A_1, A_2 і λ. Для їхнього відшукання скористаємося тим, що струна повинна в усі моменти часу залишатися нерозривною. Це значить, що повинна виконуватися умова неперервності:

$$X\left(\frac{l}{2}+0\right)=X\left(\frac{l}{2}-0\right). \tag{2.100}$$

Крім того, якщо проінтегрувати рівняння (2.98) за відрізком $\left[\frac{l}{2}-\varepsilon,\frac{l}{2}+\varepsilon\right]$ і потім спрямувати ε до нуля, одержимо так звану умову спряження:

$$T_0\left[X'\left(\frac{l}{2}+0\right)-X'\left(\frac{l}{2}-0\right)\right]+\lambda^2 MX\left(\frac{l}{2}\right)=0. \tag{2.101}$$

Пояснимо фізичний зміст останньої умови. Функція $u\left(\frac{l}{2},t\right)$ дає значення переміщення зосередженої маси M. Рівняння руху цієї маси за другим законом Ньютона має вигляд

$$M\frac{\partial^2 u\left(\frac{l}{2},t\right)}{\partial t^2}=F(t).$$

Проекція рівнодіючої сили натягу струни $F(t)$ на напрямок руху дорівнює $F(t)=T_0\left[\frac{\partial u\left(\frac{l}{2}+0,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(\frac{l}{2}-0,t\right)}{\partial x}\right]$. Виходить, що

$$M\frac{\partial^2 u\left(\frac{l}{2},t\right)}{\partial t^2}=T_0\left[\frac{\partial u\left(\frac{l}{2}+0,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(\frac{l}{2}-0,t\right)}{\partial x}\right],\ t>0.$$

Якщо врахувати, що $u\left(\frac{l}{2},t\right)=T(t)X\left(\frac{l}{2}\right)$ і $T''(t)+\lambda^2T(t)=0$, отримаємо рівність (2.101). Таким чином, умова (2.101) виходить у результаті відділення часу в рівнянні руху зосередженої маси M.

Відшукаємо сталі A_1 і A_2 з (2.100) і (2.101).

$$\begin{cases} A_1\sin\frac{\lambda l}{2a}+A_2\sin\frac{\lambda l}{2a}=0; \\ A_1\frac{\lambda}{a}\cos\frac{\lambda l}{2a}-A_2\left(\frac{\lambda}{a}\cos\frac{\lambda l}{2a}-\lambda^2\frac{M}{T_0}\sin\frac{\lambda l}{2a}\right)=0. \end{cases} \tag{2.102}$$

Визначник системи двох лінійних однорідних рівнянь із невідомими A_1 і A_2 дорівнює:

$$d(\lambda)=\begin{vmatrix} \sin\frac{\lambda l}{2a} & \sin\frac{\lambda l}{2a} \\ \frac{\lambda}{a}\cos\frac{\lambda l}{2a} & -\frac{\lambda}{a}\cos\frac{\lambda l}{2a}+\lambda^2\frac{M}{T_0}\sin\frac{\lambda l}{2a} \end{vmatrix}=\lambda\sin\frac{\lambda l}{2a}\left(\lambda\frac{M}{T_0}\sin\frac{\lambda l}{2a}-\frac{2}{a}\cos\frac{\lambda l}{2a}\right).$$

Для того щоб система (2.102) мала нетривіальний розв'язок (тобто розв'язок, для якого A_1 і A_2 не дорівнюють нулю одночасно), необхідно та достатньо, щоб визначник $d(\lambda)$ дорівнював нулю. Таким чином, для відшукання λ одержуємо рівняння:

$$\lambda\sin\frac{\lambda l}{2a}\left(\lambda\frac{M}{T_0}\sin\frac{\lambda l}{2a}-\frac{2}{a}\cos\frac{\lambda l}{2a}\right)=0.$$

Оскільки $\lambda\neq 0$ (інакше $X(x)\equiv 0$), то

$$\sin\frac{\lambda l}{2a}=0$$

або

$$\cos\frac{\lambda l}{2a}=\lambda\frac{Ma}{2T_0}\sin\frac{\lambda l}{2a}.$$

У результаті сукупність власних чисел розпадається на дві серії. Числа першої серії мають вигляд: $\bar{\lambda}_n=\left(\frac{2n\pi a}{l}\right)$, $n=1,2...$ При $\lambda=\bar{\lambda}_n$ перше рівняння системи звертається в тотожність, а друге зводиться до рівності

$$\lambda\left(A_1-A_2\right)\cos\frac{\lambda l}{2a}=0.$$

Оскільки $\cos\frac{\lambda l}{2a}=\cos n\pi\neq 0$, то $A_1=A_2$. Відповідні власні функції визначаються згідно з (2.99) рівностями:

$$\bar{X}_n(x)=\begin{cases}\sin\frac{2n\pi x}{l}, & 0\le x\le\frac{l}{2}\\ \sin\frac{2n\pi(x-l)}{l}=\sin\frac{2n\pi x}{l}, & \frac{l}{2}<x\le l,\end{cases}$$

у яких приймаємо $A_1=A_2=1$. Отже,

$$\bar{X}_n(x)=\sin\frac{2n\pi x}{l},\ x\in[0;l].$$

Числа другої серії $\overline{\overline{\lambda}}_n$, $n=1,2...$ знаходимо як розв'язки трансцендентного (тобто неалгебраїчного) рівняння $tg\mu_n=\frac{l\rho}{M}\frac{1}{\mu_n}$, $\overline{\overline{\lambda}}_n=\frac{2a\mu_n}{l}$.

Загальні властивості послідовності $\overline{\overline{\lambda}}_n$ можна одержати, розглядаючи графіки лівої і правої частин рівняння (рис. 2.14). Ясно, що всередині кож-

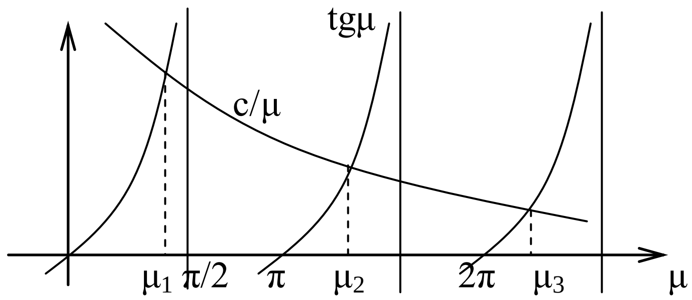


Рис. 2.14

ного інтервалу $\left(m\pi;\frac{\pi}{2}+m\pi\right)$ є єдина точка перетину обох графіків, що визначає власне число $\overline{\overline{\lambda}}_n=\frac{2a\mu_n}{l}$. Якщо підставити $\lambda=\overline{\overline{\lambda}}_n$ в (2.102), то з першого рівняння одержимо $A_1=-A_2$; тоді друге задовольниться автоматично, оскільки його ліва частина дорівнює $A_1\left(\frac{2\lambda}{a}\cos\frac{\lambda l}{2a}-\lambda^2\frac{M}{T_0}\sin\frac{\lambda l}{2a}\right)=0$. Кожному власному числу $\overline{\overline{\lambda}}_n$ відповідає власна функція:

$$\overline{\overline{X_n}}(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{2\mu_n x}{l}, & 0\le x\le\dfrac{l}{2}\\ -\sin\dfrac{2\mu_n(x-l)}{l}, & \dfrac{l}{2}<x\le l.\end{cases}$$

Корисно відзначити, що всі числа $\bar{\lambda}_n$ першої серії містяться серед власних чисел першої задачі, у якій зосереджена маса відсутня. Форма коливань $\bar{X}_n(x)$, що відповідає числу $\bar{\lambda}_n$, така, що $\bar{X}_n\left(\dfrac{l}{2}\right)=\sin\dfrac{2\pi nl}{2l}=0$. Таким чином, у коливаннях, що відповідають частотам $\bar{\lambda}_n$, зосереджена маса M не бере участі і не впливає на величини цих частот.

Числа другої серії $\bar{\bar{\lambda}}_n$ при малих значеннях M і малих номерах n близькі до чисел $\left(\dfrac{\pi(2n-1)a}{l}\right)$, які становлять другу частину власних чисел першої задачі, де $M=0$. З вигляду графіків на рис. 2.14 можна встановити, що $\bar{\bar{\lambda}}_1^2<\left(\dfrac{\pi a}{l}\right)^2$ і взагалі $\bar{\bar{\lambda}}_n^2<\left(\dfrac{\pi(2n-1)a}{l}\right)^2$. Це явище не випадкове та має цілком природне фізичне обґрунтування: додавання маси M до однорідної струни збільшує її інертність, не міняючи жорсткості, що приводить до зменшення частот вільних коливань. Форми коливання $\bar{\bar{X}}_n(x)$, що відповідають власним числам $\bar{\bar{\lambda}}_n^2$, неперервні у всіх точках, але мають злам при $x=\dfrac{l}{2}$, оскільки $\bar{\bar{X}}'_n\left(\dfrac{l}{2}+0\right)-\bar{\bar{X}}'_n\left(\dfrac{l}{2}-0\right)\ne 0$. Загальний характер власних функцій, що відповідають першим двом власним числам обох серій, показано на рис. 2.15.

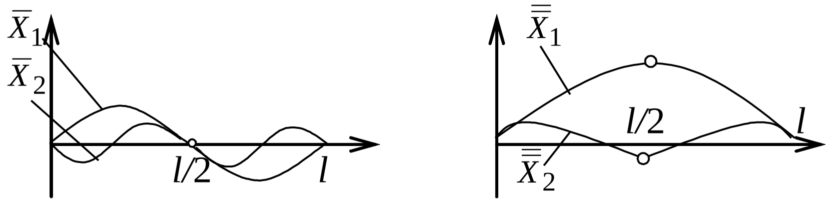


Рис. 2.15

Тепер знаходимо

$$\bar{T}_n(t) = \bar{C}_n \cos\frac{2\pi na}{l}t + \bar{D}_n \sin\frac{2\pi na}{l}t$$

і

$$\bar{\bar{T}}_n(t) = \bar{\bar{C}}_n \cos\frac{2\mu_n a}{l}t + \bar{\bar{D}}_n \sin\frac{2\mu_n a}{l}t,$$

де $\bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{\bar{C}}_n, \bar{\bar{D}}_n$ – довільні сталі.

Загальний розв'язок рівняння (2.97), за принципом суперпозиції та теоремою розвинення, записується у вигляді ряду за власними функціями

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{C}_n \cos\frac{2\pi na}{l}t + \bar{D}_n \sin\frac{2\pi na}{l}t\right)\bar{X}_n(x) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{\bar{C}}_n \cos\frac{2\mu_n a}{l}t + \bar{\bar{D}}_n \sin\frac{2\mu_n a}{l}t\right)\bar{\bar{X}}_n(x).$$

Підставляючи початкові умови, знаходимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{C}_n\bar{X}_n(x) + \bar{\bar{C}}_n\bar{\bar{X}}_n(x)\right) = \varphi(x); \tag{2.103}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{D}_n\frac{2\pi na}{l}\bar{X}_n(x) + \bar{\bar{D}}_n\frac{2\mu_n a}{l}\bar{\bar{X}}_n(x)\right) = 0. \tag{2.104}$$

Для знаходження сталих $\bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{\bar{C}}_n, \bar{\bar{D}}_n$ потрібно скористатися співвідношеннями ортогональності. Відповідно до загальної властивості ортогональності двох різних розв'язків $X(x)$ і $Y(x)$ задачі Штурма–Ліувілля (2.98) повинна виконуватися рівність $\int_0^l \left[\rho + M\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)\right]X(x)Y(x)dx = 0$. Для обчислення інтеграла скористаємось властивістю δ-функції, тоді приходимо до таких співвідношень ортогональності:

$$\rho\int_0^l X(x)Y(x)dx + MX\left(\frac{l}{2}\right)Y\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Вважаємо далі, що $\|y\|^2 = \rho\int_0^l Y^2(x)dx + MY^2\left(\frac{l}{2}\right)$, і знаходимо:

$$\|\bar{X}_n\|^2 = \rho\int_0^l \sin^2\frac{2n\pi x}{l}dx = \rho\frac{l}{2},$$

$$\|\bar{\bar{X}}_n\|^2 = \rho\int_0^{l/2} \sin^2\frac{2\mu_n x}{l}dx + \rho\int_{l/2}^{l} \sin^2\frac{2\mu_n(x-l)}{l}dx + M\sin^2\mu_n =$$

$$=\frac{\rho}{2}\left[x-\frac{l}{4\mu_n}\sin\frac{4\mu_n x}{l}\right]\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{\rho}{2}\left[x-\frac{l}{4\mu_n}\sin\frac{4\mu_n(x-l)}{l}\right]\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}+M\sin^2\mu_n=$$

$$=\frac{\rho l}{2}-\frac{\rho l}{4\mu_n}\sin 2\mu_n+M\sin^2\mu_n=\frac{\rho l}{2}-M\,\frac{\rho l}{2}\cdot\frac{tg\,\mu_n}{\rho l}\sin\mu_n\cos\mu_n+$$

$$+M\sin^2\mu_n=\frac{\rho l}{2}+\frac{M}{2}\sin^2\mu_n.$$

Помножимо обидві частини (2.103) на $\rho\bar{\bar{X}}_m(x)$, проінтегруємо за відрізком $[0,l]$ і потім додамо до результату ряд (2.103) у точці $x=\frac{l}{2}$, помножений на $M\bar{X}_m\left(\frac{l}{2}\right)$. На підставі співвідношень ортогональності одержимо

$$\bar{C}_n=\frac{1}{\left\|\bar{X}_n\right\|^2}\left(\rho\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{2n\pi x}{l}dx+M\bar{X}_n\left(\frac{l}{2}\right)\varphi\left(\frac{l}{2}\right)\right)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{2n\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{2}{l}(-1)^n\int_{-l/2}^{l/2}\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)\sin\frac{2n\pi x}{l}dx=0,$$

оскільки під знаком останнього інтеграла знаходиться непарна функція. Аналогічно

$$\bar{\bar{C}}_n=\frac{1}{\left\|\bar{\bar{X}}_n\right\|^2}\left(\rho\int_0^l\varphi(x)\bar{\bar{X}}_n(x)dx+M\bar{\bar{X}}_n\left(\frac{l}{2}\right)\varphi\left(\frac{l}{2}\right)\right)=\frac{2}{\rho l+M\sin^2\mu_n}\cdot$$

$$\cdot\left(\rho\int_0^{l/2}\frac{2xh}{l}\sin\frac{2\mu_n x}{l}dx+\rho\int_{l/2}^{l}-\frac{2h(l-x)}{l}\sin\frac{2\mu_n(x-l)}{l}dx+Mh\sin\mu_n\right)=$$

$$=\frac{2h}{\rho l+M\sin^2\mu_n}\left(\frac{4\rho}{l}\int_0^{l/2}x\sin\frac{2\mu_n x}{l}dx+M\sin\mu_n\right)=$$

$$=\frac{2h}{\rho l+M\sin^2\mu_n}\left(\frac{4\rho}{l}\left[-\frac{xl}{2\mu_n}\cos\frac{2\mu_n x}{l}+\left(\frac{l}{2\mu_n}\right)^2\sin\frac{2\mu_n x}{l}\right]\Bigg|_0^{l/2}+M\sin\mu_n\right)=$$

$$=\frac{2h}{\rho l+M\sin^2\mu_n}\left(M\left(\operatorname{tg}\mu_n-\frac{\rho l}{M\mu_n}\right)\cos\mu_n+\frac{\rho l}{\mu^2{}_n}\sin\mu_n\right)=\frac{2hl\rho\,sin\,\mu_n}{\mu_n^2\left(\rho l+M\,sin^2\,\mu_n\right)}.$$

Із другої граничної умови (2.104) випливає $\bar{D}_n = \bar{\bar{D}}_n = 0$. Остаточно для розв'язку задачі одержуємо

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hl\rho \sin \mu_n}{\mu^2{}_n(\rho l + M \sin^2 \mu_n)} \cos \frac{2\mu_n at}{l} \bar{\bar{X}}_n(x),\ 0 \le x \le l,\ t \ge 0.$$

7.4. Зосереджений фактор входить у граничну умову

***Приклад* 4**

Однорідний стержень має довжину l й площу поперечного перерізу σ. Кінець його $x = 0$ закріплено нерухомо, а на кінці $x = l$ зосереджена маса m. Стержень попередньо розтягнутий силою Q. Вивчити поздовжні коливання стержня, які виникають при миттєвому припиненні дії сили, що розтягує.

Розв'язання. Поздовжні переміщення точок стержня описуються функцією $u = u(x,t)$, яка задовольняє однорідному рівнянню

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad 0 < x < l \quad t > 0, \tag{2.105}$$

де ρ – щільність стержня, а E – модуль пружності. Оскільки кінець $x = 0$ не рухається, то $u(0,t) = 0$. За другим законом Ньютона рівняння руху маси m має вигляд

$$m\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = F(t),$$

де $F(t)$ – сила пружної взаємодії маси й стержня. Ця сила дорівнює

$$F(t) = \sigma E \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

Таким чином, функція $u(x,t)$ задовольняє граничні умови

$$u(0,t) = 0,\ m\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} + \sigma E \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0. \tag{2.106}$$

Для визначення початкових переміщень стержня знайдемо розв'язок $u_0(x)$ рівняння (2.105), що не залежить від часу. Оскільки $u_0''(x) = 0$, маємо $u_0(x) = cx + b$. З умови $u_0(0) = 0$ виходить, що $b = 0$, а оскільки сила Q на кінці $x = l$ обчислюється за законом Гука

$$Q = \sigma E u'(l),$$

то

$$Q = \sigma E c \text{ і } c = \frac{Q}{\sigma E}.$$

Отже, початкові умови задачі мають вигляд

$$u(x,0)=\frac{Qx}{\sigma E}, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0. \qquad (2.107)$$

Шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння (2.105) за методом Фур'є у вигляді добутку

$$u(x,t)=X(x)T(t).$$

Підстановка $u(x,t)$ в рівняння (2.106) приводить до двох звичайних рівнянь:

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0,$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,$$

і після поділу змінних у граничних умовах (2.106) одержуємо крайову задачу Штурма–Ліувілля для функції $X(x)$:

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \qquad (2.108)$$

$$X(0)=0, \quad X'(l)-\frac{m}{\sigma\rho}\lambda^2X(l)=0. \qquad (2.109)$$

Ця крайова задача відрізняється від задачі (2.84) – (2.85), оскільки гранична умова в точці $x=l$ містить невідомий параметр λ. Для того, щоб одержати співвідношення ортогональності в цьому випадку, припустимо, що функція $Y(x)$ є розв'язком задачі (2.108) – (2.109), що відповідає іншому значенню параметра і позначається μ^2. Інтегруючи частинами і з огляду на граничні умови для функції $X(x)$ й $Y(x)$, знаходимо:

$$\int_0^l X''(x)Y(x)dx=X'(l)Y(l)-X'(0)Y(0)-\int_0^l X'(x)Y'(x)dx=$$

$$=\frac{m}{\sigma\rho}\lambda^2X(l)Y(l)-\int_0^l X'(x)Y'(x)dx.$$

Якщо тепер помножити рівняння (2.108) на $Y(x)$ і проінтегрувати на відрізку $[0,l]$, то одержимо:

$$-\int_0^l X'(x)Y'(x)dx+\frac{m}{\sigma\rho}\lambda^2X(l)Y(l)+\lambda^2\int_0^l X(x)Y(x)dx=0.$$

Поміняввши $X(x)$ й $Y(x)$ місцями, знаходимо:

$$-\int_0^l X'(x)Y'(x)dx+\frac{m}{\sigma\rho}\mu^2X(l)Y(l)+\mu^2\int_0^l X(x)Y(x)dx=0.$$

Віднімання цієї тотожності з попередньої дає:

$$\left(\lambda^2-\mu^2\right)\left\{\frac{m}{\sigma\rho}X(l)Y(l)+\int_0^l X(x)Y(x)dx\right\}=0,$$

та оскільки $\lambda^2\neq\mu^2$, звідси виходить співвідношення ортогональності

$$\int_0^l X(x)Y(x)dx+\frac{m}{\sigma\rho}X(l)Y(l)=0. \qquad (2.110)$$

Перейдемо до фактичного відшукання $X(x)$. З рівняння (2.108) знаходимо загальний розв'язок

$$X(x)=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x,$$

причому з (2.109) одержуємо, що $B=0$ і

$$X(x)=A\sin\lambda x.$$

Друга гранична умова (2.109) набуває вигляду

$$\lambda A\cos\lambda l=\frac{m}{\sigma\rho}A\lambda^2\sin\lambda l \quad \text{або} \quad \lambda A\left(\cos\lambda l-\frac{m}{\sigma\rho}\lambda\sin\lambda l\right)=0.$$

З умови нетривіальності $X(x)$ виходить, що $\lambda A\neq 0$, так що

$$\cos\lambda l-\frac{m\lambda}{\sigma\rho}\sin\lambda l=0.$$

Отримали характеристичне рівняння

$$\mathrm{tg}\lambda l=\frac{\sigma\rho}{m}\frac{1}{\lambda}, \qquad (2.111)$$

яке має нескінченну множину додатних коренів $\lambda_1,\lambda_2,...$ Загальний характер розташування цих чисел легко зрозуміти, розглядаючи спільно графіки обох частин, схематично зображених на рис. 2.14. Зокрема, якщо масою m можна нехтувати порівняно з $\sigma\rho$, то для перших власних частот λ_n одержуємо наближені значення

$$\lambda_n\approx\frac{\pi\left(2n-1\right)}{2l}.$$

Ці числа отримуємо в задачі Штурма–Ліувілля (2.108) при граничних умовах $X(0)=X'(l)=0$. Кожному власному числу $\lambda_n^{\,2}$ відповідає власна функція

$$X_n(x)=\sin\lambda_n x$$

та

$$T_n(t)=C_n\cos a\lambda_n t+D_n\sin a\lambda_n t.$$

Тепер можна подати загальний розв'язок рівняння (2.105), що задовольняє граничні умови (2.106) у вигляді ряду:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos a\lambda_n t+D_n\sin a\lambda_n t\right)X_n(x).$$

Після підстановки цього ряду в початкові умови (2.107) отримаємо рівність

$$\frac{Qx}{E\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}C_nX_n(x); \qquad (2.112)$$

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}D_n a\lambda_n X_n(x). \qquad (2.113)$$

Поклавши $\|X\|^2=\int_0^l X^2(x)dx+\frac{m}{\sigma\rho}X^2(l)$, знаходимо

$$\|X_n\|^2=\int_0^l\sin^2\lambda_n xdx+\frac{m}{\sigma\rho}\sin^2\lambda_n l=\frac{1}{2}\left(l-\frac{1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n l\right)+\frac{m}{\sigma\rho}\sin^2\lambda_n l=$$

$$=\frac{1}{2}l-\frac{m}{\sigma\rho}\sin\lambda_n l\cos\lambda_n l\left(\frac{\sigma\rho}{2m\lambda_n}-tg\lambda_n l\right)=\frac{1}{2}\left(l+\frac{m}{\sigma\rho}\sin^2\lambda_n l\right).$$

Тепер помножимо обидві частини рівності (2.112) на $X_k(x)$, результат проінтегруємо на відрізку $[0,l]$ і додамо до того ж розвинення (2.112) при $x=l$, попередньо помноженим на $\frac{m}{\sigma\rho}X_k(l)$. Завдяки співвідношенням ортогональності (2.110) у правій частині отриманої рівності залишиться лише один доданок $C_k\|X_k\|^2$. З огляду на характеристичне рівняння (2.111) одержуємо вирази для коефіцієнтів C_k:

$$C_k=\frac{1}{\|X_k\|^2}\left(\int_0^l\frac{Qx}{E\sigma}\sin\lambda_k xdx+\frac{m}{\sigma\rho}\sin\lambda_k l\frac{Ql}{E\sigma}\right)=\frac{Q}{E\sigma\|X_k\|^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[-\frac{x}{\lambda_k}\cos\lambda_k x+\frac{1}{\lambda^2{}_k}\sin\lambda_k x\right]\Bigg|_0^l+\frac{ml}{\sigma\rho}\sin\lambda_k l\right\}=$$

$$=\frac{Q}{E\sigma\|X_k\|^2}\left\{\frac{ml}{\sigma\rho}\cos\lambda_k l\left(tg\lambda_k l-\frac{\sigma\rho}{m\lambda_k}\right)+\frac{\sin\lambda_k l}{\lambda^2{}_k}\right\}=\frac{Q\sin\lambda_k l}{E\sigma\|X_k\|^2\lambda^2{}_k}.$$

Застосовуючи співвідношення ортогональності до ряду (2.113), знаходимо $D_n=0$. Остаточно одержуємо:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Q\rho\sin\lambda_n l\sin\lambda_n x}{E\lambda^2{}_n\left(l\sigma\rho+m\sin^2\lambda_n l\right)}\cos a\lambda_n t,\quad 0\le x\le l,\ t\ge 0. \qquad (2.114)$$

Як видно з рис. 2.14, точки перетину графіків лівої й правої частин характеристичного рівняння (2.234) із зростанням λ наближаються до послідовності $\frac{\pi n}{l}$. Це значить, що при більших номерах виконується асимптотична рівність $\lambda_n \approx \frac{\pi n}{l}$. Тому ряд (2.114), який представляє розв'язок розглянутої задачі, збігається рівномірно й абсолютно на відрізку $[0, l]$.

7.5. Задача про вільні поперечні коливання стержня

Розглянемо задачу про *поперечні* коливання стержня. Припускаючи, що стержень тонкий і коливання малі, можна вивести рівняння поперечних коливань стержня, що має вигляд

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x,t), \tag{2.115}$$

де S – площа поперечного перерізу стержня, ρ – щільність матеріалу стержня, $f(x,t)$ – щільність навантаження на одиницю довжини, E – модуль Юнга, J – момент інерції. Розділимо обидві частини рівняння (2.115) на ρS, тоді його можна записати так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g(x,t),$$

де $g(x,t)$ – навантаження на одиницю маси. Нехай початкові умови наводяться в загальному вигляді, тобто

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x).$$

Крайові умови будуть визначені залежно від способу закріплення кінців стержня. Наприклад, якщо лівий кінець вільно обпертий, то

$$u=0$$

та

$$M_x = 0,$$

де M_x – згинальний момент, що виражається через переміщення

$$M_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тому другу умову на лівому кінці можна записати як

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Якщо лівий край жорстко закріплений, то

$$\begin{cases} u = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Якщо край стержня вільний, то крайові умови мають вигляд

$$\begin{cases} M_x = 0, \\ Q_x = 0, \end{cases}$$

де Q_x – перерізуюча сила, що визначається через переміщення як

$$Q_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Тому у випадку вільного краю крайові умови запишуться як

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \end{cases}$$

Оператор задачі $L[u]$ в цьому випадку має вигляд

$$L[u] = -b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Покажемо, що цей оператор при деяких умовах буде самоспряженим. Припустимо, що обидва кінці стержня жорстко закріплені. Розглянемо інтеграл

$\int\limits_0^l uL[v]dx = -b^2 \int\limits_0^l uv^{(IV)} dx = \|$ інтегруємо частинами $\| =$

$= -b^2 uv^{(III)}\Big|_0^l + b^2 \int\limits_0^l u'v^{(III)} dx = \|$ позаінтегральний доданок дорівнює нулю, оскільки $u(0) = u(l) = 0$ $\| = b^2 \int\limits_0^l u'v^{(III)} dx =$

$\|$ ще раз застосовуємо формулу інтегрування частинами $\|$

$= b^2 u'v''\Big|_0^l - b^2 \int\limits_0^l u''v'' dx = \|$ позаінтегральний член дорівнює нулю, оскільки

$u'(0) = u'(l) = 0$ $\| = b^2 \int\limits_0^l u''v'' dx = -b^2 u''v'\Big|_0^l + b^2 \int\limits_0^l u'''v' dx =$

$\|$ позаінтегральний член дорівнює нулю за рахунок v, оскільки $v'(0) = v'(l) = 0$ $\|$

$$= b^2 u'''v\Big|_0^l - b^2\int_0^l u^{IV} v dx = \int_0^l vL[u]dx.$$

Таким чином, у випадку жорсткого закріплення обох кінців стержня оператор крайової задачі є самоспряженим, тому його власні значення є дійсними.

Для розв'язку поставленої задачі розглянемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \tag{2.116}$$

Розв'язок рівняння (2.116) будемо шукати методом поділу змінних, тобто подамо функцію $w(x,t)$ у вигляді

$$w(x,t) = T(t)v(x).$$

Тоді

$$T''v = -b^2 T v^{IV}$$

або поділяючи змінні, одержимо

$$-\frac{T''}{b^2 T} = \frac{v^{IV}}{v}.$$

Оскільки отримані відношення сталі, позначимо сталу через k^4:

$$-\frac{T''}{b^2 T} = \frac{v^{IV}}{v} = k^4.$$

Тоді одержимо два звичайних диференціальних рівняння

$$v^{IV} - k^4 v = 0, \tag{2.117}$$

$$T'' + b^2 k^4 T = 0. \tag{2.118}$$

При додатних значеннях b^2 і k^4 одержимо періодичний за часом розв'язок, що погоджується з коливальним процесом при вільних коливаннях стержня.

Розв'язок (2.118) має вигляд

$$T = A\cos\left(k^2 bt\right) + B\sin\left(k^2 bt\right).$$

Знайдемо розв'язок (2.117)

$$r^4 - k^4 = 0 \Rightarrow \left(r^2 - k^2\right)\left(r^2 + k^2\right) = 0 \quad r_{1,2} = \pm k, \quad r_{3,4} = \pm ki.$$

Цим кореням характеристичного рівняння відповідає така система лінійно незалежних функцій, яка є фундаментальною

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = e^{-kx},\ y_3 = \cos kx,\ y_4 = \sin kx.$$

Замість перших двох розв'язків візьмемо їхню напівсуму

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \operatorname{ch} kx$$

і напіврізницю

$$\frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \mathrm{sh}kx .$$

Тоді загальний розв’язок рівняння (2.117) запишемо як

$$v(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \mathrm{ch}kx + C_4 \mathrm{sh}kx .$$

Знайдемо власні значення оператора L

$$L[v] = \lambda v ,$$

тобто

$$-b^2 v^{IV} = \lambda v ,$$

де λ – дійсне як власне значення самоспряженого оператора. Тоді $k^4 = -\dfrac{\lambda}{b^2}$ також буде дійсним. Крайові умови для функції $v(x)$ мають вигляд

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 .$$

Тоді

$v(0) = C_1 + C_3 = 0$.

$v'(0) = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx + C_3 k \mathrm{sh}kx + C_4 k \mathrm{ch}kx \big|_{x=0} = C_2 + C_4 = 0$.

Тобто $C_1 = -C_3, \quad C_2 = -C_4$.

Тоді

$v(x) = C_1 (\cos kx - \mathrm{ch}kx) + C_2 (\sin kx - \mathrm{sh}kx)$,

$v'(x) = -C_1 k (\sin kx - \mathrm{sh}kx) + C_2 k (\cos kx - \mathrm{ch}kx)$.

Скористаємося крайовими умовами на правому кінці

$$v(l) = v'(l) = 0 .$$

Тоді одержимо, що

$$\begin{cases} C_1 (\cos kl - \mathrm{ch}kl) + C_2 (\sin kl - \mathrm{sh}kl) = 0 \\ -C_1 k (\sin kl + \mathrm{sh}kl) + C_2 k (\cos kl - \mathrm{ch}kl) = 0. \end{cases}$$

Отримано однорідну систему рівнянь відносно C_1 і C_2. Нас цікавлять нетривіальні розв’язки цієї системи, оскільки в протилежному випадку і шуканий розв’язок буде тривіальним. Як відомо, для того щоб однорідна система рівнянь мала нетривіальний розв’язок, необхідно й достатньо, щоб її детермінант дорівнював нулю. Тому маємо

$$\Delta = k \left\{ (\cos kl - \mathrm{ch}kl)^2 + \left(\sin^2 kl - \mathrm{sh}^2 kl\right) \right\} = 0$$

або

$$k(2 - 2\cos kl \cdot \mathrm{ch}kl) = 0 .$$

Скоротимо на k останню рівність, оскільки у випадку $k = 0$ другий співмножник також дорівнює нулю, тому при скороченні на k немає втрати коренів рівняння. Тоді

$$\cos kl \cdot \mathrm{ch} kl = 1. \qquad (2.119)$$

Покажемо, що корінь $k=0$ треба відкинути. Дійсно, якби $k = 0$, то рівняння (2.117) мало б вигляд $v^{IV} = 0$, і загальний розв'язок його

$$v = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3.$$

Користуючись крайовими умовами, визначимо коефіцієнти C_1, C_2, C_3, C_4:

$$v(0) = C_1 = 0;$$

$$v'(0) = C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x^2\Big|_{x=0} = C_2 = 0;$$

$$\begin{cases} v(l) = C_3 l^2 + C_4 l^3 = 0 \\ v'(l) = 2C_3 l + 3C_4 l^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 + C_4 l = 0 \\ 2C_3 + 3C_4 l = 0. \end{cases}$$

Визначник останньої системи $\Delta = l \neq 0$. Тому $C_3 = C_4 = 0$. Таким чином, $v \equiv 0$, тобто при $k = 0$ був би одержаний тривіальний розв'язок.

Розглянемо рівняння (2.119), звертаючи увагу на те, що k – дійсне. Покажемо, що це рівняння має нескінченну множину дійсних коренів. Позначимо $kl = x$. Тоді з рівняння (2.119) знаходимо, що

$$\cos x = \frac{1}{\mathrm{ch} x}. \qquad (2.120)$$

Отримане трансцендентне рівняння будемо розв'язувати графічно.

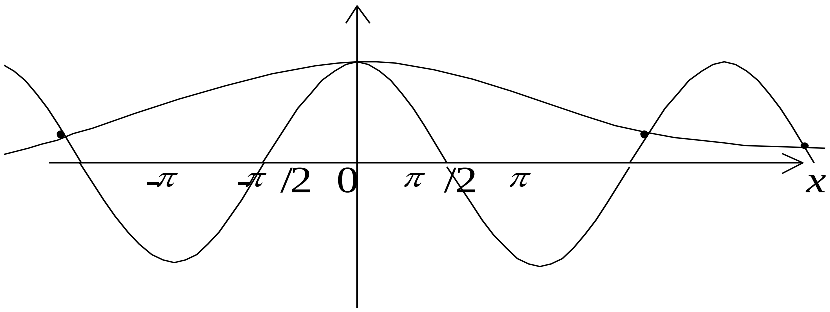


Рис. 2.16

Побудуємо дві криві $y = \cos x$ і $y = \dfrac{1}{\mathrm{ch} x}$. Точки перетину цих кривих є коренями рівняння (2.120). Як видно з рис 2.16, дійсних коренів буде нескінченна множина (половина додатних, половина від'ємних). Причому, якщо C є коренем, то коренем буде й уявне число iC, оскільки тоді поміняються місцями значеннями $\cos x$ і $\mathrm{ch} x$ ($\cos ix = \mathrm{ch} x$, $\mathrm{ch} ix = \cos x$), «$-C$» також буде коренем, а отже, й «$-iC$» буде коренем. Тобто, якщо будемо знати один корінь, то відразу можемо знайти всі чотири корені ($C, -C, iC, -iC$). Цей набір значень вичерпує всі корені, що дають додатні значення k^4. Досліджуємо, чи може k^4 бути від'ємним, тому що знаємо про k^4 тільки те, що воно дійсне. Покажемо, що немає таких значень C, щоб C^4 було від'ємним. Дійсно, якщо $C^4<0$, то $\arg C^4=\pi$, але тоді $\arg C=\dfrac{\pi}{4}$ і величину C можна подати як

$$C=\rho\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\rho\sqrt{2}}{2}(1+i)=\sigma(1+i). \tag{2.121}$$

Підставимо це значення в рівняння (2.120)

$$\cos\left[\sigma(1+i)\right]\cdot\mathrm{ch}\left[\sigma(1+i)\right]=1,$$

оскільки ch$x$ – парна функція, а також з огляду на те, що $chx=cosix$, запишемо ще дві рівності, аналогічних (2.121)

$$\cos\left[\sigma(1+i)\right]\cdot\mathrm{ch}\left[-\sigma(1+i)\right]=1.$$

$$\cos\left[\sigma(1+i)\right]\cdot\cos\left[-i\sigma(1+i)\right]=1.$$

Покажемо, що рівність

$$\cos\left[\sigma(1+i)\right]\cdot\cos\left[-i\sigma(1+i)\right]=1 \tag{2.122}$$

можлива тільки при $\sigma=0$ (σ – дійсне).

Перепишемо рівність (2.122) у вигляді

$$\cos(\sigma+i\sigma)\cos(\sigma-i\sigma)=1$$

або

$$(\cos\sigma\,\mathrm{ch}\sigma-i\sin\sigma\,\mathrm{sh}\sigma)(\cos\sigma\,\mathrm{ch}\sigma+i\sin\sigma\,\mathrm{sh}\sigma)=1$$

або

$$\cos^2\sigma\,\mathrm{ch}^2\sigma+\sin^2\sigma\,\mathrm{sh}^2\sigma=1. \tag{2.123}$$

Оскільки $\cos^2\sigma=1-\sin^2\sigma$, то рівність (2.123) набуде вигляду

$$\mathrm{ch}^2\sigma-\sin^2\sigma\,\mathrm{ch}^2\sigma+\sin^2\sigma\,\mathrm{sh}^2\sigma=1.$$

Або тому що

$$\mathrm{ch}^2\sigma-\mathrm{sh}^2\sigma=1,\qquad \mathrm{ch}^2\sigma=\mathrm{sh}^2\sigma+1,$$

то одержимо, що

$$\mathrm{sh}^2\sigma-\sin^2\sigma=0$$

або

$$\mathrm{sh}\sigma=\pm\sin\sigma.$$

Для виконання останньої рівності необхідно, щоб виконувалася хоча б одна з рівностей:

$$1)\ \mathrm{sh}\sigma-\sin\sigma=0$$

або

$$2)\ \mathrm{sh}\sigma+\sin\sigma=0.$$

Відмітимо, що $\sigma = \rho\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Тоді

$\varphi(\sigma) = \mathrm{sh}\sigma - \sin\sigma$ при $\sigma = 0 \quad \varphi(\sigma) = 0$,

$\varphi'(\sigma) = \mathrm{ch}\sigma - \cos\sigma > 0$, оскільки $\mathrm{ch}\sigma > 1$, а $\cos\sigma \le 1$.

Таким чином, $\varphi(\sigma)$ зростає й при $\sigma = 0$ вона дорівнює нулю, звідси при $\sigma > 0$ вона більше нуля, тобто рівність 1) не виконується при $\sigma > 0$. Аналогічно можна показати, що й рівність 2) не виконується при $\sigma > 0$. Таким чином, k^4 може бути тільки додатним.

Замість проведеного дослідження для обґрунтування того, що власні значення є від'ємними, можна було в цьому переконатися таким чином. Нехай λ – деяке власне число, а v відповідна йому власна функція, яка задовольняє задані крайові умови, тоді

$$-b^2 v^{IV} = \lambda v.$$

Помножимо останню рівність на v і проінтегруємо її від 0 до l, тоді

$$-b^2\int_0^l v^{IV} v\,dx = \lambda\int_0^l v^2 dx$$

або, інтегруючи частинами, одержимо

$$\lambda\int_0^l v^2 dx = -b^2\int_0^l v^{IV} v\,dx = -b^2 v''' v\Big|_0^l + b^2\int_0^l v''' v' dx = b^2 v'' v'\Big|_0^l - b^2\int_0^l (v'')^2 dx =$$

$$= -b^2\int_0^l (v'')^2 dx.$$

Звідси видно, що

$$\lambda = -b^2\frac{\int_0^l (v'')^2 dx}{\int_0^l v^2 dx} < 0.$$

Таким чином, з наведеного вище випливає, що $k^4 > 0$. Отже, підтверджується припущення, отримане з механічних міркувань, про те, що k^4 може бути тільки додатним. З механічних міркувань k^4 повинне бути дійсним, тому що в протилежному випадку не буде періодичного процесу за часом. Виходить, залишаються тільки такі корені, що кожна четвірка містить додатний корінь. Ці додатні корені можуть бути отримані графічним шляхом.

Всі додатні корені нумеруються в порядку зростання $0 < k_1 < k_2 < \ldots$. Кожному кореню відповідає власна функція. Замість умови на правому кінці можна скористатися рівнянням

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = 1.$$

$$C_1\{\cos kl - \operatorname{ch} kl\} + C_2\{\sin kl - \operatorname{sh} kl\} = 0.$$

Цю рівність перепишемо у вигляді

$$\frac{C_1}{\sin kl - \operatorname{sh} kl} = -\frac{C_2}{\cos kl - \operatorname{ch} kl}.$$

Тоді власні функції v_i виразяться як

$$v_i = C\{(\sin k_i l - \operatorname{sh} k_i l)(\cos k_i x - \operatorname{ch} k_i x) - (\cos k_i l - \operatorname{ch} k_i l)(\sin k_i x - \operatorname{sh} k_i x)\},$$

де C = const визначається з умови, що $\|v_i\| = 1$. Кожному k_i відповідає власна функція з частотою коливань

$$\omega_i = k_i^2 b,\ \omega_i^2 = k_i^4 b^2,$$

але $k_i^4 = \dfrac{\lambda}{b^2}$.

Для кожного значення k_i можна знайти з рівняння (2.118) відповідну функцію T_i. Тоді загальний розв'язок вихідного рівняння набуває вигляду

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x) T_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x)\left(A_i \cos\left(k_i^2 bt\right) + B_i \sin\left(k_i^2 bt\right)\right).$$

Коефіцієнти отриманого ряду, як і раніше, знаходяться за допомогою початкових умов.

Лабораторна робота 6

6.1. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M, прикріпленою в точці $x = x_0$ струни, викликані початковими відхиленнями $U(x,0) = \begin{cases} h\dfrac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h\dfrac{l-x}{i-x_0}, & x_< < x < l \end{cases}$.

Покласти $x_0 = \dfrac{l}{5}$.

6.2. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t = 0$ прикладена поперечна сила $F(t) = A\cos\omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \dfrac{4l}{5}$.

6.3. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0. Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \frac{4l}{5}$.

6.4. Кругла однорідна мембрана радіусом R, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти R=6.

6.5. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l = 3,\ m = 5$.

6.6. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M, закріпленою в точці $x = x_0$ струни, викликані початковими відхиленнями $U(x,0) = \begin{cases} h\dfrac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h\dfrac{l-x}{i-x_0}, & x_< < x < l \end{cases}$.

Покласти $x_0 = \frac{l}{5}$.

6.7. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t = 0$ прикладена поперечна сила $F(t) = A\cos\omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \frac{3l}{5}$.

6.8. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0. Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \frac{l}{5}$.

6.9. Кругла однорідна мембрана радіусом R, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти R=8.

6.10. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l = 4,\ m = 5$.

6.11. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M, закріпленою в точці $x = x_0$ струни, викликані початковими відхиленнями $U(x,0) = \begin{cases} h\dfrac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h\dfrac{l-x}{i-x_0}, & x_< < x < l \end{cases}$.

Покласти $x_0 = \dfrac{3l}{5}$.

6.12. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t = 0$ прикладена поперечна сила $F(t) = A\cos\omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \dfrac{2l}{5}$.

6.13. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0. Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \dfrac{2l}{5}$.

6.14. Кругла однорідна мембрана радіусом R, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти *R*=4.

6.15. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l = 5,\ m = 8$.

6.16. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M, прикріпленою в точці $x = x_0$ струни, викликані початковими відхиленнями $U(x,0) = \begin{cases} h\dfrac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h\dfrac{l-x}{i-x_0}, & x_< < x < l \end{cases}$.

Покласти $x_0 = \dfrac{4l}{5}$.

6.17. Знайти коливання однорідної струни $0 \le x \le l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t = 0$ прикладена поперечна сила $F(t) = A\cos\omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \dfrac{l}{5}$.

6.18. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0. Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \dfrac{3l}{5}$.

6.19. Кругла однорідна мембрана радіусом R, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти R=2.

6.20. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m, закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K, зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l = 5,\ \ m = 9$.

§8. Застосування методу Фур'є для розв'язку диференціальних рівнянь у двовимірній замкнутій області

8.1. Задача про коливання прямокутної мембрани

Математична постановка задачі про вимушені коливання прямокутної закріпленої по краях мембрани зводиться до розв'язку диференціального рівняння:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g(x, y, t),\ \ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0 \quad (2.124)$$

при крайових умовах

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

і початкових умовах

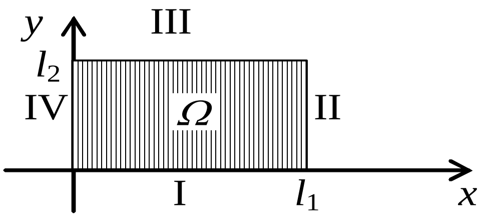


Рис. 2.17

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (2.125)$$

де ρ – щільність матеріалу, з якого зроблена мембрана (рис. 2.17), $g(x,y,t)$ – навантаження, що припадає на одиницю площі, T_0 – натяг мембрани. Розділимо рівняння (2.124) на ρ, тоді це рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f\left(x, y, t\right),$$

де $f(x,y,t)=\dfrac{g\left(x, y, t\right)}{\rho}$ – сила, що припадає на одиницю маси, $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$.

Розіб'ємо розв’язок вихідної задачі на кілька етапів.

I. Знайдемо розв’язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v \tag{2.126}$$

з однорідними граничними умовами

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.127}$$

та заданими початковими умовами (2.125)

$$v\big|_{t=0} = \varphi\left(x, y\right), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi\left(x, y\right), \tag{2.128}$$

Нагадаємо, що через Δ позначено оператор Лапласа, який у двовимірному випадку має вигляд $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Розв’язок задачі (2.126)–(2.128) будемо шукати у вигляді добутку

$$v = T\left(t\right) \cdot w\left(x, y\right). \tag{2.129}$$

Підставимо (2.129) у рівняння (2.126) і розділимо змінні

$$T''w = a^2 T \Delta w$$

або

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\Delta w}{w} = \lambda, \tag{2.130}$$

де $\lambda = \mathrm{const}$. Покажемо, що $\lambda < 0$. Зі співвідношень (2.130) одержимо систему диференціальних рівнянь

$$T'' - \lambda a^2 T = 0, \tag{2.131}$$

$$\Delta w - \lambda w = 0. \tag{2.132}$$

При цьому функція повинна задовольняти однорідні крайові умови, тобто

$$w\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.133}$$

Проаналізуємо знак параметра λ. Відмітимо, що якщо $\lambda>0$, то розв’язок рівняння (2.131) буде представлено за допомогою гіперболічних функцій, а цей процес періодичний, тому λ повинне бути від’ємним. Наведені міркування випливають із чисто механічного змісту задачі. Точний доказ цього факту ($\lambda<0$) наведено нижче.

Покажемо, що оператор Δ, що входить у рівняння (2.132), при розглянутій крайовій умові є самоспряженим. Дійсно, нехай w_1 і w_2 дві припустимі функції, тобто належать області визначення оператора Лапласа. Тоді

$\iint\limits_{\Omega} w_1 \Delta w_2 d\Omega - \iint\limits_{\Omega} w_2 \Delta w_1 d\Omega = \|$ за формулою Гріна $\| =$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n} - w_2 \frac{\partial w_1}{\partial n} \right) ds = 0$$

інтеграл за контуром дорівнює нулю на підставі крайових умов (2.133). Отже,

$$\iint\limits_{\Omega} w_1 \Delta w_2 d\Omega = \iint\limits_{\Omega} w_2 \Delta w_1 d\Omega$$

або $\left(\Delta w_2, w_1\right) = \left(w_2, \Delta w_1\right)$, тобто оператор Δ є самоспряженим. Тому власні числа цього оператора будуть дійсними. Покажемо, що λ буде від'ємним. Із цією метою рівняння (2.132) перепишемо у вигляді

$$\Delta w = \lambda w$$

і помножимо його обидві частини скалярно на w, тоді одержимо

$$\lambda \iint\limits_{\Omega} w^2 d\Omega = \iint\limits_{\Omega} w \Delta w d\Omega = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(w \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} d\Omega -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dxdy = I_1 + I_2, \qquad (2.134)$$

де $I_1 = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(w \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = \left\| \begin{matrix} A_x = w \dfrac{\partial w}{\partial x},\ A_y = w \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \vec{A} = \left(A_x, A_y\right) \end{matrix} \right\| =$

$$= \iint\limits_{\Omega} div \vec{A} d\Omega = \oint\limits_{\partial\Omega} A_n ds = \oint\limits_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0$$

На підставі крайових умов (2.133) для w.

Обчислення I_1 можна було б виконувати за допомогою формули Гріна

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} Pdx + Qdy.$$

Дійсно,

$$I_1 = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(w \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial x} dy - w \frac{\partial w}{\partial y} dx = 0.$$

$$I_2 = -\iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dxdy < 0 .$$

Таким чином, з (2.134) випливає, що λ <0. Позначимо

$$\lambda = -\frac{\omega^2}{a^2} . \tag{2.135}$$

Тоді рівняння (2.131) запишеться як

$$T'' + \omega^2 T = 0 .$$

Звідси $T = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, де ω – частота коливань.

Підставимо (2.135) в (2.132), тоді одержимо рівняння для w

$$\Delta w + \frac{\omega^2}{a^2} w = 0 . \tag{2.136}$$

Розв’язок рівняння (2.136) будемо шукати також у вигляді добутку

$$w = X(x)Y(y). \tag{2.137}$$

Підставляючи (2.137) в (2.136), знайдемо

$$X''Y + Y''X + \frac{\omega^2}{a^2} XY = 0 .$$

Розділимо змінні в останньому рівнянні. З цією метою розділимо його на добуток $XY \neq 0$, тоді одержимо

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{\omega^2}{a^2} = \text{const} .$$

Останню систему рівнянь запишемо у вигляді

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \qquad \frac{Y''}{Y} + \frac{\omega^2}{a^2} = \mu^2$$

або

$$X'' + \mu^2 X = 0 , \tag{2.138}$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0 , \tag{2.139}$$

де

$$\nu^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - \mu^2 .$$

Визначимо додаткові умови для рівнянь (2.138) і (2.139), користуючись крайовою умовою (2.133) для w. Межа мембрани складається зі сторін прямокутника

1) $y = 0, 0 \le x \le l_1$. На цій ділянці $X(x)Y(0) = 0$, оскільки $X(x) \neq 0$, то $Y(0) = 0$.

2) $y = l_2, 0 \le x \le l_1$, оскільки $X(x)Y(l_2) = 0$, то $Y(l_2) = 0$.

Таким чином, для диференціального рівняння (2.139) крайові умови мають вигляд

$$Y(0)=Y(l_2)=0. \tag{2.140}$$

Аналогічно, можна визначити крайові умови для рівняння (2.138). Вони будуть такими:

$$X(0)=X(l_1)=0. \tag{2.141}$$

Тоді розв'язок рівняння (2.138) має вигляд

$$X=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x$$

та із крайових умов (2.141) маємо:

$C_1=0$, оскільки $X(0)=0$; $C_2\sin\mu l_1=0$, тому що $C_2\neq 0\,(X\not\equiv 0)$, то

$$\sin\mu l_1=0.$$

Останнє рівняння є характеристичним для оператора, заданого рівнянням (2.138). Розв'язок цього рівняння

$$\mu l_1=m\pi,$$

де m – ціле число, причому можна обмежитися $m > 0$, оскільки, якщо $m < 0$, то знак мінус може бути включено у константу C_2. Таким чином $\mu_m=\dfrac{m\pi}{l_1}$ є власними числами, а відповідні їм власні функції мають вигляд

$$X_m=\sin\mu_m x.$$

Аналогічно можна розв'язати рівняння (2.139) із граничними умовами (2.140). У результаті одержимо власні числа $\nu_n=\dfrac{n\pi}{l_2}$ й власні функції $Y_n=\sin\nu_n y$ оператора Лапласа, обумовленого цим рівнянням.

Тоді $\omega^2=\pi^2a^2\left(\dfrac{m^2}{l_1^2}+\dfrac{n^2}{l_2^2}\right)$ і відповідно

$$\omega=\pi a\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}.$$

Кожному набору m і n буде відповідати своя власна частота $\omega=\omega_{mn}$ і розв'язок

$$v_{mn}(x,y,t)=\left(A_{mn}\cos\omega_{mn}t+B_{mn}\sin\omega_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2} \tag{2.142}$$

або $v_{mn}(x,y,t)=\left(A_{mn}\cos\omega_{mn}t+B_{mn}\sin\omega_{mn}t\right)w_{mn}$,

де $w_{mn}=\sin\dfrac{m\pi x}{l_1}\sin\dfrac{n\pi y}{l_2}$ – власні функції вихідного оператора. Розв'язок v_{mn} задовольняє однорідне рівняння (2.126) і задані крайові умови (2.127).

Якщо початкові умови прийняти у вигляді

$$v_{mn}(x,y,0)=A_{mn}w_{mn}(x,y),$$

$$\left.\frac{\partial v_{mn}}{\partial t}\right|_{t=0}=B_{mn}\omega_{mn}w_{mn}(x,y),$$

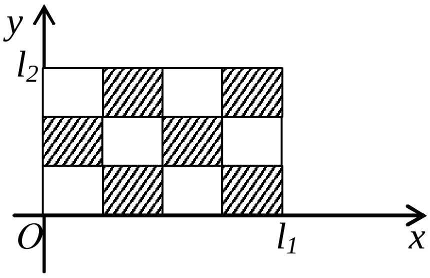


Рис. 2.18

то коливання будуть відбуватися за законом (2.142).

Аналіз отриманого розв'язку показує, що на мембрані можуть бути лінії (рис. 2.18), які перебувають у спокої. Такі лінії називаються ***вузловими.*** Вузлові лінії характеризують форму коливань, що відповідає певній частоті ω_{mn}. Дійсно, зафіксуємо m і n і будемо шукати точки, у яких $v(x,y,t)=0$ для всіх t. Перший множник у (2.142) не перетворюється в нуль, а другий множник може дорівнювати нулю. Тоді $w_{mn}(x,y)=0$ – вузлова лінія.

Очевидно, що $w_{mn}(x,y)=0$, якщо $\sin\frac{m\pi x}{l_1}=0\Rightarrow x=\frac{l_1}{m}k$, де k=0,1,2...m, оскільки x не може бути більше l_1. Таким чином одержуємо прямі, паралельні осі OY. Це вузлові лінії, за винятком двох ліній, що відповідають k = 0 і $k = m$. Останні дві лінії збігаються із границею області x = 0, $x = l_1$, на якій $w = 0$. Таким чином, одержуємо m смуг. Аналогічно одержимо інші вузлові лінії, поклавши

$$\sin\frac{n\pi y}{l_2}=0\Rightarrow\frac{n\pi y}{l_2}=\pi r\Rightarrow y=\frac{l_2}{n}r.$$

У будь-який момент часу заштрихована й не заштрихована області перебувають у протилежних напрямках.

На лінії один множник перетворюється в нуль, а в іншого змінюється знак, це випливає з вигляду $w_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$.

Кожній власній функції відповідає своя частота. Виникає питання: чи можливо, щоб різним власним функціям, тобто різним формам коливань відповідала однакова частота. У цьому випадку повинна виконуватися рівність

$$\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}=\frac{m_1^2}{l_1^2}+\frac{n_1^2}{l_2^2}$$

або

$$\frac{m^2-m_1^2}{l_1^2}=\frac{n_1^2-n^2}{l_2^2}\Rightarrow\frac{l_2^2}{l_1^2}=\frac{n_1^2-n^2}{m^2-m_1^2}.$$

В останньому виразі чисельник і знаменник – цілі числа, тобто відношення квадратів сторін повинне бути раціональним дробом. Тільки в цьому випадку будуть виродження. Наприклад, якщо $l_1=\pi$ а $l_2=7$, то виродження не буде.

Приклад. Розглянемо квадратну мембрану. Візьмемо дві пари значень $m=1$, $n=2$ і $m_1=2,\ n_1=1$. Тоді $\omega_{12}=\omega_{21}=\dfrac{\pi a}{l}\sqrt{5}$. Цій частоті відповідають дві власні функції $w_{12}(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{2\pi y}{l}$ й $w_{21}(x,y)=\sin\dfrac{2\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l}$. Це дві лінійно незалежні власні функції. Комбінація їх також буде розв'язком. Візьмемо лінійні комбінації у вигляді суми й різниці

$$w_{12}(x,y)+w_{21}(x,y);$$
$$w_{12}(x,y)-w_{21}(x,y).$$

Побудованим лінійним комбінаціям буде відповідати частота ω_{12}. Покажемо, що одній і тій же частоті будуть відповідати різні вузлові лінії. Перетворимо власну функцію $w_{12}+w_{21}$ таким чином:

$$w_{12}+w_{21}=2\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\left(\cos\frac{\pi x}{l}+\cos\frac{\pi y}{l}\right).$$

Якщо $\sin\dfrac{\pi x}{l}=0,\quad \dfrac{\pi x}{l}=k\pi,\quad x=lk\Rightarrow k=0,1\quad x=0,\ x=l$

або $\sin\dfrac{\pi y}{l}=0,\quad \dfrac{\pi y}{l}=k\pi,\quad y=lk\Rightarrow k=0,1\quad y=0,\ y=l$,

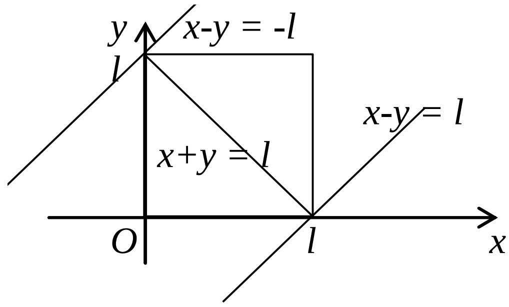
тобто при рівності нулю перших двох співмножників не одержуємо вузлових ліній. Якщо ж $\cos\dfrac{\pi x}{l}+\cos\dfrac{\pi y}{l}=0$, тоді

$$2\cos\frac{\pi(x+y)}{2l}\cos\frac{\pi(x-y)}{2l}=0$$

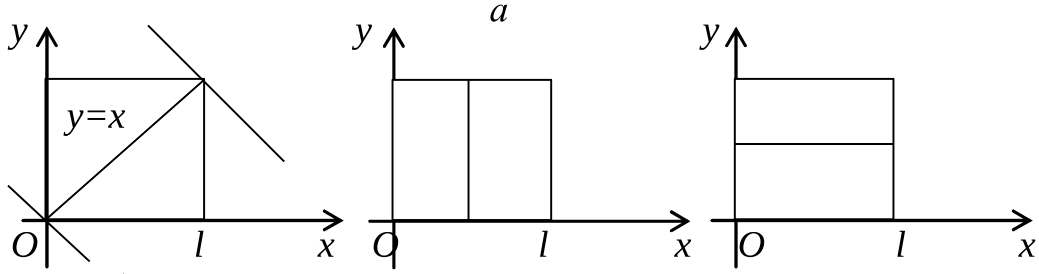
або $\cos\dfrac{\pi(x+y)}{2l}=0$, оскільки $x<l$ і $y<l$, то з останнього рівняння потрібно, щоб $\dfrac{\pi(x+y)}{2l}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x+y=l$.

Аналогічно, якщо $\cos\dfrac{\pi(x-y)}{2l}=0$, то $x-y=\pm l$. Одержуємо вузлові лінії *x*+*y*=*l*, $x-y=\pm l$. Прямі $x-y=\pm l$ не мають спільних точок з областю, яку займає мембрана.

Якщо візьмемо різницю $w_{1,2}-w_{2,1}$, то аналогічно, як і у випадку суми, маємо, що



а



б *в* *г*

Рис. 2.19

$$w_{12}-w_{21}=2\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\left(\cos\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$2\sin\frac{\pi(x+y)}{2l}\sin\frac{\pi(x-y)}{2l}=0.$$

Перший множник дає дві прямі поза мембраною (*x*+*y* = 0, *x*+*y* = 2*l*), другий множник дає вузлову лінію *y* = *x*. Якщо просто розглядати w_{12} й w_{21}, то вузлові лінії мають вигляд $x=\dfrac{l}{2}$ або $y=\dfrac{l}{2}$.

Таким чином, одній частоті відповідають форми коливань *а*–*г* на рис. 2.19, але цим усе не вичерпується. Для інших комбінацій будуть інші вузлові лінії.

Розглянемо вільні коливання при заданих початкових умовах (2.128). У цьому випадку для побудови розв'язку задачі, що задовольняє задані початкові умови, подамо загальний розв'язок у вигляді ряду за частинними розв'язками v_{mn}, тобто у вигляді

$$v(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos\omega_{mn}t+B_{mn}\sin\omega_{mn}t\right)w_{mn}(x,y);$$

$m,n\neq 0$, тому що тоді w_{mn} =0.

Вимагаємо, щоб $v(x,y,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y)$, $v'(x,y,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y)$, тобто, щоб виконувалися рівності:

$$\varphi(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}w_{mn}(x,y) \text{ і } \psi(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}B_{mn}\omega_{mn}w_{mn}(x,y). \qquad (2.143)$$

Підставимо замість w_{mn} знайдені власні функції, тоді одержимо подвійні ряди Фур'є. Для обчислення коефіцієнтів скористаємося ортогональністю власних функцій. Помножимо скалярно обидві частини на $w_{ik}(x,y)$. Тоді $\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(x,y)\sin\frac{i\pi x}{l_1}\sin\frac{k\pi y}{l_2}dxdy=\|$ всі члени дорівнюють нулю за винятком $m=i,\ n=k\ \|=A_{ik}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\sin^2\frac{i\pi x}{l_1}\sin^2\frac{k\pi y}{l_2}dxdy=A_{ik}\frac{l_1l_2}{4}$.

Тут враховано, що $\int_0^{l_1}\sin^2\frac{i\pi x}{l_1}dx=\int_0^{l_1}\frac{1-\cos 2i\pi x/l_1}{2}dx=\frac{l_1}{2}$.

Тоді $A_{ik}=\frac{4}{l_1l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(x,y)\sin\frac{i\pi x}{l_1}\sin\frac{k\pi y}{l_2}dxdy$.

Аналогічно $B_{ik}=\frac{4}{l_1l_2}\frac{1}{\omega_{ik}}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\psi(x,y)\sin\frac{i\pi x}{l_1}\sin\frac{k\pi y}{l_2}dxdy$.

Виконані операції правомірні, якщо отримані ряди (2.143) є рівномірно збіжними. Але, якщо $\varphi(x,y)$ й $\psi(x,y)$ мають похідні, то тоді ряди будуть рівномірно збігатися і їх можна почленно інтегрувати.

II. Якщо вихідне рівняння неоднорідне, тобто, якщо $g(x,y,t)\neq 0$, тоді невідомий розв'язок треба подати у вигляді суми

$$u=v+w_1.$$

Функцію v визначено у пункті I. А функція w_1 є розв'язком такої задачі:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=a^2\Delta w_1+g(x,y,t),$$

$$w_1\big|_{\partial\Omega}=0,$$

$$w_1\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial w_1}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0.$$

Як і у одновимірному випадку розвинемо шукану функцію $w_1(x,y,t)$ та функцію $g(x,y,t)$ в ряд за власними функціями відповідної однорідної задачі, тобто

$$w_1(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}T_{mn}(t)w_{mn}(x,y),$$

$$g(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\gamma_{mn}(t)w_{mn}(x,y).$$

Коефіцієнти $\gamma_{mn}(t)$ визначаються як

$$\gamma_{mn}(t)=\frac{\iint\limits_{\Omega}g(x,y,t)w_{mn}(x,y)dxdy}{\iint\limits_{\Omega}w_{mn}^2(x,y)dxdy}.$$

А для знаходження функцій $T_{mn}(t)$ необхідно розв'язати звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$T''_{mn}(t)+\omega_{mn}^2T_{mn}(t)=\gamma_{mn}(t)$$

з однорідними початковими умовами

$$T_{mn}(0)=0,\, T'_{mn}(0)=0.$$

Методи розв'язання останньої задачі відомі.

8.2. Внутрішня задача Діріхле для кола радіусом *R*

Математична постановка задачі Діріхле зводиться до розв'язку рівняння Лапласа при крайовій умові

$$\begin{cases}\Delta U=0,\ (x,y)\subset\Omega,\\ U\big|_{\partial\Omega}=f(x,y).\end{cases}$$

Розв'язання

Нагадаємо, що із властивостей гармонічних функцій випливає існування і єдність розв'язку задачі Діріхле в припущенні, що функція $f(x,y)$ – неперервна й диференційована (втім можна показати, що задача має єдиний розв'язок й для обмеженої функції $f(x,y)$).

Перейдемо до полярної системи координат

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Тоді

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}$$

або

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0, \tag{2.144}$$

$$U\big|_{r=R}=f(\varphi). \tag{2.145}$$

При зміні кута φ на величину 2π однозначна функція $U(r,\varphi)$ повинна повернутися до вихідного значення, тобто повинна бути періодичною за φ:

$$U(r,\varphi+2\pi)=U(r,\varphi).$$

Звідси випливає, що функція $f(\varphi)$ повинна бути періодичною за φ з періодом 2π.

Будемо шукати частинний розв'язок рівняння (2.144) у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від одного аргумента, тобто

$$U(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi), \tag{2.146}$$

де $R(r)\not\equiv 0,\ \Phi(\varphi)\not\equiv 0$. Підставимо (2.146) в (2.144), тоді одержимо

$$R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}\Phi''R=0$$

або

$$\left(R''+\frac{1}{r}R'\right)\Phi=-\frac{\Phi''R}{r^2}.$$

Для відокремлення змінних в останньому рівнянні слід поділити ліву і праву частину на добуток $\frac{1}{r^2}\Phi R$

$$\frac{r^2\left(R''+\frac{1}{r}R'\right)}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{2.147}$$

Ліва частина рівняння (2.147) залежить тільки від r, права тільки від φ, і оскільки змінні r й φ змінюються незалежно, то остання рівність можлива тільки у випадку рівності правої і лівої частин рівняння (2.147) сталої величини, тобто

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda,\ \ \lambda=\text{const}.$$

Звідси одержуємо два рівняння:

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, \tag{2.148}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0. \tag{2.149}$$

Рівняння (2.148) – лінійне однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами. Виберемо тільки 2π періодичні розв'язки, тому загальний розв'язок рівняння (2.148) має вигляд

$$\Phi = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + D\sin\sqrt{\lambda}\varphi \tag{2.150}$$

та $\sqrt{\lambda}$ повинне бути натуральним числом, тобто $\sqrt{\lambda} = n,\ \lambda = n^2$. Тоді (2.150) набуває вигляду

$$\Phi_n = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.151}$$

Якщо $n = 0$, то рівняння (2.148) запишеться як

$$\Phi''(\varphi) = 0 \Rightarrow \Phi'(\varphi) = C,\ \Phi(\varphi) = C\varphi + B,$$

оскільки $\Phi(\varphi)$ повинна бути 2π періодичною функцією, то $C = 0$ і

$$\Phi(0) = B \text{ при } n = 0.$$

Очевидно, що цей розв'язок належить (2.151) при $n = 0$. Таким чином можна вважати, що

$$\Phi_n = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Розглянемо рівняння (2.149) з огляду на те, що $\lambda = n^2$

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0. \tag{2.152}$$

Це є рівняння Ейлера; частинні розв'язки цього рівняння можна шукати у вигляді

$$R_n = r^k,\ \ k = \text{const}. \tag{2.153}$$

Підставимо (2.153) в (2.152), тоді

$$r^2 k(k-1) r^{k-2} + rkr^{k-1} - n^2 r^k = 0,$$

$$r^k (k^2 - k + k - n^2) = 0,$$

$$r^k \neq 0,$$

тому

$$k^2 - n^2 = 0 \Rightarrow k = \pm n.$$

Звідси

$$R_{1n} = r^n,\ R_{2n} = r^{-n}$$

– частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.152), а загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n},$$

де $C_n, D_n -$ сталі коефіцієнти.

Якщо $n = 0$, то рівняння (2.152) має вигляд

$$r^2 R_0'' + rR_0' = 0.$$

Нехай $R_0' = z,$ тоді

$$r^2 z' + rz = 0. \tag{2.154}$$

Внаслідок відокремлення змінних у рівнянні (2.154) отримаємо:

$$\frac{z'}{z} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|r| + \ln|D_0|,\ z = \frac{D_0}{r};$$

$$\frac{dR_0}{dr}=\frac{D_0}{r}\Rightarrow R_0=D_0\ln|r|+C_0.$$

З умови неперервності в колі функції $R(r)$ потрібно, щоб $D_0=0$ і $D_n=0.$ Тоді

$$R_0(r)=C_0, \tag{2.155}$$

$$R_n(r)=C_n r^n. \tag{2.156}$$

Очевидно, що (2.155) міститься в (2.156) при $n=0$. Тоді

$$R_n(r)=C_n r^n,\ n=0,1,...$$

Отже, частинні розв’язки визначаються як

$$U_n(r,\varphi)=R_n(r)\Phi_n(\varphi)=C_n r^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=\left(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi\right)r^n,$$

де $M_n=C_nA_n,\ N_n=B_nC_n$.

Подамо загальний розв’язок задачі як суперпозицію частинних, тобто у вигляді ряду

$$U(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi\right)r^n. \tag{2.157}$$

Підберемо коефіцієнти M_n та N_n так, щоб задовольнити граничну умову (2.145). При цьому N_0 не має значення, оскільки це множник при $\sin n\varphi$, тобто розв’язок (2.157) можна записати у вигляді:

$$U(r,\varphi)=M_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi\right)r^n,$$

так, що невизначеними є коефіцієнти $M_0,M_n,N_n,(n=1,2,...)$.

Оскільки

$$U(r,\varphi)\big|_{r=R}=f(\varphi),$$

то

$$M_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi\right)R^n=f(\varphi). \tag{2.158}$$

Припустимо, що $f(\varphi)$ така, що (2.158) є розвиненням у ряд Фур'є функції $f(\varphi)$. Тоді

$$M_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,$$

$$R^nM_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\Rightarrow M_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$R^nN_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi\Rightarrow N_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi,$$

отже, M_0, M_n, N_n знайдені як коефіцієнти ряду Фур'є. І задача повністю розв’язана, а розв’язок $U(r,\varphi)$ має вигляд

$$U(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\left[\left(\int_0^{2\pi} f\left(\varphi\right)\cos n\varphi d\varphi\right)\cos n\varphi+\left(\int_0^{2\pi} f\left(\varphi\right)\sin n\varphi d\varphi\right)\sin n\varphi\right].$$

*Зауваження***.** Можна довести, що ряд (2.158) у замкнутому колі збігається рівномірно й абсолютно за умови, коли функція $f(\varphi)$ є двічі неперервно диференційованою.

Приклад. Розв’язати задачу Неймана

$$\begin{cases}\Delta U=0,\ \left(x,y\right)\subset\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial n}\right|_{r=2}=5\cos\varphi\sin 6\varphi.\end{cases}$$

Розв’язання

Перевіримо виконання необхідної умови існування розв’язку задачі Неймана для кола:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial U}{\partial n}d\varphi=0.$$

$$\int_0^{2\pi}5\cos\varphi\sin 6\varphi d\varphi=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin 7\varphi+\sin 5\varphi\right)d\varphi=\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7\varphi-\frac{1}{5}\cos 5\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

Отже, необхідна умова виконана.

Загальний вигляд розв’язку рівняння Лапласа для кола

$$U(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi\right)r^n.$$

З крайової умови одержимо

$$\frac{\partial U(2,\varphi)}{\partial n}=\frac{\partial U(2,\varphi)}{\partial r}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi\right)2^{n-1}=5\cos\varphi\sin 6\varphi.$$

Розвинемо праву частину в ряд за тригонометричною системою:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi\right)2^{n-1}=\frac{5}{2}\left(\sin 7\varphi+\sin 5\varphi\right).$$

Знайдемо невідомі сталі:

при $n=5$ $\quad N_5\cdot 5\cdot 2^4=\frac{5}{2}\Rightarrow N_5=\frac{1}{32}$; при $n=7$ $N_7\cdot 7\cdot 2^6=\frac{5}{2}\Rightarrow N_7=\frac{5}{896}$;

усі інші коефіцієнти дорівнюють 0.

Відповідь: $U=M_0+\frac{1}{32}r^5\sin 5\varphi+\frac{5}{896}r^7\sin 7\varphi.$

Розв'язок задачі Неймана визначається з точністю до сталої M_0.

Лабораторна робота 7

Задача. У колі зазначеного радіуса розв'язати внутрішню задачу:
а) Діріхле для рівняння Лапласа;
б) Неймана для рівняння Лапласа.

7.1.1. а) $u\big|_{x^2+y^2=a^2}=x$; б) $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial n}=\sin 5\varphi\sin 3\varphi$.

7.1.2. а) $u\big|_{\rho=2}=\cos^3\varphi\cos 5\varphi$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=4}=-\dfrac{1}{2}x^2y$.

7.1.3. а) $u\big|_{x^2+y^2=4}=x^2$; б) $\dfrac{\partial u(3,\varphi)}{\partial n}=\cos\varphi\sin 2\varphi$.

7.1.4. а) $u\big|_{\rho=3}=\sin 3\varphi\cos 4\varphi$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=1}=xy^3$.

7.1.5. а) $u\big|_{x^2+y^2=9}=y$; б) $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial n}=\cos 2\varphi-1$.

7.1.6. а) $u\big|_{\rho=2}=1+\cos^3\varphi\cdot\sin^4\varphi$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=4}=xy^2$.

7.1.7. а) $u\big|_{x^2+y^2=4}=2+3x$; б) $\dfrac{\partial u(3,\varphi)}{\partial n}=\sin^2\varphi$.

7.1.8. а) $u\big|_{\rho=3}=\sin^5\varphi\cdot\cos^3\varphi$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=1}=x^2y+y^2x$.

7.1.9. а) $u\big|_{x^2+y^2=16}=5xy$; б) $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial n}=\cos\varphi\sin 5\varphi$.

7.1.10. а) $u\big|_{\rho=2}=2\cos\varphi-\cos\varphi\cdot\sin^3 4\varphi$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=1}=x^2+y-\dfrac{1}{2}$.

7.1.11. а) $u\big|_{x^2+y^2=1}=\dfrac{1}{2}xy-x^2$; б) $\dfrac{\partial u(2,\varphi)}{\partial n}=\cos 5\varphi\cos\varphi$.

7.1.12. а) $u\big|_{\rho=R}=3\sin^3\varphi-2$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=1}=x^3y$.

7.1.13. а) $u\big|_{x^2+y^2=1}=x^2+2y$; б) $\dfrac{\partial u(3,\varphi)}{\partial n}=\sin 4\varphi\cos 2\varphi$.

7.1.14. а) $u\big|_{\rho=2}=2+\dfrac{1}{2}\cos^2 5\varphi\cdot\sin 3\varphi$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=1}=x^4y^2-\dfrac{1}{16}$.

7.1.15. а) $u\big|_{x^2+y^2=4} = 4x^2 + 6x$; б) $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial n} = \cos 8\varphi \sin\varphi$.

7.1.16. а) $u\big|_{\rho=3} = \sin 2\varphi \cdot \cos^4\varphi$; б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=4} = y^3$.

7.1.17. а) $u\big|_{x^2+y^2=25} = 5x - 6y^3$; б) $\dfrac{\partial u(2,\varphi)}{\partial n} = 2\cos\varphi \sin 3\varphi$.

7.1.18. а) $u\big|_{\rho=1} = \sin^2\dfrac{\varphi}{2} \cdot \cos 3\varphi$; б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=1} = x^4 - \dfrac{3}{8}$.

7.1.19. а) $u\big|_{x^2+y^2=9} = x^3 - y^2 x + 3y$; б) $\dfrac{\partial u(4,\varphi)}{\partial n} = \cos 5\varphi \sin 3\varphi$.

7.1.20. а) $u\big|_{\rho=1} = \sin 3\varphi \cdot \cos 4\varphi$; б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=1} = y^4 - \dfrac{3}{8}$.

7.1.21. а) $u\big|_{x^2+y^2=1} = 5x^2 + 4y^2$; б) $\dfrac{\partial u(6,\varphi)}{\partial n} = \cos 2\varphi - \dfrac{1}{2}\sin 3\varphi$.

7.1.22. а) $u\big|_{\rho=1} = \cos 3\varphi + \cos^2\varphi \cdot \sin 3\varphi$; б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=1} = x^5$.

7.1.23. а) $u\big|_{x^2+y^2=1} = x - y + xy$; б) $\dfrac{\partial u(8,\varphi)}{\partial n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin 3\varphi$.

7.1.24. а) $u\big|_{\rho=2} = 4 + \cos\varphi \cdot \sin^3 3\varphi$; б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=1} = y^4 x$.

7.1.25. а) $u\big|_{x^2+2x+y^2=0} = 4x^3 + 6x - 1$; б) $\dfrac{\partial u(6,\varphi)}{\partial n} = 5\cos\varphi \sin 6\varphi$.

8.3. Розв’язок задачі Діріхле для прямокутника

Візьмемо прямокутник зі сторонами a і b (рис. 2.20). Потрібно знайти гармонічну в цьому прямокутнику функцію, якщо відомі її значення на границі.

Запишемо граничну умову так:

AB: $x = \dfrac{a}{2}$, $-\dfrac{b}{2} < y < \dfrac{b}{2}$; $u\big|_{AB} = f_1(y)$;

CD: $x = -\dfrac{a}{2}$, $-\dfrac{b}{2} < y < \dfrac{b}{2}$; $u\big|_{CD} = f_2(y)$;

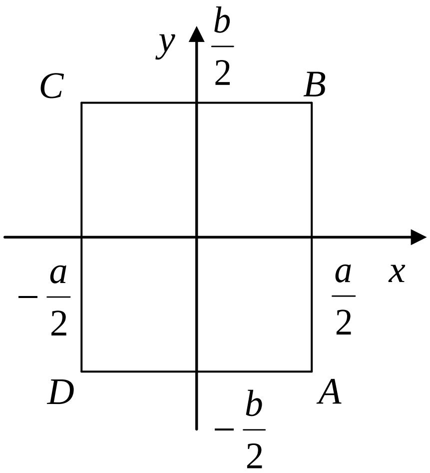


Рис. 2.20

BC: $y=\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2};\ u\big|_{BC}=g_1(x);$

DA: $y=-\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2};\ u\big|_{DA}=g_2(x).$

Покажемо, що вихідна задача зводиться до двох більш простих.

Шукаємо невідому функцію u у вигляді $u=\upsilon+w$, де υ й w – гармонічні функції, і при цьому

$$\upsilon\big|_{AB}=0,\quad \upsilon\big|_{CD}=0,$$

$$\upsilon\big|_{BC}=g_1(x),\quad \upsilon\big|_{DA}=g_2(x).$$

Тоді для w повинні виконуватися умови:

$$w\big|_{BC}=0,\quad w\big|_{DA}=0.$$

$$w\big|_{AB}=f_1(y),\quad w\big|_{CD}=f_2(y).$$

Обмежимося знаходженням функції υ, оскільки w шукається аналогічно.

Отже, для $\upsilon(x,y)$ маємо рівняння

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial y^2}=0.$$

Застосуємо для розв'язку цього рівняння метод Фур'є. Покладемо $\upsilon(x,y)=X(x)Y(y)$, одержимо

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2,$$

звідки

$$X''+\lambda^2X=0,\qquad Y''-\lambda^2Y=0,$$

а значить

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x,\ Y=\bar{C}e^{\lambda y}+\bar{D}e^{-\lambda y}$$

або, що рівносильне

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x,\ Y=Cch\lambda y+Dsh\lambda y.$$

З умови $X\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right)=0$ випливає, що

$$A\cos\frac{\lambda a}{2}+B\sin\frac{\lambda a}{2}=0,$$

$$A\cos\frac{\lambda a}{2}-B\sin\frac{\lambda a}{2}=0.$$

Звідси дістанемо, що $A\cos\frac{\lambda a}{2}=0$, $B\sin\frac{\lambda a}{2}=0$. При цьому числа A і B не можуть одночасно перетворитися в нуль, тому що в протилежному випадку було б $X(x)\equiv 0$. Таким чином, або $A=0$, $\sin\frac{\lambda a}{2}=0$, або $B=0$, $\cos\frac{\lambda a}{2}=0$, тобто можливі два випадки:

1. $A=0$, $\sin\frac{\lambda a}{2}=0$, тобто $\lambda=\frac{2n\pi}{a}$.

2. $B=0$, $\cos\frac{\lambda a}{2}=0$, тобто $\lambda=\frac{(2n-1)\pi}{a}$.

Отже, одержуємо два частинних розв'язки:

1. $\upsilon_n=\sin\frac{2n\pi x}{a}\left(C_n ch\frac{2n\pi y}{a}+D_n sh\frac{2n\pi y}{a}\right)$,

2. $\upsilon_n=\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a}\left(E_n ch\frac{(2n-1)\pi y}{a}+F_n sh\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right)$,

які є відповідно непарною та парною функціями відносно *x*.

Знайдемо той розв'язок, який задовольняє крайові умови на горизонтальних прямих. Шукаємо розв'язок у вигляді суми ряду. При цьому, якщо $g_1(x)$ і $g_2(x)$ – непарні функції, то беремо розв'язок 1-го виду, якщо ж парні, то 2-го виду.

Обмежимося випадком парності функцій $g_1(x)$ і $g_2(x)$. Тоді

$$\upsilon_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n ch\frac{(2n-1)\pi y}{a}+F_n sh\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a}.$$

Вважаємо $y=\frac{b}{2}$, одержимо

$$g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n ch\frac{(2n-1)\pi b}{2a}+F_n sh\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\right]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a}. \tag{2.159}$$

Коефіцієнти цього ряду, тобто вирази у квадратних дужках, визначають шляхом множення обох частин рівності (2.159) на $\cos\frac{(2m-1)\pi x}{a}$ й почленного інтегрування від $-\frac{a}{2}$ до $\frac{a}{2}$.

Аналогічно при $y=-\frac{b}{2}$

$$g_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n ch\frac{(2n-1)\pi b}{2a}-F_n sh\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\right]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a}. \tag{2.160}$$

Вирази у квадратних дужках знайдемо так само, як і вище.

Знаючи коефіцієнти в рядах (2.159) і (2.160), легко знайдемо E_n і F_n, які залишається підставити у вираз υ_n. Оскільки величини $ch\frac{(2n-1)\pi b}{2a}$ і $sh\frac{(2n-1)\pi b}{2a}$ швидко ростуть із ростом n, то на підставі теореми Римана-Лебега числа E_n й F_n повинні досить швидко спадати при $n \to \infty$.

8.4. Задача про коливання круглої мембрани

Кругла однорідна мембрана радіусом R, що закріплена по межі, знаходиться в стані рівноваги при натягу T. У момент часу $t = 0$ до мембрани прикладено нормальний тиск P на одиницю площі. Знайти закон коливань мембрани.

Задача зводиться до розв’язку рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U + \frac{P}{\rho}, \ \forall (x;y) \in \Omega \qquad (a^2 = \frac{T}{\rho})$$

$$\Omega = \{(x;y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$$

при крайових умовах

$$U(x,y,t)\Big|_{x^2+y^2=R^2} = 0$$

і початкових умовах

$$U(x,y,0) = 0, \ (x;y) \in \Omega$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,y,0) = 0, \ (x;y) \in \Omega.$$

Розв’язання

Перейдемо до полярних координат, тоді диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{P}{\rho}.$$

Крайова умова перетвориться до вигляду:

$$U(R,\varphi,t) = 0.$$

Відзначимо, що коливання центра мембрани, як і всіх її точок, малі, тому відхилення $U(0,\varphi,t)$ – обмежені. Це й буде друга крайова умова

$$|U(0,\varphi,t)| < \infty.$$

Початкові умови:

$$U(r,\varphi,0)=0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t}(r,\varphi,0)=0.$$

Оскільки коливання викликані постійною силою, а крайові й початкові умови не залежать від кута φ, можна очікувати, що й функція U також не буде залежати від кута φ, тобто $U=U(r,t)$, і задача спрощується:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right)+\frac{P}{\rho}; \tag{2.161}$$
$$U(R,t)=0; \tag{2.162}$$
$$\left|U(0,t)\right|<\infty; \tag{2.163}$$
$$U(r,0)=0;$$
$$\frac{\partial U}{\partial t}(r,0)=0.$$

Рівняння (2.161) – неоднорідне, причому неоднорідність стаціонарна, тому будемо шукати розв’язок цього рівняння у вигляді суми двох функцій, одна з яких залежить тільки від r.

$$U(r,t)=U_1(r)+W(r,t).$$

Підберемо функцію $U_1(r)$ так, щоб вона задовольняла рівняння (2.161) і крайові умови (2.162)–(2.163).

$$\frac{a^2}{r}\left(rU_1'\right)'+\frac{P}{\rho}=0\Rightarrow\left(rU_1'\right)'=-\frac{\mathrm{Pr}}{\rho a^2}=-\frac{\mathrm{Pr}}{T}\Rightarrow rU_1'=-\frac{\mathrm{Pr}^2}{2T}+C_1\Rightarrow$$

$U_1'=-\dfrac{\mathrm{Pr}}{2T}+\dfrac{C_1}{r}$, звідси

$$U_1(r)=-\frac{\mathrm{Pr}^2}{4T}+C_1\ln r+C_2.$$

З обмеженості $U_1(0)$ випливає, що $C_1=0$, оскільки $\ln r$ необмежено зростає за модулем при $r\to 0$.

$$U_1(R)=-\frac{PR^2}{4T}+C_2=0\Rightarrow C_2=\frac{PR^2}{4T}.$$

Таким чином, $U_1(r)=\dfrac{P}{4T}\left(R^2-r^2\right)$.

Тоді для $W(r,t)$ одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right) \tag{2.164}$$

з однорідними крайовими
$$\left|W(0,t)\right| < \infty, \tag{2.165}$$
$$W(R,t) = 0 \tag{2.166}$$
і початковими умовами
$$W(r,0) = -U_1(r) = -\frac{P}{4T}\left(R^2 - r^2\right),$$
$$\frac{\partial W}{\partial t}(r,0) = 0.$$

Цю задачу будемо розв’язувати методом Фур'є, тобто $W(r,t) = V(r)T(t)$. Підставимо отриманий добуток в (2.164)
$$T''V = a^2T\frac{1}{r}\left(rV'\right)' \Rightarrow \frac{T''}{a^2T} = \frac{\frac{1}{r}\left(rV'\right)'}{V} = c.$$

Кожний дріб дорівнює сталій c, отже, одержимо два звичайних диференціальних рівняння відносно функцій $V(r)$ і $T(t)$, відповідно
$$\frac{1}{r}\left(rV'\right)' - cV = 0,$$
$$T'' - a^2cT = 0. \tag{2.167}$$

Розділяємо змінні в крайовій умові (2.166):
$$V(R)T(t) = 0 \Rightarrow V(R) = 0, \text{ оскільки } T(t) \neq 0.$$
З (2.165) одержуємо:
$$\left|V(0)T(t)\right| < \infty \Rightarrow \left|V(0)\right| < \infty, \text{ оскільки } T(t) \neq 0.$$
Таким чином, для функції $V(r)$ поставлена крайова задача Штурма–Ліувілля:
$$\begin{cases} V'' + \frac{1}{r}V' - cV = 0, \\ \left|V(0)\right| < \infty, \\ V(R) = 0. \end{cases}$$
Власні значення цієї задачі $-c$, тому $-c = \lambda^2$.

Рівняння $V'' + \frac{1}{r}V' + \lambda^2V = 0$ зводиться до рівняння Бесселя заміною незалежної змінної: $\lambda r = x, \quad V_r{}' = \lambda V_x{}', \quad V_{rr}{}'' = \lambda^2 V_{xx}{}''$.
$$\lambda^2V_{xx}'' + \frac{\lambda^2}{x}V_x' + \lambda^2V = 0.$$

Помножимо обидві частини отриманої рівності на x^2 і розділимо на λ^2 $(\lambda \neq 0)$

$$x^2 V_{xx}'' + xV_x' + \left(x^2 - 0\right)V = 0 .$$

Це є рівняння Бесселя нульового порядку. Його загальним розв'язком є лінійна комбінація функцій Бесселя та Неймана нульового порядку:

$$V(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Повернемося до старої змінної:

$$V(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Функція $V(r)$ повинна задовольняти умову $V(0) = C_1 J_0(0) + C_2 N_0(0)$ та бути обмеженою в цій точці. Відомо, що $J_0(0) = 1$, а $N_0(x)$ необмежено зростає, коли $x \to 0$. Щоб задовольнити умову обмеженості $V(0)$, потрібно покласти $C_2 = 0$. Друга крайова умова $V(R) = C_1 J_0(\lambda R) = 0 \Rightarrow J_0(\lambda R) = 0$ (оскільки $C_1 \neq 0$). Остання рівність означає, що числа λR є коренями (нулями) функції Бесселя нульового порядку. Ці корені добре вивчені; відомо, що вони утворюють рахункову множину, розташовані симетрично відносно початку числової осі, тому наведено тільки додатні корені, які утворюють нескінченно зростаючу послідовність $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...$ Отже, $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{R}$, відповідні λ_k власні функції $V_k(r) = J_0(\lambda_k r) = J_0\left(\dfrac{\mu_k}{R} r\right)$ (з точністю до сталого множника C_1).

Розглянемо рівняння (2.167). Після заміни

$$-c = \lambda^2 = \frac{\mu_k^2}{R^2},$$

одержимо для кожного k своє рівняння відносно функції $T_k(t)$:

$$T_k'' + a^2 \frac{\mu_k^2}{R^2} T_k = 0 .$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{a\mu_k}{R} t + B_k \sin\frac{a\mu_k}{R} t .$$

Таким чином, отримана нескінченна множина частинних розв'язків $W_k(r,t) = V_k(r) T_k(t)$ рівняння (2.164), кожне з яких задовольняє крайові умови (2.165) і (2.166).

Загальний розв'язок (2.164) шукаємо, дотримуючись ідей методу Фур'є, у вигляді суперпозиції цих рішень, тобто у вигляді ряду

$$W(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{a\mu_k}{R}t+B_k\sin\frac{a\mu_k}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right).$$

Підберемо коефіцієнти A_k і B_k так, щоб задовольнити початкові умови

$$W(r,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)=-\frac{P}{4T}\left(R^2-r^2\right). \tag{2.168}$$

Вираз (2.168) є розвиненням функції $-\frac{P}{4T}\left(R^2-r^2\right)$ в ряд за функціями Бесселя нульового порядку, які відповідають різним кореням (нулям) цієї функції. З теорії відомо, що функції Бесселя одного порядку, які відповідають різним кореням, ортогональні на проміжку $[0;1]$ з вагою x (мова йде про функції $J_0(\mu_k x)$). У розглядуваному випадку, коли в ролі x виступає $\frac{r}{R}$, функції $J_0\left(\mu_k\frac{r}{R}\right)$ будуть ортогональні на проміжку $[0;R]$ з вагою r. Множимо обидві частини (2.168) на $rJ_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)$ й інтегруємо за проміжком $[0;R]$

$$A_n\int_0^R rJ_0^2\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr=-\frac{P}{4T}\int_0^R r\left(R^2-r^2\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr.$$

Введемо позначення:

$$I_{1n}=\int_0^R rJ_0^2\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr,\quad I_{2n}=\int_0^R rJ_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr,\quad I_{3n}=\int_0^R r^3J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr.$$

Тоді

$$A_n=-\frac{P}{4T}\cdot\frac{R^2I_{2n}-I_{3n}}{I_{1n}}. \tag{2.169}$$

В інтегралі I_{1n} введемо заміну $r=Rx,\ dr=Rdx$. Тоді $I_{1n}=R^2\int_0^1 xJ_0^2(\mu_n x)dx$. Інтеграл, що знаходиться праворуч, відомий як нормуючий інтеграл. Він дорівнює $\frac{J_1^2(\mu_n)}{2}$. Таким чином, $I_{1n}=R^2\frac{J_1^2(\mu_n)}{2}$.

Як відомо, корені $J_1(x)$ лежать між коренями $J_0(x)$, тому $J_1(\mu_n)\neq 0$. Відзначимо, що значення $J_1(\mu_n)$ теж відомі.

Для обчислення I_{2n} і I_{3n} розглянемо два допоміжних невизначених інтеграли $\tilde{I}_2 = \int xJ_0(x)dx$ і $\tilde{I}_3 = \int x^3 J_0(x)dx$.

З відомого рекурентного співвідношення для функцій Бесселя $J_{\nu-1} = J_\nu{}' + \frac{\nu}{x}J_\nu$ при $\nu = 1$ одержуємо $J_0 = J_1' + \frac{1}{x}J_1$ або

$$xJ_0 = xJ_1' + J_1. \qquad (2.170)$$

З іншого рекурентного співвідношення для функцій Бесселя $J_{\nu+1} = -J_\nu{}' + \frac{\nu}{x}J_\nu$ при $\nu = 0$ одержуємо

$$J_1 = -J_0'. \qquad (2.171)$$

Заміняємо підінтегральну функцію в $\tilde{I}_2$ на суму за формулою (2.170), розбиваємо $\tilde{I}_2$ на суму двох інтегралів й інтегруємо частинами перший з них:

$$\tilde{I}_2 = xJ_1(x) - \int J_1(x)dx + \int J_1(x)dx = xJ_1(x).$$

Так само знаходимо й інтеграл $\tilde{I}_3$

$$\tilde{I}_3 = \int x^3 J_0(x)dx = \int (x^3 J_1' + x^2 J_1)dx = x^3 J_1(x) - 3\int x^2 J_1(x)dx + \int x^2 J_1(x)dx =$$
$$= x^3 J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)dx.$$

В інтегралі, що залишився, J_1 заміняємо на $-J_0'$ згідно з (2.171) та інтегруємо його частинами:

$$\tilde{I}_3 = x^3 J_1(x) + 2\left(x^2 J_0(x) - 2\underbrace{\int xJ_0(x)dx}_{\tilde{I}_2} \right) = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x).$$

Повернемося до інтегралів I_{2n} і I_{3n}. Введемо заміну

$x = \frac{\mu_n r}{R} \Rightarrow r = \frac{Rx}{\mu_n}$, $dr = \frac{R}{\mu_n}dx$, тоді

$$I_{2n} = \frac{R^2}{\mu_n^2}\int_0^{\mu_n} xJ_0(x)dx = \frac{R^2}{\mu_n^2}\left(xJ_1(x)\right)\Big|_0^{\mu_n} = \frac{R^2}{\mu_n}J_1(\mu_n),$$

$$I_{3n} = \frac{R^4}{\mu_n^4}\int_0^{\mu_n} x^3 J_0(x)dx = \frac{R^4}{\mu_n^4}\left(2x^2 J_0(x) + \left(x^3 - 4x\right)J_1(x)\right)\Big|_0^{\mu_n} = \frac{R^4}{\mu_n^3}\left(\mu_n^2 - 4\right)J_1(\mu_n)$$

(нагадаємо, що $J_0(\mu_n) = 0$).

Після підстановки знайдених значень інтегралів I_{1n}, I_{2n}, I_{3n} в (2.169), одержимо

$$A_k = -\frac{2PR^2}{T\mu_k^3 J_1(\mu_k)}.$$

Із другої початкової умови $\frac{\partial W}{\partial t}(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{a\mu_k}{R} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = 0$ випливає, що всі $B_k = 0$.

$$W(r,t) = -\frac{2PR^2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)\cos\frac{a\mu_k t}{R}.$$

Коливання мембрани в цій задачі описуються функцією:

$$U(r,t) = \frac{P}{T}\left(\frac{1}{4}\left(R^2 - r^2\right) - 2R^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)\cos\frac{a\mu_k t}{R}\right).$$

Лабораторна робота 8

Завдання 1

Знайти закон вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $(0 \le x \le l,\ 0 \le y \le m)$, жорстко закріпленої по контуру, якщо початкові відхилення задані функцією $f(x,y) = xy(l-x)(m-y)$. Початкові швидкості відсутні.

Значення a, l, m наведені в таблиці (a_1, l, m).

Завдання 2

Вивчити вільні радіальні коливання однорідної круглої мембрани, закріпленої по контуру, якщо початкові відхилення задані функцією $f(r) = \frac{1}{8}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$.

Значення a, R наведені в таблиці (a_2, R_2).

Завдання 3

Знайти розподіл температури усередині однорідного нескінченного кругового циліндра радіусом R за умови, що початкова температура дорівнює $U_0\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$, а на поверхні циліндра підтримується температура, рівна нулю. Значення a, R наведені в таблиці (a_3, R_3). Побудувати графік розподілу температур уздовж радіуса циліндра для моментів часу $t = 0,\ t = 1,\ t = 2,\ t = 5,$ залишаючи 3 члени розвинення в ряд отриманого розв'язку.

№	a_1	l	m	a_2^2	R_2	a_3^2	R_3	№	a_1	l	m	a_2^2	R_2	a_3^2	R_3
1	8	2	3	1	25	16	5	16	4	2	6	16	10	3	3
2	2	3	4	2	24	1	7	17	5	3	2	17	9	1	5
3	3	4	5	3	23	9	8	18	1	4	3	18	8	5	4
4	4	5	6	4	22	16	1	19	2	5	4	19	7	4	1
5	5	6	2	5	21	5	4	20	3	6	5	20	6	10	7
6	2	2	4	6	20	10	2	21	5	2	2	21	5	1	2
7	3	3	5	7	19	6	6	22	1	3	3	22	4	2	4
8	4	4	6	8	18	7	5	23	2	4	4	23	3	2	2
9	5	5	2	9	17	1	1	24	3	5	5	24	2	5	5
10	1	6	3	10	16	9	3	25	4	6	6	25	1	2	3
11	3	2	5	11	15	36	7	26	12	2	7	1	6	5	1
12	4	3	6	12	14	1	4	27	11	3	6	4	5	6	7
13	5	4	2	13	13	25	3	28	10	4	5	9	4	7	4
14	1	5	3	14	12	10	1	29	9	5	4	16	3	3	6
15	2	6	4	15	11	25	2	30	8	6	3	25	2	3	2

§9. Метод функції Гріна для рівняння Лапласа

Розглянемо допоміжну задачу, що ставиться так: знайти функцію $\gamma_{M_0}(x,y,z)$, гармонічну в скінченній області Ω і задану на межі S значенням

$$\gamma_{M_0}(M)\Big|_{\partial S} = -\frac{1}{4\pi r},$$

де $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – будь-яка внутрішня точка області. Припустимо, що задача розв’язана й функція γ_{M_0} знайдена.

Введення функції $\gamma_{M_0}(M)$ допомагає одержати формулу, що виражає значення гармонічної функції усередині області через її значення на межі.

Нехай $u(M)$ – будь-яка гармонічна функція в замкнутій області Ω, що обмежена поверхнею S. Тоді має місце інтегральне подання цієї функції у вигляді (див. додаток А, формула (8Д)):

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS, \tag{2.172}$$

яке дає вираз значення функції $u(M_0)$ усередині області через її значення і значення її нормальної похідної на межі S області Ω.

Застосуємо другу формулу Гріна до пари гармонічних функцій $u(M)$ і $\gamma_{M_0}(M)$. Тоді одержимо

$$\iint_S \left[u(M)\frac{\partial \gamma_{M_0}(M)}{\partial n} - \gamma_{M_0}(M)\frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS = 0$$

або на підставі крайових умов для $\gamma_{M_0}(M)$ маємо, що

$$\iint_S \left[u(M)\frac{\partial \gamma_{M_0}(M)}{\partial n} + \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS = 0.$$

Віднімаючи цю рівність із (2.172), позбудемося під знаком інтеграла від похідної $\dfrac{\partial u}{\partial n}$

$$u(M_0) = \iint_S \left(\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{4\pi} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - u\frac{\partial \gamma_{M_0}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS =$$

$$= -\iint_S u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi r} + \gamma_{M_0}(M) \right] dS.$$

Нехай функція $u(x,y,z)$ на межі області задовольняє умову $u(M)\big|_S = f(M)$. Тоді формула

$$u(M_0) = -\iint_S f(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi r} + \gamma_{M_0}(M) \right] dS \qquad (2.173)$$

подає значення гармонічної функції усередині області через її значення на межі цієї області.

Розглянемо нову функцію $G(M, M_0)$.

Визначення. Функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа називається функція $G(M, M_0)$, що задовольняє такі умови:

1) функція $G(M, M_0)$ є гармонічною функцією точки M у всій області Ω, крім точки M_0, де вона прямує до нескінченності;
2) функція $G(M, M_0)$ на межі області задовольняє умову

$$G(M, M_0)\big|_S = 0;$$

3) в області Ω функція $G(M, M_0)$ допускає подання

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + \gamma_{M_0}(M),$$

де r є відстань між M і M_0, а $\gamma_{M_0}(M)$ – гармонічна функція скрізь усередині Ω.

За допомогою функції Гріна рівність (2.173) зводиться до вигляду

$$u(M_0) = -\iint_S f(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS. \tag{2.174}$$

Припустимо, що функція Гріна відома, тоді розв'язок внутрішньої задачі Діріхле, якщо він існує, дається формулою (2.174).

Формула (2.174) не дає можливості легкого розв'язку задачі Діріхле, тому що побудова функції $G(M, M_0)$ часто виявляється не менш важкою, чим розв'язок задачі Діріхле із загальними значеннями на межі. Однак у деяких випадках вдається визначити $G(M, M_0)$ безпосередньо, і тоді формула (2.174) дає найпростіший метод розв'язку задачі Діріхле порівняно з іншими.

9.1. Задача Діріхле для кулі

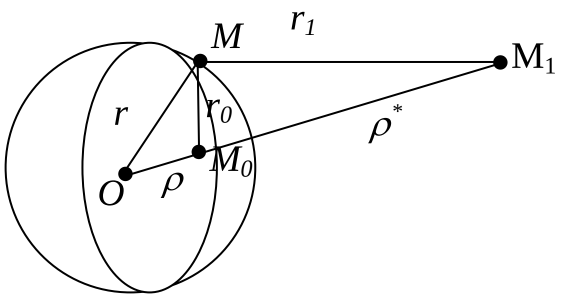


Рис. 2.21

Нехай дана куля радіусом R із центром O у початку координат (рис. 2.21). Потрібно знайти функцію $u(M)$, гармонічну в кулі, що задовольняє крайову умову

$$u(M)\big|_S = f(M),$$

де S – межа кулі, $f(M)$ – задана функція, яка неперервна на сфері S.

Побудуємо функцію Гріна цієї задачі.

Нехай M_0 – яка-небудь фіксована точка усередині кулі. Побудуємо тепер точку M_1, спряжену точці M_0, тобто таку точку, що лежить на продовженні променя OM_0 і для якої має місце рівність:

$$\left|\overrightarrow{OM_0}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_1}\right| = R^2. \tag{2.175}$$

Позначимо через ρ відстань від центра кулі до M_0, тобто $\rho = \left|\overrightarrow{OM_0}\right|$, а через r_0 і r_1 відстані від деякої точки M, що лежить усередині або на поверхні кулі, відповідно до точок M_0 і M_1, тобто $r_0 = \left|\overrightarrow{MM_0}\right|$, $r_1 = \left|\overrightarrow{MM_1}\right|$; $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$. Знайдемо співвідношення між r і r_1, коли точка M знаходиться на поверхні кулі, тобто $\left|\overrightarrow{OM}\right| = R$. Розглянемо трикутники OMM_0 і OM_1M. Вони подібні, тому що мають спільний кут з вершиною в точці O та пропорційні сторони, що містять цей кут. Дійсно, рівність (2.175) запишемо у вигляді

$$\frac{\left|\overrightarrow{OM_0}\right|}{R} = \frac{R}{\left|\overrightarrow{OM_1}\right|}$$

або з огляду на те, що $\left|\overrightarrow{OM}\right| = R$, цю рівність перепишемо як

$$\frac{\left|\overrightarrow{OM_0}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\overrightarrow{OM_1}\right|}.$$

З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{\left|\overrightarrow{MM_0}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{OM_0}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$$

або

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho}{R}.$$

Остання пропорція може бути переписана у такому вигляді:

$$\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1} = 0. \qquad (2.176)$$

Розділимо обидві частини рівності на 4π, тоді її ліва частина буде функцією Гріна $G(M, M_0)$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right) = G(M, M_0). \qquad (2.177)$$

Ця функція на сфері перетворюється в нуль на підставі (2.176), у точці M_0 має особливість вигляду $\dfrac{1}{4\pi r_0}$, тобто $\to \infty$ і є гармонічною всюди усередині кулі, як сума гармонічних функцій. Нарешті функція (2.177) має потрібне подання усередині області

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_0} - \frac{1}{4\pi}\gamma_{M_0},$$

де

$$\gamma_{M_0} = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Обчислимо похідну за напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до межі кулі, що збігається з напрямком радіуса-вектора точки M, тобто $\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial r}$

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)-\frac{R}{\rho}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right],$$

де $r_1=\left|\overrightarrow{M_1M}\right|$ (M, загалом кажучи, не лежить на сфері).

Із трикутників OM_0M і OM_1M визначимо за теоремою косинусів r_0 і r_1:

$$r_0=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha},$$
$$r_1=\sqrt{r^2+\left(\rho^*\right)^2-2r\rho^*\cos\alpha},$$

при цьому необхідно пам'ятати, що $\rho=\text{const}, \rho^*=\left|OM_1\right|=\text{const}$ для фіксованої точки M_0, $\alpha=\angle MOM_0$.

Якщо точка M лежить на межі S, то справедливі такі рівності:

$$r_0=\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\alpha};$$
$$r_1=\sqrt{R^2+\frac{R^4}{\rho^2}-2R\frac{R^2}{\rho}\cos\alpha}=\frac{R}{\rho}\sqrt{\rho^2+R^2-2R\rho\cos\alpha}=\frac{R}{\rho}r_0;$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)=-\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial\left(r_0\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r_0^2}\frac{r-\rho\cos\alpha}{r_0}=-\frac{1}{r_0^3}\left(r-\rho\cos\alpha\right);$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)\right|_S=-\frac{1}{r_0^3}\left(R-\rho\cos\alpha\right).$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial\left(r_1\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r_1^3}\left(r-\rho^*\cos\alpha\right);$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right|_S=-\frac{1}{r_1^3}\left(R-\frac{R^2}{\rho}\cos\alpha\right),\ \text{тому що}\ \rho\cdot\rho^*=R^2\ \text{за (2.175).}$$
$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r_0^3}\left(R-\rho\cos\alpha\right)+\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1^3}\left(R-\frac{R^2}{\rho}\cos\alpha\right)\right).$$

З огляду на рівність $r_1=\frac{Rr_0}{\rho}$, яка виконується у випадку, якщо точка лежить на поверхні, одержимо

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r_0^3}\left(R-\rho\cos\alpha\right)+\frac{R}{\rho}\cdot\frac{\rho^3}{R^3 r_0^3}\left(R-\frac{R^2}{\rho}\cos\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi r_0^3}\left(-R+\rho\cos\alpha+\frac{\rho^2}{R}-\rho\cos\alpha\right)=\frac{1}{4\pi r_0^3}\left(\frac{\rho^2-R^2}{R}\right).$$

Отже,

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi R}\iint_S f(M)\frac{\rho^2-R^2}{r_0^3}dS.$$

Уведемо тепер сферичні координати:
$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$.

Тоді елемент поверхні dS можна подати як $dS=R^2\sin\theta d\theta d\varphi$.

Виразимо $\cos\alpha$ у сферичній системі координат з огляду на те, що α – кут між векторами $\overrightarrow{OM_0}$ й $\overrightarrow{OM}$ або, що теж саме, між їхніми ортами $\overrightarrow{OM_0}^0$ і $\overrightarrow{OM}^0$, тоді

$\cos\alpha=\left(\overrightarrow{OM_0}^0,\overrightarrow{OM}^0\right)$, де

$$\overrightarrow{OM}^0=\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\frac{\left[x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right]}{r}=\frac{1}{r}\cdot r\left(\cos\varphi\sin\theta\vec{i}+\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j}+\cos\theta\vec{k}\right).$$

Аналогічно орт $\overrightarrow{OM_0}^0$ визначається як

$\overrightarrow{OM_0}^0=\sin\theta_0\cos\varphi_0\vec{i}+\sin\varphi_0\sin\theta_0\vec{j}+\cos\theta_0\vec{k}$.

Тоді

$$\cos\alpha=\sin\theta\sin\theta_0\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)+\cos\theta_0\cos\theta,$$

а значення функції в точці M_0 виразиться за допомогою інтеграла

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}u(N)\frac{\left(R^2-\rho^2\right)R^2\sin\theta d\theta}{R\sqrt{\left(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\alpha\right)^3}},\qquad(2.178)$$

який називається *інтегралом Пуассона* для кулі.

Приклад

Дано однорідну кулю радіусом *R*, верхня половина межі, якого підтримується при температурі 1, а нижня – при температурі 0. Знайдемо стаціонарний розподіл температури уздовж вертикального діаметра кулі *SN* (рис. 2.22).

Розв'язання. Для точок верхньої півсфери $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, для точок нижньої півсфери $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, отже,

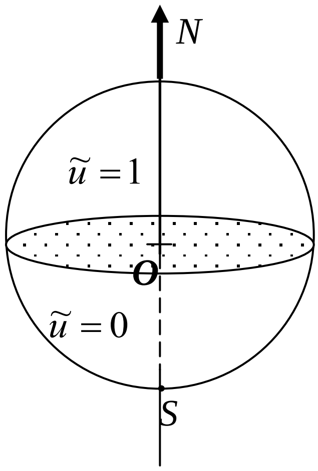


Рис. 2.22

$$\tilde{u} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{якщо} \quad -\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \end{cases}$$

Складність формули Пуассона видно з того, що навіть у цьому найпростішому випадку одержати вираз для температури у всіх точках кулі важко. Тому обмежимося лише окремим випадком.

Будемо шукати температуру в точках вертикального діаметра SN. Якщо точка M_0 лежить на радіусі ON (тобто у верхній частині кулі), то $\theta_0 = 0$ і $\cos\alpha = \cos\theta$. Якщо ж точка M_0 лежить на радіусі OS (тобто в нижній частині кулі), то $\theta_0 = \pi$ і $\cos\alpha = -\cos\theta$. За формулою (2.178) для точки M_0, що лежить на радіусі ON на відстані r_0 $\left(\rho = r_0\right)$ від O, одержимо

$$u = \frac{R\left(R^2 - r_0^2\right)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta d\theta}{\left(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\theta\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{R\left(R^2 - r_0^2\right)}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta d\theta}{\left[R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\theta\right]^{3/2}} = -\frac{R^2 - r_0^2}{2r_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\theta}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{R^2 - r_0^2}{2r_0}\left\{\frac{1}{R - r_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r_0}\left\{R - \frac{R^2 - r_0^2}{\sqrt{R^2 + r_0^2}}\right\}.$$

Для точки M_0, що лежить на радіусі OS на відстані r_0 від O

$$u = \frac{R\left(R^2 - r_0^2\right)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\left(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\theta\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{R^2 - r_0^2}{2r_0}\left\{-\frac{1}{R + r_0} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r_0}\left\{R - \frac{R^2 - r_0^2}{\sqrt{R^2 + r_0^2}}\right\}.$$

Отже, температура на вертикальному діаметрі SN дорівнює

$$u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2r_0}\left\{R - \frac{R^2 - r_0^2}{\sqrt{R^2 + r_0^2}}\right\}.$$

9.2. Задача Діріхле для кола

Припустимо, що розв’язок задачі Діріхле для кола (рис. 2.23) зі спеціально заданими граничними умовами

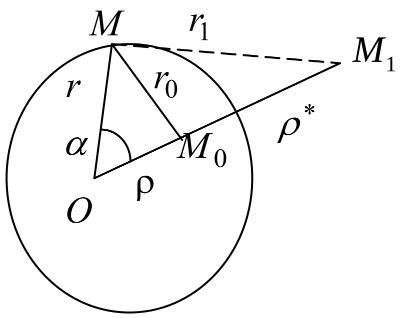


Рис. 2.23

$$u\big|_\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} \qquad (2.179)$$

відомий. У формулі (2.179) $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $M_0(x_0, y_0)$ – будь-яка внутрішня точка кола.

Розв’язок рівняння Лапласа, що задовольняє умову (2.179), позначимо через γ_{M_0}. Для розв’язку задачі Діріхле в загальному випадку, тобто, якщо $u\big|_\Gamma = f(M)$, застосуємо II формулу Гріна (для плоского випадку) до двох гармонічних функцій *u(M)* і γ_{M_0}

$$\iint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\,d\sigma = \int\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl.$$

Тоді одержимо

$$\int\limits_\Gamma \left[u\frac{\partial(\gamma_{M_0})}{\partial n} - \gamma_{M_0}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dl = 0$$

або з огляду на те, що $\gamma_{M_0}\big|_\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$

одержимо

$$\int\limits_\Gamma \left[u\frac{\partial \gamma_{M_0}}{\partial n} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dl = 0. \qquad (2.180)$$

З іншого боку, на підставі формули з додатку маємо

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]dl. \qquad (2.181)$$

Віднімемо з (2.181) (2.180), тоді одержимо

$$u(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma} u \frac{\partial}{\partial n}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right) + \gamma_{M_0}\right] dl\,. \qquad (2.182)$$

Функція

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + \gamma_{M_0}$$

задовольняє умову визначення функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в плоскому випадку.

Побудуємо функцію Гріна для кола.

Нехай M_0 – довільна точка, що лежить усередині кола, M_1 їй спряжена, тобто, яка лежить на промені $\overrightarrow{OM_0}$ і така, що

$$\left|\overrightarrow{OM_0}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_1}\right| = R^2.$$

Міркуючи аналогічно, як і у випадку кулі, одержимо

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \rho^{*2} - 2r\cdot\rho^*\cos\alpha}\,\Big|_{r=R} = \sqrt{R^2 + \rho^{*2} - 2R\rho^*\cos\alpha}\,\Big|_{r=R} =$$

$$= \left\| \rho^* = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| = \frac{R^2}{\left|\overrightarrow{OM_0}\right|} = \frac{R^2}{\rho} \right\| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R^2}{\rho}\right)^2 - 2R\cdot\frac{R^2}{\rho}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{R}{\rho}\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos\alpha} = \frac{Rr_0}{\rho}.$$

Таким чином, якщо точка M лежить на межі області, то має місце рівність

$$r_1 = \frac{Rr_0}{\rho},$$

але тоді справедлива й інша рівність

$$\frac{R}{\rho\cdot r_1} = \frac{1}{r_0},$$

а отже, і

$$\ln\frac{R}{\rho\cdot r_1} = \ln\frac{1}{r_0}.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що функція

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{\rho r_1} - \ln\frac{1}{r_0}\right)$$

є функцією Гріна для кола.

Щоб скористатися загальною формулою (2.182), обчислимо похідну по нормалі $\vec{n}$, напрямок якої збігається з напрямком радіуса кола, тобто

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R},\quad \frac{\partial G}{\partial r}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\partial r_0}{\partial r}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial r}\right);$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial r}=\left.\frac{r-\rho\cos\alpha}{r_0}\right|_{r=R}=\frac{R-\rho\cos\alpha}{r_0};$$

$$(r_0=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha});$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial r}=\left.\frac{r-\rho^*\cos\alpha}{r_1}\right|_{r=R}=\frac{\left(R-\rho^*\cos\alpha\right)\rho}{R\cdot r_0}=\frac{\left(R-\dfrac{R^2}{\rho}\cos\alpha\right)\rho}{R\cdot r_0}=\frac{\left(\rho-R\cos\alpha\right)}{r_0};$$

$$(r_1=\sqrt{r^2+\rho^{*2}-2r\rho^*\cos\alpha});$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{R-\rho\cos\alpha}{r_0^2}-\frac{\rho-R\cos\alpha}{r_1r_0}\right)=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R\cdot r_0^2},$$

де $r_0{}^2=R^2+\rho^2-2R\rho\cos\alpha$.

Уведемо полярні координати $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, де $r=R$, тоді $dl=Rd\varphi$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$, і розв'язок задачі Діріхле для кола за формулою (2.182) набуде вигляду

$$u\left(r_0,\varphi_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(M\right)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\alpha}d\varphi.$$

9.3. Задача Діріхле для півпростору

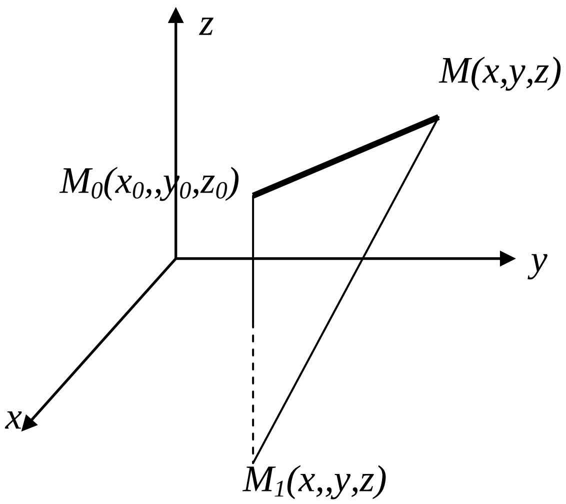


Рис. 2.24

Зафіксуємо точку M_0 у півпросторі $z>0$ й знайдемо їй спряжену M_1 (рис. 2.24). Такою буде точка, що є дзеркальним відображенням точки M_0 відносно площини $z=0$. Функція $\dfrac{1}{r_{M_1M}}$ є гармонічною у всьому півпросторі $z>0$ (оскільки $z_{M_1}>0$), а функція $\dfrac{1}{r_{M_0M}}$ – гармонічна всюди в $z>0$, за винятком точки M_0. Розглянемо різницю цих функцій

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}-\frac{1}{r_{M_1M}}\right). \qquad (2.183)$$

У даній задачі межею є площина $z=0$. Перевіримо, чи не можна отриману таким чином функцію взяти як функцію Гріна:

1) на межі області ця функція дорівнює нулю, тому що

$$\left.\frac{1}{r_{M_0M}}\right|_{z=0}=\left.\frac{1}{r_{M_1M}}\right|_{z=0};$$

2) є гармонічною всюди, за винятком точки M_0;

3) усередині області при-пустиме подання у вигляді суми двох функцій, одна з яких є гармонічною всюди, а друга всюди, за винятком однієї точки.

Тобто виконуються всі умови, що визначають функцію Гріна. Уведемо позначення

$$r_1=r_{M_1M},\ r=r_{M_0M}.$$

Тоді функція Гріна (2.183) подається як

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Обчислимо похідну по нормалі від побудованої функції. Тому що зовнішня нормаль до Γ спрямована вниз, убік від'ємних z, то

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0};$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial r_1}{\partial z}\right).$$

З огляду на те, що

$$r=r_{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$r_1=r_{M_1M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

отримаємо

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z_0}{r},\ \frac{\partial r_1}{\partial z}=\frac{z+z_0}{r_1}.$$

Тоді

$\displaystyle\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{(z-z_0)}{r^2\cdot r}+\frac{(z+z_0)}{r_1^2\cdot r_1}\right)$, отже, на межі

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma} = -\frac{2z_0}{\left(\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+z_0^2}\right)^3}\cdot\frac{1}{4\pi}.$$

Граничні значення тут задані на площині $z = 0$, тобто

$u(x,y,0) = f(x,y)$ $\qquad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty.$

Таким чином, одержимо, що

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)}{\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+z_0^2\right]^{3/2}}dy. \qquad (2.184)$$

Отримана формула називається *інтегралом Пуассона для півпростору*.

Якщо ввести в просторі циліндричні координати, поклавши $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$, то ця формула може бути записана у вигляді

$$u(r_0,\varphi_0,z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{f(M)rdr}{\left[r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+z_0^2\right]^{3/2}}. \qquad (2.185)$$

Необхідно мати на увазі, що інтеграли (2.184) і (2.185) невласні й для їхньої збіжності граничні значення повинні досить добре поводитися на нескінченності, наприклад, бути обмеженими.

9.4. Задача Діріхле для півплощини

Функція Гріна для півплощини $y > 0$ має вигляд

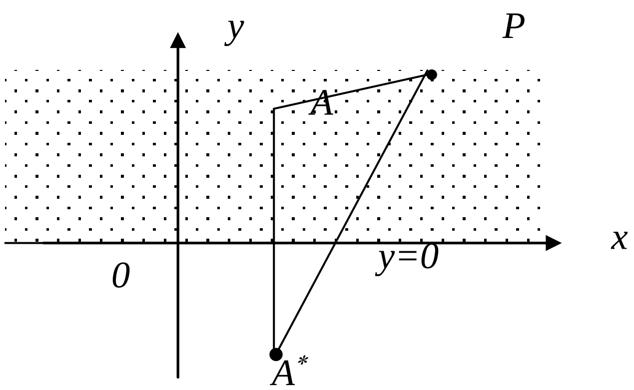


Рис. 2.25

$$G(P,A) = \left(\ln\frac{1}{r_1}-\ln\frac{1}{r}\right)\frac{1}{2\pi}.$$

Функції r і r_1 визначаються як

$$r = r_{AP} = \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2},$$

$$r_1 = r_{A^*P} = \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2},$$

де P – змінна точка;

A – довільна точка півплощини $y > 0$, A^* – спряжена A,

межею Γ є пряма $y = 0$ (рис. 2.25).

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma} = -\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{1}{2\pi}\left.\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right|_{y=0} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2y_0}{\left(x-x_0\right)^2+y_0^2}$$

і розв’язок запишеться у вигляді

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{u}(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx,$$

якщо $u|_{\Gamma} = \tilde{u}(x)$.

Останній інтеграл називається *інтегралом Пуассона для півплощини*.

Розділ III. Основні методи розв'язку рівнянь математичної фізики в нескінченних областях

§1. Метод Даламбера

1.1. Задача про вільні коливання нескінченної струни

Розглянемо рівняння коливань нескінченної струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ або } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0$$

за умови, що в початковий момент часу всі точки струни одержали деяке відхилення $f(x)$ й початкову швидкість $\psi(x)$, тобто початкові умови мають вигляд

$$u(x,0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x).$$

Задання граничних умов у цьому випадку не має сенсу, тому що струна нескінченна.

Знайдемо характеристики, із цією метою складемо характеристичне рівняння

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Звідси $dx = \pm a dt$

1) $x=at+C_1$; 2) $x=-at+C_2$.

Зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \xi = x - at; \\ \eta = x + at. \end{cases}$$

Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Знайдемо його розв'язок

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=G'(\eta).$$

Тоді $u=G(\eta)+H(\xi)$. Розв’язок містить дві довільні функції. Повернемося до старих змінних $u=G(x+at)+H(x-at)$ – загальний розв’язок.

Для визначення довільних функцій G, H скористаємося початковими умовами:

1) $u\big|_{t=0}=f(x)$, тобто $G(x)+H(x)=f(x)$.

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$; $-aH'(x)+aG'(x)=\psi(x)$.

Проінтегруємо останнє рівняння. Тоді одержимо

$$-aH(x)+aG(x)=\int_0^x \psi(z)dz+Ca$$

або, розділивши на a, одержуємо два рівняння

$$H(x)+G(x)=f(x),$$

$$-H(x)+G(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz+C.$$

Звідси

$$2G(x)=f(x)+\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz+C,$$

$$2H(x)=f(x)-\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz-C.$$

Знайдемо $G(x+at)$ та $H(x-at)$.

$$G(x+at)=\frac{f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)dz+\frac{C}{2},$$

$$H(x-at)=\frac{f(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz-\frac{C}{2}.$$

Тоді шуканий розв’язок запишеться у вигляді

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \qquad (3.1)$$

Отримана формула називається ***формулою Даламбера***.

Проаналізуємо отриманий розв’язок. Загальний розв’язок є сумою двох розв’язків, а саме $u_1=H(x-at)$ й $u_2=G(x+at)$. Розглянемо перший розв'язок $u_1 = H(x - at)$. Якщо зафіксувати точку спостереження x, то зі зміною часу відхилення в цій точці буде змінюватися, але, якщо точка спостереження рухається так, що $x - at = \text{const}$, то в цій точці, що рухається, стан буде стаціонарним. Для того щоб величина $x - at$ залишалася постійною потрібно, щоб точка x рухалася вправо зі швидкістю a. Оскільки для спостерігача, що рухається вправо зі швидкістю a, процес, описуваний функцією u_1, є стаціонарним, то цей процес можна розглядати як поширення хвилі вправо зі швидкістю a. Аналогічно розв'язок u_2 являє хвилю, що поширюється зі швидкістю a вліво. Оскільки загальний розв'язок є сумою u_1 та u_2, то одержуємо накладення двох таких хвиль, що йдуть вправо (пряма хвиля) і вліво (обернена хвиля).

Розглянемо окремі випадки початкового стану струни.

1. Поширення хвиль відхилення

Нехай початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, і струна коливається у результаті початкового відхилення. У цьому випадку у формулі Даламбера треба покласти $\psi(x) = 0$, і тоді одержимо, що

$$u(x,t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2}.$$

Припустимо, що в початковий момент функція $f(x)$ відмінна від нуля тільки на деякому інтервалі $(-l, l)$ [1].

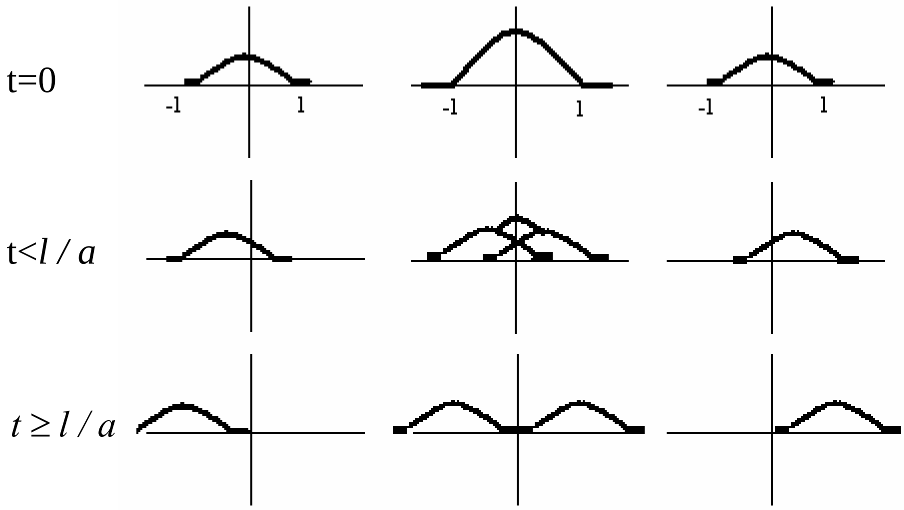


Рис. 3.1. Поширення хвиль

Тоді $f(x)=0$ при $x<-l$ та при $x>l$. Для простоти дослідження будемо вважати, що функція $f(x)$ є парною. Легко чисто геометрично простежити за зміною форми струни в будь-який момент часу. Відповідно до викладеного, коливання $u(x,t)$ складається із двох хвиль: прямої та оберненої.

На рис. 3.1 у лівому стовпці зображена в різні моменти часу хвиля $\frac{1}{2}f(x+at)$, що біжить уліво, а в правому стовпці – у ті ж моменти часу хвиля $\frac{1}{2}f(x-at)$, що біжить вправо. У середньому стовпці показана сума цих хвиль, тобто результуюче відхилення точок струни. У початковий момент часу $t=0$ профілі обох хвиль збігаються.

До того часу, поки $t<\frac{l}{a}$, є ділянка, де діють обидві хвилі; починаючи з моменту $t=\frac{l}{a}$, ці хвилі вже розходяться в різні сторони.

З викладеного можна зробити висновок про характер коливання точки струни з фіксованою абсцисою x. Якщо $x>l$, то в початковий момент точка струни лежить на осі абсцис, вона не бере участі у початковому відхиленні. Хвиля, що біжить вправо, дійде до цієї точки в момент часу $t_1=\frac{x-l}{a}$, і з цього моменту точка струни почне коливатися. Як тільки хвиля пройде через розглянуту точку, тобто, починаючи з моменту $t_2=\frac{x+l}{a}$, ця точка знову буде перебувати в спокої. У момент часу t_1 до точки x доходить передній фронт прямої хвилі, а в момент t_2 – її задній фронт. Таким чином, розглянута точка струни бере участь у коливальному процесі при $\frac{x-l}{a}<t<\frac{x+l}{a}$. Цю нерівність зручніше записати так: $-l<at-x<l$.

Якщо $0<x<l$, то через точку проходять як пряма, так і обернена хвилі. Задній фронт оберненої хвилі пройде через точку в момент $t_1=\frac{l-x}{a}$,

а задній фронт прямої хвилі – у момент $t_2 = \dfrac{l+x}{a}$. При $t > t_2$ точка струни буде перебувати в спокої, тобто лежати на осі Ox.

Аналогічно, якщо $x < -l$, то точка бере участь у коливальному процесі при $-l < x + at < l$, якщо ж $-l < x < 0$, то коливання закінчаться, коли через точку пройде задній фронт оберненої хвилі, тобто при $t = \dfrac{l-x}{a}$.

Дуже наочне зображення описаного процесу можна одержати за допомогою фазової площини xOt. Кожна точка $M(x,t)$ фазової площини при $t \ge 0$ відповідає точці струни з абсцисою x в момент часу t. Зокрема, точки осі абсцис $t = 0$ відповідають точкам струни в початковий момент часу. Точкам, що лежать на прямій $t = t_0$, відповідає положення точок струни у фіксований момент часу t_0, а точкам, що лежать на прямій $x = x_0$ – положення фіксованої точки x_0 в різні моменти часу. Очевидно, що через точку x в момент часу t проходить пряма хвиля, якщо $-l < at - x < l$, та обернена хвиля, якщо $-l < x + at < l$. Побудуємо на фазовій площині прямі $x - at = \pm l$, $x + at = \pm l$. Ці прямі називаються характеристиками.

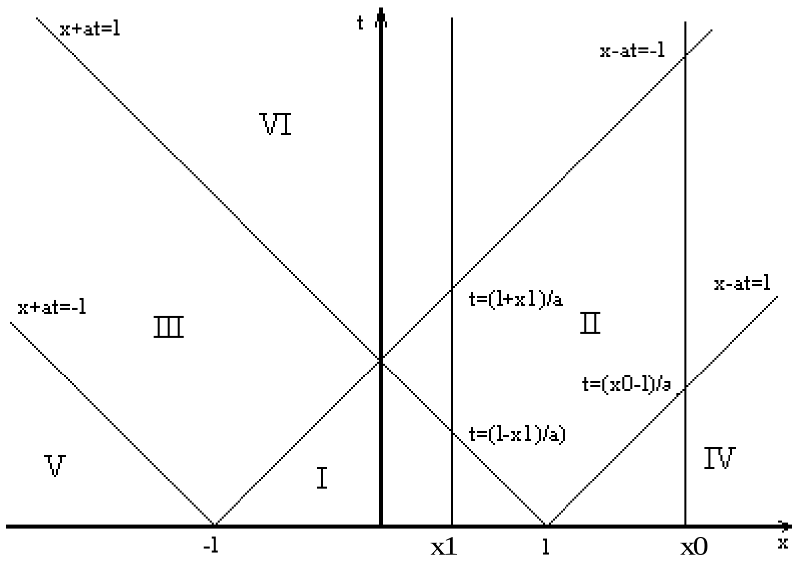


Рис. 3.2. Фазова площина

При цьому півплощина $t \ge 0$ розбивається на шість частин. Коливання відбувається тільки в тих точках й у ті моменти часу, які відповідають точкам зон I, II та III. У зоні II діє тільки пряма хвиля, у зоні III – тільки обернена, а в зоні I діють обидві хвилі. Точкам побудованих прямих відповідають положення переднього й заднього фронтів обох хвиль. У точках, що відповідають зонам IV й V, коливання ще не відбувається, тому що до них ще не дійшов передній фронт прямої (зона IV) та оберненої (зона V) хвиль, а в точках, що відповідають зоні VI, коливання вже не відбуваються, оскільки через них задні фронти обох хвиль уже пройшли (обидва задні фронти проходять тільки через точки фазової площини, для яких $-l<x<l$; через точки, для яких $x>l$ або $x<-l$, проходить задній фронт тільки однієї із хвиль). Зафіксувавши яку-небудь точку x_0 струни й піднімаючись вверх по прямій $x=x_0$, легко записати вираз для функції $u(x_0,t)$ в будь-який момент часу t.

Нехай $x_0>l$. Тоді при $0<t<\dfrac{x_0-l}{a}$ точка фазової площини перебуває в зоні IV й $u(x_0,t)=0$. Якщо $\dfrac{x_0-l}{a}<t<\dfrac{x_0+l}{a}$, то точка попадає в зону II – зону дії прямої хвилі і $u(x_0,t)=\dfrac{f(x_0-at)}{2}$. Другий доданок $\dfrac{1}{2}f(x_0+at)$ дорівнює нулю, оскільки аргумент $x_0+at>l$, а $f(x)=0$ при $x>l$. Нарешті, при $t>\dfrac{x_0+l}{a}$ точка попадає в зону VI і знову $u(x_0,t)=0$. Отже,

$$u(x_0,t)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } 0\le t\le \dfrac{x_0-l}{a};\\ \dfrac{1}{2}f(x_0-at), & \text{якщо } \dfrac{x_0-l}{a}<t<\dfrac{l+x_0}{a};\\ 0, & \text{якщо } t\ge \dfrac{l+x_0}{a}.\end{cases}$$

Нехай $0<x_1<l$. Функція $u(x_1,t)$ буде набувати таких значень:

$$u(x_1,t)=\begin{cases} \dfrac{f(x_1-at)+f(x_1+at)}{2}, & \text{якщо } 0\le t\le \dfrac{l-x_1}{a};\\ \dfrac{1}{2}f(x_1-at), & \text{якщо } \dfrac{l-x_1}{a}<t<\dfrac{l+x_1}{a};\\ 0, & \text{якщо } t\ge \dfrac{l+x_1}{a}.\end{cases}$$

Ясно, що при переході від одного інтервалу зміни t до іншого функція $u(x,t)$ залишається неперервною.

Так само можна одержати вираз для функції $u(x,t)$ при фіксованих значеннях t. При $t < \frac{l}{a}$ точка фазової площини при русі зліва направо перетне послідовно зони V, III, I, II, IV, а при $t > \frac{l}{a}$ замість першої зони вона пройде шосту. У першому випадку відносно $t_0 < \frac{l}{a}$ одержимо

$$u(x,t_0) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x \le -at_0 - l; \\ \frac{1}{2} f(x+at_0), & \text{якщо } -l - at_0 < x \le at_0 - l; \\ \frac{f(x+at_0) + f(x-at_0)}{2}, & \text{якщо } at_0 - l < x \le l - at_0; \\ \frac{1}{2} f(x-at_0), & \text{якщо } l - at_0 < x \le l + at_0; \\ 0, & \text{якщо } l + at_0 < x \le \infty. \end{cases}$$

Описаний процес відображає поширення одиночної хвилі відхилення; після проходження такої хвилі точки струни повертаються у своє вихідне положення на осі абсцис.

2. Поширення хвиль імпульсу

Нехай тепер дорівнюють нулю початкові відхилення точок струни, і струна коливається в результаті того, що в початковий момент її точки одержали деякі початкові швидкості [1]. У цьому випадку говорять, що по струні поширюються хвилі імпульсу.

Покладемо у формулі Даламбера (3.1) $f(x) = 0$ й одержимо

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz = \Phi(x+at) - \Phi(x-at), \tag{3.2}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_b^x \psi(z)dz$ – одна з первісних $\psi(x)$.

І тут розв’язок $u(x,t)$ складається з двох хвиль: прямої хвилі $u_1 = -\Phi(x-at)$ та оберненої хвилі $u_2 = \Phi(x+at)$. Форма першої з них у початковий момент $t = 0$ має рівняння $u_1 = -\Phi(x)$, а другої – $u_2 = \Phi(x)$. У результаті, як і слід було сподіватися, одержимо

$$u(x,0)=0\,.$$

Щоб наочно уявити собі картину процесу, будемо для простоти вважати, що функція $\psi(x)$ дорівнює нулю всюди поза інтервалом $(-l,l)$, а в точках цього інтервалу набуває постійного значення: $\psi(x)=V_0$. Іншими словами, точкам струни, що лежать в інтервалі $(-l,l)$, додана постійна початкова швидкість V_0, спрямована вверх. При цьому функція $\psi(x)$ в точках $x=\pm l$ має розриви.

Функція $\Phi(x)$ буде набувати таких значень:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x V_0dz=\dfrac{V_0x}{2a}, & \text{якщо} \quad -l\le x\le l;\\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^l V_0dz=\dfrac{V_0l}{2a}=\dfrac{h}{2}, & \text{якщо} \quad x>l;\\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{-l} V_0dz=-\dfrac{V_0l}{2a}=-\dfrac{h}{2}, & \text{якщо} \quad x<-l,\end{cases}$$

де $h=\dfrac{V_0l}{a}$. Функція $\Phi(x)$ неперервна й непарна (рис. 3.3).

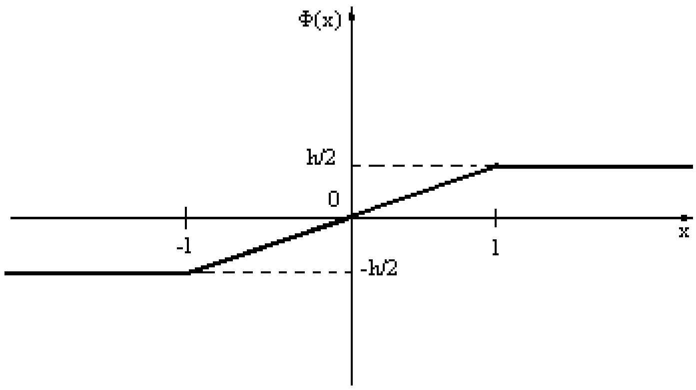


Рис. 3.3. Графік функції $\Phi(x)$

Перейдемо тепер до геометричної побудови розв'язку $u(x,t)$. У лівому стовпці (рис. 3.4) побудуємо графіки оберненої хвилі $u_2=\Phi(x+at)$ в різні моменти часу, а в правому стовпці – графіки прямої хвилі

$u_1 = -\Phi(x - at)$ в ті ж моменти часу (завдяки знаку мінус графіки прямої та оберненої хвиль виявляться симетричними відносно OY). У середньому стовпці показано результуюче відхилення точок струни.

Зауважимо, що характер коливань істотно відрізняється від поширення хвиль відхилення. Почнемо для визначеності із точки струни, що перебуває в момент $t = 0$ на початку координат. Зі збільшенням t ця точка буде підніматися вверх. При $t = \frac{l}{a}$ одержимо

$$u\left(0, \frac{l}{a}\right) = \frac{1}{2a}\int_{-l}^{l} V_0 dx = \frac{V_0 l}{a} = h.$$

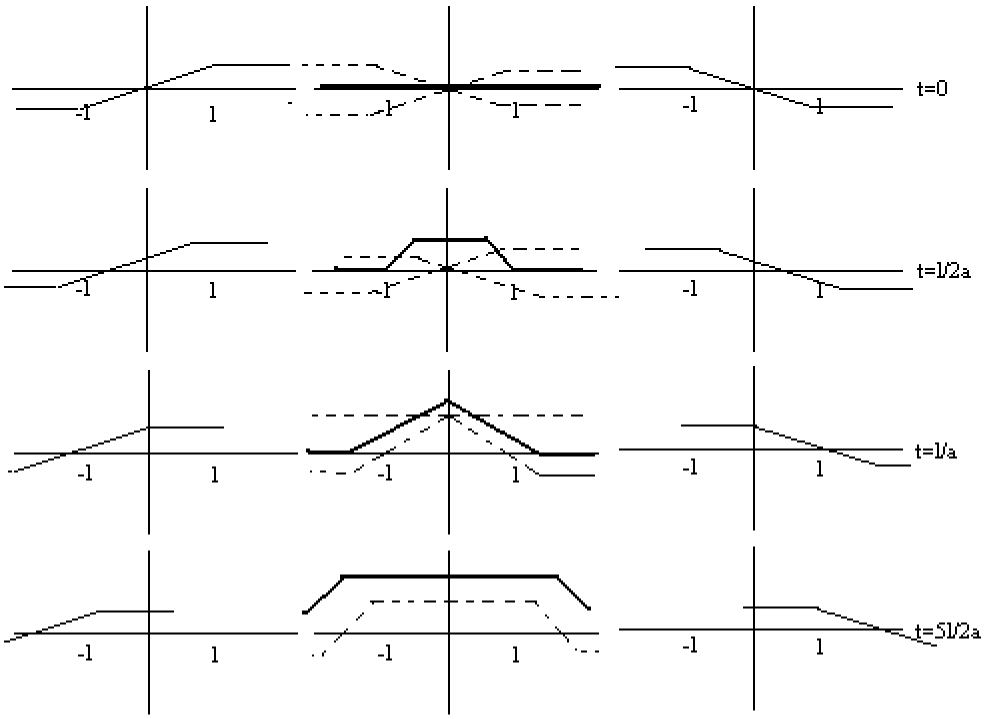


Рис. 3.4. Поширення хвиль

Якщо тепер брати $t > \frac{l}{a}$, то однаково u буде дорівнювати h, тому що поза інтервалом $(-l, l)$ функція $\psi(x)$ дорівнює нулю. Тому на рисунках, що відповідають значенням $t > \frac{l}{a}$, відхилення $u(0,t)$ залишається постійним. Розглянемо ще, наприклад, точку $x_1 = \frac{l}{2}$. Спочатку, поки $t < \frac{l}{2a}$, вона буде підніматися вверх під дією обох хвиль: прямої та оберненої. При $t > \frac{l}{2a}$ відхилення оберненої хвилі в цій точці набуде постійного значення $\frac{h}{2}$, і точка буде продовжувати підніматися вже тільки під дією прямої хвилі. Нарешті, при $t > \frac{3l}{2a}$ відхилення обох хвиль досягнуть величини $\frac{h}{2}$, і зсув $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$ стане рівним h.

Якщо взяти точку $x_2 > l$, то відхилення оберненої хвилі в цій точці постійне, дорівнює $\frac{h}{2}$; відхилення прямої хвилі спочатку дорівнює $-\frac{h}{2}$, і точка почне підніматися вверх тільки тоді, коли до неї дійде похила ділянка прямої хвилі, тобто при $t = \frac{x-l}{a}$. Точка здійметься на максимальну висоту h, коли через неї почне знову проходити горизонтальна ділянка прямої хвилі, тобто при $t > \frac{x+l}{a}$.

Таким чином, остаточно графіки функції $u(x,t)$ при різних значеннях t будуть виглядати так: при $t = 0$ – пряма $u = 0$; при $0 < t < \frac{l}{a}$ – профілі у формі трапецій, у яких верхня підстава піднімається й зменшується в розмірах; при $t = \frac{l}{a}$ – трикутний профіль і при $t > \frac{l}{a}$ – профілі, що розширюються та мають вигляд трапеції. Із часом кожна точка струни під впливом початкових швидкостей, заданих на ділянці струни $(-l, l)$, здійметься на висоту h й далі буде увесь час залишатися на цій висоті (залишковий зсув).

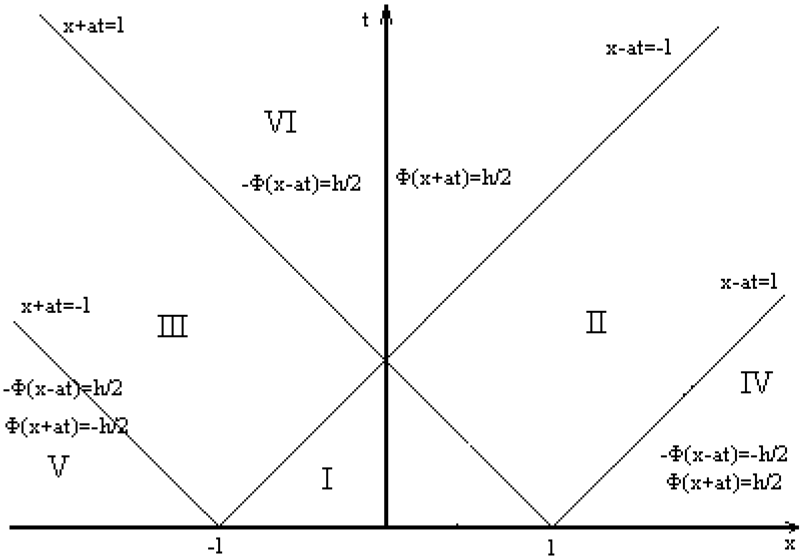


Рис. 3.5. Фазова площина

І в цьому випадку хід коливань зображається за допомогою фазової площини (рис. 3.3). Користуючись виразом для функції $\Phi(x)$, легко одержимо, що в зонах II, IV, VI відхилення оберненої хвилі $\Phi(x+at)$ постійне, дорівнює $\frac{h}{2}$, а в точках зон III, V, VI таке ж відхилення має пряма хвиля: $-\Phi(x-at)$. Тому зона VI представляє зону залишкового зсуву; у точках, які їй відповідають, функція

$$u(x,t)=\Phi(x+at)-\Phi(x-at)=h.$$

У зоні IV пряма хвиля має відхилення $-\frac{h}{2}$; таке ж відхилення в зоні V має обернена хвиля. Тому обидві ці зони є зонами спокою точок струни. Коли точка фазової площини переходить із зони IV до зони VI, то за час проходження нею другої зони відхилення прямої хвилі змінюється від $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$. Користуючись цими міркуваннями, запишемо, наприклад, вираз для функції $u(x_0,t)$, якщо $x_0>l$.

$$u(x_0,t)=\begin{cases} 0, & 0<t<\frac{x_0-l}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1-\frac{x_0-at}{l}\right), & \frac{x_0-l}{a}\le t\le\frac{x_0+l}{a}, \\ h, & t>\frac{x_0+l}{a}. \end{cases}$$

Приклад 1

Записати розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в області $-\infty < x < \infty, t > 0$, якщо

$$u(x,0) = e^{-3x^2};$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x + 2\sin 3x.$$

Розв'язання. Користуючись формулою Даламбера, шуканий розв'язок можна записати у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x)dx.$$

У цьому випадку $a = 8$, функції

$$f(x) = e^{-3x^2},$$

$$\psi(x) = \sin x + 2\sin 3x.$$

Тому подамо $u(x,t)$ таким чином:

$$u(x,t) = \frac{e^{-3(x+8t)^2} + e^{-3(x-8t)^2}}{2} + \frac{1}{16}\int_{x-8t}^{x+8t} (\sin z + 2\sin 3z)dz =$$

$$= \frac{e^{-3(x^2+16xt+64t^2)} + e^{-3(x^2-16xt+64t^2)}}{2} + \frac{1}{16}\left(-\cos z - \frac{2}{3}\cos 3z\right)\Bigg|_{x-8t}^{x+8t} =$$

$$= e^{-3(x^2+64t^2)} ch 48xt - \frac{1}{16}(\cos(x+8t) + \frac{2}{3}\cos 3(x+8t) - \cos(x-8t) -$$

$$-\frac{2}{3}\cos 3(x-8t)) = e^{-3(x^2+64t^2)} ch 48xt - \frac{1}{16}\left(-2\sin 8t \cdot \sin x - \frac{4}{3}\sin 24t \cdot \sin 3x\right) =$$

$$= e^{-3(x^2+64t^2)} ch 48xt + \frac{1}{8}\left(\sin 8t \cdot \sin x + \frac{2}{3}\sin 24t \cdot \sin 3x\right).$$

Приклад 2

Нехай початкове відхилення точок струни має вигляд

$$u(x,0)=\begin{cases}0, \ -\infty < x < x_M;\\ dx^2+bx+c, \ x_M \le x \le x_P;\\ 0, \quad x_P < x < \infty,\end{cases}$$

де $y = dx^2 + bx + c$ – парабола, що проходить через точки $M(1,0), N(3,-4)$, $P(4,0)$. Початкові швидкості дорівнюють нулю.

I. Накреслити положення точок струни в різні моменти часу.

II. Записати закон коливання точок А(-12), В(3), С(10).

III. Записати рівняння профілю струни, коли хвилі ще не розійшлися і коли хвилі вже розійшлися.

Розв'язання

I. Визначимо вид функції $u(x,t)$ в початковий момент. Оскільки

$$u(x,0)=dx^2+bx+c$$

і точки $M(1,0), N(3,-4)$ й $P(4,0)$ належать параболі $y = dx^2 + bx + c$, то їхні координати задовольняють це рівняння, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases}d+b+c=0;\\ 9d+3b+c=-4;\\ 16d+4b+c=0.\end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, визначимо коефіцієнти d,b та c. У даному випадку $d=2, b=-10, c=8$. Таким чином, початкове відхилення задається формулою

$$u(x,t)=\begin{cases}0, \ x<1,\\ 2x^2-10x+8, \ 1\le x\le 4,\\ 0, \ x>4.\end{cases}$$

Накреслити положення точок струни в різні моменти часу.

Визначимо значення $t = t_k$, при якому хвилі починають розбігатися. Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x-at=1\\ x+at=4\end{cases} \Rightarrow 2at=3 \ \Rightarrow t_k=\frac{3}{2a}.$$

Зафіксуємо різні значення t, а саме

$t_1 = 0$ – початковий момент часу;

$t_2 = \dfrac{3}{4a} < t_k$ – хвилі ще не розійшлися;

$$t_3 = \frac{3}{2a} = t_k \text{ – початок розбіжності хвиль;}$$

$$t_4 = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a} > t_k \text{ – хвилі вже розійшлися.}$$

Зобразимо графічно профілі струни в ці моменти часу (рис. 3.6).

$\frac{1}{2} f\left(x+at\right)$ $\qquad$ $\frac{f\left(x+at\right)+f\left(x-at\right)}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} f\left(x-at\right)$

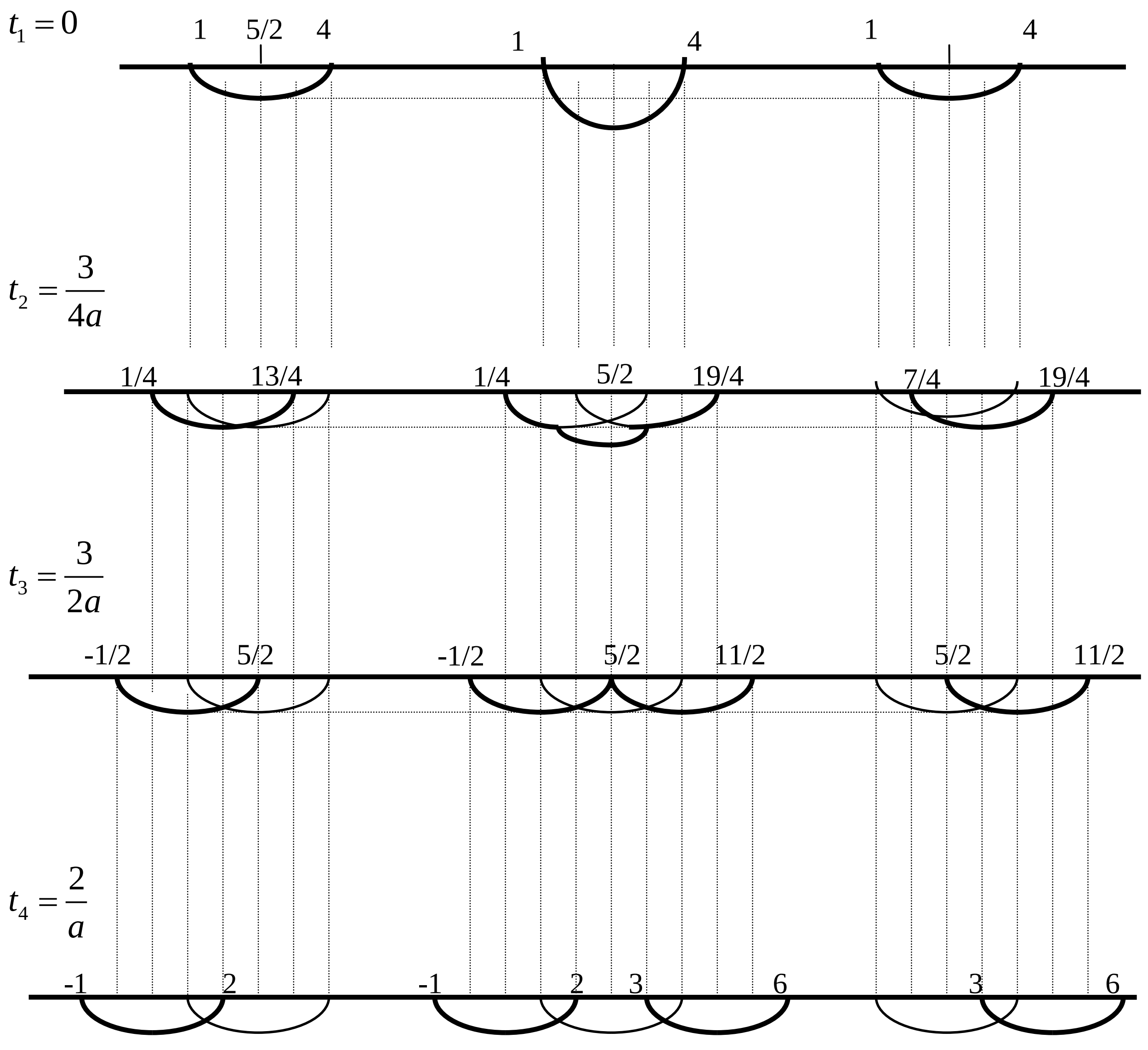


Рис. 3.6

II. Побудуємо фазову площину $x0t$ і розіб'ємо її на окремі зони за допомогою прямих – характеристик. Якщо функція $u\left(x,t\right)$ є симетричною відносно x і початкове відхилення відмінне від нуля тільки для точок $|x| \le l$, то рівняння характеристик має вигляд

$$x + at = \pm l$$

$$x - at = \pm l.$$

У такому випадку ці характеристики мають вигляд

$$x \pm at = x_P \qquad \Rightarrow x + at = 4, \quad (1)$$

$$x \pm at = x_M \qquad x + at = 1, \quad (2)$$

$$x - at = 4, \quad (3)$$

$$x - at = 1. \quad (4)$$

Побудовані характеристики розіб'ють фазову площину на 6 зон (див. рис. 3.7).

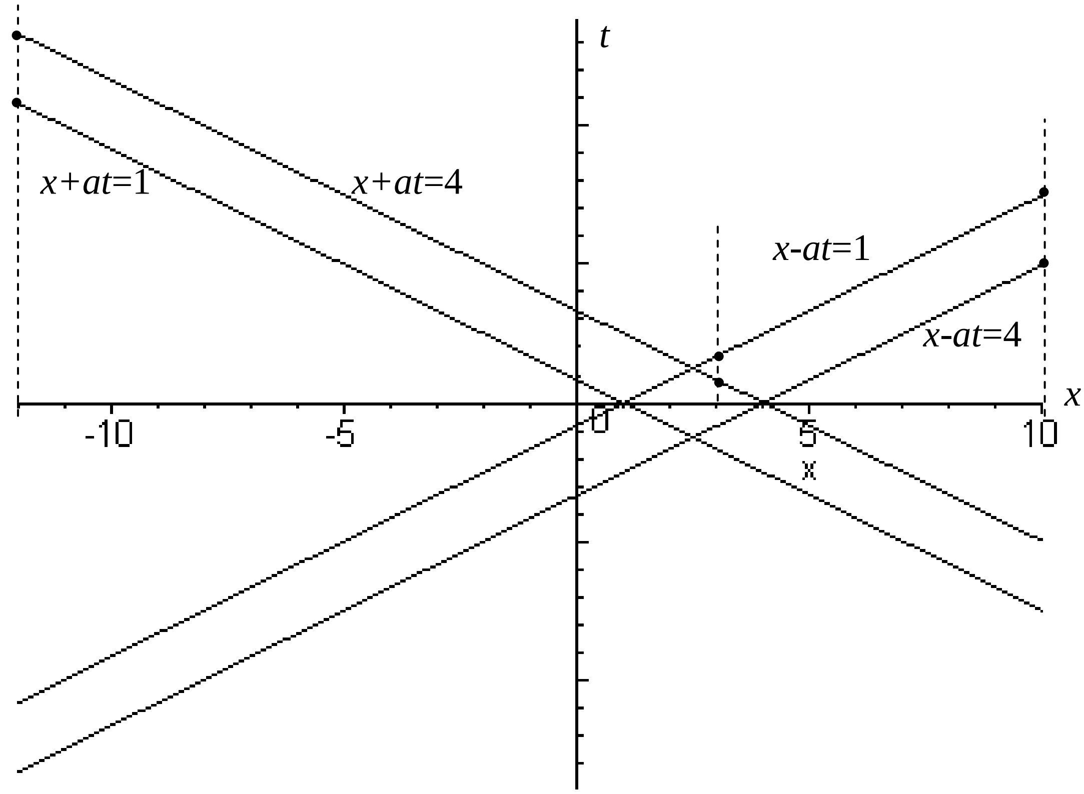


Рис. 3.7

Запишемо закон коливання заданих точок.

1. $x_A = -12$. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі $0t$, і визначимо ординати точок перетину цієї прямої з характеристиками (1) і (2):

$$\begin{cases} x = -12 \\ x + at = 1 \end{cases} \Rightarrow at = 13; \quad t = \frac{13}{a};$$

$$\begin{cases} x = -12 \\ x + at = 4 \end{cases} \Rightarrow at = 16; \quad t = \frac{16}{a}.$$

Враховуючи поводження струни в кожній зоні, можемо записати закон коливання точки A:

$$u(-12,t)=\begin{cases}0,\ 0<t<\dfrac{13}{a}\\ \dfrac{f(x+at)}{2},\ \dfrac{13}{a}\le t<\dfrac{16}{a}\\ 0,\ t\ge\dfrac{16}{a}\end{cases}$$

або з огляду на те, що

$$f(x+at)=2(x+at)^2-10(x+at)+8=\|x=-12\|=2(-12+at)^2-$$

$$-10(-12+at)+8=2\left(144-24at+a^2t^2\right)+120-10at+8=2a^2t^2-58at+416,$$

остаточно одержимо

$$u(-12,t)=\begin{cases}0, & 0<t<\dfrac{13}{a}\\ a^2t^2-29at+208, & \dfrac{13}{a}\le t<\dfrac{16}{a}.\\ 0, & t\ge\dfrac{16}{a}\end{cases}$$

2. Аналогічно визначається закон коливання точки B.
Проведемо пряму через цю точку паралельно осі Ot і знайдемо точки її перетину з характеристиками (1) і (4), тобто

$$\begin{cases}x=3\\ x+at=4\end{cases}\Rightarrow 3+at=4;\ t=\frac{1}{a};$$

$$\begin{cases}x=3\\ x-at=1\end{cases}\Rightarrow 3-at=1;\ t=\frac{2}{a}.$$

Очевидно, що закон коливання точки B визначиться таким чином:

$$u(3,t)=\begin{cases}\dfrac{f(x+at)+f(x-at)}{2},\ 0<t<\dfrac{1}{a};\\ \dfrac{f(x-at)}{2},\ \dfrac{1}{a}\le t<\dfrac{2}{a};\\ 0,\ t\ge\dfrac{2}{a}.\end{cases}$$

Визначимо значення $f(x+at)$ й $f(x-at)$ у цьому випадку. Оскільки $f(x)=2x^2-10x+8$, то

$$f(x+at)=2(x+at)^2-10(x+at)+8=(x=3(=2(3+at)^2-10(3+at)+8=$$
$$=2\left(9+6at+a^2t^2\right)-30-10at+8=2a^2t^2+2at-4.$$
$$f(x-at)(_{x=3}=2(3-at)^2-10(3-at)+8=2\left(9-6at+a^2t^2\right)-30+10at+8=$$
$$=2a^2t^2-2at-4.$$
$$\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}=\frac{2a^2t^2+2at-4+2a^2t^2-2at-4}{2}=2a^2t^2-4=$$
$$=2\left(a^2t^2-2\right).$$
$$\frac{f(x-at)}{2}=a^2t^2-at-2.$$

Остаточно для точки B одержимо

$$u(3,t)=\begin{cases}2\left(a^2t^2-2\right),\ 0<t<\dfrac{1}{a};\\ a^2t^2-at-2,\ \dfrac{1}{a}\le t<\dfrac{2}{a};\\ 0,\ t\ge\dfrac{2}{a}.\end{cases}$$

3. Аналогічно можна одержати закон коливань точки $C(10)$.

$$u(10,t)=\begin{cases}0,\ 0<t<\dfrac{6}{a};\\ a^2t^2-15at+54,\quad \dfrac{6}{a}\le t<\dfrac{9}{a};\\ 0,\ t\ge\dfrac{9}{a}.\end{cases}$$

III. Для одержання профілю струни в моменти $t\in(0;t_1)$ (коли профілі ще не розійшлися) і $t\in(t_1;\infty)$ (коли профілі вже розійшлися) необхідно:

1) визначити значення t_1 із системи рівнянь, коли хвилі починають розбігатися

$$\begin{cases}x+at=4\\ x-at=1\end{cases}\Rightarrow 2at=3\ \Rightarrow t_1=\frac{3}{2a};$$

2) для визначення профілю струни при $0<t<t_1$ проведемо пряму $t=C$, де C – будь-яка константа із проміжку $\left(0,t_1\right)$, й визначимо точки перетину цієї прямої з характеристиками

$$\begin{cases} t=C \\ x+at=1 \end{cases} \Rightarrow x=1-aC, \qquad \begin{cases} t=C \\ x-at=1 \end{cases} \Rightarrow x=1+aC$$

$$\begin{cases} t=C \\ x+at=4 \end{cases} \Rightarrow x=4-aC, \qquad \begin{cases} t=C \\ x-at=4 \end{cases} \Rightarrow x=4+aC.$$

Тоді профіль струни буде мати вигляд

$$u\left(x,C\right)=\begin{cases} 0,\ -\infty<x<1-aC; \\ \dfrac{f\left(x+aC\right)}{2},\ 1-aC\le x<1+aC; \\ \dfrac{f\left(x+aC\right)+f\left(x-aC\right)}{2},\ 1+aC\le x<4-aC; \\ \dfrac{f\left(x-aC\right)}{2},\ 4-aC\le x<4+aC; \\ 0,\ x\ge 4+aC. \end{cases}$$

Вирази функцій $f\left(x+at\right)$ і $f\left(x-at\right)$ у цьому випадку запишуться таким чином:

$$f\left(x+aC\right)=2\left(x+aC\right)^2-10\left(x+aC\right)+8=2\left[\left(x+aC\right)^2-5\left(x+aC\right)+4\right],$$

$$f\left(x-aC\right)=2\left[\left(x-aC\right)^2-5\left(x-aC\right)+4\right].$$

Аналогічно можна одержати закон коливання точок струни $\forall t>t_1$.

Виконаємо таке саме завдання за допомогою системи Maple.

І. Знайдемо рівняння параболи, яка проходить через три точки M(3;0), P(5;2), N(7;0). Побудуємо її графік.

```
> restart: fi1:=(b*x^2+c*x+d);
ux:=unapply(fi1,x);
xm:=3:xp:=5:yp:=2:xn:=7:
solve({ux(xm)=0, ux(xp)=yp,ux(xn)=0}, {b,c,d});
```

$$fi1 := b\,x^2+c\,x+d$$

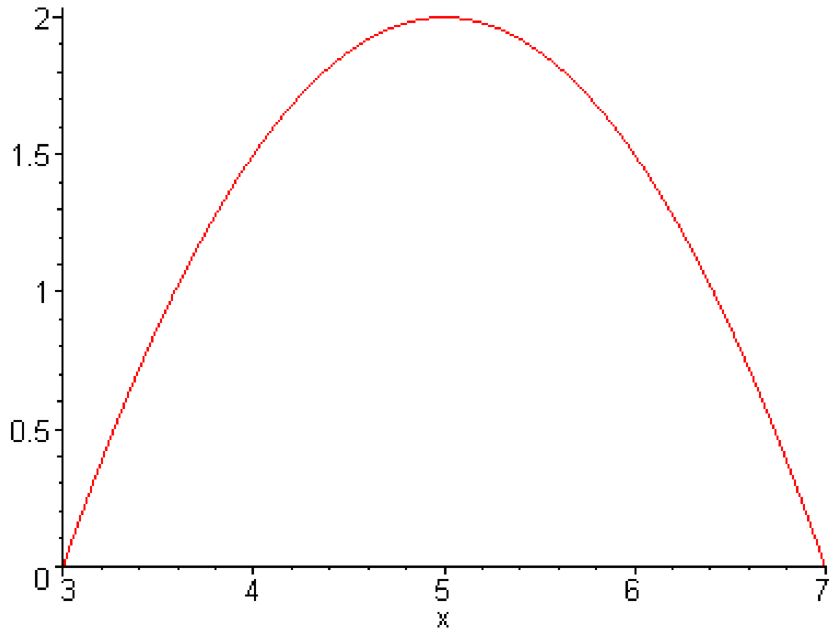
$$ux := x\rightarrow b\,x^2+c\,x+d$$

$$\{d=\frac{-21}{2}, c=5, b=\frac{-1}{2}\}$$

```
> subs(%, fi1);ux:=unapply(%,x);
```

$$-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{21}{2} \qquad ux := x \to -\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{21}{2}$$

```
> plot(%%,x=xm..xn);
```

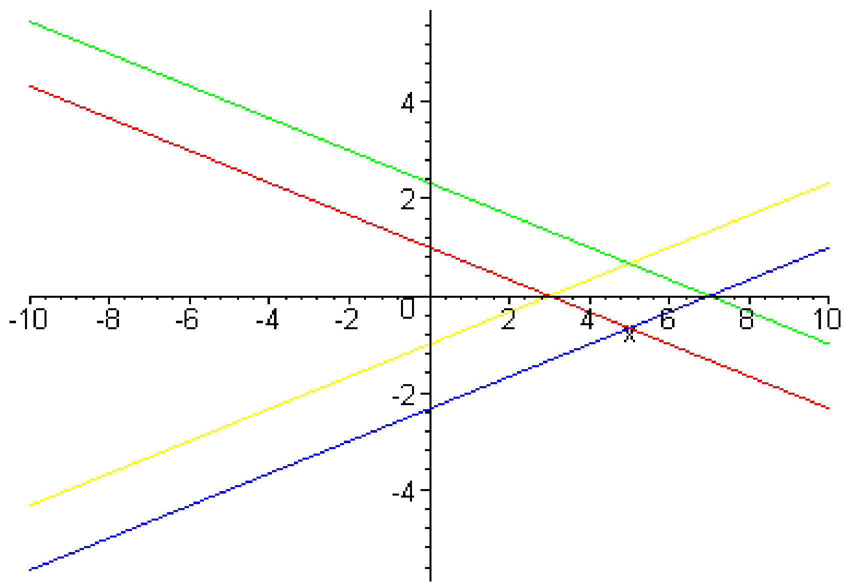


II. Знайдемо t_1, побудуємо фазову площину

```
> a:=3; solve(xn-a*t=xm+a*t);
plot([(xm-x)/a,(xn-x)/a,(-xm+x)/a,(-xn+x)/a],x=-
10..10);
```

$$a := 3$$

$$2/3$$



Будуємо графік функції u(x0,t), де $x0 \in (3;5)$

```
> x0:=4;t1:=(x0-xm)/a;t2:=(xn-x0)/a;
f1:=expand((ux(x0+a*t)+ux(x0-a*t))/2):
ff1:=unapply(f1,t);
g1:=expand((ux(x0+a*t))/2):gg1:=unapply(g1,t);
w1:=proc(t) if t<t1 then ff1(t) else gg1(t) fi end;
plot(w1, 0..t2);
```

$$x0 := 4$$

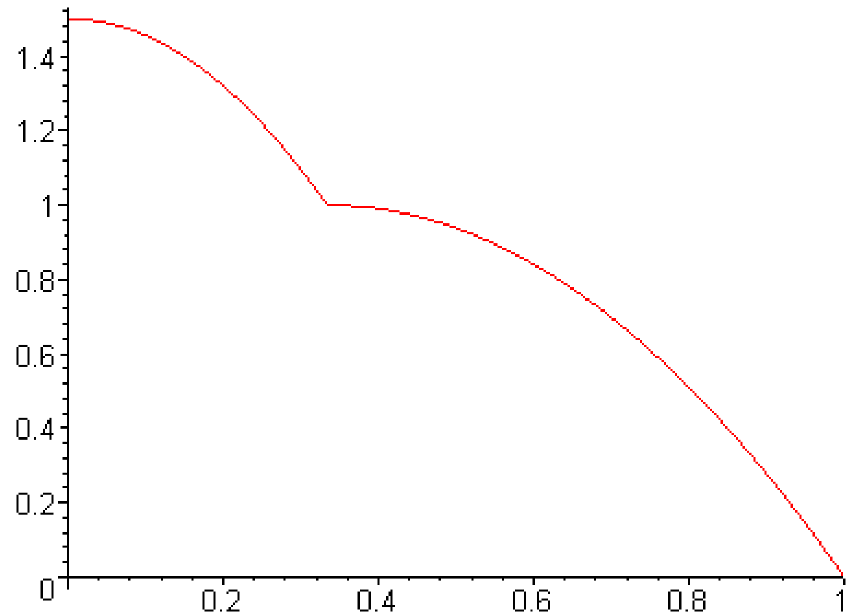
$$t1 := \frac{1}{3}$$

$$t2 := 1$$

$$ff1 := t \to \frac{3}{2} - \frac{9}{2}t^2$$

$$gg1 := t \to \frac{3}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}t^2$$

$$w1 := \textbf{proc}(t)\ \textbf{if}\ t < t1\ \textbf{then}\ \mathrm{ff1}(t)\ \textbf{else}\ \mathrm{gg1}(t)\ \textbf{end if}\ \textbf{end proc}$$



III. Будуємо графік функції u(x,t0), де $t0<t_1$

```
> t0:=1/3;x1:=(xm-a*t0);
x2:=(xm+a*t0);x3:=(xn-a*t0);x4:=(xn+a*t0);
g1:=expand((ux(x+a*t0))/2):gg1:=unapply(g1,t);
f1:=expand((ux(x+a*t0)+ux(x-a*t0))/2):
```

```
ff1:=unapply(f1,t);
h1:=expand((ux(x-a*t0))/2):hh1:=unapply(h1,t);
convert(If(x<x2,g1,x<x3,f1,x<x4,h1),piecewise);
plot(%, x=x1..x4);
```

$$t0 := \frac{1}{3}$$

$$x1 := 2$$

$$x2 := 4$$

$$x3 := 6$$

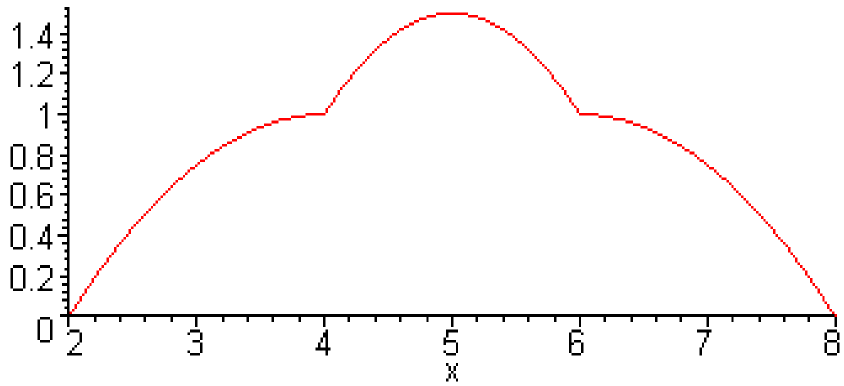
$$x4 := 8$$

$$gg1 := t \to -\frac{1}{4}x^2 + 2\,x - 3$$

$$ff1 := t \to -\frac{1}{2}x^2 + 5\,x - 11$$

$$hh1 := t \to -\frac{1}{4}x^2 + 3\,x - 8$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + 2\,x - 3 & x < 4 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 5\,x - 11 & x < 6 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 3\,x - 8 & x < 8 \end{cases}$$



Лабораторна робота 9

Завдання 1

Записати розв’язок таких задач в області $-\infty < x < \infty,\ t > 0$.

9.1.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \sin x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = xe^{-3x^2}$.

9.1.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \cos x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 2x\sin x$.

9.1.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \dfrac{1}{x^2+3},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x$.

9.1.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \dfrac{1}{x^2+5},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x$.

9.1.5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = e^{-2x^2},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sqrt{x+1}$.

9.1.6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = x^3,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x + 1.$

9.1.7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = e^{-3x^2},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x + 2\cos^3 x$.

9.1.8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \cos^2 x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sqrt{2x+1}$.

9.1.9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \sin^2 x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3xe^{-x^2}$.

9.1.10. $\int \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = 3 + \cos(x),\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x^2 e^{-x^3}$.

9.1.11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = 4\sqrt{x},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin^2 x$.

9.1.12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = 1 + \sin 2x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos^2 x$.

9.1.13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = 1 + \cos 2x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin^2 x$.

9.1.14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = 1 + \sin 2x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sqrt{5x-2}$.

9.1.15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = \sqrt{1+10x},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin 2x + \cos^2 x$.

9.1.16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = e^{-4x} + 1,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos^2 x$.

9.1.17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=1-\sin 4x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\cos^2 x.$

9.1.18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=(1+x^2)\sin 2x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sin 2x\cos^2 x.$

9.1.19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=(1+5x^4)e^{-5x^2},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\cos^3 x.$

9.1.20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=\cos 2x+\sin 2x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=e^x\cos x.$

9.1.21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=e^{-2x^2},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\dfrac{1}{2x^2+9}.$

9.1.22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=\sin 3x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5}}.$

9.1.23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=\cos 5x,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+4}}.$

9.1.24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=\sin\dfrac{x}{2}e^{-2x},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\dfrac{1}{1+x^2}.$

9.1.25. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=e^{-3x}\cos\dfrac{x}{2},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=x^4e^{-x^5-3}.$

Завдання 2

Нехай початкове відхилення точок струни має вигляд

$$u(x,t)=\begin{cases}0, -\infty<x<x_M;\\ dx^2+bx+c,\ x_M\le x\le x_P;\\ 0, x_P<x<\infty,\end{cases}$$

де $y=dx^2+bx+c$ – парабола, що проходить через точки *M*, *N*, *P*. Початкові швидкості дорівнюють нулю.

1. Накреслити положення точок струни в різні моменти часу.

2. Записати закон коливання точок *A*, *B*, *C*.

3. Записати рівняння профілю струни, коли хвилі ще не розійшлися й коли хвилі вже розійшлися.

9.2.1.	M(3,0),	N(4,-3),	P(7,0),	A(12),	B(-6),	C(4)
9.2.2.	M(1,0),	N(7,24),	P(3,0),	A(2),	B(6),	C(0)
9.2.3.	M(-4,0),	N(-1,-9),	P(2,0),	A(5),	B(-5),	C(0)
9.2.4.	M(-8,0),	N(-4,-16),	P(0,0),	A(5),	B(-10),	C(-7)

9.2.5.	M(0,0),	N(3,-9),	P(6,0),	A(10),	B(-3),	C(2)
9.2.6.	M(0,0),	N(3,18),	P(6,0),	A(8),	B(1),	C(-5)
9.2.7.	M(2,0),	N(5,18),	P(8,0),	A(10),	B(-1),	C(6)
9.2.8.	M(-8,0),	N(-4,32),	P(0,0),	A(2),	B(-1),	C(-10)
9.2.9.	M(-3,0),	N(0,9),	P(3,0),	A(5),	B(-7),	C(-1)
9.2.10.	M(-8,0),	N(-5,9),	P(-2,0),	A(0),	B(-4),	C(-10)
9.2.11.	M(-8,0),	N(-4,16),	P(0,0),	A(5),	B(-10),	C(-4)
9.2.12.	M(-9,0),	N(-5,24),	P(1,0),	A(5),	B(-2),	C(-10)
9.2.13.	M(-1,0),	N(4,-15),	P(1,0),	A(3),	B(-6),	C(0)
9.2.14.	M(-2,0),	N(-1,2),	P(1,0),	A(0),	B(-6),	C(4)
9.2.15.	M(-4,0),	N(-2,1),	P(-3,0),	A(2),	B(-6),	C(-4)
9.2.16.	M(3,0),	N(4,-2),	P(5,0),	A(4),	B(6),	C(-4)
9.2.17.	M(-5,0),	N(4,126),	P(-3,0),	A(-4),	B(-7),	C(4)
9.2.18.	M(4,0),	N(-4,160),	P(6,0),	A(8),	B(-6),	C(5)
9.2.19.	M(2,0),	N(3,-2),	P(4,0),	A(3),	B(6),	C(-4)
9.2.20.	M(1,0),	N(2,-2),	P(3,0),	A(-1),	B(3),	C(10)
9.2.21.	M(-1,0),	N(-6,2),	P(1,0),	A(-8),	B(6),	C(0)
9.2.22.	M(-2,0),	N(0,8),	P(2,0),	A(-7),	B(6),	C(1)
9.2.23.	M(-6,0),	N(5,-198),	P(-4,0),	A(-7),	B(0),	C(-5)
9.2.24.	M(7,0),	N(8,2),	P(9,0),	A(10),	B(5),	C(8)
9.2.25.	M(3,0),	N(8,-20),	P(6,0),	A(8),	B(-2),	C(4)

Завдання 3

Побудувати картину поширення хвиль, записати закон коливання точок A, B, C, записати рівняння профілю струни для $t < t_0$ й $t > t_0$, де t_0 – момент розбіжності хвиль, якщо:

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < m, \\ f(x), & m < x < n, \\ 0, & n < x < \infty. \end{cases}$$

9.3.1. $f(x) = -2x + 8; \quad m = 2, \ n = 6; \quad A(-10,0), \ B(3,0), \ C(-5,0).$

9.3.2. $f(x) = 2x - 8; \quad m = -2, \ n = 5; \quad A(6,0), \ B(1,0), \ C(-10,0).$

9.3.3. $f(x) = 4x + 11; \quad m = -6, \ n = \frac{1}{2}; \quad A(0,0), \ B(10,0), \ C(-10,0).$

9.3.4. $f(x) = 6 - 3; \quad m = -1, \ n = 2; \quad A(0,0), \ B(-5,0), \ C(3,0).$

9.3.5. $f(x) = x + 3.5; \quad m = -5, \ n = -2; \quad A(-4,0), \ B(0,0), \ C(-10,0).$

9.3.6. $f(x) = 4x + 4; \quad m = -3, \ n = 1; \quad A(-5,0), \ B(0,0), \ C(5,0).$

9.3.7. $f(x)=2x-6;\quad m=-1,\ n=7;\quad A(-3,0),\ B(3,0),\ C(8,0).$
9.3.8. $f(x)=2x+2;\quad m=-6,\ n=4;\quad A(-8,0),\ B(1,0),\ C(10,0).$
9.3.9. $f(x)=2+11;\quad m=-8,\ n=-3;\quad A(-10,0),\ B(0,0),\ C(1,0).$
9.3.10. $f(x)=2x+8;\quad m=-7,\ n=-1;\quad A(-20,0),\ B(0,0),\ C(5,0).$
9.3.11. $f(x)=-6x-6;\quad m=-5,\ n=3;\quad A(-8,0),\ B(1,0),\ C(5,0).$
9.3.12. $f(x)=-x+2.5;\quad m=1,\ n=4;\quad A(0,0),\ B(2,0),\ C(10,0).$
9.3.13. $f(x)=-6x+9;\quad m=-2,\ n=5;\quad A(1,0),\ B(6,0),\ C(-5,0).$

1.2. Застосування методу Даламбера до задачі про коливання скінченної струни

Рівняння в цьому випадку має звичайний вигляд
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.3}$$
з початковими умовами
$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t'(x,0)=\psi(x), \end{cases} \quad 0\le x\le l. \tag{3.4}$$
Але тепер додаються ще й крайові умови (наприклад, для закріпленої струни)
$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0. \end{cases} \tag{3.5}$$
Відомо, що розв’язок рівняння (3.3) у загальному випадку має вигляд:
$$u(x,t)=H(x-at)+G(x+at),$$
де H й G – довільні функції. Підберемо їх так, щоб задовольнялися додаткові умови (3.4) і (3.5).
Граничні умови (3.5) дають
$$\begin{cases} H(-at)+G(at)=0 \\ H(l-at)+G(l+at)=0, \end{cases}$$
тобто
$$\begin{cases} H(-at)=-G(at) \\ G(l+at)=-H(l-at). \end{cases}$$
Тут $t>0$ довільно. Позначимо $at=x$. Тоді
$$H(-x)=-G(x) \tag{3.6}$$
$$G(l+x)=-H(l-x). \tag{3.7}$$

Покажемо, що якщо G й H визначені в інтервалі $(0,l)$, то тим самим вони визначені й на всій числовій осі.

Якщо G визначено для $x\in(0,l)$, то, на підставі (3.6), H визначено для $x\in(-l,0)$. Але, якщо H визначено для $x\in(-l,0)$, то, на підставі (3.7), G визначено від $x=l$ до $x=2l$. Далі, якщо $x\in(l,2l)$, то, на підставі (3.6), H визначено від $x=-l$ до $x=-2l$. Але, якщо $x\in(-2l,-l)$, то, на підставі (3.7), функція G визначена від $x=0$ до $x=-l$. Продовжуючи подібні міркування, бачимо, що функції G й H визначені на всій осі, якщо вони визначені в інтервалі $(0,l)$.

Використовуючи початкові умови (3.4), одержимо

$$\begin{cases} H(x)+G(x)=\varphi(x); \\ a\left[-H'(x)+G'(x)\right]=\psi(x). \end{cases} \tag{3.8}$$

З останнього рівняння знаходимо

$$-H(x)+G(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)\,dz\,.$$

Таким чином замість (3.8) одержуємо систему

$$\begin{cases} H(x)+G(x)=\varphi(x); \\ -H(x)+G(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)\,dz. \end{cases} \tag{3.9}$$

Додаючи та віднімаючи ці рівності, будемо мати

$$\begin{cases} H(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)\,dz; \\ G(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)\,dz. \end{cases}$$

Функції $H(x)$ й $G(x)$ визначені на всій осі. Тоді на підставі (3.9) функції $\varphi(x)$ й $\psi(x)$ задані на всій числовій осі. Це потрібно у зв'язку з тим, що у функціях H і G присутні аргументи $x\pm at$, і якщо t велике, то значення аргументу виходить за межі скінченного інтервалу $(0,l)$.

На підставі першого з рівнянь (3.9)

$$\varphi(-x)=H(-x)+G(-x)$$

або з огляду на (3.6)

$$\varphi(-x)=-G(x)-H(x).$$

Порівнюючи це з першою рівністю (3.9), одержимо, що $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, тобто $\varphi(x)$ – непарна функція.

Замінюючи тепер x на $x+2l$, знаходимо

$$\varphi(x+2l)=H(x+2l)+G(x+2l).$$

Але на підставі рівності (3.7)

$$G(l-x)=-H(l+x).$$

Це правильно для всіх x, тому, замінюючи x на $x+l$, одержимо

$$H(2l+x)=-G(-x).$$

Оскільки з (3.6) випливає, що $-G(-x)=H(x)$, то

$$H(2l+x)=H(x).$$

Аналогічні міркування можна навести й для функції $G(x)$.

Отже,

$$\varphi(x+2l)=H(x+2l)+G(x+2l)=H(x)+G(x)=\varphi(x).$$

Отже, функція $\varphi(x)$ непарна й має період $2l$.

Звернемося тепер до функції $\psi(x)$. Диференціюючи рівності (3.6) і (3.7), одержимо

$$\begin{cases} H'(-x)=G'(x) \\ G'(l+x)=H'(l-x). \end{cases}$$

Звідси

$$\psi(-x)=a\left[-H'(-x)+G'(-x)\right]=a\left[-G'(x)+H'(x)\right]=-a\left[-H'(x)+G'(x)\right],$$

тобто

$$\psi(-x)=-\psi(x),$$

а значить функція $\psi(x)$ – непарна. Далі легко показати, що $\psi(x+2l)=\psi(x)$, тобто функція $\psi(x)$ має період $2l$.

Отже, обидві функції: $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – визначені на всій осі, непарні й мають період $2l$. Раніше одержали

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz. \qquad (3.10)$$

Але тепер ще врахуємо

$$\begin{cases} \varphi(-x)=-\varphi(x) \\ \psi(-x)=-\psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x+2l)=\varphi(x) \\ \psi(x+2l)=\psi(x). \end{cases}$$

Розглянемо окремий випадок, коли $\psi(x) \equiv 0$, а $\varphi(x) = 0$ всюди поза відрізком $[\alpha, \beta]$. Тоді з (3.10) одержимо

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}. \qquad (3.11)$$

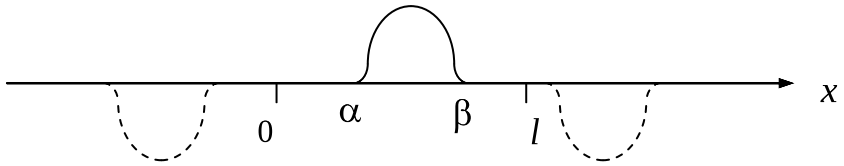


Рис. 3.8

Цей вираз є сумою двох хвиль, що поширюються зі швидкістю a в протилежних напрямках (рис. 3.8). Коли дійсний «сплеск» досягає кінця інтервалу $(0,l)$, «уявний» сплеск теж підійде до точки 0 із протилежної сторони. У результаті додавання дійсна хвиля як би заходить обернено із протилежним знаком, а уявна хвиля, також змінивши знак, відбивається від точки 0. Таким чином формула (3.11) дозволяє визначити профіль струни в будь-який час t.

§2. Метод Рімана і його застосування до розв'язку рівнянь, заданих у нескінченних областях

Розглянемо рівняння виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Cu + g(x,t), \qquad (3.12)$$

де $C=C(x,t)$, $g(x,t)$ – відомі функції. При $C=0$ рівняння (3.12) описує змушені коливання струни. Нехай початкові умови для рівняння (3.12) задані на деякій кривій L, розташованій в площині xOt, і мають вигляд

$$u\big|_L = \varphi(s), \qquad (3.13)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L = \psi(s), \qquad (3.14)$$

де s – довжина дуги. Крива L є носієм початкових даних.

Будемо вважати, що крива L задовольняє таким вимогам:

1) крива L є гладкою, тобто має дотичну, що змінюється неперервно;
2) характеристики даного рівняння

$$x - at = \xi \quad x + at = \eta,$$

де $\xi = \text{const}, \eta = \text{const}$, перетинають криву L тільки в одній точці.

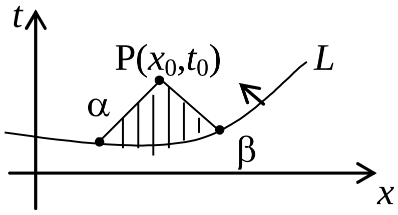


Рис. 3.9

Розв'язок вихідного рівняння будемо шукати в області, що розташована вище кривої L (рис. 3.9). Ріман одержав формулу для розв'язку поставленої задачі. Нижче представлено виведення цієї формули.

Нехай P – будь-яка точка, яка розташована вище кривої L. Позначимо її координати відповідно через x_0, t_0. Проведемо через точку $P(x_0, t_0)$ характеристики одного й іншого сімейства. Точки перетину їх із кривою L позначимо α й β. Тоді одержимо трикутник $P\alpha\beta$. Припустимо, що відома функція v, яка задовольняє допоміжне рівняння:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Cv, \tag{3.15}$$

на характеристиках вона набуде постійного значення, рівного одиниці, й залежить не тільки від x й t, але й x_0, t_0, тобто

$$v = v\left(x, t, x_0, t_0\right).$$

Функція v, що володіє названими властивостями, називається функцією Рімана. Покажемо, що, знаючи функцію Рімана, можна знайти розв΄язок рівняння (3.12), що задовольняє початкові дані (3.13), (3.14). Із цією метою перепишемо рівняння (3.12) і (3.15) у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Cu = g\left(x, t\right), \qquad | \, v$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Cv = 0. \qquad | \, u$$

Помножимо перше рівняння на v, друге – на u і віднімемо з першого друге. Тоді

$$\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) - a^2\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = g\left(x, t\right)v.$$

Отримане співвідношення проінтегруємо за трикутником $P\alpha\beta$. Тоді

$$\iint_{\Delta}\left\{\underbrace{\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)}_{A} - a^2\underbrace{\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)}_{B}\right\}dxdt = \iint_{\Delta} g\left(x, t\right)vdxdt.$$

Перетворимо ліву частину отриманої рівності

$$A=\frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial t}\right);\quad B=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

тоді

$$-\iint_{\Delta}\left\{a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}dxdt=\iint_{\Delta}g(x,t)vdxdt.$$

До лівої частини застосуємо формулу Гріна

$$\oint_L Pdx+Qdt=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)dxdt.$$

Тоді

$$-\oint_{P\alpha\beta}\left\{\left(v\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx+a^2\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt\right\}=\iint_{\Delta}g(x,t)vdxdt. \quad (3.16)$$

Оскільки

$$\oint_{P\alpha\beta}...=\int_{P\alpha}...+\int_{\alpha\beta}...+\int_{\beta P}...,$$

то розглянемо кожний із криволінійних інтегралів окремо:

$$\int_{P\alpha}=\int_{P\alpha}\left(v\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx+a^2\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt=\left\|\begin{matrix}P\alpha: & x-at=\xi\\ & dx=adt\\ & dt=dx/a\end{matrix}\right\|=$$

$$=a\int_{P\alpha}\left(v\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt+\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx=a\int_{P\alpha}v\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)-$$

$$-u\left(\frac{\partial v}{\partial t}dt+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)=a\int_{P\alpha}vdu-udv=\left\|v|_{P\alpha}=1,\, dv=0\right\|=a\int_{P\alpha}du=au\Big|_P^{\alpha}=$$

$$=-a\left[u(P)-u(\alpha)\right]=-a(u_P-u_\alpha).$$

Аналогічно $-\int_{\beta P}...=a(u_P-u_\beta)$ (на $\beta P\ \ x+at=\eta,\ dx=-adt$).

Для знаходження інтеграла уздовж $\alpha\beta$ – частини кривої *L*, обчислимо похідні від *u* за *x* і *t*. Відомо, що похідна за напрямком визначається таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,l)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,l).$$

Тоді за початковою умовою (3.14) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,n)+\frac{\partial u}{\partial t}\cos(t,n)\Big|_L=\psi(s).$$

З початкової умови (3.13) відомо, що

$$u\big|_L = \varphi(s).$$

Продиференціюємо останню рівність за s. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,s) + \frac{\partial u}{\partial t}\cos(t,s) = \varphi'(s).$$

Таким чином одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(x,n) + \dfrac{\partial u}{\partial t}\cos(t,n) = \psi(s); \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(x,s) + \dfrac{\partial u}{\partial t}\cos(t,s) = \varphi'(s). \end{cases} \tag{3.17}$$

Обчислимо детермінант D цієї системи з огляду на те, що
$\cos(x,n) = -\cos(t,s), \quad \cos(t,n) = \cos(x,s).$

$$D = \begin{vmatrix} \cos(x,n) & \cos(t,n) \\ \cos(x,s) & \cos(t,s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos(t,s) & \cos(x,s) \\ \cos(x,s) & \cos(t,s) \end{vmatrix} = -\cos^2(t,s) - \cos^2(x,s) = -1.$$

$D \neq 0$, тому система (3.17) має єдиний розв´язок. Таким чином значення $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ на кривій L однозначно можуть бути знайдені із системи (3.17), інтеграл за кривою $\alpha\beta$ буде обчислений за допомогою початкових даних. Перепишемо ліву частину рівності (3.16) з огляду на значення кожного із криволінійних інтегралів

$$a(u_P - u_\alpha) + a(u_P - u_\beta) - \int_{\alpha\beta} v\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right) - u\left(\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right) =$$

$$= \iint_\Delta g(x,t)v\,dxdt.$$

Звідси визначимо значення функції u у точці $P(x_0,t_0)$.

$$u(x_0,t_0) = \frac{u_\alpha + u_\beta}{2} + \frac{1}{2a}\int_{\alpha\beta} v\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right) - u\left(\frac{\partial v}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial v}{\partial x}dt\right) +$$

$$+\frac{1}{2a}\iint_\Delta g(x,t)v\,dxdt. \tag{3.18}$$

Отримана формула називається ***формулою Рімана.***

Приклад. Розглянемо задачу про змушені коливання струни, тобто покладемо в рівнянні (3.12) C=0. Знайдемо функцію Рімана, тобто функцію, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

та умову $v=1$ на характеристиках. У цьому випадку функцію v легко підібрати. Дійсно, нехай $v\equiv 1$. Тоді умови, що накладаються на функцію Рімана, виконуються. Розв´язок вихідного рівняння в будь-якій точці заданої області буде мати вигляд:

$$u\left(x_0,t_0\right)=\frac{u_\alpha+u_\beta}{2}+\frac{1}{2a}\int_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx+a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)+\frac{1}{2a}\iint_\Delta g\left(x,t\right)dxdt.$$

Розглянемо окремий випадок, якщо L збігається з віссю Ox (рис. 3.10). Рівняння характеристики $P\alpha$ має вигляд

$$x-at=\xi,$$

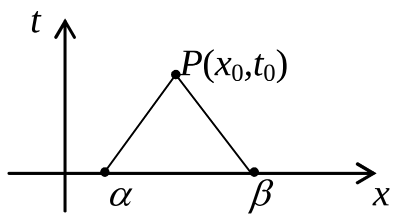


Рис. 3.10

оскільки $\xi=\text{const}=x_0-at_0$, то рівняння $P\alpha$ запишеться як $x-at=x_0-at_0\Rightarrow x-x_0=a\left(t-t_0\right)$. Тобто $\alpha=x_0-at_0,\beta=x_0+at_0$. З початкових даних треба, щоб $u\big|_L=\varphi\left(x\right)$, й на осі *Ox* *dt=0,* $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_L=\psi\left(s\right)=\psi\left(x\right)$. Тоді

$$u\left(x_0,t_0\right)=\frac{\varphi\left(x_0-at_0\right)+\varphi\left(x_0+at_0\right)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0}\psi\left(x\right)dx+\frac{1}{2a}\iint_\Delta g\left(x,t\right)dxdt.$$

Зауваження. Якщо покласти $g\left(x,t\right)\equiv 0$, то формула перетвориться у розв'язок, одержаний методом Даламбера для вільних коливань струни.

Приклад. Знаходження функції Рімана у випадку C = const $\neq 0$.
У випадку С$\neq 0$ рівняння, якому повинна задовольняти функція Рімана, має вигляд

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-Cv\equiv 0. \qquad (3.19)$$

Зафіксуємо деяку точку $P\left(x_0,t_0\right)$. Як відомо, рівняння характеристик, що проходять через цю точку, мають вигляд

$$x-x_0-a\left(t-t_0\right)=0 \quad x-x_0+a\left(t-t_0\right)=0.$$

Перемножимо ці два рівняння:

$$z^2=\left(x-x_0-a\left(t-t_0\right)\right)\left(x-x_0+a\left(t-t_0\right)\right)=\left(x-x_0\right)^2-a^2\left(t-t_0\right)^2.$$

Отриманий результат наштовхує на думку, що простим випадком був би той, коли v залежало б від z. Цей факт був показаний Ріманом, а саме, якщо C=const, то v=v(z), де $z=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2-a^2\left(t-t_0\right)^2}$. Згідно з умовою для функції v маємо, що на характеристиках $v=1$, але z на характеристиках дорівнює 0. Тому для $v = v(z)$ маємо умову, що $v(0)=1$.

Знайдемо частинні похідні від функції $v = v(z)$ за змінними x і t.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v'\frac{\partial z}{\partial x} = v'\frac{x-x_0}{z} = \frac{v'}{z}\left(x-x_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{v'}{z}\right)'\frac{\left(x-x_0\right)^2}{z} + \frac{v'}{z};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v'\frac{a^2\left(t-t_0\right)}{z} = -a^2\frac{v'}{z}\left(t-t_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{a^2 v'}{z} + a^2\frac{\left(t-t_0\right)^2}{z}\left(a^2\frac{v'}{z}\right)'.$$

Підставимо знайдені значення для других похідних у рівняння (3.19), тоді одержимо

$$-\frac{a^2 v'}{z} + a^4\frac{\left(t-t_0\right)^2}{z}\left(\frac{v'}{z}\right)' - \frac{a^2 v'}{z} - a^2\frac{\left(x-x_0\right)^2}{z}\left(\frac{v'}{z}\right)' - Cv = 0$$

або

$$2\frac{a^2 v'}{z} + a^2 z\left(\frac{v'}{z}\right)' + Cv = 0,$$

тобто

$$2\frac{a^2 v'}{z} + a^2 z\frac{zv''-v'}{z^2} + Cv = 0$$

або

$$v'' + \frac{1}{z}v' + \frac{C}{a^2}v = 0. \qquad (3.20)$$

Рівняння (3.20) є рівнянням Бесселя

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)y = 0$$

при $n = 0$.

Рівняння (3.20) перепишемо таким чином:

$$\frac{a^2}{C}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{a^2}{C}\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial v}{\partial z} + v = 0. \qquad (3.21)$$

Уведемо нову змінну $\frac{\sqrt{C}}{a}z = \xi$; або $z = \frac{a}{\sqrt{C}}\xi$, тоді

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{\sqrt{C}}{a}\frac{dv}{d\xi};$$
$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{C}{a^2}\frac{d^2v}{d\xi^2},$$
і рівняння (3.21) перетвориться до вигляду
$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + v = 0$ або
$$v'' + \frac{1}{\xi}v' + v = 0. \tag{3.22}$$
Загальний розв'язок рівняння (3.22) запишеться у вигляді $v = AJ_0(\xi) + BN_0(\xi)$ при *z=0,* $\xi = 0$, але $N_0(0) = \infty$, отже, *B=0* тому що $v|_{\xi=0} = 1$. Але $J_0(0) = 1$. Тоді *A=1.* Остаточно одержимо, що $v = J_0\left(\frac{\sqrt{C}}{a}\sqrt{(x-x_0)^2 - a^2(t-t_0)^2}\right)$.

§3. Поширення хвиль у нескінченному просторі

3.1. Тривимірний випадок

Розглянемо рівняння коливань у нескінченному однорідному тривимірному просторі
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \tag{3.23}$$
де
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
з початковими даними
$$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y,z). \tag{3.24}$$
Рівняння (3.23) будемо трактувати як математичну модель процесу поширення звуку в газі. При цьому *a* є швидкістю звуку. До рівняння такого типу приводить задача про поширення електромагнітних полів у непровідному середовищі й інші задачі. Задача (3.23), (3.24) уперше була розв'язана Пуассоном. Спочатку розглянемо частинний розв'язок рівняння (3.23), що має центральну симетрію відносно деякої точки M_0, тобто розв'язок ви-

гляду $u(M,t)=u(r,t)$, де $r=r_{MM_0}$ відстань між точками M та M_0. Перейдемо до сферичних координат і запишемо рівняння (3.23) у цих координатах

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Оскільки будемо розглядати тільки частинний розв´язок, який має центральну симетрію, то в цьому випадку функції φ й ψ будуть залежати тільки від r, тобто початкові умови (3.24) набудуть вигляду

$$u\big|_{t=0}=\varphi(r),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(r),$$

а рівняння (3.23) у цьому випадку запишеться як

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{3.25}$$

де r змінюється від 0 до ∞.

Виконуючи диференціювання в правій частині (3.25), одержимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

або

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Врахуємо, що

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2},$$

тоді

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)\quad\text{або}\quad\frac{\partial^2(ur)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}.$$

Останнє рівняння є хвильовим одновимірним рівнянням Даламбера для функції $v = ru$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2};$$

$$v\big|_{t=0}=r\varphi(r),\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=r\psi(r).$$

Але $0<r<\infty$, тобто r змінюється тільки на півосі. Тому продовжимо функції φ, ψ на від'ємну піввісь парним образом, тобто

$$\varphi(-r)=\varphi(r),\quad \psi(-r)=\psi(r).$$

Тепер можна скористатися формулою Даламбера

$$v(r,t)=\frac{(r-at)\varphi(r-at)+(r+at)\varphi(r+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{r-at}^{r+at} z\psi(z)dz\,.$$

Звідси

$$u(r,t)=\frac{(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(r-at)}{2r}+\frac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} z\psi(z)dz\,. \tag{3.26}$$

Відзначимо, що

$$\int\limits_{r-at}^{at-r} z\psi(z)dz=0\,, \tag{3.27}$$

тому, що ψ – парна функція, а $z\psi(z)$ – непарна.

Віднімемо з (3.26) рівність (3.27), попередньо помноживши її на $\dfrac{1}{2ar}$, тоді

оскільки $\dfrac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} \;-\dfrac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{at-r} \;=\dfrac{1}{2ar}\left(\int\limits_{at-r}^{r-at} \;+\int\limits_{r-at}^{r+at} \;\right)=\dfrac{1}{2ar}\int\limits_{at-r}^{r+at}$,

то (3.26) можна записати так

$$u(r,t)=\frac{(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(r-at)}{2r}+\frac{1}{2ar}\int\limits_{at-r}^{r+at} z\psi(z)dz\,. \tag{3.28}$$

Знайдемо $u(0,t)$, користуючись правилом Лопіталя.

$$u(0,t)=\frac{d}{dr}(r+at)\cdot\varphi(r+at)\Big|_{r=0}+\frac{1}{a}at\psi(at)=\varphi(at)+at\varphi'(at)+t\psi(at).$$

Остаточно значення u у центрі області має вигляд

$$u(0,t)=\big(z\varphi(z)\big)'\Big|_{z=at}+t\psi(at).$$

Розглянемо тепер загальний випадок, тобто знімемо обмеження відносно центральної симетрії розв’язка. Шуканий розв’язок повинен задовольняти рівняння (3.23) і початкові умови

$$u\big|_{t=0}=f(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g(x,y,z). \tag{3.29}$$

Для розв´язку задачі (3.23), (3.29) застосуємо так званий ***метод усереднення.*** Цей метод полягає у такому. Зафіксуємо в просторі точку. Відстань від будь-якої точки до зафіксованої позначимо через ρ. Побудуємо сферу радіусом r із центром у цій точці. Якщо задано деяку функцію w, то її середнє значення на цій сфері визначається як подвійний інтеграл по поверхні сфери такого виду:

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r} w dS = M_r\left[w\right];$$

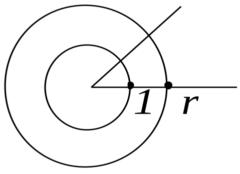


Рис. 3.11

$M_r\left[w\right]$ залежить при фіксованому центрі сфери тільки від її радіуса. Від просторових координат $M_r\left[w\right]$ залежати не буде. Візьмемо тепер концентричну сферу одиничного радіуса (рис. 3.11). Довільній точці на сфері радіуса *r* буде відповідати точка на сфері одиничного радіуса, що лежить із нею на одному промені, і навпаки. Подвійні інтеграли за цими двома сферами пов’язані між собою співвідношенням

$$\iint\limits_{S_r} w dS_r = \iint\limits_{S_1} \left(w\right)_r r^2 dS_1 .$$

Нагадаємо, що елемент площі поверхні на сфері *r* буде в r^2 разів більше відповідного елемента на одиничній сфері; $\left(w\right)_r$ означає, що обирається значення *w* не в точці одиничної сфери, а у відповідній точці сфери радіуса *r*.

Розділимо обидві частини на $4\pi r^2$, щоб одержати середнє значення. Тоді маємо ліворуч $M_r\left[w\right]$, а праворуч r^2 скоротиться й одержимо $M_1\left[\left(w\right)_r\right]$, тобто середнє по одиничній сфері, але не від *w*, а від $\left(w\right)_r$.

$$M_r\left[w\right] = M_1\left[\left(w\right)_r\right]. \qquad (3.30)$$

Нехай *u* – розв’язок задачі (3.23), (3.29). Виберемо довільну точку в просторі й опишемо сферу із центром у цій точці.

Проведемо усереднення функцій і рівняння (3.23) відносно цієї сфери. Тоді маємо

$$M_\rho\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = a^2 M_\rho\left[\Delta u\right].$$

Оператори усереднення й диференціювання за часом поміняємо місцями. Тоді

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\rho\left[u\right] = \frac{a^2}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho} \Delta u dS_\rho .$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на ρ^2 й проінтегруємо від 0 до *r*. Тоді

$$\int_0^r \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\rho\left[u\right]\rho^2 d\rho = \frac{a^2}{4\pi}\int_0^r d\rho \iint\limits_{S_\rho} \Delta u dS_\rho$$

$dS \cdot d\rho$ – елемент об'єму, тому інтеграл праворуч обчислюється по всій кулі. Таким чином,

$$\int_0^r \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\rho[u]\rho^2 d\rho = \frac{a^2}{4\pi}\iiint_{K_r} \Delta u d\Omega,$$

де K_r – куля радіусом r із центром у даній точці. Перетворимо отриманий праворуч інтеграл за допомогою формули Остроградського. Відомо, що

$$\Delta u = div\left(\vec{\nabla} u\right).$$

Тоді

$$\iiint_{K_r} \Delta u d\Omega = \iiint_{K_r} div\left(\vec{\nabla} u\right) d\Omega = \iint_{S_r}\left(\vec{\nabla} u, \vec{n}^0\right) dS_r = \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n} dS_r = \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} dS_r .$$

В останній рівності враховано, що похідна за нормаллю на сфері збігається з похідною за радіусом.

Таким чином,

$$\int_0^r \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\rho[u]\rho^2 d\rho = \frac{a^2}{4\pi}\iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} dS_r ,$$

і оскільки $\dfrac{1}{4\pi r^2}\displaystyle\iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} dS_r = M_1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_r\right]$, то останню рівність запишемо у вигляді:

$$\int_0^r \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\rho[u]\rho^2 d\rho = a^2 r^2 M_1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_r\right].$$

Останню рівність продиференціюємо за r, тоді одержимо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_r[u] r^2 = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2 M_1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_r\right]\right\}. \tag{3.31}$$

З огляду на рівність (3.30) праву частину можна переписати так:

$$a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2 \frac{\partial}{\partial r} M_1\left[(u)_r\right]\right\} = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2 \frac{\partial}{\partial r} M_r[u]\right\}.$$

Тоді рівняння (3.31) набуде вигляду

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_r[u] = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2 \frac{\partial}{\partial r} M_r[u]\right\}. \tag{3.32}$$

Отримано диференціальне рівняння відносно величини $M_r[u]$, яку позначимо w, тобто покладемо

$$M_r[u] = w.$$

Тоді, розділивши обидві частини (3.32) на r^2, одержимо рівняння в стандартній формі:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right). \tag{3.33}$$

Правою частиною цього рівняння є оператор Лапласа, записаний у сферичних координатах, у тому випадку, коли шукана функція залежить тільки від r і не залежить від φ й θ.

Для розв'язку отриманого рівняння необхідно усереднити і початкові умови

$$\begin{aligned} &M_r[u] = w\big|_{t=0} = M_r[f] = \varphi(r), \\ &M_r\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(M_r[u]\right) = \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = M_r[g] = \psi(r). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Усереднені початкові умови містять функції φ й ψ, які залежать тільки від r. Очевидно, що функція w, що є розв'язком рівняння (3.33) з початковими умовами (3.34), має центральну симетрію, тобто залежить тільки від r і t та не залежить від кутів. Таку задачу було вже розв'язано, і функція w може бути знайдена за допомогою формули (3.28). Залишається знайти функцію u, якщо відомо її середнє w. Це можна зробити таким чином:

$$w(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u dS .$$

Нехай r прямує до нуля. Тоді одержимо значення функції в центрі сфери. Застосовуючи теорему про середнє до інтеграла праворуч і переходячи до границі при $r \to 0$, одержимо, що

$$w(0,t) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{4\pi r^2} u\left(M_{cp}\right) \cdot 4\pi r^2 = u\left(M_0\right),$$

де M_0 – центр сфери, тобто зафіксована раніше точка в просторі, координати якої (x,y,z,t), тобто

$$w(0,t) = u(x,y,z,t).$$

Або

$$u(x,y,z,t) = w(0,t) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left\{\rho\varphi(\rho)\right\}\Big|_{\rho=at} + t\psi(at).$$

Виразимо φ й ψ через f й g. Оскільки

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} f dS , \qquad \psi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} g dS ,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left\{\rho\varphi(\rho)\right\}\Big|_{\rho=at} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{at\varphi(at)\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{t\varphi(at)\right\} =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{t}{a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}} fdS = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\iint\limits_{S_{at}} fdS\right).$$

$$t\psi(at)=\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}} gdS .$$

Остаточно розв'язок $u(x,y,z,t)$ визначається формулою

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{t}\iint\limits_{S_{at}} fdS\right\}+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}} gdS . \tag{3.35}$$

Проаналізуємо отриманий розв'язок. Нехай у просторі відбувається хвильовий процес, причому

$$u\big|_{t=0}=f(x,y,z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y,z).$$

Будемо вважати, що початкові дані відмінні від нуля в деякій малій області (кулі V) простору, а поза областю функції f і g дорівнюють нулю, тобто в початковий момент є збурювання тільки в деякій малій області. Візьмемо в просторі довільну точку $M(x,y,z)$ і простежимо за тим, що буде в ній відбуватися зі зміною часу. Навколо цієї точки опишемо сферу радіусом at і будемо інтегрувати за цією сферою функції f і g (початкові дані). Позначимо через R_1 і R_2 – радіуси двох концентричних сфер із центром у точці M, які дотикаються до заданої області збурювання S. Тоді, якщо $t<\frac{R_1}{a}$, то f і g будуть дорівнювати нулю за умовою й, отже, інтеграли в (3.35) також будуть дорівнювати нулю, і точка буде перебувати в спокої. «Життя» у точці $M(x,y,z)$ почнеться при $\frac{R_1}{a}=t$ й буде тривати протягом часу $\frac{R_1}{a}\le t\le\frac{R_2}{a}$.

При $t>\frac{R_2}{a}$ точка $M(x,y,z)$ знову перебуватиме в спокої тобто «замовкне».

3.2. Перехід до двовимірного випадку методом спуска

Розглянемо двовимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{3.36}$$

з початковими умовами

$$u\big|_{t=0}=f(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y). \tag{3.37}$$

Розглянута задача є окремим випадком просторової задачі, коли величини не залежать від z, тобто є постійними при будь-яких значеннях z. Початкова область у цьому випадку буде представляти нескінченний циліндр. Довільну точку, у якій будемо відшукувати рішення, можемо взяти на площині xOy, а сферу побудуємо із центром у цій точці $(x,y,0)$. Рівняння поверхні сфери із центром у цій точці й радіусом $R = at$ має вигляд

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \chi^2 = a^2t^2,$$

де ξ, η, χ – поточні координати. Виразимо елемент площі сфери через елемент площі проекції. Тоді, оскільки підінтегральні функції не залежать від z, то інтеграли по верхній і нижній половинах сфери будуть однакові, і можна обчислити інтеграли по одній половині й отриманий результат подвоїти. Отже,

$$dS = \frac{d\sigma}{\left|\cos(n,z)\right|}, \quad \left|\cos(n,z)\right| = \frac{|\chi|}{at} \qquad \text{(у загальному випадку)}$$

$$|\chi| = \sqrt{a^2t^2 - r^2}, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Тоді $dS = \dfrac{atd\sigma}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}$.

Сферу позначимо S_{at}, проекцію її на площину, тобто коло Q, позначимо D_{at}. Очевидно, що коло D_{at} розташоване в площині $\xi\eta$ із центром у точці (x,y) і радіусом at. Тоді

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{t}\iint_{D_{at}} f\,\frac{atd\sigma}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\right\} + \frac{1}{2\pi a^2 t}\iint_{D_{at}} g\,\frac{atd\sigma}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}$$

або

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}} f\,\frac{d\sigma}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} + \frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}} g\,\frac{d\sigma}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}. \qquad (3.38)$$

Таким чином формула (3.38) є розв’язком задачі (3.36)–(3.37). Проаналізуємо знайдений розв’язок. Нехай у площині xOy задана збурена зона у вигляді кола (рис. 3.12). У цьому колі задані швидкості й положення точок у початковий момент. Якщо $t < \dfrac{R_1}{a}$, то точка (x,y) перебуває в стані спокою, оскільки коло радіусом at не захоплює початкову збурену зону. При $t > \dfrac{R_2}{a}$ точка не буде перебувати в стані спокою, оскільки інтеграли обчислюються за кругом, а не за колом; тому в цьому випадку спостерігається післядія

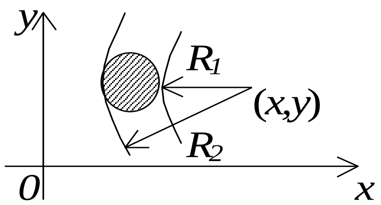


Рис. 3.12

через те, що при $t > \dfrac{R_2}{a}$ інтеграли не будуть дорівнювати нулю. Але післядія згодом спадає, тому що в підінтегральному виразі в знаменнику знаходиться величина $\sqrt{a^2t^2 - r^2}$, що зростає при збільшенні t. Таким чином у точці (x,y) збурювання u буде змінюватися згодом приблизно так, як показано на рис. 3.13.

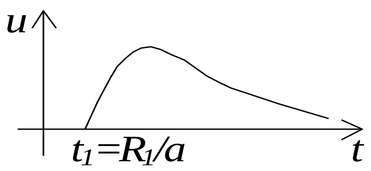


Рис. 3.13

Ми бачимо, що хвильовий процес у двовимірному випадку протікає не так, як у тривимірному; це пов'язано з тим, що початкова область являє собою циліндр (величини не залежать від z), тому яку б кулю ми не взяли, її поверхня завжди перетне циліндр, тобто буде післядія.

§4. Розв'язання рівнянь параболічного типу у необмеженій області методом Фур'є

Типовим рівнянням параболічного типу є рівняння теплопровідності, що у випадку відсутності теплових джерел має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \tag{3.39}$$

Розглянемо одновимірний випадок, припускаючи, що $-\infty < x < \infty$, тобто розглянемо задачу про поширення тепла в нескінченному стрижні. Математична постановка цієї задачі зводиться до розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; (-\infty < x < \infty) \tag{3.40}$$

при заданих початкових умовах

$$u\big|_{t=0} = f(x), \tag{3.41}$$

де $f(x)$ – неперервна й обмежена функція. Вимога обмеженості пояснюється тим, що область визначення цієї функції є відкритим нескінченним інтервалом. Отже, вважаємо, що $|f(x)| \le M$.

Відшукаємо деякий частинний розв'язок цього рівняння, використовуючи метод поділу змінних (метод Фур'є). Із цією метою представимо шуканий розв'язок у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної, тобто у вигляді

$$u(x,t) = T(t)X(x). \tag{3.42}$$

Підставимо розв'язок (3.42) в (3.39), тоді

$$T'(t)X(x) = a^2T(t)X''(x).$$

Розділивши обидві частини на a^2TX, одержимо

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = \mu .$$

Оскільки права частина не залежить від *t*, а ліва від *x*, то кожне з відношень є константою μ. Тоді маємо

$$T' = a^2 \mu T ,$$

а отже, $T = Ce^{a^2 \mu t}$; вважаємо, що μ дійсна стала. Якщо μ>0, то в даній точці температура нескінченно зростає з часом, що суперечить фізичному змісту. Тому $\mu = -\lambda^2$. Покладемо *C* = 1 і знайдемо частинний розв'язок

$$T = e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Друге звичайне диференціальне рівняння має вигляд

$$X'' + \lambda^2 X = 0 .$$

Фундаментальна система розв'язків для цього рівняння складається з функцій $X_1 = \cos \lambda x,\ X_2 = \sin \lambda x$. Загальний розв'язок представляється як

$$X = A\cos \lambda x + B\sin \lambda x ,$$

або в іншій формі

$$X = D\cos \lambda \left(x - \xi \right).$$

Нехай *D* = 1, тоді $X = \cos \lambda \left(x - \xi \right)$ й $u = e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda \left(x - \xi \right)$, тут λ та ξ є сталими. Можна взяти комбінації *u* при різних λ, тоді отримана функція також буде розв'язком на підставі лінійності й однорідності рівняння. Оскільки λ може змінюватися в межах від -∞ до $+\infty$, то побудуємо розв'язок у вигляді

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda \left(x - \xi \right) d\lambda . \qquad (3.43)$$

Покажемо, що *v* дійсно є розв'язком рівняння. Інтеграл (3.43) збігається досить швидко через множник $e^{-a^2\lambda^2 t}$, тому його можна диференціювати за параметром, тобто

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \lambda^2 e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda \left(x - \xi \right) d\lambda;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda \left(x - \xi \right) d\lambda.$$

Якщо помножимо останню рівність на a^2, то одержимо, що *v* задовольняє рівняння (3.40). Обчислимо інтеграл (3.43). Із цією метою скористаємося відомою рівністю

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cos bz dz = e^{-\frac{b^2}{2}} .$$

В інтегралі (3.43) покладемо $a^2\lambda^2 t = \frac{z^2}{2}$; $\lambda = \frac{z}{a\sqrt{2t}}$, тоді

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cos\frac{z(x-\xi)}{a\sqrt{2t}} \frac{dz}{a\sqrt{2t}} = \frac{1}{a\sqrt{2t}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Таким чином, частинний розв'язок має вигляд

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{3.44}$$

Візьмемо інший розв'язок, помноживши (3.44) на const (це можливо на підставі лінійності й однорідності рівняння)

$$w = C\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Знайдемо C. Із цією метою проінтегруємо w по всій осі Ox.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w dx = \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} dx.$$

Зробимо заміну змінних

$$\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = z, \quad dx = 2a\sqrt{t} dz.$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w dx = C \cdot 2a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 2a \cdot C\sqrt{\pi},$$

оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Видно, що інтеграл дорівнює постійній величині й при належному виборі C весь вираз дорівнює одиниці. Визначимо C із цієї умови. Очевидно, що

$$C = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}.$$

Тоді частинний розв'язок буде мати вигляд

$$g(x-\xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{3.45}$$

Цей розв'язок називається фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності. Покажемо, що початкова задача вирішується за допомогою даного частинного розв'язку.

Теорема. Розв'язок задачі (3.40), (3.41) має вигляд

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi,t)\,f(\xi)\,d\xi. \qquad (3.46)$$

Доказ.

Покажемо спочатку, що $u(x,t)$ задовольняє диференціальне рівняння (3.40), а потім покажемо, що u задовольняє початкові умови (3.41).

1) Обчислимо похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$. При цьому можна диференціювати невласний інтеграл, оскільки підінтегральна функція містить член $e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ і цей інтеграл швидко збігається. Таким чином

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}g(x-\xi,t)\,f(\xi)\,d\xi. \qquad (3.47)$$

Аналогічно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x-\xi,t)\,f(\xi)\,d\xi. \qquad (3.48)$$

Помножимо (3.48) на a^2 й віднімемо з (3.47). Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\left\{\frac{\partial}{\partial t}g(x-\xi,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x-\xi,t)\right\}d\xi=0.$$

У фігурних дужках вираз тотожно дорівнює нулю, оскільки $g(x-\xi,t)$ – розв'язок рівняння (3.40). Тоді $u(x,t)$ є розв'язком вихідного рівняння (3.40).

2) Нагадаємо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi,t)\,d\xi=1$. Помножимо обидві частини останньої рівності на $f(x)$, тоді

$$f(x)=f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi,t)\,d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi,t)\,f(x)\,d\xi. \qquad (3.49)$$

Віднімемо з (3.46) рівняння (3.49). Тоді

$$u(x,t)-f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi,t)\{f(\xi)-f(x)\}\,d\xi.$$

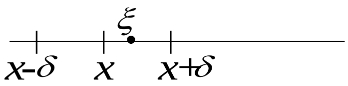
Покажемо, що при $t\to 0$ різниця $f(\xi)-f(x)\to 0$. Дійсно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi,t)\{f(\xi)-f(x)\}\,d\xi=\int_{-\infty}^{x-\delta}\ +\int_{x-\delta}^{x+\delta}\ +\int_{x+\delta}^{+\infty}\ =J_1+J_2+J_3.$$

Виберемо $\delta>0$ так, щоб

$$\left|f(\xi)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{якщо}\ \left|\xi-x\right|\le\delta,$$

величину $\varepsilon>0$ задаємо довільно. Таке δ існує для будь-якого $\varepsilon>0$, оскільки $f(x)$ – неперервна функція.

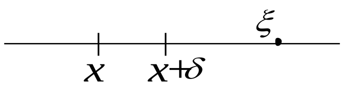


Оцінимо інтеграл J_2. Так як $\left|f(\xi)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, то

$$\left|J_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}g(x-\xi,t)d\xi<\frac{\varepsilon}{2},$$

оскільки $\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}g(x-\xi,t)d\xi<1$, тому що $g(x-\xi,t)$ завжди додатна, а інтервал інтегрування скінченний. Таким чином

$$\left|J_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$



Тепер зафіксуємо δ й розглянемо інтеграл J_3 з огляду на те, що $\left|f(x)\right|\le M$

$$\left|J_3\right|\le\int\limits_{x+\delta}^{+\infty}g(x-\xi,t)\left|f(\xi)-f(x)\right|d\xi<2M\int\limits_{x+\delta}^{+\infty}g(x-\xi,t)d\xi.$$

Покажемо, що $\int\limits_{x+\delta}^{+\infty}g(x-\xi,t)d\xi\to0$ при $t\to0$.

Дійсно,

$$\int\limits_{x+\delta}^{+\infty}g(x-\xi,t)d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x+\delta}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\left\|\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}=z,\ \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}=dz\right\|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\delta/2a\sqrt{t}}^{\infty}e^{-z^2}dz,$$

$$\lim_{t\to0}2M\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\delta/2a\sqrt{t}}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=0.$$

Інтеграл J_1 оцінюється аналогічно. Таким чином, починаючи з деякого значення t

$$\left|J_1\right|<\frac{\varepsilon}{4},\quad\left|J_2\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\left|J_3\right|<\frac{\varepsilon}{4},$$

а весь інтеграл $\left|J\right|<\varepsilon$, тобто $\lim\limits_{t\to0}\left(u(x,t)-f(x)\right)=0$, отже, $u(x,0)=f(x)$, і знайдений розв’язок задовольняє задані початкові умови (3.41).

§5. Фізичний зміст фундаментального розв’язку рівняння теплопровідності

Припустимо, що питома теплоємність стержня і його щільність рівні 1, тобто $C = 1$, $\rho=1$. Виділимо частину стержня довжиною l і нагріємо його від температури u_1 до u_2. Для цього йому необхідно надати кількість теплоти $(u_2-u_1)l \quad (\rho=1, C=1)$. Припустимо, що початкова температура дорівнює нулю.

Розглянемо випадок, коли при $t = 0$

$$u=\begin{cases}0, & x<x_1\\ u_0, & x_1\le x\le x_2\\ 0, & x>x_2.\end{cases}$$

На ділянці $[x_1, x_2]$ зосередимо кількість теплоти, рівну $u_0(x_2-x_1)$.

Тоді температура в будь-який момент часу в довільній точці визначиться як

$$u(x,t)=u_0\int_{x_1}^{x_2} g(x-z,t)\,dz. \tag{3.50}$$

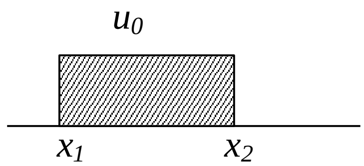


Рис. 3.14

Підберемо u_0 так, щоб кількість теплоти дорівнювала 1 (рис. 3.14), тоді $u_0(x_2-x_1)=1$, й інтеграл (3.50) перепишеться у вигляді

$$u(x,t)=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} g(x-z,t)\,dz.$$

Нехай $x_1=\xi$, а $x_2\to\xi$. Оскільки x_2 зменшується, а площа фіксована й дорівнює 1, то висота прямокутника буде зростати (рис. 3.15).

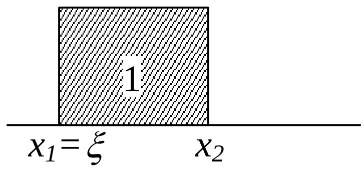


Рис. 3.15

Розглянемо невизначеність для $u(x,t)$ при $x_2\to x_1$.

$$\lim_{x_2\to x_1} u(x,t)=\lim_{x_2\to x_1}\frac{\int_{x_1}^{x_2} g(x-z,t)\,dz}{x_2-x_1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\|$$ за правилом Лопіталя $\| = g(x-x_2,t)\big|_{x_2=\xi}=g(x-\xi,t)$,

тобто функція $g(x-\xi,t)$ відповідає тому випадку, коли в початковий момент кількість тепла, рівна 1, буде зосереджена в точці. На підставі цього g називається функцією теплового джерела.

Таким чином, фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності, як показує граничний перехід, представляє температуру в будь-якій точці у будь-який момент часу, якщо в початковий момент вся кількість тепла, рівна 1, зосереджена в одній точці $x = \xi$. Точка ξ може розглядатися як єдине теплове джерело, і тому фундаментальний розв'язок часто називають функцією точкового теплового джерела. Зосередити одиницю кількості тепла в одній точці практично неможливо. Говорячи про це, ми робимо певну ідеалізацію, представляючи, що відрізок, на якому розподілена теплота, прямує до точки, а його температура прямує до нескінченності, але так, що їхній добуток дорівнює одиниці. Якщо скористатися δ-функцією, то можна сказати, що функція теплового джерела представляє розподіл температури в часі в кожній точці *x*, якщо початкова температура є δ-функцією від $(x-\xi)$, тобто

$$u(x,0) = \delta(x-\xi).$$

§6. Розв'язання рівняння теплопровідності у двовимірній необмеженій області

6.1. Розв'язання однорідного рівняння при неоднорідній початковій умові

Будемо розглядати задачу про розподіл температури на всій площині, за умовою, що в початковий момент цей розподіл є відомим. Математичне формулювання цієї задачі зводиться до знаходження розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{3.51}$$

при початковій умові

$$u\big|_{t=0} = f(x,y). \tag{3.52}$$

Вважаємо, що $|f(x,y)| \le M$.

Побудуємо фундаментальний розв'язок рівняння (3.51)

$$w = g(x-\xi,t)\cdot g(y-\eta,t),$$

де $g(x-\xi,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ – функція, що описує розподіл температури, якщо початкова температура є δ-функція $\delta(x-\xi)$. Візьмемо площину *xOy* і відзначимо точку (ξ,η), що є винятковою для розглянутої області.

Покажемо, що w можна розглядати як функцію теплового джерела, поміщеного в точку (ξ,η) на площині xOy. Насамперед переконаємося, що w задовольняє двовимірне рівняння теплопровідності (3.51). Визначимо

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial g(x-\xi,t)}{\partial t}\cdot g(y-\eta,t)+g(x-\xi,t)\frac{\partial g(y-\eta,t)}{\partial t}.$$

Друга похідна $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ обчислюється аналогічно. З огляду на те, що функція $g(y,t)$ є розв'язком одновимірного диференціального рівняння теплопровідності, можемо записати

$$\frac{\partial w}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left[\frac{\partial g(x-\xi,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 g(x-\xi,t)}{\partial x^2}\right]\cdot g(y-\eta,t)+$$

$$\left[\frac{\partial g(y-\eta,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 g(y-\eta,t)}{\partial y^2}\right]g(x-\xi,t)\equiv 0,$$

тобто w – розв'язок двовимірного рівняння.

Якщо w проінтегрувати по всій площині, то одержимо кількість теплоти, що у момент часу t буде утримуватися на всій площині

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi,t)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(y-\eta,t)\,dy=1,$$

тобто кількість теплоти в будь-який момент часу дорівнює одиниці.

Оскільки немає теплових джерел, то й у початковий момент кількість теплоти повинна дорівнювати одиниці. Якщо в початковий момент візьмемо будь-яку іншу точку, відмінну від (ξ,η), тоді одержимо, що при $t\to 0,\ w\to 0$. Дійсно, оскільки $w\big|_{t=0}=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$, а при $x=\xi$ й $y\neq\eta$ (або $y=\eta,\ x\neq\xi$) функція дорівнює 0.

Функція $w=g(x-\xi,t)g(y-\eta,t)$ повинна розглядатися як функція теплового джерела, поміщеного в точку (ξ,η) на площині. Дійсно, вона по-перше задовольняє рівняння теплопровідності й при $x=\xi$, $y=\eta$ прямує до нескінченності таким чином, що інтеграл від функції по всій площині дорівнює одиниці. Що стосується точок $x=\xi$, $y\neq\eta$, у яких перший множник прямує до нескінченності, а другий до 0, то ці точки потрібно вважати такими, у яких добуток дорівнює нулю. Це пов'язано з тим, що інтеграл по всій осі x від першого множника дорівнює одиниці, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\,dx=1$, а інтеграл від другого множника дорівнює нулю. Функція

w прямує до нескінченності тільки в точці (ξ,η).

Функція $w(x,y,t)$ як фундаментальний розв'язок дозволяє розв'язувати задачу теплопровідності на всій площині в загальному випадку, а саме

$$u(x,y,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)g(x-\xi,t)g(y-\eta,t)d\xi d\eta. \tag{3.53}$$

Доведемо це. Доказ того, що (3.53) задовольняє диференціальне рівняння (3.51) проводиться так само, як і в одновимірному випадку. Доведемо, що (3.53) задовольняє задані початкові умови.

Оскільки інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi,t)g(y-\eta,t)d\xi d\eta=1, \tag{3.54}$$

то, помножуючи обидві частини цієї рівності на $f(x,y)$, одержимо, що

$$\begin{aligned} f(x,y)&=f(x,y)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi,t)g(y-\eta,t)d\xi d\eta= \\ &=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(x-\xi,t)g(y-\eta,t)d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Віднімемо з (3.53) рівняння (3.55). Тоді одержимо

$$u(x,y,t)-f(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{f(\xi,\eta)-f(x,y)\}g(x-\xi,t)g(y-\eta,t)d\xi d\eta. \tag{3.56}$$

Перейдемо до полярних координат, приймаючи точку (x,y) як полюс, тоді

$$\begin{aligned}\xi&=x+r\cos\varphi\\ \eta&=y+r\sin\varphi\end{aligned},$$

і вираз (3.56) запишеться як

$$\begin{aligned} u(x,y,t)-f(x,y)&=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\{f(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)-f(x,y)\}\cdot \\ &\cdot\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\cdot rdrd\varphi. \end{aligned} \tag{3.57}$$

При цьому

$$\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\cdot rdrd\varphi=1.$$

Оцінимо інтеграл (3.57). Із цією метою задамо довільне $\varepsilon>0$ (рис. 3.16), тоді, на підставі неперервності функції f, знайдеться таке δ, що $\forall\xi,\eta$, які

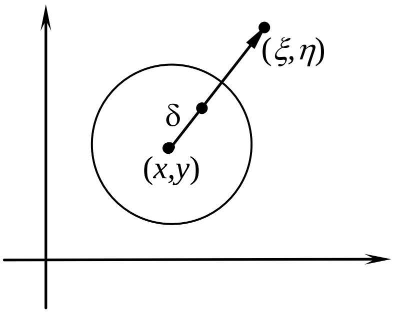


Рис. 3.16

задовольняють нерівність

$$\left|\rho(\xi,\eta)-\rho(x,y)\right|<\delta,$$

буде справедлива така нерівність:

$$\left|f(\xi,\eta)-f(x,y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Подамо інтеграл (3.56) у вигляді суми

$$u-f=\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}+\int_{\delta}^{\infty}\int_0^{2\pi}=I_1+I_2.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\left|I_1\right|&=\left|\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left\{f(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)-f(x,y)\right\}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\cdot rdrd\varphi\right|\le\\&\le\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\cdot rdrd\varphi<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}\tag{3.58}$$

При оцінці було враховано, що по всій площині інтеграл дорівнює одиниці, а підінтегральна функція додатна й у виразі (3.58) цей інтеграл обчислюється тільки за частиною площини, тому він менше одиниці. У результаті маємо, що $\left|I_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left|I_2\right|=2M\int_{\delta}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\cdot rdrd\phi=4\pi M\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2\int_{\delta}^{\infty}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\cdot rdr=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\dfrac{r}{2a\sqrt{t}}=z\\ dz=\dfrac{dr}{2a\sqrt{t}}\end{matrix}\right\|=4M\int_{\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}\cdot zdz=2Me^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}},$$

при $t\to0,\quad I_2\to0$, оскільки δ фіксовано. Таким чином, починаючи з якогось t $\left|I_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, тому $\left|I\right|=\left|I_1+I_2\right|<\varepsilon$, тобто теорема доведена. Функція, обумовлена рівністю (3.53), задовольняє задане диференціальне рівняння й початкові умови. Аналогічно можна розв'язати задачу для тривимірного випадку.

6.2. Розв'язання неоднорідного рівняння теплопровідності при неоднорідній початковій умові методом варіації довільних сталих (узагальнення функції Коші)

Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + h(x, y, z), \tag{3.59}$$

де оператор L не залежить від часу t. Додаткова умова має вигляд

$$u\big|_{t=0} = 0. \tag{3.60}$$

Отже, маємо однорідну початкову умову й неоднорідне рівняння.
Допустимо, що знайшли розв'язок такої задачі:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L[v], \tag{3.61}$$

$$v\big|_{t=\tau} = h(x, y, z, \tau). \tag{3.62}$$

Функція v буде функцією x, y, z, t і τ. Змінна τ відіграє роль параметра, тобто $v = v(x, y, z, t, \tau)$. Тоді шуканий розв'язок можна представити як

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t v(x, y, z, t, \tau)\, d\tau. \tag{3.63}$$

Зауваження. Функція v аналогічна добутку функції Коші $C(x,\xi) f(\xi)$ ($f(\xi)$ – права частина з теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь). Ця обставина й пояснює назву – варіація довільних сталих.
Якщо t прямує до τ, то можна записати, що

$$v\big|_{t=\tau} = v(x, y, z, \tau, \tau) = h(x, y, z, \tau). \tag{3.64}$$

При прямуванні τ до t $v\big|_{\tau=t} = v(x, y, z, t, t) = h(x, y, z, t)$
Оскільки $v\big|_{t\to\tau+0} = h(x, y, z, \tau)$, то справедливо й таке

$$v\big|_{\tau\to t-0} = h(x, y, z, t). \tag{3.65}$$

Задана початкова умова $v\big|_{t=\tau} = h(x, y, z, \tau)$, інакше кажучи, означає, що $v(x, y, z, \tau, \tau) = h(x, y, z, \tau)$, тому, якщо потрібно буде знайти v при $t = \tau$, тобто границю, коли четвертий аргумент τ прямує до третього t, то одержимо

$$v\big|_{\tau=t} = v(x, y, z, t, t) = h(x, y, z, t).$$

Початкову умову потрібно розуміти так: якщо $t \to \tau$ праворуч, тобто $v\big|_{t=\tau+0} = h(x, y, z, \tau)$, то останнє співвідношення повинне мати вигляд

$$v\big|_{\tau=t-0} = h(x, y, z, t). \tag{3.66}$$

Це випливає з того, що функція v, по суті, має вигляд $v(x, y, z, t-\tau)$, тому що коефіцієнти диференціального оператора від t не залежать і рівняння не зміниться при заміні t на $t-\tau$. Візьмемо або $t = \tau + 0$, або $\tau = t - 0$, але щоб $t - \tau > 0$.

Теорема. Для того, щоб одержати розв'язок рівняння (3.59) при початкових однорідних умовах (3.60), досить знайти розв'язок рівняння (3.61), що задовольняє неоднорідній умові (3.62), де τ – параметр, а потім отриманий розв'язок v проінтегрувати за параметром τ від 0 до t.

Доказ. Нехай v – відомо. Покажемо, що

$u(x,y,z,t)=\int\limits_0^t v(x,y,z,t,\tau)d\tau$ задовольняє рівняння (3.59).

Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial t}$. При цьому необхідно врахувати, що від *t* залежить як верхня межа, так і підінтегральна функція. Тому

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int\limits_0^t \frac{\partial v}{\partial t}d\tau+v\big|_{\tau=t-0}=\int\limits_0^t \frac{\partial v}{\partial t}d\tau+h(x,y,z,t),$$

причому $\tau=t-0$, тому що τ знаходиться в інтервалі $(0,t)$. Скористаємося (3.66).

$$L[u]=L\left[\int\limits_0^t v\cdot d\tau\right]=\int\limits_0^t L[v]d\tau,$$

тоді одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial t}-L[u]=\int\limits_0^t\left\{\frac{\partial v}{\partial t}-L[v]\right\}d\tau+h(x,y,z,t)=h(x,y,z,t).$$

Інтеграл дорівнює нулю, тому що *v* є розв'язком рівняння (3.61).

Таким чином, *u* задовольняє рівняння (3.59); при $t=0$ одержимо $u=0$, тому що $u(x,y,z,0)=\int\limits_0^0 v\cdot d\tau=0$.

Ця теорема називається принципом Дюамеля.

Приклад. Розв'яжемо одновимірну задачу теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+h(x,t);$$
$$u\big|_{t=0}=f(x).$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді суми двох функцій $u=u_1+u_2$, причому будемо вимагати, щоб функції задовольняли умови

1) $\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2};$ 2) $\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + h(x,t);$

$u_1\big|_{t=0} = f(x).$ $u_2\big|_{t=0} = 0.$

Зрозуміло, що сума буде шуканою функцією u. Функцію u_1 за формулою (1.99) будемо шукати у вигляді

$$u_1 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \cdot$$

Щоб знайти u_2, треба спочатку знайти v: $v\big|_{t=\tau} = h(x,\tau)$; тоді $u_2 = \int_0^t v d\tau$.

Виберемо $v(x,t,\tau)$ у вигляді

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi,\tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \cdot$$

причому $t \to \tau$ праворуч, оскільки $t - \tau > 0$.

Таким чином, одержано розв'язок задачі у замкненому вигляді.

Розділ IV. Застосування наближених методів до розв'язання крайових задач математичної фізики

§1. Варіаційні постановки крайових задач для рівнянь еліптичного типу (рівняння Пуассона та бігармонічне)

Задачі математичної фізики, а також механіки деформовного твердого тіла, механіки рідини й газу, електродинаміки, теплофізики й т.д. зазвичай зводяться до диференціальних рівнянь із частковими похідними, які потрібно інтегрувати при відповідних початкових і крайових (граничних) умовах. На жаль, для дуже багатьох таких рівнянь важко, а іноді практично неможливо одержати точний аналітичний розв'язок, тому для їхнього розв'язку доводиться використовувати наближені методи. У багатьох випадках задачу інтегрування диференціального рівняння можна замінити рівносильною варіаційною, тобто задачею відшукання функції, що надає деякому функціоналу екстремального або стаціонарного значення. Так, наприклад, інтегрування рівнянь статичної теорії пружності можна звести до відшукання мінімуму потенційної енергії пружного тіла. Методи, що дозволяють звести задачу розв'язку диференціального рівняння до рівносильної варіаційної проблеми, називають варіаційними. Питання побудови функціоналів, що відповідають тому або іншому диференціальному рівнянню, докладно висвітлені в курсі варіаційного числення та класичних роботах С.Г. Міхліна [9].

Приклад 1. Задача Діріхле для рівняння Пуассона.

Розглянемо задачу про знаходження екстремуму функціонала вигляду

$$F(u)=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]\partial\Omega=\iint_{\Omega}\left[\left(\vec{\nabla}u\right)^2-2fu\right]\partial\Omega, \qquad (4.1)$$

де $\vec{\nabla}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$.

Розв'язання. Будемо розглядати цей функціонал на $C_0^2\left(\bar{\Omega}\right)$ – множині всіх двічі неперервно диференційованих у $\bar{\Omega}$ функцій, що задовольняють на межі області $\partial\Omega$ умову

$$u(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in\partial\Omega. \qquad (4.2)$$

Нехай далі P означає довільну точку на площині. Припустимо, що функція $u_0(P)$ реалізує мінімум функціонала $F(u)$ на зазначеній множині. Згідно з необхідною умовою існування екстремуму функціонала на кривій u_0, його варіація повинна дорівнювати нулю, тобто

$$\delta J(u_0)=0.$$

Скористаємося другим означенням варіації функціонала з цією метою. Позначимо через t довільне дійсне число та через $\eta(P)$ – довільну припустиму функцію, що належить множині $C_0^2\left(\bar{\Omega}\right)$. Очевидно, що

$$F(u_0+t\eta)\ge F(u_0).$$

Якщо функція η фіксована, то $F(u_0+t\eta)$ є функцією незалежної змінної t, яка має мінімум при $t=0$. Але тоді необхідно

$$\frac{d}{dt}F(u_0+t\eta)\big|_{t=0}=0. \qquad (4.3)$$

Знайдемо

$$F(u_0+t\eta)=\iint_{\Omega}\left[\left(\vec{\nabla}(u_0+t\eta)\right)^2-2f\cdot(u_0+t\eta)\right]d\Omega=$$

$$=\iint_{\Omega}\left[\left(\vec{\nabla}u_0+t\vec{\nabla}\eta\right)^2-2f(u_0+t\eta)\right]d\Omega=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\vec{\nabla}u_0\right)^2+2t\left(\vec{\nabla}u_0,\vec{\nabla}\eta\right)+t^2\left(\vec{\nabla}\eta\right)^2-2f\left(u_0+t\eta\right)\right]d\Omega=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\vec{\nabla}u_0\right)^2-2fu_0\right]d\Omega+2t\iint\limits_{\Omega}\left(\left(\vec{\nabla}u_0,\vec{\nabla}\eta\right)-f\eta\right)d\Omega+t^2\iint\limits_{\Omega}\left(\vec{\nabla}\eta\right)^2d\Omega. \qquad (4.4)$$

Продиференціюємо за t вираз для $F\left(u_0+t\eta\right)$, потім покладемо $t=0$. Прирівнюючи отриманий результат до нуля, знайдемо

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\left(\vec{\nabla}u_0,\vec{\nabla}\eta\right)-f\eta\right)d\Omega=0. \qquad (4.5)$$

За першою формулою Гріна (див. додаток 1) маємо

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\vec{\nabla}u_0,\vec{\nabla}\eta\right)d\Omega=-\iint\limits_{\Omega}\eta\Delta u_0 d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega}\eta\frac{\partial u_0}{\partial n}dS, \qquad (4.6)$$

де n – зовнішня нормаль до межі області $\partial\Omega$. Оскільки функція $\eta\in C_0^2\left(\bar{\Omega}\right)$, то вона задовольняє умови (4.2), тому контурний інтеграл в (4.6) дорівнює нулю, і тоді рівність (4.5) набуде вигляду

$$-\iint\limits_{\Omega}\eta\left(\Delta u_0+f\right)d\Omega=0. \qquad (4.7)$$

З основної леми варіаційного числення випливає, на підставі довільності функції $\eta\left(P\right)$,

$$\Delta u_0+f\left(P\right)=0\Rightarrow-\Delta u_0=f\left(P\right). \qquad (4.8)$$

Таким чином, функція, що реалізує мінімум функціонала (4.1), задовольняє рівняння Пуассона (4.8), тобто є його розв'язком. І розв'язок задачі про мінімум функціонала (4.1) на множині функцій, що задовольняють умову (4.2) – це розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

До рівняння (4.8) із крайовими умовами (4.2) зводиться, наприклад, задача про прогин мембрани, закріпленої по межі, під дією нормального навантаження; функція $f\left(P\right)$ пропорційна цьому навантаженню. Функціонал (4.1) пропорційний потенціальної енергії вигнутої мембрани, тобто тут маємо справу з частковим випадком принципу мінімуму потенціальної енергії.

До розв'язку рівняння Пуассона $\Delta u=-2$ зводяться задачі скруту стержнів, поперечний переріз яких збігається з областю Ω. Рівнянням Пуассона моделюється, наприклад, стаціонарний тепловий процес із внутрішніми джерелами й інші процеси.

Приклад 2. Задача Неймана для рівняння Пуассона

Математична задача Неймана зводиться до розв'язку рівняння

$$-\Delta u=f\left(P\right) \qquad (4.9)$$

при крайових умовах

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{4.10}$$

У випадку теплових задач крайова умова (4.10) відповідає теплоізоляції межі $\partial\Omega$, тобто тепловий потік дорівнює нулю.

Розв'язання. Зазначимо, що при розв'язанні задачі Неймана потрібно пам'ятати – ця задача не має розв'язку при довільній функції $f\left(P\right)$, і неважко знайти умову, яку ця функція повинна задовольняти. Із цією метою проінтегруємо (4.9) в області Ω:

$$-\iint_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega \tag{4.11}$$

Використовуючи першу формулу Гріна (див. додаток 1), одержимо

$$\iint_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds \tag{4.12}$$

і за умовою (4.10) з урахуванням рівностей (4.11), (4.12) маємо

$$\iint_{\Omega} f\left(P\right) d\Omega = 0\,. \tag{4.13}$$

Очевидно, що, якщо задача Неймана розв'язана, то вона має нескінченну множину розв'язків, що відрізняються між собою на сталий доданок. Якщо цю сталу вибрати так, щоб розв'язок $u\left(P\right)$ задовольняв ту ж умову, що й дана функція $f\left(P\right)$, тобто $\int_{\Omega} u\left(P\right) d\Omega = 0$, то такий розв'язок задачі Неймана буде єдиним.

Можна довести [9], що у варіаційній постановці задача Неймана зводиться до знаходження функції, що реалізує мінімум функціонала такого вигляду:

$$F\left(u\right) = \iint_{\Omega} \left[\left(\vec{\nabla} u\right)^2 - 2fu \right] d\Omega \tag{4.14}$$

на множині припустимих функцій, які не обов'язково задовольняють крайову умову (4.10), оскільки ця умова природна [9].

Приклад 3. Змішана задача для рівняння Пуассона

Інтегрування рівняння Пуассона (4.9) при змішаних крайових умовах

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma\left(P\right) u \Big|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{4.15}$$

де n – зовнішня нормаль до межі області; $\sigma\left(P\right)$ – невід'ємна функція, відмінна від тотожного нуля, зводиться до варіаційної задачі про знаходження мінімуму функціонала такого вигляду [9]:

$$F(u)=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\vec{\nabla}u\right)^2-2fu\right]d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega}\sigma u^2 dS\,. \qquad (4.16)$$

При цьому припустимі функції, на яких відшукується мінімум функціонала (4.16), не обов'язково повинні задовольняти крайову умову (4.15), яка є природною [9] для рівняння Пуассона.

Наведемо ***варіаційні постановки для бігармонічного рівняння***

$$\Delta^2 u=f(P), \qquad (4.17)$$

де $\Delta^2 u=\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ (бігармонічний оператор).

Якщо $f(P)=q(x,y)/D$, то рівняння (4.17) можна розглядати як рівняння рівноваги тонкої пластини, під дією нормального тиску інтенсивності $q(x,y)$, D – циліндрична жорсткість пластини при вигині. Функція $u(x,y)$ в цьому випадку є нормальним прогином пластини. Рівняння вигину пластин (4.17) відоме в технічній літературі як рівняння Софі Жермен.

Найбільш часто зустрічаються умови закріплення країв пластини, які моделюються такими крайовими умовами:

а) жорстке защемлення

$$u\big|_{\partial\Omega}=0\,;\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\,; \qquad (4.18)$$

б) вільне опирання

$$u\big|_{\partial\Omega}=0\,;M_n=-D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}=0\,, \qquad (4.19)$$

де M_n – згинальний момент [16];

n,τ – нормаль і дотична до межі області;

ν – коефіцієнт Пуассона;

s – довжина дуги.

При цьому необхідно пам'ятати, що $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial n}$;

в) на вільному краї

$$M_n=-D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\Big|_{\partial\Omega}=0\,, \qquad (4.20)$$

$$Q_n=\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}+(1-\nu)\left[\frac{\partial^3 u}{\partial n\partial\tau^2}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)\right]\Bigg|_{\partial\Omega}=0\,,$$

де Q_n – узагальнена перерізуюча сила [16]; $\dfrac{1}{\rho}$ – кривизна межі $\partial\Omega$.

У більшості прикладних задач використовуються змішані крайові умови, тобто на різних ділянках межі можуть бути задані різні типи крайових умов.

Крайові задачі для ***бігармонічного рівняння*** зводяться до еквівалентної варіаційної задачі знаходження мінімуму функціонала такого вигляду:

$$F(u)=\iint\limits_{\Omega}\left[(\Delta u)^2+2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]-2fu\right]d\Omega \tag{4.21}$$

на множині функцій, що задовольняють принаймні кінематичні (головні) крайові умови. Головними умовами для рівняння (4.17) є:

а) $u\big|_{\partial\Omega}=0$; б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$.

Зазначимо, що у випадку жорсткого защемлення пластини функціонал (4.21) спрощується й набуває вигляду

$$F(u)=\iint\limits_{\Omega}\left[(\Delta u)^2-2fu\right]d\Omega. \tag{4.22}$$

До мінімізації функціонала (4.22) зводиться також задача про вигин вільно опертої пластини у випадку, якщо межа області прямолінійна.

§2. Метод Рітца

Для знаходження функції, що дає значення функціонала $F(u)$, близьке до мінімального, Рітц у 1908 році запропонував простий та ефективний метод. Суть його викладемо на прикладі розв’язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

Відповідно до методу Рітца шукана функція представляється у вигляді лінійної комбінації так званих базисних (координатних) функцій $\{u_i(P)\}_{i=1}^{N}$, тобто у вигляді

$$u(P)=\sum_{i=1}^{N}C_i u_i(P). \tag{4.23}$$

Система функцій $\{u_i(P)\}_{i=1}^{\infty}$ називається ***системою базисних функцій***, якщо вона задовольняє такі умови:

1) u_i задовольняє крайові умови;

2) $\{u_i(P)\}_{i=1}^{\infty}$ – лінійно незалежні функції;

3) $\left\{u_i\left(P\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ – повна система функцій.

Для даного випадку система функцій повинна задовольняти такі крайові умови:

$$u_i\left(P\right)\Big|_{\partial\Omega}=0,\left(i=1,2,...,N\right).$$

Підставивши вираз (4.23) у функціонал (4.1) і виконавши необхідне диференціювання, одержимо

$$F\left(C_1,C_2,...,C_N\right)=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}C_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{N}C_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2-2f\sum_{i=1}^{N}C_iu_i\right]d\Omega,$$

тобто функціонал перетворився у функцію N змінних $C_1,C_2,...C_N$.

Оскільки шукаємо мінімум цієї функції, то числа $C_1,C_2,...C_N$ повинні задовольняти систему рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial C_j}=0,\ \left(j=1,2,\ldots N\right)$$

Одержана система зазвичай називається системою Рітца. Для даного прикладу ця система має такий вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial C_j}=2\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}C_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x}+\left(\sum_{i=1}^{N}C_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)\frac{\partial u_j}{\partial y}-fu_j\right]d\Omega=0,$$

або

$$\begin{aligned}&C_1\left[u_1,u_1\right]+C_2\left[u_2,u_1\right]+........+C_n\left[u_n,u_1\right]=\left(f,u_1\right),\\&C_1\left[u_1,u_2\right]+C_2\left[u_2,u_2\right]+........+C_n\left[u_n,u_2\right]=\left(f,u_2\right),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&C_1\left[u_1,u_n\right]+C_2\left[u_2,u_n\right]+........+C_n\left[u_n,u_n\right]=\left(f,u_n\right),\end{aligned}\qquad(4.24)$$

де

$$\left[u_i,u_j\right]=\left[u_j,u_i\right]=\iint\limits_{\Omega}\left(\vec{\nabla}u_i,\vec{\nabla}u_j\right)d\Omega,\qquad(4.25)$$

$$\left(f,u_i\right)=\iint\limits_{\Omega}f\cdot u_id\Omega.\qquad(4.26)$$

З лінійної системи (4.24), тобто з системи Рітца, визначаються коефіцієнти $C_1,C_2,...,C_N$. Функція $u\left(P\right)$ з коефіцієнтами, отриманими з системи (4.24), є наближеним розв’язком задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Точність наближення залежить від вибору координатних функцій $u_k\left(P\right)$ і від їхньої кількості [9]. Матриця системи Рітца є матрицею Грама для послідовності функцій $\left\{u_i\right\}$ і, оскільки ці функції лінійно незалежні, то визначник матриці Грама не дорівнює 0. Таким чином, система (4.24) має тільки один розв’язок.

Аналогічно можна одержати систему Рітца для бігармонічного рівняння. Вона буде мати вигляд (4.24), відмінними будуть формули (4.25), а саме

$$\left[u_i,u_j\right]=\left[u_j,u_i\right]=\iint_{\Omega}[\Delta u_i\Delta u_j+\left(1-\nu\right)(2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u_j}{\partial x\partial y}-$$
$$-\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2})]d\Omega, \tag{4.27}$$

де $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

§3. Структура розв’язку крайової задачі

Однією з основних проблем, що виникає при використанні варіаційних методів, у випадку скільки-небудь складної форми області або комбінованих крайових умов, є побудова послідовності координатних функцій, що задовольняють задані крайові умовами.

Один із можливих варіантів розв’язку цієї проблеми базується на використанні теорії R-функцій [11] і побудові структурних формул (структур) розв’язку крайових задач.

Структура розв’язку крайової задачі це пучок функцій $u=B\left(\Phi,\omega,\omega_i\right)$, які задовольняють задані крайові умови при будь-якому виборі функції Φ (достатнє число раз диференційованої) – невизначеної компоненти структури розв’язку. Функції $\omega\left(x,y\right)=0,\ \omega_i\left(x,y\right)=0$ є рівняннями межі області або окремої її ділянки.

Так, наприклад, для задачі Діріхле (крайові умови (4.2) структура розв’язку має вигляд

$$u=\omega\cdot\Phi, \tag{4.28}$$

де $\omega\left(x,y\right)=0$ – рівняння границі $\partial\Omega$. Очевидно, що яка б не була двічі диференційована функція $\Phi\left(x,y\right)$, функції з пучка (4.28) будуть задовольняти крайові умови (4.2).

Якщо розглядається задача про згин жорстко закріпленої пластини (крайові умови (4.18)), то структура розв’язку визначається формулою

$$u=\omega^2\Phi. \tag{4.29}$$

Очевидно, що при будь-якому виборі $\Phi\left(x,y\right)\in C^4\left(\Omega\right)$, функції з пучка (4.29) задовольняють умови (4.18). Дійсно, $u\big|_{\partial\Omega}=0$, оскільки $\omega\left(x,y\right)\big|_{\partial\Omega}=0$, і друга умова $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$ також виконується, оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial n}=2\omega\frac{\partial\omega}{\partial n}\Phi+\omega^2\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\omega\left(2\frac{\partial\omega}{\partial n}\Phi+\omega\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}=0.$$

У випадку неоднорідної задачі Діріхле, тобто, якщо

$$u\big|_{\partial\Omega}=\varphi, \tag{4.30}$$

де $\varphi(x,y)$ – досить гладка, визначена скрізь в $\bar{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$, то структуру розв'язку можна подати у вигляді

$$u=u_1+u_0, \tag{4.31}$$

$$u_1=\omega\,\Phi,\quad u_0=\varphi.$$

У багатьох випадках інформація про функцію φ задається різними формулами на різних ділянках межі $\partial\Omega$. Нехай, наприклад,

$$\varphi=\varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i\ \left(i=1,2,...,m\right), \tag{4.32}$$

де φ_i – функції, визначені на $\bar{\Omega}$.

Припустимо, що $\omega_i=0$ рівняння ділянок $\partial\Omega_i$ і $\omega_i>0$ поза $\partial\Omega_i$. Можна перевірити, що функція

$$\varphi=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i}{\omega_i}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega_i}} \tag{4.33}$$

задовольняє умови (4.32). Формула (4.33), отримана В.Л. Рвачовим, називається формулою ***"склейкі"*** і є узагальненням класичної формули Лагранжа [11].

Наприклад, побудуємо функцію u_0, що задовольняє умови:

$u_0\big|_{\partial\Omega_1}=0,\ \ \partial\Omega_1:\ \omega_1=4-x^2-y^2=0,$

$u_0\big|_{\partial\Omega_2}=3\left(3-2x\right)/2,\ \ \partial\Omega_2:\ \omega_2=4-(x-3)^2-y^2=0,$

$u_0\big|_{\partial\Omega_3}=3(3+2x)/2,\ \ \partial\Omega_3:\omega_3=4-(x+3)^2-y^2=0,$

$$u_0=\frac{\frac{0}{\omega_1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(3-2x\right)}{\omega_2}+\frac{3}{2}\frac{\left(3+2x\right)}{\omega_3}}{\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_3}}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(3-2x\right)\cdot\omega_1\cdot\omega_3+\left(3+2x\right)\omega_1\omega_2}{\omega_1\cdot\omega_2+\omega_1\cdot\omega_3+\omega_2\cdot\omega_3}. \tag{4.34}$$

Для побудови структури розв'язку необхідно вміти будувати функції $\omega(x,y)$ або $\omega_i(x,y)$, які задовольняють умови

$$\omega(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in\partial\Omega,$$
$$\omega(x,y)>0,\ \forall(x,y)\in\Omega.$$

Проблема побудови функцій такого типу була розв'язана В.Л. Рвачовим, завдяки відкриттю спеціального класу елементарних функцій, названих R-функціями.

§4. R-функції
4.1. Предикат (логічна формула) області

Методи побудови функції $\omega(x,y)$ для практично довільної області досить докладно викладені в монографіях В. Л. Рвачова [10, 11].

Як було показано В. Л. Рвачовим, опис геометричних об'єктів можна формалізувати, тобто перевести на точну математичну мову, якщо скористатися однією з ***алгебр Буля*** – так званою ***алгеброю множин***. Оснований на алгебрі множин опис складних геометричних об'єктів є деякого роду початковою формалізацією, від якої, використовуючи R-функції, можна здійснювати перехід до звичайного аналітичного опису за допомогою рівнянь або нерівностей.

Для наочності викладу будемо розглядати множини (геометричні місця точок) на площині *XOY*. Множину, що містить всі точки площини, позначимо *E*, а множину, що не містить ні однієї точки (порожня множина) – $\varnothing$. Множину *E* назвемо основною множиною. Все викладене нижче буде правильно не тільки у випадку, коли *E* площина, але й для будь-якої непустої множини.

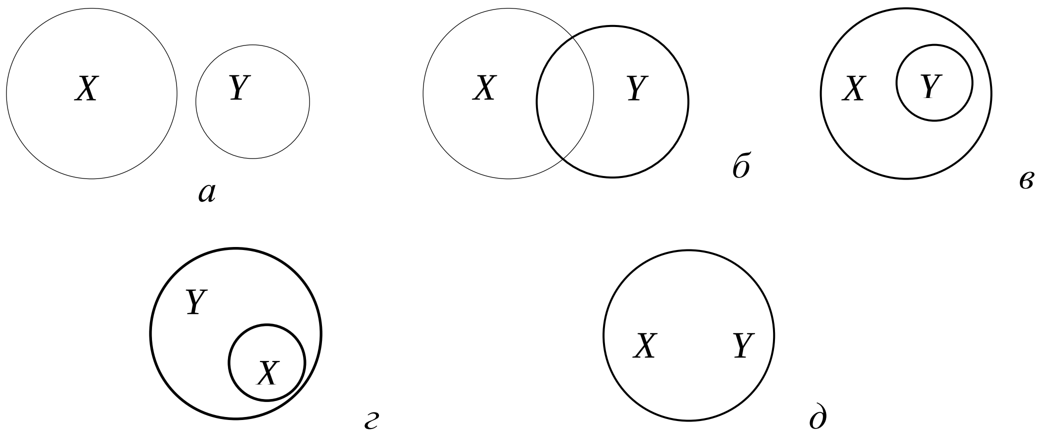
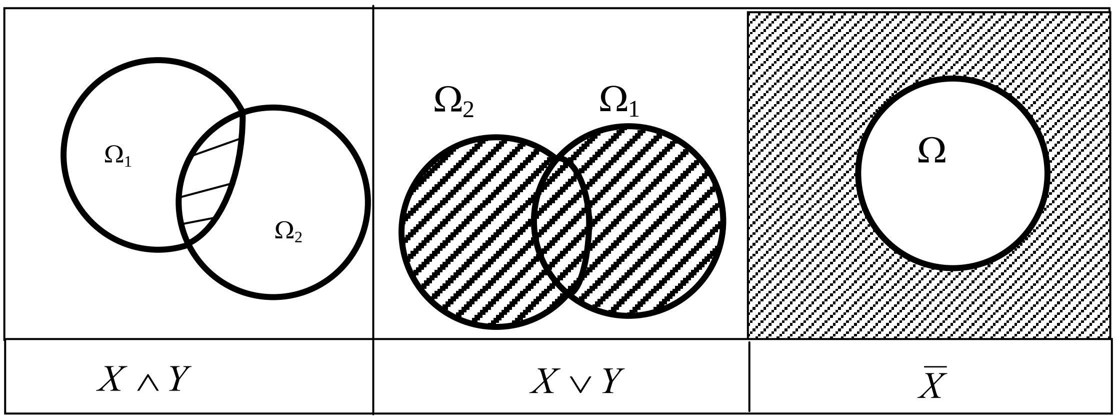


Рис. 4.1

Нехай *X* і *Y* – деякі множини, що є частинами множини *E.* Для зручності будемо зображати ці множини у вигляді деяких областей. На рис. 4.1 показані можливі різні випадки взаємного розміщення множин X і Y на площині.



а *б* *в*

Рис. 4.2.

Випадок, зображений на рис. 4.1 *в*, коли множина Y є частиною множини X, будемо позначати формулою $Y \subset X$. Аналогічно, якщо X є частиною Y (рис. 4.1 *г*), будемо позначати $X \subset Y$. Якщо ж множини X і Y збігаються (рис. 4.1 *д*), використаємо запис $X=Y$.

Розглянемо тепер множини, показані штрихуванням на рис. 4.2. Перша з цих множин складається із точок, що належать множинам X і Y одночасно. Ця множина називається *перетином* множин X і Y та позначається $X \cap Y$. Очевидно, що якщо множини X та Y розташовані так, як показано на рис. 4.1 *в*, то $X \cap Y = Y$. Якщо ж ці множини не перетинаються (рис. 4.1 *а*), то $X \cap Y = \varnothing$.

Множина, зображена на рис. 4.2 *б*, складається із точок, що належать хоча б одній із множин X або Y. Ця множина називається ***об'єднанням множин*** X і Y та позначається $X \cup Y$.

Кожній множині $X \subset E$ будемо ставити у відповідність множину $\bar{X}$, що включає всі точки множини E, що не ввійшли в множину X. Множину $\bar{X}$ будемо називати ***запереченням*** або ***доповненням*** множини X (рис. 4.2 *в*).

Перетин, об'єднання й заперечення можна розглядати як деяку систему операцій, які можна виконувати над множинами. Безпосередньою перевіркою можна переконатися в тім, що для цих операцій справедливі такі закони й правила:

1) *комутативні закони*

$$X \cap Y = Y \cap X, \;\; X \cup Y = Y \cup X\,;$$

2) *асоціативні закони*

$$\left(X\cap Y\right)\cap Z=X\cap\left(Y\cap Z\right),\ \left(X\cup Y\right)\cup Z=X\cup\left(Y\cup Z\right);$$

3) *ідемпотентні закони*

$$X\cap X=X,\ X\cup X=X;$$

4) *дистрибутивні закони*

$$(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z),$$

$$(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z);$$

5) *правила, що відносяться до множин E та $\varnothing$*:

$$X\cap E=X,\quad X\cap\varnothing=\varnothing,\quad X\cup E=E,\quad X\cup\varnothing=X;$$

6) *правила, що відносяться до операції "заперечення"*:

$$\overline{\overline{X}}=X,\quad \overline{E}=\varnothing,\quad \overline{\varnothing}=E;$$

7) *правило де Моргана*

$$\overline{X\cap Y}=\overline{Y}\cup\overline{X},\ \overline{X\cup Y}=\overline{Y}\cap\overline{X};$$

8) *закон "логічного протиріччя"*

$$X\cap\overline{X}=\varnothing;$$

9) *закон "виключеного третього"*

$$X\cup\overline{X}=E.$$

Система множин з уведеними для них операціями $X\cap Y$, $X\cup Y$ і $\overline{X}$, що володіють наведеними вище властивостями, є одним із прикладів так званої алгебри Буля.

За допомогою символів наведених операцій над множинами можна одержувати складні формули, які також будуть визначати деякі множини.

Перша з алгебр Буля, так зване ***числення висловлень***, була побудована в рамках математичної логіки. Звідси перейшла термінологія в інші булеві алгебри. Так, наведені вище властивості 8 і 9 називаються відповідно законом логічного протиріччя й законом виключеного третього. Розглянуті операції $X\cap Y$, $X\cup Y$, $\overline{X}$ називають логічними операціями над множинами, а задання геометричних об'єктів за допомогою цих формул, логічним заданням цих об’єктів.

Розглянута в попередньому параграфі система операцій над множинами (алгебра множин), складеними з елементів основної множини *E*, зберігає всі свої властивості при будь-якому виборі непустої множини *E.* Розглянемо окремий випадок, коли множина *E* складається лише з одного елемента, який позначимо символом 1. Порожню множину позначимо $\varnothing$, а для операцій $X\cap Y$ і $X\cup Y$ введемо символи $X\wedge Y$ й $X\vee Y$ відповідно. Операцію $X\wedge Y$ назвемо кон’юнкцією, а операцію $X\vee Y$ – диз’юнкцією.

Усяка логічна формула $Y=F(x_1,x_2,...,x_n)$, побудована за допомогою символів кон’юнкції, диз’юнкції і заперечення, може тепер розглядатися як функція, аргументи якої вибираються із множини $B_2 = \{0;1\}$, і значення якої також належать множині B_2. Такі функції називають ***булевими або перемикальними функціями.***

Виникає питання: чи не можна будь-яку булеву функцію задати у вигляді формули, написаної за допомогою зазначених символів? Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 1. Усяку булеву функцію $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ можна подати у вигляді складної функції (суперпозиції), одержаною за допомогою функцій $X \wedge Y$, $X \vee Y$ і $\overline{X}$.

Оскільки операції $X \wedge Y$, $X \vee Y$ і $\overline{X}$ мають властивості 1–9, то над усякою булевою функцією $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, поданою у вигляді суперпозиції (складної функції) цих операцій, можна виконувати різні тотожні перетворення, обумовлені вказаними властивостями. Наприклад, можна здійснювати так звану мінімізацію (спрощення) диз’юнктивних нормальних форм [11]. Методи мінімізації булевих функцій добре вивчені й досить повно описані у літературі. Відзначимо лише такі дві формули, якими зручно користуватися при спрощенні булевих функцій:

$$F \vee (\Phi \wedge F) = F, \ (F \wedge X) \vee (\Phi \wedge \bar{X}) = F.$$

Перша із цих формул називається формулою "поглинання", а друга – формулою "склеювання".

З огляду на властивість $X \cup X = X$ одержуємо:

$$(F \wedge X) \vee (F \wedge \overline{X}) = (F \wedge X) \vee (F \wedge \overline{X}) \vee F.$$

Ця формула називається формулою неповного "склеювання". Один з методів спрощення диз’юнктивних нормальних форм [11] полягає в тому, що спочатку виконуються неповні склеювання, а потім усілякі поглинання.

Булеві функції іноді називають функціями ***двозначної логіки***. Ця назва пояснюється тим, що досить двох символів 0 і 1 для того, щоб перебрати всілякі значення аргументів булевих функцій і самих булевих функцій.

Булеві функції допускають просту геометричну інтерпретацію. Нехай Ω є область у множині $\Re^n$. Уведемо функцію

$$\Omega = \Omega(x) = \begin{cases} 0, \forall x \notin \Omega, \\ 1, \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

яку називають характеристичною функцією або двозначним предикатом області Ω. Тут $x = (x_1, x_2, ...x_n)$. Нехай Ω_i $(i = 1, 2, ...n)$ – характеристичні функції областей Ω_i, а $Y = F(X_1, X_2, ..., X_n)$ – булева функція. Оскільки $\Omega_i \in B_2$, то має сенс вираз $F(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n) \in B_2$, який в одних точках $\Re^n$

може дорівнювати нулю, а в інших – одиниці. Множина $\Omega \subset \Re^n$ з характеристичною функцією $\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n)$ цілком визначається булевою функцією F та областями $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Області $\Omega_1, ..., \Omega_n$. будемо називати опорними для області Ω. Формула $F(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n)$ визначає логіку формування області Ω за допомогою областей Ω_i. Припустимо, що Ω_1 й Ω_2 – предикати для відповідних областей, розташованих на площині $\Re^2$. Очевидно, що предикат $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ – визначає перетин областей $\Omega_1 \cap \Omega_2$, а предикат $\Omega_1 \vee \Omega_2$ – об'єднання $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Наведена геометрична інтерпретація булевих функцій використовується для побудови предикатів складних областей.

Логічні операції $\bar{X}$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$ визначаються значеннями, наведеними в табл. 4.1.

Таблиця 4.1.

X	0	0	1	1	Змінна X
Y	0	1	0	1	Змінна Y
$\bar{X}$	1	1	0	0	Заперечення X
$X \wedge Y$	0	0	0	1	Кон’юнкція
$X \vee Y$	0	1	1	1	Диз’юнкція

Далі предикати для множини точок, обумовлені деякою умовою (рівнянням, нерівністю), будемо позначати цією ж умовою, укладеною в дужки. Наприклад, предикат множини точок, що заповнюють коло одиничного радіуса, будемо позначати так:

$$\Omega_1 = \left(\sigma_1 = \left(1 - x^2 - y^2\right) \geq 0\right). \qquad (4.35)$$

Аналогічно характеристичні функції (предикати)

$$\Omega_2 = (\sigma_2 = y \geq 0), \quad \Omega_3 = \left(\sigma_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \geq 0\right),$$
$$\Omega_4 = (\sigma_4 = \left(1 - x - y\right) \geq 0), \qquad (4.36)$$

які відповідають верхній півплощині, внутрішності еліпса й півплощини, розташованої ліворуч від прямої $x + y = 1$.

За допомогою функцій алгебри логіки, маючи у своєму розпорядженні деяку систему опорних предикатів вигляду $\Omega_i = (\omega_i(x) \geq 0)$ або $\Omega_i = (\omega_i(x) = 0)$ або тими й іншими, можна будувати предикати для нових геометричних об’єктів (умовно названих складними).

Приклад 1. Напишемо логічну формулу (предикат) області, зображеної на рис. 4.3

Розв'язання. Як вихідні візьмемо такі множини:

$$\Omega_1 = (\sigma_1 = \left(a^2 - x^2\right) \geq 0)$$

– вертикальна смуга між прямими $x = \pm a$;

$$\Omega_2 = (\sigma_2 = (b^2 - y^2) \geq 0)$$

– горизонтальна смуга між прямими $y = \pm b$;

$$\Omega_3 = (\sigma_3 = \left(R^2 - x^2 - (y-b)^2\right) \geq 0)$$

– внутрішність кола радіуса R із центром у точці $(0, b)$. Область, зображена на рис. 4.3, визначається логічною формулою

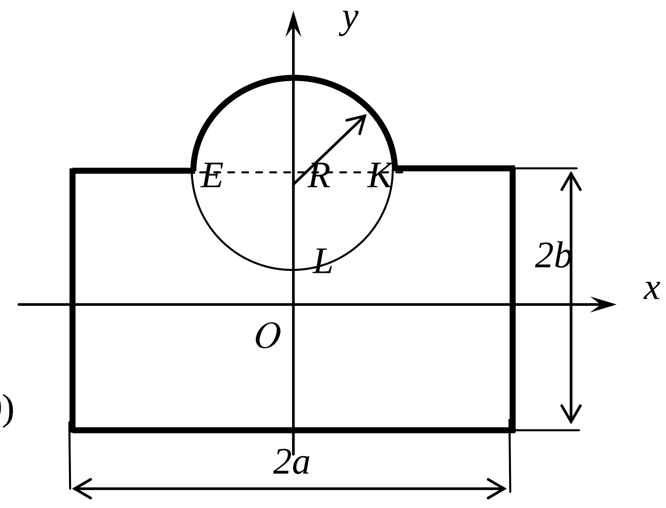


Рис. 4.3

$$\Omega = \left(\Omega_1 \wedge \Omega_2\right) \vee \Omega_3. \qquad (4.37)$$

Приклад 2. Написати логічну формулу (предикат) для області, зображеної на рис. 4.4

Розв'язання

$$\Omega_1 = \left(\sigma_1 = \left(R^2 - x^2 - y^2\right) \geq 0\right)$$

– внутрішність кола радіуса R із центром на початку координат;

$$\Omega_2 = \left(\sigma_2 = \left(x^2 - a^2\right) \geq 0\right)$$

– частина площини, розташована поза вертикальною смугою, обмеженою прямими $x = \pm a$;

$$\Omega_3 = \left(\sigma_3 = \left(y^2 - b^2\right) \geq 0\right)$$

– частина площини, розташована поза горизонтальною смугою, обмеженою прямими $y = \pm b$;

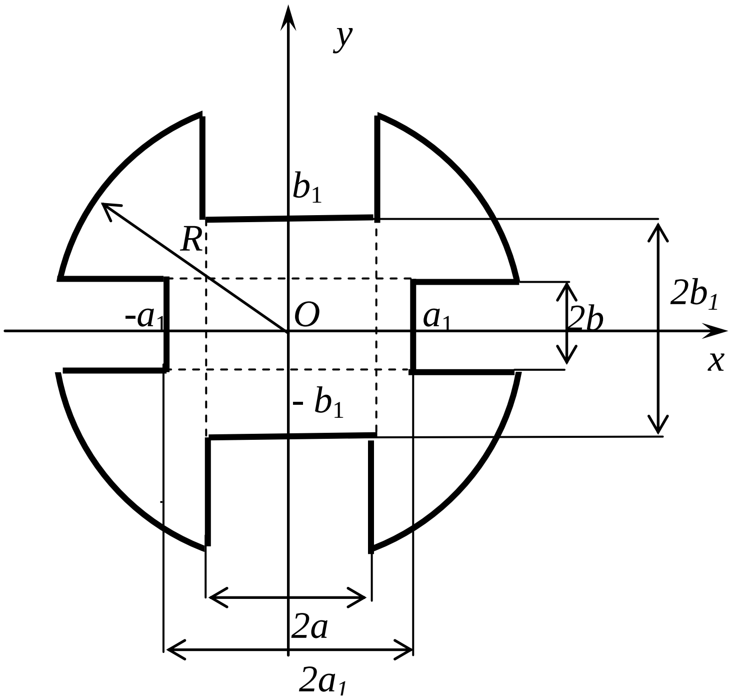


Рис. 4.4

$\Omega_4 = \left(\sigma_4 = \left(b_1^2 - y^2\right) \geq 0\right)$ – горизонтальна смуга, обмежена прямими $y = \pm b_1$;

$\Omega_5 = \left(\sigma_5 = \left(a_1^2 - x^2\right) \geq 0\right)$ – вертикальна смуга, обмежена прямими $x = \pm a_1$.

Розглянуту область можна задати логічною формулою

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \left(\left(\Omega_2 \vee \Omega_4 \right) \wedge \left(\Omega_3 \vee \Omega_5 \right) \right).$$

Приклад 3. Напишемо логічну формулу для області Ω, зображеної на рис. 4.5.

Розв'язання

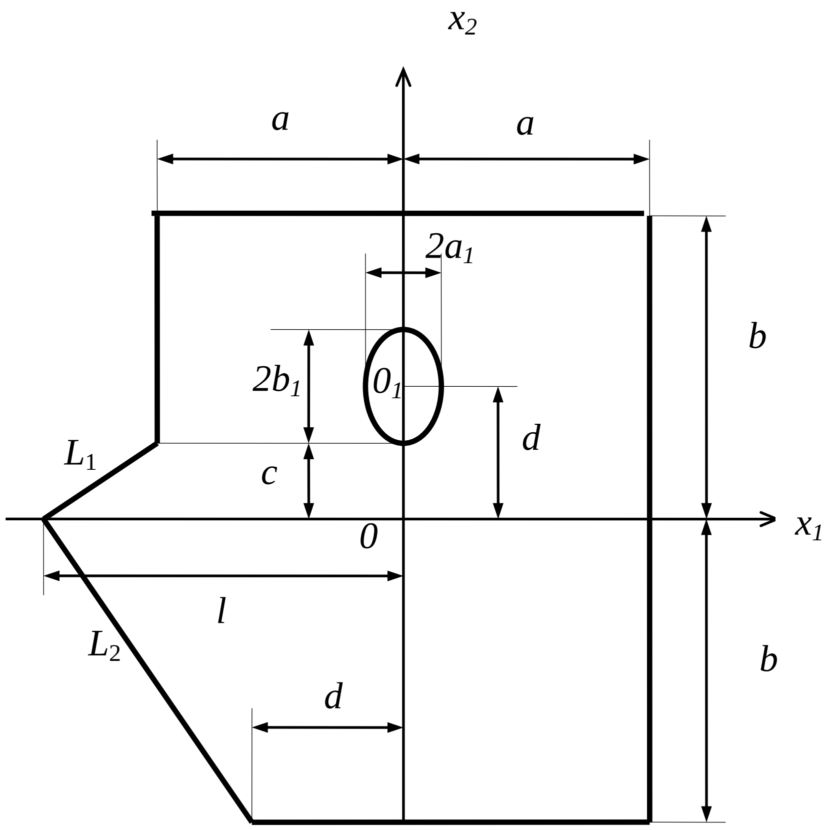


Рис. 4.5

Як вихідні виберемо такі множини:

$$\Omega_1 = \left(\sigma_1 = \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 - d)^2}{b_1^2} - 1 \right) \geq 0 \right)$$ – зовнішність еліпса з півосями a_1, b_1 й центром у точці $(0, d)$;

$\Omega_2 = (\sigma_2 = \left(b^2 - x_2^2 \right) \geq 0)$ – горизонтальна смуга між прямими $x_2 = \pm b$;

$\Omega_3 = (\sigma_3 = \left(a - x_1 \right) \geq 0)$ – ліва півплощина відносно прямої $x_1 = a$;

$\Omega_4 = (\sigma_4 = \left(a + x_1 \right) \geq 0)$ – права півплощина відносно прямої $x_1 = -a$;

$\Omega_5 = (\sigma_5 = \left(-x_2 + \frac{c}{l - a}(x_1 + l) \right) \geq 0)$ – півплощина нижче прямої L_1;

$\Omega_6 = (\sigma_6 = \left(x_2 + \dfrac{b}{l-d}(x_1 + l) \right) \geq 0)$ – півплощина вище прямої L_2;

$\Omega_7 = (\sigma_7 = x_2 \geq 0)$ – верхня півплощина.

Неважко перевірити, що область Ω визначається логічною формулою

$$\Omega = ((\Omega_1 \wedge (((\Omega_5 \wedge \Omega_6) \vee (\Omega_4 \wedge \Omega_7)) \wedge \Omega_3)) \wedge \Omega_2).$$

Побудова характеристичних функцій заданих областей являє собою деякий проміжний етап на шляху побудови рівняння границь (або ділянок границь).

Предикат області служить базою для її аналітичного опису, тобто побудови функції $\omega(x, y)$, за допомогою якої можуть бути задані рівняння границі області або її окремих ділянок.

Доведено теорему [11], суть якої полягає в тому, що, коли для заданої області Ω побудована логічна формула

$$\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m),$$

де F – відома булева функція, $\Omega_i = (\sigma_i(x, y) \geq 0), i = 1, 2, ..., m$ – опорні предикати для підобластей, то побудова функції, що описує цю область або її границю $\omega(x, y) = f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m) \geq 0$, здійснюється формальною заміною символів Ω_i на $\sigma_i(x, y)$, логічних операцій $-$, $\wedge$, $\vee$ – відповідними R- операціями $\bar{\ }$, $\wedge *$, $\vee *$. При цьому функція $\omega(x, y)$ має такі властивості:

$$\begin{gathered} \omega(x, y) = 0, (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega(x, y) > 0, (x, y) \in \Omega, \\ \omega(x, y) < 0, (x, y) \notin \Omega. \end{gathered} \tag{4.38}$$

4.2. R-функції

Серед функцій звичайних дійсних аргументів існують такі, знак яких цілком визначається заданням знаків аргументів і не залежить від їхніх абсолютних величин. Саме такі функції були названі R-функціями. Наприклад, для функцій

$$u_1 = x_1 x_2 x_3 \varphi(x_1, x_2, x_3) \quad (\varphi(x) > 0),$$

$$u_2 = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2},$$

$$u_3 = \left(2e^{x_1 + x_2 + x_3} + 1\right)\left(x_1^2 + (x_2 - 1)^2\right)$$

залежність їхніх знаків від знаків аргументів така:

Таблиця 4.2.

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3
–	–	–	–	–	+
–	–	+	+	–	+
–	+	–	+	+	+
–	+	+	–	+	+
+	–	–	+	+	+
+	–	+	–	+	+
+	+	–	–	+	+
+	+	+	+	+	+

Тобто наведені функції є R-функції. Для більш точного визначення R-функцій розглянемо предикат

$$S_2(x)=\begin{cases}0, & \forall x<0\\ 1, & \forall x\geq 0\end{cases}.$$

Функція $y=f(x_1,...,x_n)$ називається *R-функцією* [10], якщо існує така булева функція $Y=F(X_1,X_2,....,X_n)$, що виконується рівність

$$S_2\left(f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right)=F\left(S_2\left(x_1\right),S_2\left(x_2\right),...,S_2\left(x_n\right)\right).$$

Із цього визначення випливає, що одній і тій же булевій функції відповідає нескінченна множина *R-функцій*. Сукупність усіх *R-функцій*, які відповідають деякій булевій функції, називають гілкою множини *R-функцій*.

4.3. R-функції, що відповідають булевим функціям двох змінних

Функції

$$Z_1=\frac{1}{1+\alpha}\left(x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+x_2^2-2\alpha(x_1,x_2)\,x_1\,x_2}\right);$$

$$Z_2=\frac{1}{1+\alpha}\left(x_1+x_2+\sqrt{x_1^2+x_2^2-2\alpha(x_1,x_2)x_1x_2}\right)$$

при $-1<\alpha(x_1,x_2)\leq 1$ є *R-функціями*. Щоб установити, до яких гілок ці функції відносяться, визначимо знаки цих функцій у кожній з координатних чвертей (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Знаки аргументів x_1	Знаки аргументів x_2	$S_2(x_1)$	$S_2(x_2)$	Знак функції Z_1	$S_2(Z_1)$	Знак функції Z_2	$S_2(Z_2)$
–	–	0	0	–	0	–	0
–	+	0	1	–	0	+	1
+	–	1	0	–	0	+	1
+	+	1	1	+	1	+	1

Функція Z_1 додатна лише тоді, коли додатні обидва аргументи, отже, вона відповідає кон'юнкції $X_1 \wedge X_2$. Функція Z_2 додатна, якщо додатний хоча б один з її аргументів, і від'ємна, якщо обидва аргументи від'ємні. Отже, функція Z_2 відповідає диз'юнкції $X_1 \vee X_2$.

Зазначимо, що функції Z_1 й Z_2 не мають інших нулів, крім тих, які відокремлюють зони їхніх додатних значень від зон від'ємних значень. Помножуючи Z_1 й Z_2 на додатні функції, можна одержати різні R-функції, що відповідають кон'юнкції й диз'юнкції. R-функції, що відповідають запереченню $Y = \overline{X}$, одержимо за формулою

$$y = -x\varphi,$$

де φ – довільна додатна функція.

Уведемо позначення

$$x_1 \wedge_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2});$$

$$x_1 \vee_\alpha x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}); \qquad (4.39)$$

$$\overline{x} = -x,$$

де α – довільна величина, яка знаходиться в межах $-1 < \alpha \le 1$.

Функцію $x_1 \wedge_\alpha x_2$ було названо R-*кон'юнкцією*, функцію $x_1 \vee_\alpha x_2$ – R-*диз'юнкцією*, а $\overline{x}$ – R-*запереченням*. Оскільки кон'юнкція, диз'юнкція й заперечення становлять повну систему [11], то R-кон'юнкція, R-диз'юнкція і R-заперечення становлять повну відносно класу R-функцій систему.

Очевидно, що при такому виборі α множник даної системи строго додатний. Заміна його будь-яким іншим таким же множником (див. нижче приклад 3) не вплине на знаки відповідних формул. У той же час завдяки наявності множника $(1+\alpha)^{-1}$ формули мають деякі корисні властивості диференціального характеру.

Наведемо деякі окремі випадки системи (4.39).

1. Система R_0, що відповідає $\alpha \equiv 0$:

$$\bar{x} \equiv -x;$$

$$\begin{matrix} x_1 \wedge_0 x_2 \\ x_1 \vee_0 x_2 \end{matrix} \equiv \left\{ x_1 + x_2 + S\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \right.$$

де $S = -1$ для R-кон'юнкції й $S = 1$ для R-диз'юнкції.

2. Система R_1, що відповідає $\alpha \equiv 1$:

$$\bar{x} \equiv -x;$$

$$\begin{matrix} x_1 \wedge_1 x_2 \\ x_1 \vee_1 x_2 \end{matrix} \equiv \left\{ \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + S\left|x_1 - x_2\right|\right). \right.$$

Легко переконатися, що $x_1 \wedge_1 x_2 \equiv \min(x_1, x_2)$, а $x_1 \vee_1 x_2 \equiv \max(x_1, x_2)$. Оскільки операції $\min(x_1, x_2)$ й $\max(x_1, x_2)$ належать до найбільш просто й швидко реалізованих на ЕОМ, використання даної системи R-*операцій* приводить до істотно менших обчислень порівняно з іншими досить повними системами. Недоліком системи є неможливість диференціювання операцій $x_1 \wedge_1 x_2$ і $x_1 \vee_1 x_2$ при $x_1 = x_2$.

Для порівняння відзначимо, що операції $x_1 \wedge_0 x_2$ й $x_1 \vee_0 x_2$ мають розриви похідних лише в одній точці $(x_1 = 0, x_2 = 0)$.

3. Деякі з досить повних систем R-функцій виходять із системи R_0 шляхом введення деякого додатного множника. Наприклад, система R_0^m має вигляд

$$\bar{x} \equiv -x;$$

$$\begin{matrix} x_1 \wedge_0^m x_2 \\ x_1 \vee_0^m x_2 \end{matrix} \equiv \left\{ (x_1 + x_2 + S\sqrt{x_1^2 + x_1^2})(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}. \right.$$

Введення множника $(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}$ привело до того, що функції $x_1 \wedge_0^m x_2$ й $x_1 \vee_0^m x_2$ на відміну від $x_1 \wedge_0 x_2$ і $x_1 \vee_0 x_2$ належать до класу C^m в точці (0;0).

§5. Рівняння межі довільної області

5.1. Перетин областей

Нехай D_1 і D_2 є області, що описані нерівностями $f_1(x, y) \geq 0$ й $f_2(x, y) \geq 0$ відповідно. Розглянемо таку теорему.

Теорема 1. Якщо $z = \varphi_1(u, v)$ є R-функція, що відповідає операції кон'юнкції $U \wedge V$, то область *D*, визначена нерівністю

$$\psi_1(x, y) \equiv \varphi_1\left(f_1(x, y); f_2(x, y)\right) \geq 0$$

є перетином областей D_1 і D_2.

Доказ. Оскільки функція $\varphi_1(u,v)$ є R-функцією, що відповідає кон'юнкції, то можна записати таке:

$$S\left(\varphi_1\left(f_1(x,y); f_2(x,y)\right)\right) = S\left(f_1(x,y)\right) \wedge S\left(f_2(x,y)\right) =$$
$$= \left(f_1(x,y) \ge 0\right) \wedge \left(f_2(x,y) \ge 0\right) = D_1 \wedge D_2,$$

що й потрібно було довести.

Приклад. Нехай D_1 – смуга, визначена нерівністю $f_1 = \left(a^2 - x^2\right) \ge 0$, а область D_2 – смуга, визначена нерівністю $f_2 = \left(b^2 - y^2\right) \ge 0$ (рис. 4.6).

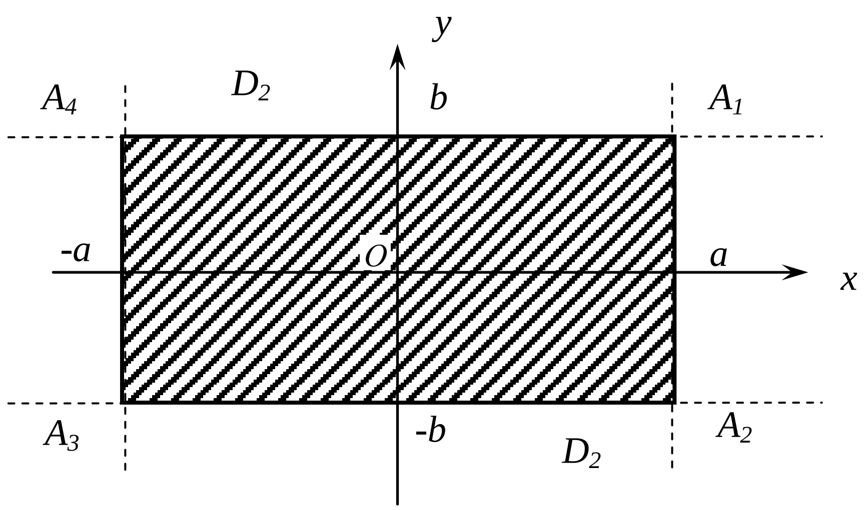


Рис. 4.6

Скористаємося R-кон'юнкцією $x \wedge_\alpha y$. Тоді нерівність

$$\omega(x,y) = \left(f_1 \wedge_\alpha f_2\right) \ge 0$$

або

$$(a^2 - x^2) \wedge_\alpha (b^2 - y^2) \ge 0$$

визначає прямокутник $A_1A_2A_3A_4$. У розкритому вигляді цю нерівність можна записати таким чином:

$$\frac{1}{2}[a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2) - 2\alpha(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}] \ge 0, \quad (4.40)$$
$$-1 < \alpha \le 1.$$

Зокрема, при $\alpha = 1$ одержимо

$$\frac{1}{2}[a^2 + b^2 - x^2 - y^2 - \left|a^2 - b^2 - x^2 + y^2\right|] \ge 0. \quad (4.41)$$

Рівність у цій формулі досягається лише на межі прямокутника $A_1A_2A_3A_4$, тому рівняння

$$a^2+b^2-x^2-y^2-\left|a^2-b^2-x^2+y^2\right|=0$$

є рівнянням цього прямокутника.

Нерівність (4.41) має більш простий вигляд порівняно з нерівністю (4.40). Але у той час, як ліва частина нерівності (4.40) є функцією, диференційованою всюди, за винятком вершин прямокутника $A_1A_2A_3A_4$, ліва частина нерівності (4.41) не є диференційованою в точках гіперболи $a^2-b^2-x^2+y^2=0$. У багатьох задачах вимога диференційованості може виявитися досить істотною, і тоді доводиться поступатися простотою формул і вибирати більш складні вирази.

Для того щоб ліва частина нерівності, що визначає прямокутник $A_1A_2A_3A_4$, мала всюди на площині безперервні частинні похідні до *k*-го порядку включно, можна скористатися R-функцією

$$Z=(u\wedge_\alpha v)(\sqrt{u^2+v^2})^k \qquad (-1<\alpha<1).$$

Тоді одержимо

$$\left((a^2-x^2)\wedge_\alpha (b^2-y^2)\right)\cdot\left(\sqrt{(a^2-x^2)^2+(b^2-y^2)^2}\right)^k\ge 0.$$

Для функції *Z* уведемо таке позначення:

$$u\wedge_\alpha^k v=(u\wedge_\alpha v)(\sqrt{u^2+v^2})^k.$$

Теорема. Якщо $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ – функції, що мають неперервні частинні похідні до *k*-го порядку включно, то функція

$$\psi(x,y)=\left(f_1(x,y)\right)\wedge_\alpha^k\left(f_2(x,y)\right) \quad \left(-1<\alpha<1\right)$$

також має неперервні частинні похідні до *k*-го порядку включно.

Теорема. Якщо області D_i (i=1, 2, ..., m) визначаються відповідно нерівностями $f_i(x,y)\ge 0$ $(i=1,2,...,m)$, то область *D*, що представляє собою перетин областей D_i $(i=1,2,...,m)$, визначається нерівністю

$$((...(((f_1\wedge_{\alpha_1} f_2)\wedge_{\alpha_2} f_3)\wedge_{\alpha_3} f_4\wedge_{\alpha_4}...)\wedge_{\alpha_{m-1}} f_m)\ge 0,$$

де α_i (i=1,2, ..., m) – довільні величини, що знаходяться в межах $-1<\alpha_i<1$.

Дана формула являє собою свого роду згортку системи нерівностей $f_i(x,y)\ge 0$ $(i=1,2,....,m)$ в єдину нерівність із лівою частиною у вигляді єдиного аналітичного виразу. Будемо застосовувати також скорочений запис зазначеної згортки

$$((...(((f_1\wedge_{\alpha_1} f_2)\wedge_{\alpha_2} f_3)\wedge_{\alpha_3} f_4)\wedge_{\alpha_4}...)\wedge_{\alpha_{m-1}} f_m)=\mathop{\wedge_{\alpha_i}}_{i=1}^{m-1} f_i.$$

Зазначимо, що при $\alpha\ne 1$ асоціативний закон щодо операції $\wedge_\alpha$ не має місця. Тому величина виразу залежить, загалом кажучи, від тієї послідовності, у якій виконується згортка. І лише при $\alpha=1$ порядок згортки байдужий і дужки можуть бути опущені.

5.2. Об'єднання областей

Теорема. Якщо області D_1, D_2 визначаються відповідно нерівностями $f_1(x,y)\ge 0$ і $f_2(x,y)\ge 0$, функція $z=\varphi_2(u,v)$ є R-функція, що відповідає диз'юнкції $U\vee V$, то область D, що представляє собою об'єднання областей D_1 і D_2, визначається нерівністю

$$\psi_2(x,y)\equiv\varphi_2\left(f_1(x,y);\, f_2(x,y)\right)\ge 0.$$

Приклад. Область D_1 є прямокутником з вершинами в точках $A_1(2,1); A_2(-2,1); A_3(-2,-1); A_4(2,-1)$, а область D_2 – коло $2y-x^2-y^2\ge 0$ (рис. 4.7, *а*).

Прямокутник $A_1A_2A_3A_4$ визначається нерівністю

$$\left(5-x^2-y^2-\left|3-x^2+y^2\right|\right)\ge 0.$$

Тоді область *D*, що представляє собою об'єднання областей D_1 і D_2 (рис. 4.7, *б*), можна визначити нерівністю

$$(5-x^2-y^2-\left|3-x^2+y^2\right|)\wedge_\alpha(2y-x^2-y^2)\ge 0.$$

Приймаючи для простоти $\alpha=1$, одержимо

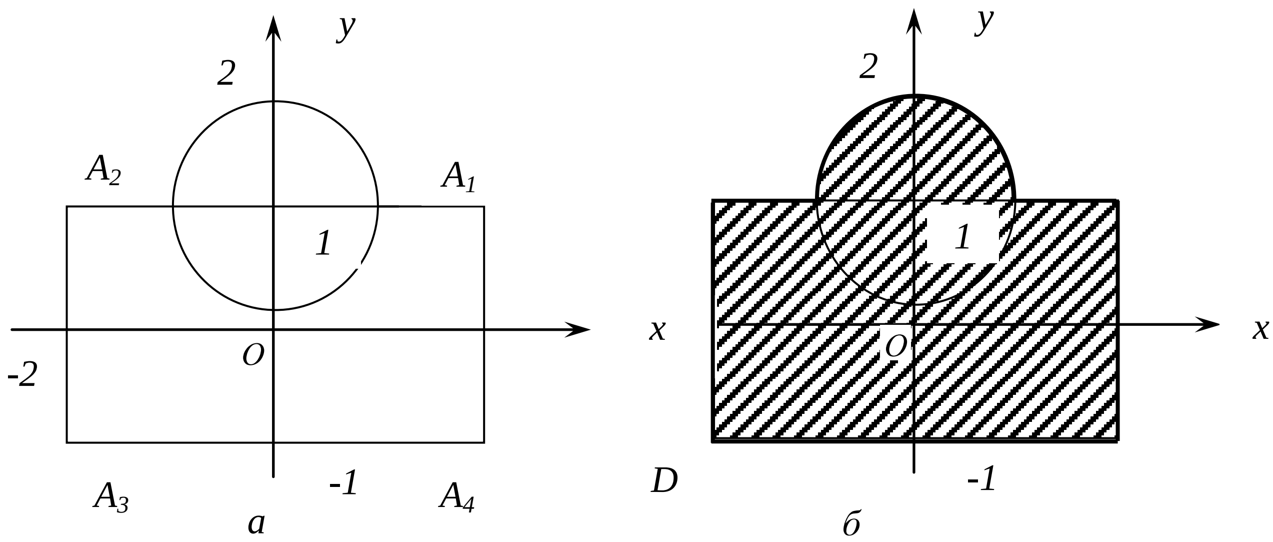


Рис. 4.7.

$$\frac{1}{2}[5-x^2-y^2-\left|3-x^2+y^2\right|+2y-x^2-y^2+$$
$$+\left|5-x^2-y^2-\left|3-x^2+y^2\right|-2y+x^2+y^2\right|]\ge 0$$

або

$$5-2x^2-2y^2+2y-\left|3-x^2+y^2\right|+\left|5-2y-\left|3-x^2+y^2\right|\right|\geq 0.$$

Теорема. Якщо функції $f_1(x,y)$ й $f_2(x,y)$ мають неперервні частинні похідні до *k*-го порядку включно, то функція

$$\psi_2(x,y)=\left(f_1(x,y)\right)\vee_\alpha^k\left(f_2(x,y)\right),$$

де

$$u\vee_\alpha^k v=(u\vee_\alpha v)(\sqrt{u^2+v^2})^k,$$

також має неперервні частинні похідні до *k*-го порядку включно.

Теорема. Якщо області $D_i (i=1,2,...,m)$ визначаються відповідно нерівностями $f_i(x,y)\geq 0$ $(i=1,2,...,m)$, то їх об'єднання визначається нерівністю $\mathop{\vee_{\alpha_i}}\limits_{i=1}^{m-1} f_i\equiv((...(((f_1\vee_{\alpha_1} f_2)\vee_{\alpha_2} f_3)\vee_{\alpha_3}...)\vee_{\alpha_{m-1}} f_m)\geq 0.$

5.3. Рівняння границі довільної області

Теорема. Якщо області $D_1,D_2,...,D_m$ визначаються відповідно нерівностями

$$f_1(x,y)\geq 0,\ f_2(x,y)\geq 0,...,\ f_m(x,y)\geq 0,$$

а логіка побудови області *D* задана булевою функцією $D=F(D_1,D_2,...,D_m)$, то нерівність

$$\psi(x,y)\equiv\varphi\left(f_1(x,y),f_2(x,y),...,f_m(x,y)\right)\geq 0,$$

де $\varphi(u_1,u_2,...,u_m)$ – *R*-функція, що відповідає булевій функції $D=F(D_1,D_2,...,D_m)$, визначає область *D*.

Доказ. Оскільки $\varphi(u_1,u_2,...,u_m)$ є *R*-функцією, що відповідає булевій функції $F(D_1,D_2,...,D_m)$, то

$$S\left(\psi(x,y)\right)=S\left(\varphi\left(f_1(x,y),f_2(x,y),...,f_m(x,y)\right)\right)=$$

$$=F\left(S\left(f_1(x,y)\right),S\left(f_2(x,y)\right),...,S\left(f_m(x,y)\right)\right)=F(D_1,D_2,...,D_m).$$

Отже, предикат

$$\left(\varphi\left(f_1(x,y),f_2(x,y),...,f_m(x,y)\right)\geq 0\right)$$

набуває значення істинності в точках області *D*, визначеною логічною формулою $D=F(D_1,D_2,...,D_m)$, й значення хибності поза цією областю.

На підставі цієї теореми рівняння границь областей, зображених на рис. 4.3–4.5, відповідно можуть бути подані у вигляді

$$\omega_1(x,y)=(\sigma_1\wedge_\alpha\sigma_2)\vee_\alpha\sigma_3;$$

$$\omega_2(x,y) = \sigma_1 \wedge_\alpha \left((\sigma_2 \vee_\alpha \sigma_4) \wedge_\alpha (\sigma_3 \vee_\alpha \sigma_5) \right);$$

$$\omega_3(x,y) = \left(\left(\sigma_1 \wedge_\alpha \left(\left((\sigma_5 \wedge_\alpha \sigma_6) \vee_\alpha (\sigma_4 \wedge_\alpha \sigma_7) \right) \wedge_\alpha \sigma_3 \right) \right) \wedge_\alpha \sigma_2 \right).$$

§ 6. Побудова координатних послідовностей функцій

Той факт, що функція $\omega(x,y)$, побудована за допомогою R-операцій, дорівнює нулю тільки в точках границі області, є досить істотним.

Наприклад, якби мова йшла про розв'язок задачі вигину мембрани (рис. 4.3) і як розв'язок була б обрана функція

$$u = \omega_1 P, \tag{4.42}$$

де

$$\omega_1(x,y) = \left(a^2 - x^2\right)\left(b^2 - y^2\right)\left(R^2 - x^2 - (y-b)^2\right),$$

то, очевидно, що формула (4.42) була б структурою рішення крайової задачі, тому що крайова умова (4.2) виконується $\forall (x,y) \in \partial\Omega$. Однак при будь-якому виборі функції $\Phi \in C^2$ функція $u(x,y)$, визначена за формулою (4.42), дорівнює нулю не тільки на границі області, але й на відрізку ЕК і дузі ELK, що лежать усередині області. У той час із фізичних міркувань ясно, що прогин мембрани на цих ділянках відмінний від нуля. Таким чином, як би ми не вибирали функцію $\Phi \in C^2$, ми не зможемо достатньою мірою наблизитися до точного рішення. У таких випадках говорять, що структура неповна. Зазначеного недоліку можна уникнути, якщо рівняння границі будувати за допомогою R-функцій.

Маючи у своєму розпорядженні структуру розв'язку, можна побудувати систему координатних функцій. Із цією метою невизначену компоненту подамо у вигляді полінома

$$\Phi(x,y) \approx \sum_{i=1}^{N} C_i \varphi_i(x,y), \tag{4.43}$$

де $\varphi_i(x,y)$ – відомі елементи деякого функціонального простору, що утворюють повну послідовність. Наприклад, якщо $\Phi \in C^k(\Omega \cup \partial\Omega)$, то як $\{\varphi_i\}$ можна вибрати степеневі поліноми, поліноми Чебишева, сплайни [11] і т.д.

У розглянутих вище випадках шукане рішення (4.28), (4.29) з урахуванням (4.43) набуде вигляду

$$u(x,y) \approx u_n(x,y) = \sum_{i=1}^{N} C_i \omega(x,y) \varphi_i(x,y),$$

$$u(x,y) \approx u_n(x,y) = \sum_{i=1}^{N} C_i \omega^2(x,y)\varphi_i(x,y),$$

тобто послідовність координатних функцій визначається як

$$\omega(x,y)\varphi_1,\ \omega(x,y)\varphi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ \omega(x,y)\varphi_n,$$

або в іншому випадку

$$\omega^2(x,y)\varphi_1,\ \omega^2(x,y)\varphi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \omega^2(x,y)\varphi_n,$$

де як φ_i можна вибрати, наприклад, степеневі поліноми $1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots$, тобто

$$\varphi_1 = 1, \varphi_2 = x, \varphi_3 = y, \varphi_4 = x^2, \varphi_5 = xy, \varphi_6 = y^2,$$

і т.д.

§7. Програмуючі системи Поле

Викладена вище методика розв’язання диференціальних рівнянь із частинними похідними в областях складної форми реалізована у вигляді програмуючої системи (ПС) ПОЛЕ, розробленої в Інституті проблем машинобудування АН УРСР. Докладно ПС сімейства ПОЛЕ описується в роботі В.Л. Рвачова й О.М. Шевченко [18]. Система ПОЛЕ надає широкі можливості для розв’язку крайових задач математичної фізики. Користувач цієї системи повинен задавати вихідну інформацію вхідною мовою RL системи ПОЛЕ.

При складанні програми вхідною мовою RL необхідно пам’ятати, що оператори об’єднуються в розділи, які розташовані у такому порядку:

1) розділ описів ***DECLARE***;
2) розділи для завдання геометричної інформації й структури розв’язку ***FUNCTION, OMEGA;***
3) розділ ***PROGRAM;***
4) розділ значень ***VALUE.***

У розділі описів класифіковані змінні, які зустрічаються в тексті наступних розділів. Цей розділ може виглядати таким чином:

DECLARE

BANDX F1; BANDY F2; LINE F3;

CIRCL F4; ELLYX F5; ELLYY F6;

Тут BANDX F1 – смуга, розташована паралельно осі абсцис півшириною *a*, центр якої визначається абсцисою $x = x_0$. У розділі VALUE змінна F1 визначається як $F1 = x_0, a$;

BANDY F2 – смуга, розташована паралельно осі ординат, центр якої визначається ординатою $y = y_0$, півширина *b*. Задання в розділі VALUE:

$F2 = y_0, b;$

LINE F3 – півплощина, розташована ліворуч від орієнтованої прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ й $B(x_2, y_2)$. Задання в VALUE:

$F3 = x_1, y_1, x_2, y_2;$

CIRCL F4 – частина площини, розташована усередині кола радіусом R із центром у точці x_0, y_0. Задання в розділі VALUE: $F4 = x_0, y_0, R;$

ELLYX F5 – частина площини, розташована усередині еліпса, більша вісь якого $2a$ паралельна осі абсцис, менша $2b$ паралельна осі ординат і центр знаходиться в точці x_0, y_0. Задання в розділі VALUE: $F5 = x_0, y_0, a, b;$

ELLYY F6 – частина площини, розташована усередині еліпса $(x - x_0)^2 / a^2 + (y - y_0)^2 / b^2 = 1$. Задання в розділі VALUE: $F6 = x_0, y_0, a, b$.

У розділі DECLARE також описується повна система функцій $\{\varphi_i\}$ у вигляді SF P (степеневі поліноми), SFTH P (поліноми Чебишева), SPLI (сплайни). У розділі VALUE для змінної P указується прямокутник, описаний навколо заданої області Ω. Це задання здійснюється так: $P = k, x_1, y_1, x_2, y_2$, де k – номер полінома; (x_1, y_1) – координати лівої нижньої вершини прямокутника, (x_2, y_2) – координати правої верхньої вершини цього прямокутника.

У розділах OMEGA і FUNCTION задається геометрична інформація про форму області й ділянки її границь у вигляді логічних формул, інформація про структуру розв’язку у вигляді математичних формул. У розділі PROGRAM здійснюється задання спеціальних операторів функцій.

У проблемно орієнтованій мові RL і системі ПОЛЕ є широкий набір засобів візуалізації результатів. Різні інтегральні й диференціальні характеристики відбиваються на моніторі у вигляді таблиць, графіків, картин ліній рівня, аксонометричних побудов.

Для перегляду результатів розрахунків у системі ПОЛЕ використовується оператор

Filexy (pr, Fun),

де pr = nx,X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max}; прямокутник, що включає в себе задану область, X_{min},Y_{min} – координати його нижньої лівої вершини; X_{max},Y_{max} – координати його правої верхньої вершини; Fun – досліджувана функція, nx – число розбивок області на елементарні прямокутники, для практичних досліджень досить покласти nx=20 або 30. Оператор створює файли з розширенням .3m, для перегляду яких досить натиснути Enter.

Цей оператор підключає до робочої програми діалогову графічну систему, що дозволяє проводити побудову аксонометричних проекцій, креслити картини ліній рівня функції, будувати графіки у різних перетинах; можливий запис графічної інформації у файл.

Записана в зовнішній пам'яті графічна й числова інформація може бути оброблена спеціальною системною програмою DEMO.

Нижче наведені приклади задач, вирішених за допомогою системи ПОЛЕ.

Вивчення системи ПОЛЕ і її вхідної мови почнемо з розгляду найпростіших задач.

Приклад 1. Побудувати рівняння границі складної області, наведеної на рис. 3.4. Одержати картини ліній рівня шуканої функції й аксонометричну проекцію.

Розв'язання. Текст програми мовою RL для прикладу 1:

```
declare  >розділ описів;
        circl f1;
        mbandy f2;
        mbandx f3;
        bandy f5;
        bandx f4;
> Рівняння області;
  omega
        w=f1&((f2!f4)&(f3!f5));
program
      filexy(r1r,ww); >видача результатів;
        ww(w)=w;
  value
 const=1,1,1,1,10,1,1;   >службовий оператор;
 tabl=1,1,1,1,1,0,1,1,0,0;   >службовий оператор;
  f1=0,0,rad;
  f2=0,a;    f3=0,b;
  f4=0,b1;    f5=0,a1;
  a=0.8; b=0.8;a1=1.5;b1=1.5;rad=2.5;
  r1r=20,-2.5,-2.5,2.5,2.5;
end
```

Результати розв'язку задачі наведені на рис. 4.8–4.9.

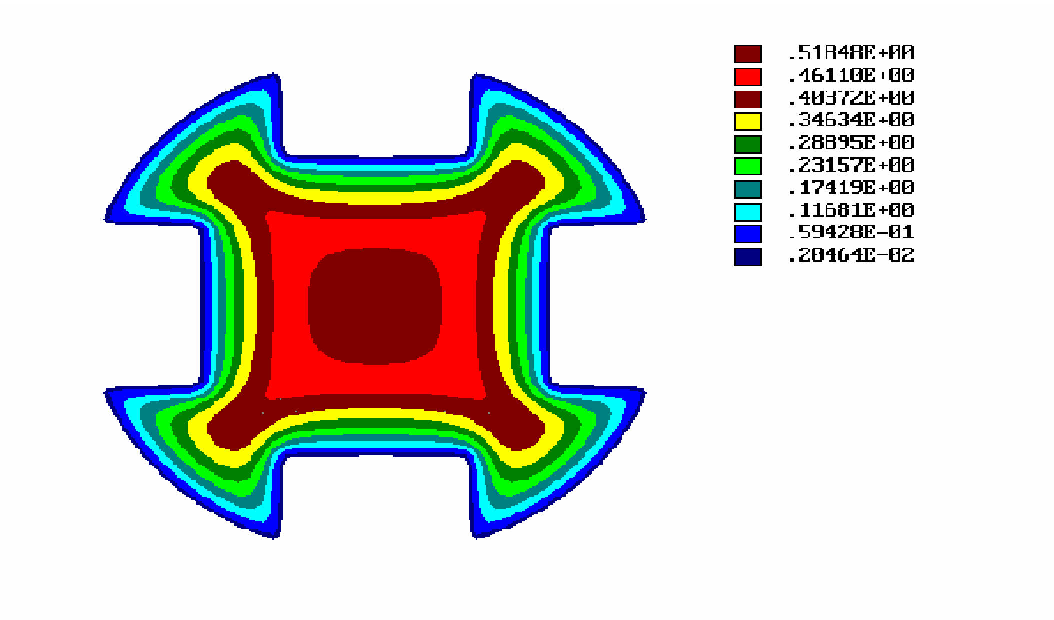


Рис. 4.8. Картина ліній рівня функції $\omega(x,y)$

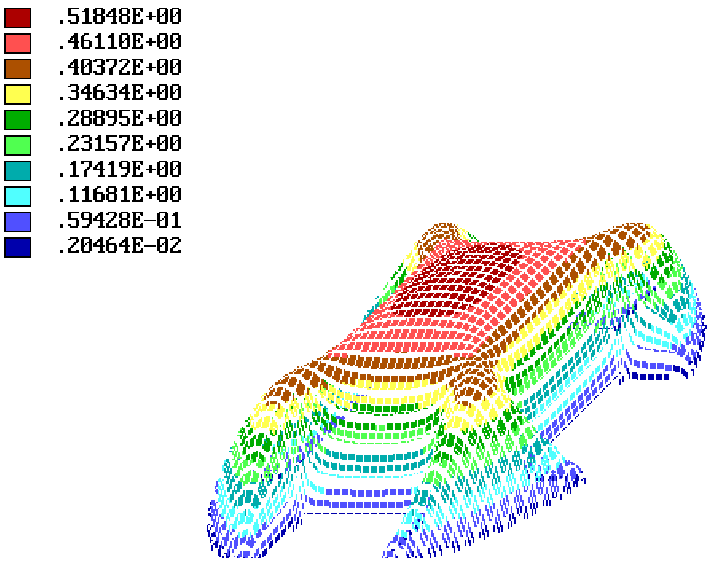


Рис. 4.9. Аксонометрична проекція функції $\omega(x,y)$

Приклад 2. Побудувати функцію $\omega(x,y)$, додатну в заданій області Ω (рис. 4.10) і рівну нулю на границі $\partial\Omega$. Одержати картини ліній рівня шуканої функції й аксонометричну проекцію.

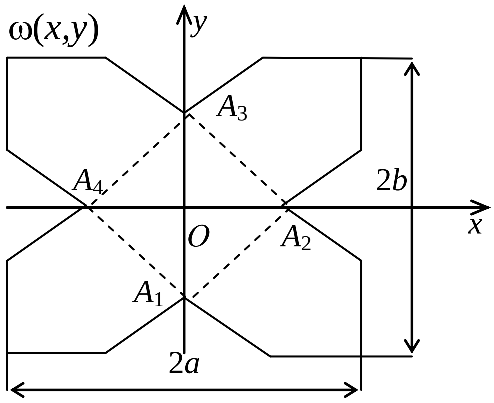


Рис. 4.10

Розв'язання. Логічна формула для заданої області може бути подана у вигляді

$$\omega = \left(F_1 \wedge F_2\right) \wedge \left(\left(F_3 \wedge F_4\right) \vee \left(F_5 \wedge F_6\right)\right),$$

де F_1 – вертикальна смуга, симетрична відносно осі $0y$, шириною $2a$; F_2 – горизонтальна смуга шириною $2b$, симетрична відносно осі Ox; F_3, F_5 – півплощина, розташована вище прямих A_1A_2 і A_4A_1 відповідно, F_4, F_6 – півплощини, розташовані нижче прямих A_2A_3 і A_3A_4 відповідно. Ці півплощини задаються за допомогою прямих A_1A_2 $(F_3), A_2A_3$ $(F_5), A_3A_4$ $(F_4), A_4A_1$ (F_6).

Текст програми мовою RL для прикладу 2:

```
>Рівняння складного геометричного об'єкта;
declare
        bandy f1;
        bandx f2;
        line f3,f4,f5,f6;
>Рівняння області;
  omega
        w=((f3&f4)!(f5&f6))&(f1&f2);
program
      filexy(r1r,ww); >видача результатів;
        ww(w)=w;
  value
 const=1,1,1,1,10 ,1,1; > службові оператори;
 tabl=1,1,1,1,1,0,1,1,0,0; > інформація залежить від типу задачі;
  f1=0,a;   f2=0,a;
  f3=0,-c,c,0;   f4=0,c,-c,0;
  f5=c,0,0,c;   f6=-c,0,0,-c;
  a=1; b=.5; c=0.5;
  r1r=50,-1,-1,1,1;
end
```

Результати наведено на рис. 4.11–4.12.

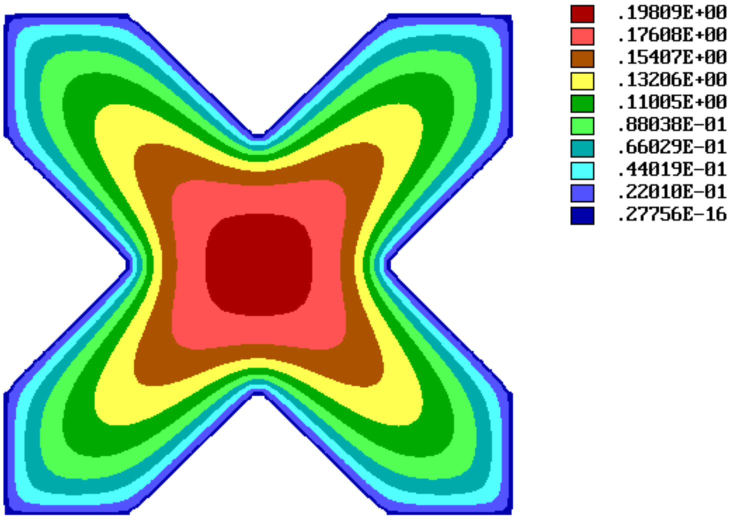


Рис. 4.11. Картина ліній рівня функції ω(x,y)

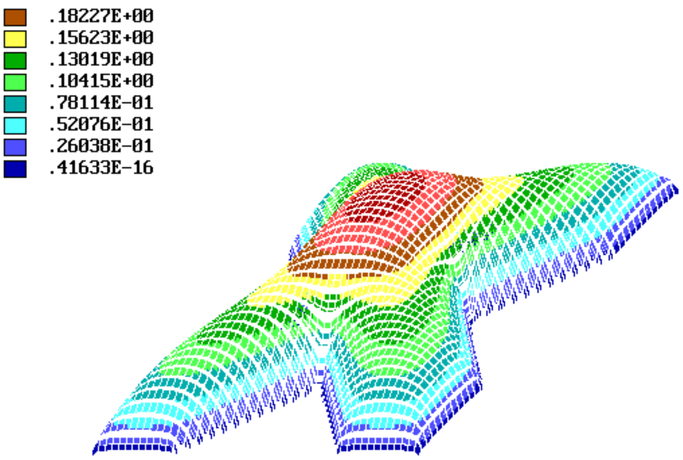


Рис. 4.12. Аксонометрична проекція функції ω(x,y)

Приклад 3. Розрахувати пластину на згин за умови переміщення прямокутного врізу й отвору пластини (рис. 4.13).

Розв'язання. *Математична модель задачі.* Диференціальне рівняння (рівняння Софі Жермен)

$$\Delta^2 W = \frac{q}{D},$$

де D – циліндрична жорсткість пластини.

Крайові умови $\left. W \right|_{\partial\Omega_1} = 0$, $\left. \frac{\partial W}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_1} = 0$,

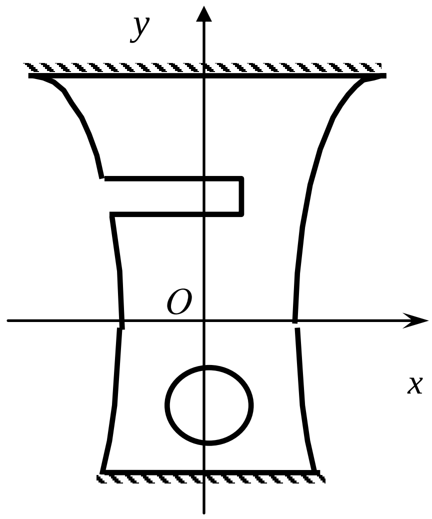


Рис. 4.13

$$M_n\big|_{\partial\Omega_2}=0,\ \left(Q_n+\frac{\partial}{\partial s}M_{n\tau}\right)\Big|_{\partial\Omega_2}=0,$$

де M_n – згинальний момент, Q_n – сила, що перерізує, $M_{n\tau}$ – крутний момент, $n,\ \tau$ – нормаль і дотична до межі області, $\dfrac{\partial}{\partial s}$ – похідна по дузі.

Метод розв'язку: метод Рітца.
Варіаційна постановка задачі: знайти мінімум функціонала

$$J(W)=\iint\limits_{\Omega}D\left[\left(\Delta W\right)^2+2\left(1-\nu\right)\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)-2qW\right]d\Omega$$

на множині функцій, що задовольняють, принаймні, головні умови.
Структура розв'язку: $W=\omega_1^2 P$, де $\omega_1=0$ – рівняння жорстко закріпленої ділянки. Умови на ділянці границі $\partial\Omega_2$ є природними. Апроксимація невизначеного компонента P виконується за допомогою сплайнів B_3.
Текст програми мовою RL:

```
declare
spli p;pol0 e1,e2,e3,e4;
pol2 f1; bandx f2,f3;
bandy f4;
mcircl f5;
omega
      w1=f2;
      w2=f1 ;
      w=-(f3&f4)&(f1&f2)&f5;
function
    r=w;
>Hyperbola is simply supported;
>      u1=w1*w1*w2*p;
>Hyperbola is free;
u1=w1*w1*p;
function
      ur=sum(1,0.0,u1);
```

```
        u=f1;
program
>filexy(rv1,fom);
inspli(s1,fa ,fb );   pro;
title(' deflection');
filexy(rv1,wu);
> tab(rv2,wu);  time;
title(' bending moments ');
>filexy(rv1,mx);>filexy(rv1,my);
>tab(rv2,mx); >   tab(rv2,my);
aa=ai(1);bb=bi(1);       fite=1;
fa(u1)=(u1(i,4)+u1(i,6))*(u1(j,4)+u1(j,6))-
        (1-e1)*(u1(j,6)*u1(i,4)+u1(j,4)*u1(i,6)-
        2.0*u1(i,5)*u1(j,5));
fb(u1)=u1(i,1)*e3;
       mx(u)=(ur(4)+e1*ur(6));
       my(u)=(ur(6)+e1*ur(4));
mxy(u)=(1-e1)*ur(5); wu(u)=ur;
fom(W)=w;
end
value
const=1,1,1,4,2500,1,1;
tabl=4,nx,ny,0,0,   2,1,1,0,0;
      p=1,pr; nx=200;ny=10;
       f1=1,0,0,-a2g,0,b2g; a2g=1; b2g=.25;
f2=.5,2.5;
f3=y3,b3;ay3=1.5;
y3=(1.5,1,2);b3=(.25,.5,2.75);
f4=x4,a4;
x4=(-.75,0,0);    a4=(1,.25,.2);
f5=x5,y5,r5;
r5=(.5,1,.5); x5=(0,0,0); y5=(-1,-2,-.75);
pr=-2,-2,2,3;     rv1=30,pr;
rv2=kx,ky,pr;
s1=k ,pr;              k=3;
r1=kx,ky,pr;   rt=0,0;     kx=10;  ky=10;
e2=10.92;  e3=nagr;  nagr=1;
e4=10.92;  e1=.3;
end
```

Результати наведено на рис. 4.14.

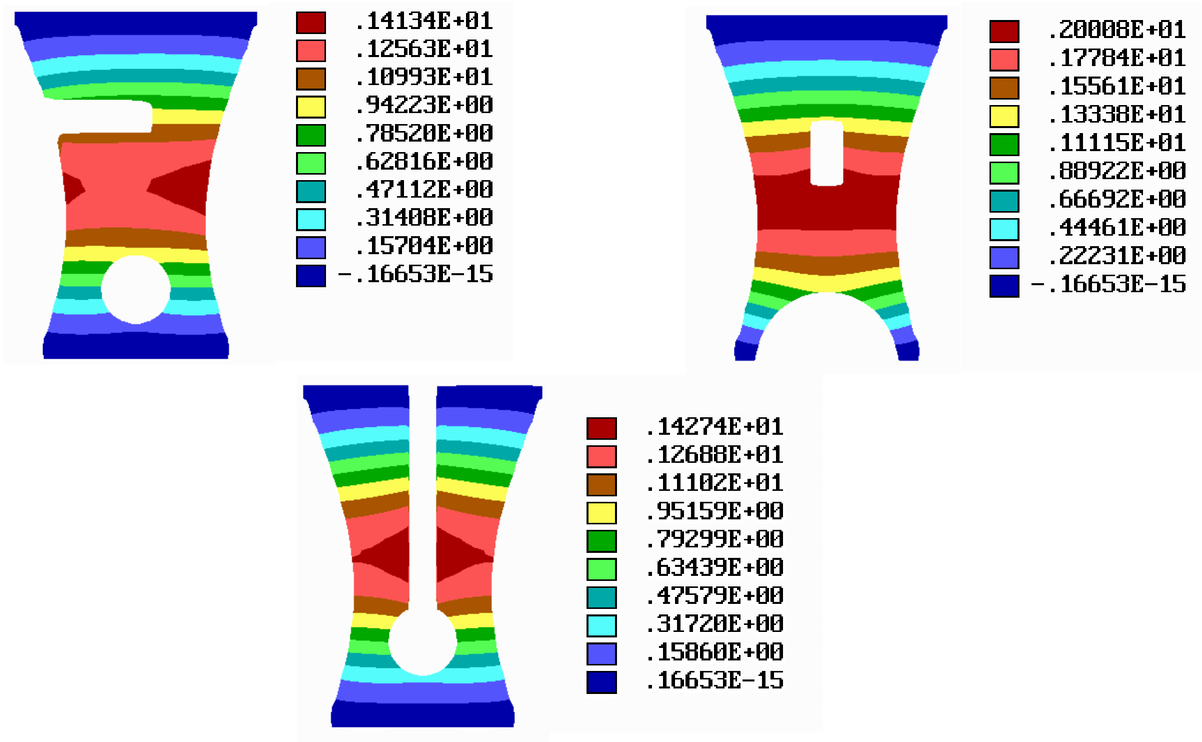


Рис. 4.14. Картина ліній рівня для функції прогину

Приклад 4. Дослідити пружнодеформований стан пластини, що має форму в плані, показану на рис. 4.15, яка вільно обперта по всьому контуру та перебуває під дією $q(x,y)$ рівномірно розподіленого поперечного навантаження.

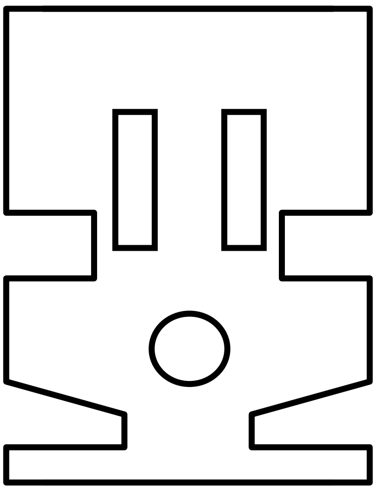


Рис. 4.15

Розв'язання*. Математична модель задачі:* диференціальне рівняння (рівняння Софі Жермен)

$$\Delta^2 W = \frac{q}{D}.$$

Крайові умови: $W\big|_{\partial\Omega} = 0,$

$$M_n\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

де $M_n = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right) = 0.$

Метод розв'язку: метод Рітца.

Варіаційна постановка задачі: знайти мінімум функціонала

$$J(W)=\iint\limits_{\Omega} D\left[\left(\Delta W\right)^2+2(1-\nu)\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)-2qW\right]d\Omega$$

на множині функцій, що задовольняють, принаймні, головні умови.

Структура розв'язку: $W=\omega P$, де $\omega=0$ – рівняння всієї границі області. Апроксимація невизначеного компонента P виконується за допомогою сплайнів B_3.

Текст програми мовою RL:

```
declare
spli p;
pol0 e1,e2,e3,e4;
 bandx f1, f6,f7,f13;    bandy f2,f4,f5;
 mbandy f8,f12;
mcircl f3;
line f9,f10,f11;
omega
w2=f1&f2;
w1=-(F4&f6)&(-(f5&f7))&f3&(-(f13&f12))&w2;
        w3=(-((f9!f10)&f11&f8)&w1)& w2 ;
w=w3;
function
        om=w;
        u1=om*p;
function
        ur=sum(1,0.0,u1);
        u=f1;
program
inspli(s1,fa ,fb ); pro;
 title('          ПРОГИН ');
  tab(rv2,wu);
filexy(rv1,wu); filexy(rv1,mx);
filexy(rv1,my);
           time;
title('       ЗГИНАЛЬНІ НАПРУГИ Mx');
```

```
tab(rv2,mx);
title('      ЗГИНАЛЬНІ НАПРУГИ My');
tab(rv2,my);
aa=ai(1);bb=bi(1);      fite=1;
fa(u1)=(u1(i,4)+u1(i,6))*(u1(j,4)+u1(j,6))-
        (1-e1)*(u1(j,6)*u1(i,4)+u1(j,4)*u1(i,6)-
        2.0*u1(i,5)*u1(j,5));
fb(u1)=u1(i,1)*e3;
       mx(u)=(ur(4)+e1*ur(6));
       my(u)=(ur(6)+e1*ur(4));
mxy(u)=(1-e1)*ur(5); wu(u)=ur;
fw3(w)=W3; fw1(w)=w1;fw2(w)=w2;
end
value
const=1,1,1,4,10000,1,1;
tabl=4,nx,ny,0,0,   2,1,1,0,0;
 nx=50;
ny=50;     p=1,pr;
        f1=0,b;    b=10;  f2=0,a;  a=7;
f3=0,y30,rad;> rad=(1,2,1.5);     rad=1;
  >y30=(-3,0,-9);                y30=-3;
f4=a1x,a12x;  > a1x=(-2,-3,-4);   a1x=-2;
> a12x=(.5,1,1);                 a12x=.5;
f5=a2x,a22x; > a2x=(2,3,0);       a2x=2;
>a22x=(.5,2,2);                  a22x=.5;
f6=a1y,a12y; >a1y=(4,8,10);       a1y=4;
>a12y=(2,3,3);                   a12y=2;
f7=a2y,a22y; >a2y=(4,5,0);        a2y=4;
>a22y=(2,.5,3);                  a22y=2;
f8=0,hf8; >hf8=(3,4.5,3.5);       hf8=3;
f9=a,y9h,x9,y9;   x9=3; y9=-5; y9h=-4;
f10=x10,y10,-a,y10h;   x10=-3;y10=-5; y10h=-4;
f11=-x11,y11,x11,y11;  x11=4;y11=-8;
f12=0,s12x; > s12x=(4.5,4.5,3.5); s12x=3.5;
```

```
f13=y13,s13y; y13=2;s13y=1;
  pr=-a,-b,a,b;     rv1=30,pr;
      rv2=5,5,pr;
    s1=k ,pr;
     k=3;
e2=10.92;  e3=nagr;  nagr=1;
e4=10.92;
          e1=.3;
k1=100;
l=.3296703;     m=.38461;
  lm1=.91;       lm2=2.6;
    lm3=1.3;
end
```

Результати. Вид файлу результатів:

```
               ПРОГИН
      x        y          f                    x        y          f
     .000   -5.00 0.18525E+01
   -3.50 0.00   0.18115E+01    3.50  0.00   0.18115E+01
     .000  .00   0.20669E+01
   -3.500 5.00 0.11337E+01    3.500    5.00  0.11337E+01
     .000    5.00  0.56050E+00
```

ЗГИНАЛЬНІ МОМЕНТИ M_x

```
      x        y          f                        x        y          f
     .000   -5.000   -.32582E+00
   -3.50  0.00        0.23936E+00    3.50  0.00   0.23936E+00
     .000     .000   -.28544E+00
   -3.500    5.000   -.36696E+00    3.500    5.000   -.36696E+00
     .000    5.000   -.61484E+00
```

ЗГИНАЛЬНІ МОМЕНТИ M_y

```
      x        y          f                        x        y          f
     .000   -5.000   -.71262E+00
   -3.50  0.000   -.36546E+00       3.50 0.000   -.36546E+00
```

.000 .000 -.10585E+01

-3.500 5.000 -.34821E+00 3.500 5.000 -.34821E+00

.000 5.000 -.52632E-01

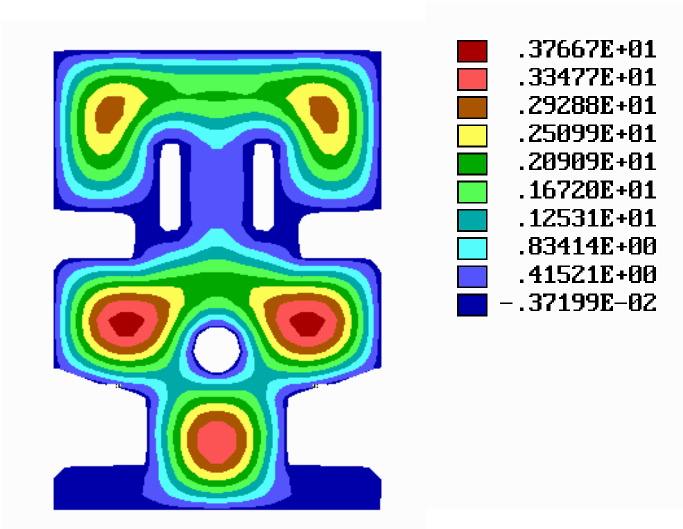


Рис. 4.16. Картина ліній рівня для функції прогину

Варіаційне формулювання задачі про ***вільні коливання пластин*** зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$I(W)=\int\limits_{\Omega}\left[(\Delta W)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]-\lambda W^2\right]d\Omega \qquad (4.44)$$

або у випадку жорстко закріпленої по всьому контурі пластини більш простого функціонала

$$I(W)=\iint\limits_{\Omega}\left[(\Delta W)^2-\lambda W^2\right]d\Omega \qquad (4.45)$$

на множині функцій, що задовольняють, принаймні, кінематичні (головні) умови.

Мінімізацію функціонала (4.44) або (4.45) виконаємо за допомогою методу Рітца, відповідно до якого вигнуту поверхню пластини наближено подамо у вигляді:

$$W(x,y)\approx\sum_{i=1}^{n}a_i W_i(x,y), \qquad (4.46)$$

де $W_i(x,y)$ – координатні функції, що задовольняють задані крайові умови задачі. Потрібно відмітити, що крайові умови і відповідні їм структури розв'язку будуть мати такий же вигляд, як і при вигині пластин. Значення невизначених коефіцієнтів a_i після підстановки (4.46) у (4.44) або (4.45) визначаються з умов мінімуму функціонала, тобто із системи рівнянь

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0$$

або

$$\left(\tilde{A} - \lambda \tilde{B}\right) X = 0, \tag{4.47}$$

де $\tilde{A} = \left\{a_{ij}\right\}$ і $\tilde{B} = \left\{b_{ij}\right\}$ – матриці, елементи яких мають такий вигляд:

$$a_{ij} = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \Delta W_i \Delta W_j - \left(1 - \nu\right) \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right) \right\} d\Omega$$

$$b_{ij} = \iint\limits_{\Omega} W_i W_j d\Omega. \tag{4.48}$$

Вектор $X^T = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$.

Система (4.47) має розв'язки, відмінні від нуля в тому і тільки тому випадку, коли її визначник дорівнює нулю. Звідси одержуємо характеристичне рівняння

$$\det\left|\tilde{A} - \lambda \tilde{B}\right| = 0. \tag{4.49}$$

Множина розв'язків цього рівняння є спектром частот даної пластини. Кожній частоті відповідає власна функція $W\left(x, y\right)$.

При складанні програм мовою RL для задач на власні значення необхідно пам'ятати, що параметр ***CONST*** у блоці ***VALUE*** повинен мати вигляд ***CONST*=1,1,1,3,70,2,1.** Передостання цифра обов'язково повинна дорівнювати **2.** У блоці ***PROGRAM*** замінити оператор ***SIS*** на ***VAL***. Для видачі форм коливань використовуються оператори ***STV(k),*** де ***k*** – номер частоти і ***FILEXY***.

Приклад 5. Розв'язати задачу про власні коливання жорстко закріпленої по межі пластини, показаної на рис. 4.17. Знайти перші дві частоти і форми власних коливань.

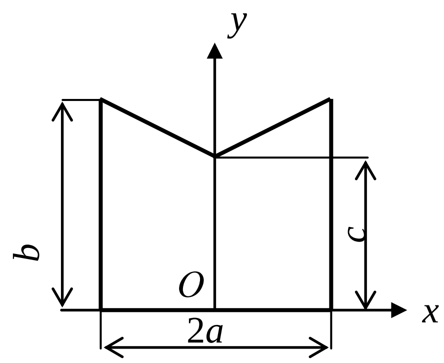


Рис. 4.17

Розв'язання

На підставі того, що функція $W(x,y)$ є непарною відносно змінної x, форми коливань можна розділити на симетричні відносно осі Ox й антисиметричні. Для симетричних форм коливань параметр ***SIM*** має вигляд

SIM=1,1,2,1;

для антисиметричних

SIM=2,1,2,1.

В обох випадках інтегрувати потрібно по $1/2$ області.

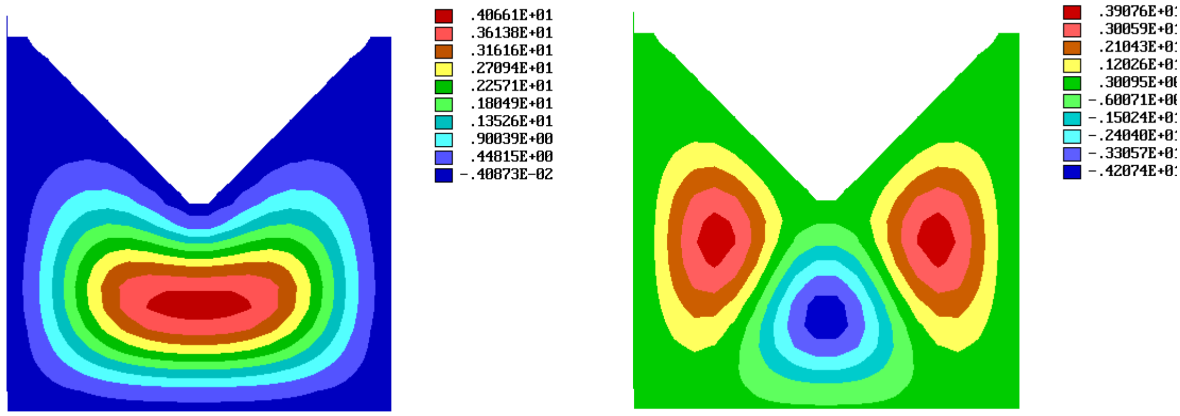
Текст програми мовою RL для прикладу 5:

```
declare > розділ описів;
        line f1,f2,f3;  bandy f4;  sf p;
omega
        w=(f1!f2) & f3 & f4; > задані рівняння області;
function
        om=w; w1=om*om;
        u1=w1*p;
function
        u=sum(1,0,u1);
program
        gauss(s1,fa,fb);
        val;            > обчислення власних значень;
```

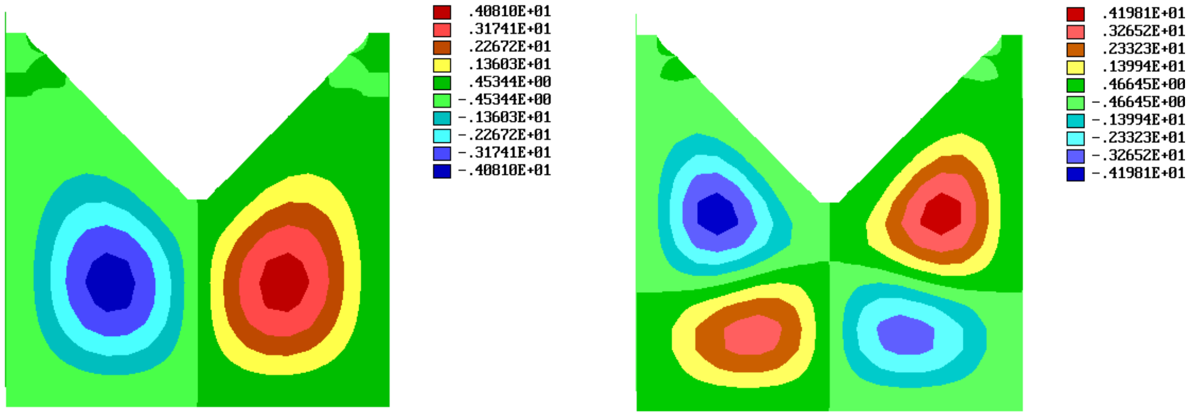
```
        stv(1); filexy(r1,fu);
        stv(2); filexy(r1,fu);
        stv(3); filexy(r1,fu);
        stv(4); filexy(r1,fu);
>ОПИС ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЦІ РІТЦА;
        fa(u1)=(u1(i,4)+u1(i,6))*(u1(j,4)+u1(j,6));
        fb(u1)=u1(i)*u1(j);
        fu(u)=u;
value
        const=1,1,1,3,70,2,1;
        tabl=np,sim, 0,1,1,0,0; p=1,-a,-b,a,b;
        sim=1,1,2,1; >sim=2,1,2,1;
        s1=k, 0,-b,a,c, 0,c,a,b;
        f1=0,c,-a,b; f2=a,b,0,c; f3=-a,-b,a,-b; f4=0,a;
        r1=30, -.51,-.51,.51,.51;
        a=.5; b=.5; c=0.4;
        np=6; k=2;
end
```

Форми коливань наведено на рис. 4.18, власні числа $\lambda = \frac{\omega^2}{a^4}\left(\frac{Dg}{\gamma h}\right)$ заносяться у файл результатів з розширенням ***.res***.

Вигляд файлу результатів



Симетричні форми коливань



Антисиметричні форми коливань

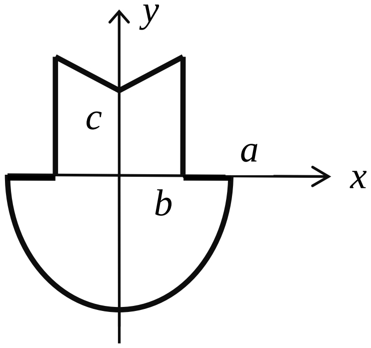
Рис. 4.18. Форми коливань пластини

Eigenvalue **2
.15807E+04 .72081E+04 .18927E+05 .24465E+05 .35931E+05 .97039E+05
.12411E+06 .20308E+06 .21499E+06 .23838E+06 .37621E+06 .63642E+06

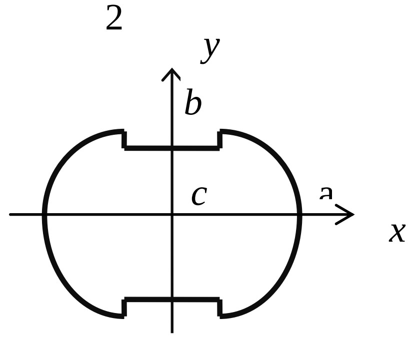
Лабораторна робота 10

Використовуючи метод теорії R-функцій, побудувати логічні формули і рівняння границь областей (рис. 4.19). Форми областей для цього завдання узяті з роботи [9]. Використовуючи систему ПОЛЕ, побудувати картину ліній рівня функції $u=\omega(x,y)$.

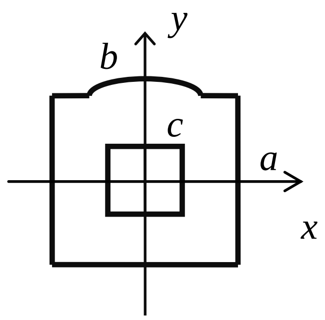
1



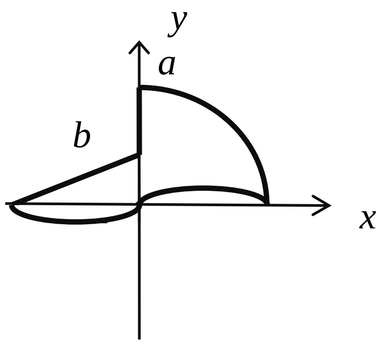
2



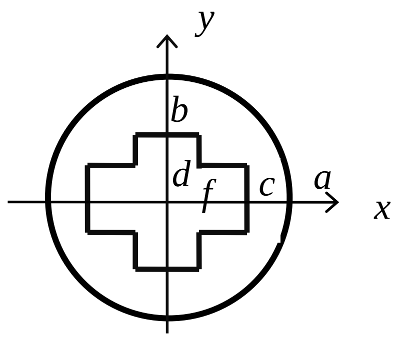
3



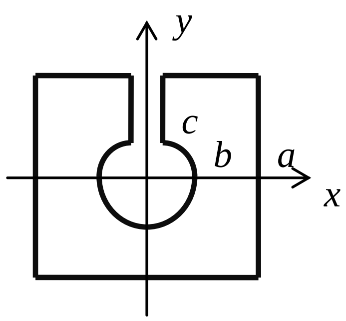
4



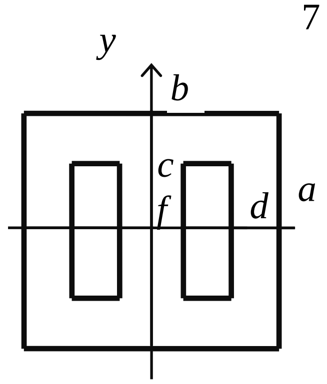
5



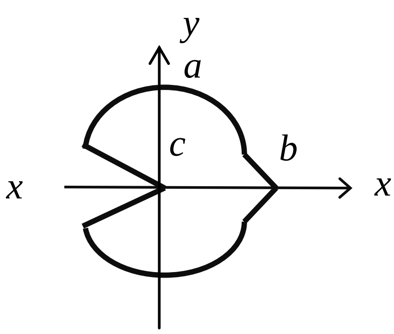
6



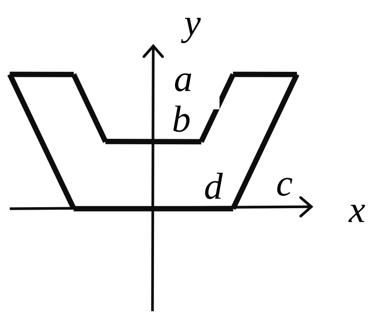
7



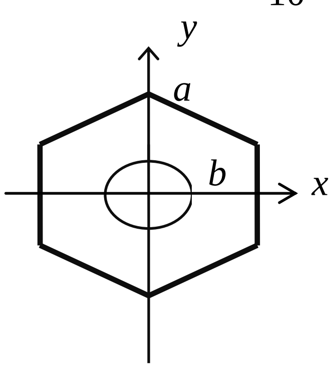
8



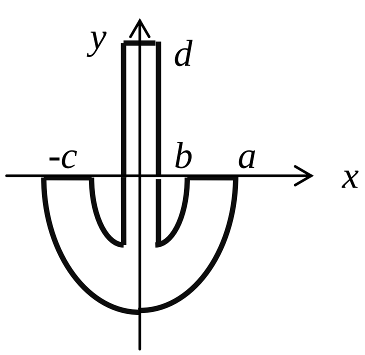
9



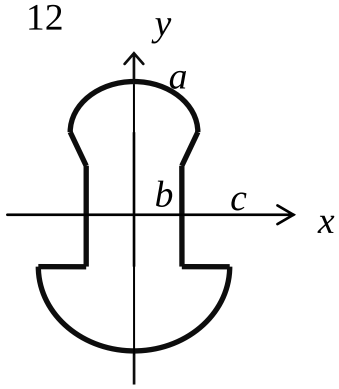
10



11



12



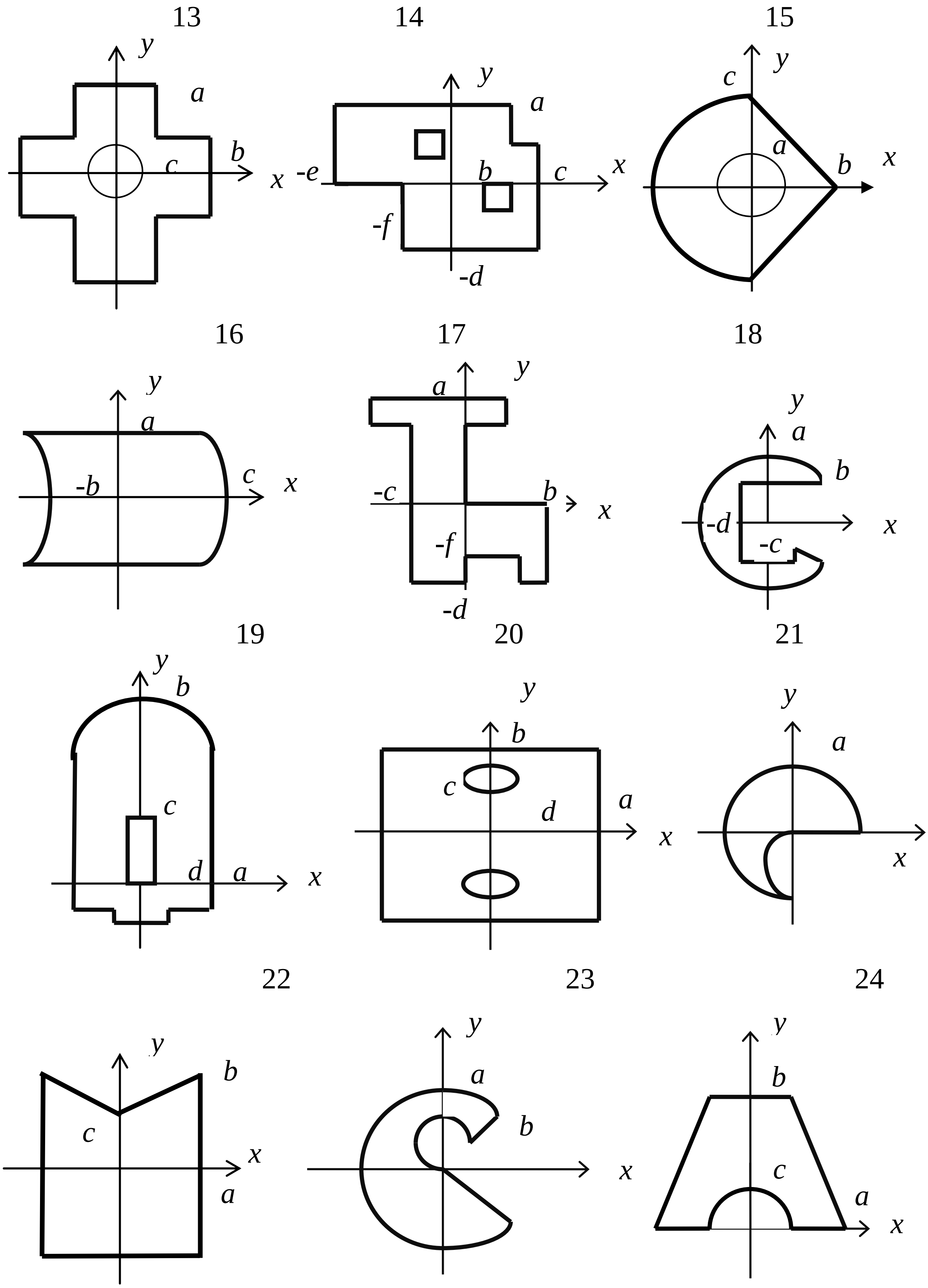

13
y
a
b
c
x
14
y
a
-e
b
c
x
-f
-d
15
c
y
a
b
x
16
y
a
-b
c
x
17
y
a
-c
b
x
-f
-d
18
y
a
b
-d
x
-c
19
y
b
c
d
a
x
20
y
b
c
d
a
x
21
y
a
x
22
y
b
c
x
a
23
y
a
b
x
24
y
b
c
a
x

Рис. 4.19

Лабораторна робота 11

За допомогою методу RFM і системи ПОЛЕ визначити:
а) прогин і згинальні моменти пластини, що знаходиться під дією розподіленого навантаження ($q/D=1,\ \nu=0.3$); дослідити збіжність наближеного розв’язку при збільшенні кількості координатних функцій і числа вузлів інтегрування.

б) перші чотири власні частоти і форми коливань.

Вид крайових умов і геометрія плану пластини наведені нижче.

1. Ω – область (див. рис. 4.20.1) при $R=1, a=0.75, b=0.125$:
пластина жорстко затиснена по всій границі області.
2. Ω – область (див. рис. 4.20.2) при $a=2, b=1, R=0.3, c=1.25$:
вільно оперта на $\partial\Omega_1$ – зовнішня границя, жорстко затиснена на $\partial\Omega_2$ – границя отвору.
3. Ω – область (див. рис. 4.20.3) при $a=b=1, a_1=0.5, b_1=0.25$:
пластина вільно оперта по всьому контуру.
4. Ω – область (див. рис. 4.20.4) при $a=b=1, d=0.5, c=0.375$:
пластина жорстко затиснена по всьому контуру.
5. Ω – область (див. рис. 4.20.5) при $R=0.3, a=b=1$:
пластина жорстко затиснена по всьому контуру.
6. Ω – область (див. рис. 4.20.6) при $a=b=1, a_1=0.5, b_1=0.25$:
пластина вільно оперта по всьому контуру.
7. Ω – область (див. рис. 4.20.7) при $a=b=1, a_1=b_1=0.25$:
пластина жорстко затиснена по зовнішньому контурі і вільно оперта по внутрішньому контуру.
8. Ω – область (див. рис. 4.20.8) при $a=2, b=1, a_1=b_1=0.25$:
пластина жорстко затиснена на $\partial\Omega_1:\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)=0$, вільно оперта на частині границі області, що залишилася.
9. Ω – область (див. рис. 4.20.9) при $a=b=1, a_1=0.5, b_1=0.25$:
пластина жорстко затиснена по всьому контуру.
10. Ω – область (див. рис. 4.20.10) при $a=1, b=2, R=0.25$:
пластина жорстко затиснена по всьому контуру.
11. Ω – область (див. рис. 4.20.12) при $R=1, b=0.5$:
пластина жорстко затиснена на $\partial\Omega_1:\partial\Omega_1=\left(b^2-y^2\right)/2b$ і вільна на частині контуру, що залишилася.
12. Ω – область (див. рис. 4.20.11) при $a=b=1,\ d=0.5, c=0.375$:

пластина жорстко затиснена уздовж сторони $x=-a$ і вільна на частині контуру, що залишилася.

13. Ω – область (див. рис. 4.20.13) при $a=b=1,\ h=1.5,\ l=0.5$:
пластина вільна уздовж сторони $y=0$ і жорстко затиснена на частині контуру, що залишилася.

14. Ω – область (див. рис. 4.20.14) при $R=2,\ R_1=2,\ a=3$:
пластина вільно оперта по всій границі області.

15. Ω – область (див. рис. 4.20.15) при $b=1, c=1, a=0.5$:
пластина жорстко затиснена уздовж сторони $y=0$ і вільно оперта на частині, що залишилася.

16. Ω – область (див. рис. 4.20.16) при $R=1, a=h=0.5$:
пластина вільна уздовж криволінійного контуру (границя кола) і вільно оперта на частині, що залишилася.

17. Ω – область (див. рис. 4.20.17) при $a=1, c=1.75, b=2$:
пластина жорстко затиснена по всій границі.

18. Ω – область (див. рис. 4.20.18) при $a=1, b=1, c=d=1$:
пластина вільно оперта по всій границі.

19. Ω – область (див. рис. 4.20.19) при $a=b=1, d=0.5, c=2.5$:
пластина жорстко затиснена уздовж прямої $y=-a$ і вільно оперта на частині, що залишилася.

20. Ω – область (див. рис. 4.20.20) при $a=b=1, c=0.5, h=1.5$:
пластина вільно оперта уздовж прямої $y=-a$ і жорстко затиснена на частині, що залишилася.

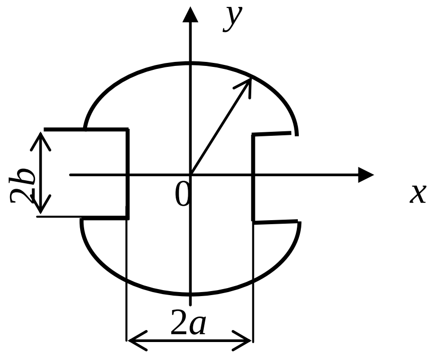


Рис. 4.20.1

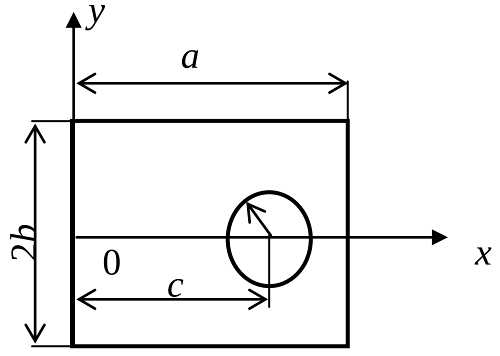


Рис. 4.20.2

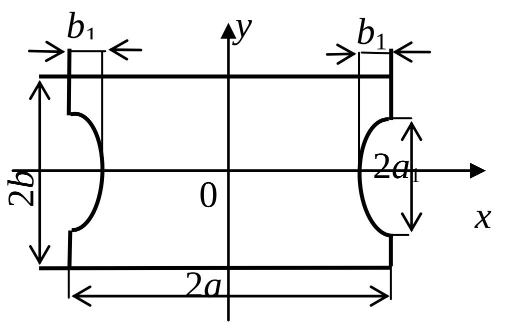


Рис. 4.20.3

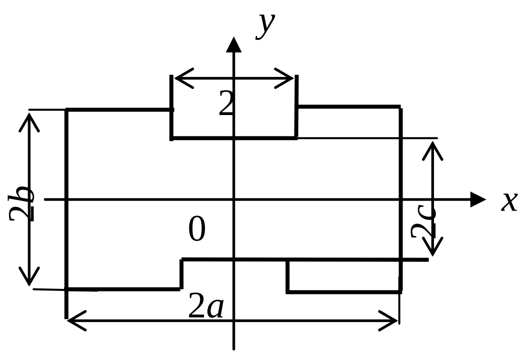


Рис. 4.20.4

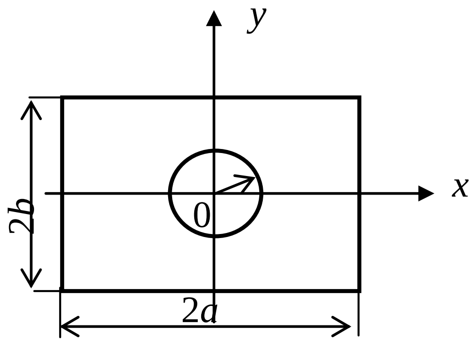


Рис. 4.20.5

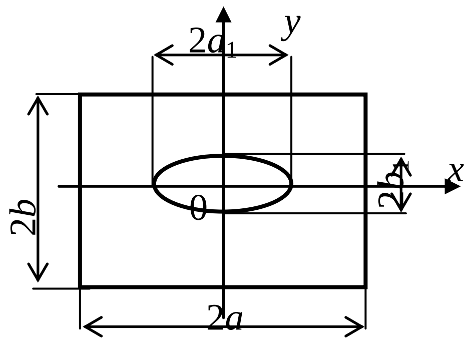


Рис. 4.20.6

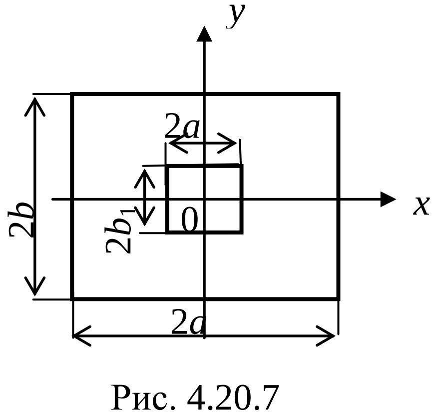


Рис. 4.20.7

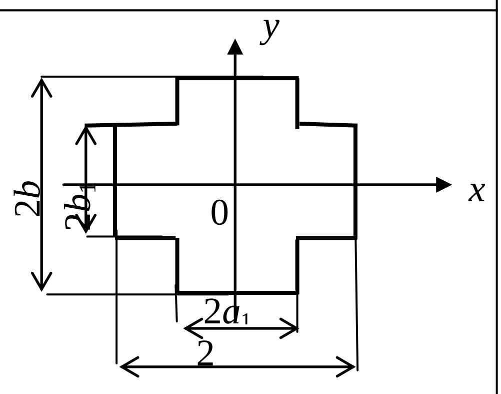


Рис. 4.20.8

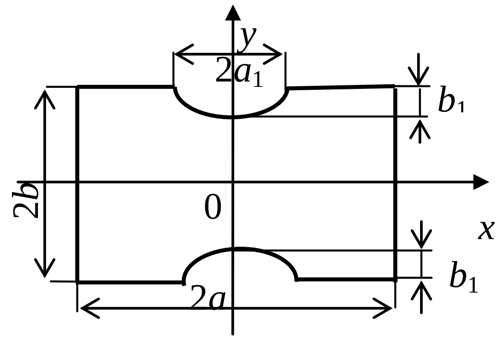


Рис. 4.20.9

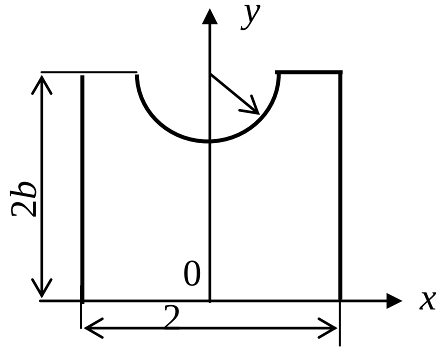


Рис. 4.20.10

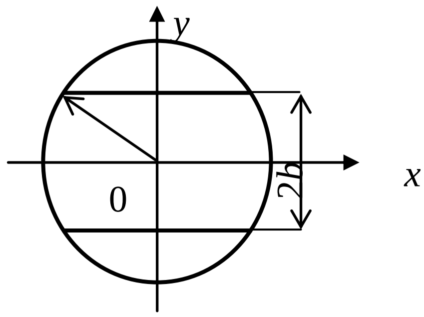


Рис. 4.20.11

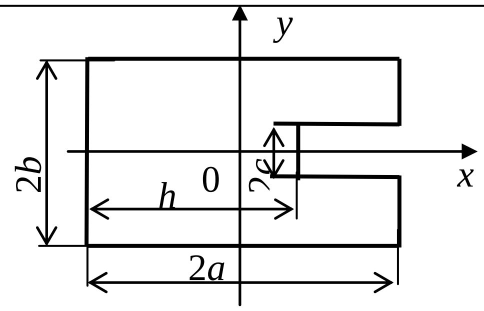


Рис. 4.20.12

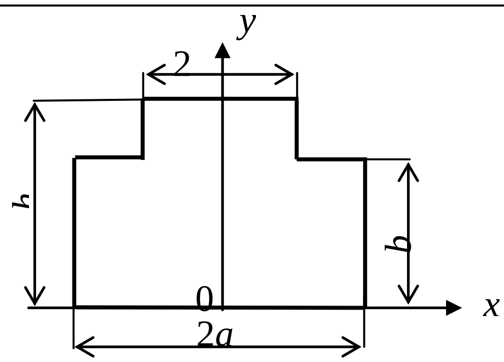


Рис. 4.20.13

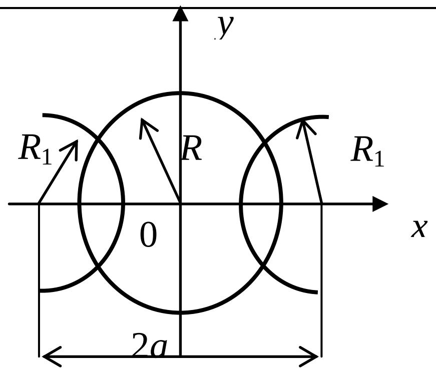


Рис. 4.20.14

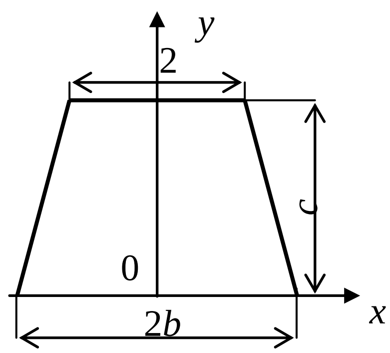


Рис. 4.20.15

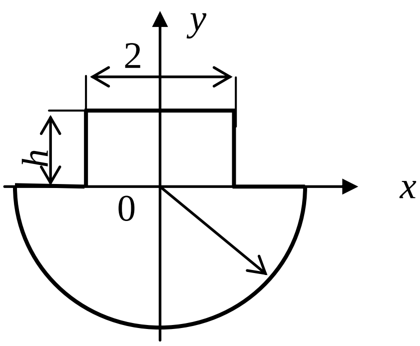


Рис. 4.20.16

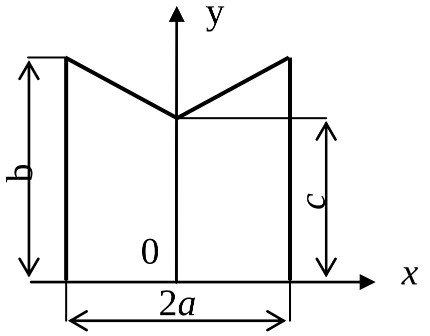


Рис. 4.20.17

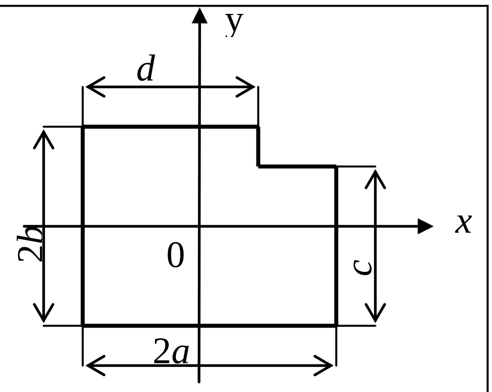


Рис. 4.20.18

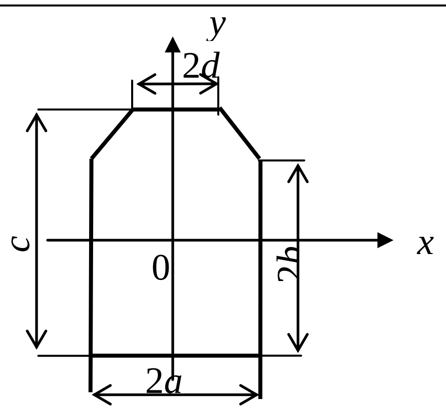


Рис. 4.20.19

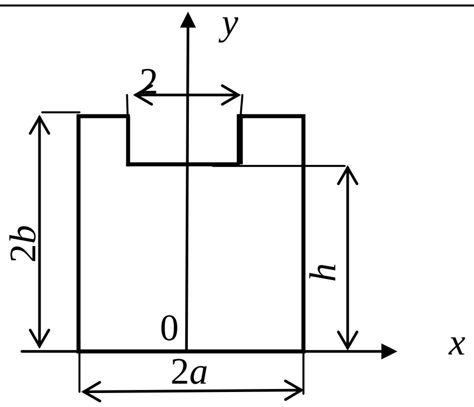


Рис. 4.20.20

ДОДАТОК 1

1. Гармонійні функції

Розглянемо рівняння

$$\Delta u = 0, \tag{1Д}$$

де Δ – оператор Лапласа, який у тривимірному випадку має вигляд

$$\Delta = \vec{\nabla}\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

а у двовимірному випадку визначається так:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Рівняння (1Д) називається ***рівнянням Лапласа*** або рівнянням потенціалу.

У двовимірному випадку рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2Д}$$

називається рівнянням ***логарифмічного потенціалу***, а в тривимірному випадку, рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3Д}$$

називається рівнянням ***ньютонівського потенціалу***.

Під ньютонівським потенціалом розуміють функцію $u = \dfrac{1}{r}$, де $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ є відстань між точками $M(x; y; z)$ та $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Переконаємося, що функція $u = \dfrac{1}{r}$ задовольняє рівняння (3Д). Дійсно,

$$\Delta u = \operatorname{div}\vec{\nabla} u = \operatorname{div}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r} \right) = \operatorname{div}\left(-\frac{1}{r^2}\vec{\nabla} r \right) = \operatorname{div}\left(-\frac{1}{r^3}\vec{r} \right) =$$

$$= -\frac{1}{r^3}\operatorname{div}\vec{r} - \left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}, \vec{r} \right) = -\frac{3}{r^3} - \left(-\frac{3r^{-4}\vec{r}}{r}, \vec{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}(\vec{r}, \vec{r}) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Аналогічно, $u = \ln r$ (логарифмічний потенціал) задовольняє рівняння (2Д), при цьому r визначається як $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

$$\Delta u = \operatorname{div}\left(\vec{\nabla}u\right) = \operatorname{div}\left(\vec{\nabla}\left(\ln r\right)\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\vec{\nabla}r\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r^2}\vec{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\operatorname{div}\vec{r} + \left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^2},\vec{r}\right) = \frac{2}{r^2} + \left(-\frac{2}{r^3}\frac{\vec{r}}{r},\vec{r}\right) = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^4}\left(\vec{r},\vec{r}\right) = 0.$$

Визначення. Якщо деяка функція u в області Ω неперервна разом зі своїми похідними до другого порядку й задовольняє в цій області рівняння Лапласа, то її називають ***гармонійною*** функцією в розглянутій області.

На площині функція $u = \ln r$ є гармонійною функцією всюди, за винятком точки $M(x_0, y_0)$, а $u = \frac{1}{r}$ – гармонійна всюди в тривимірній області, що не містить точку $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Функції $u = \frac{1}{r}$ й $u = \ln\frac{1}{r}$ називають ***фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа*** в тривимірному й двовимірному випадках відповідно.

2. Формули Гріна

Нехай векторне поле задане у вигляді $\vec{a} = u\vec{\nabla}v$, де u й v неперервні й двічі диференційовані функції. Обчислимо потік цього вектора через замкнуту поверхню S, використовуючи для цього теорему Гаусса-Остроградського. У векторній формі ця теорема формулюється за допомогою рівності

$$\oiint_S \vec{a}_n dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}dV, \tag{4Д}$$

Підставляючи в (4Д) заданий вектор $\vec{a}$, одержимо

$$\iint_S \left(u\vec{\nabla}v, n^o\right)dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(u\vec{\nabla}v\right)dV$$

або

$$\iint_S u\left(\vec{\nabla}v, n^o\right)dS = \iiint_V \left[u\operatorname{div}\left(\vec{\nabla}v\right) + \left(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v\right)\right]dV.$$

Враховуючи, що скалярний добуток $\left(\vec{\nabla}v, n^o\right) = \frac{\partial v}{\partial n}$, та використовуючи властивість дивергенції $\operatorname{div}\left(\vec{\nabla}v\right) = \Delta v$, останню рівність запишемо у вигляді

$$\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iiint_V \left[u\Delta v + \left(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v\right)\right]dV$$

або

$$\iiint\limits_V u\Delta v dV = \iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint\limits_V \left(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v\right)dV. \qquad (5Д)$$

Отриману формулу називають ***першою формулою Гріна.*** Ця формула справедлива для будь-яких функцій u і v, що задовольняють умову неперервності та диференційованості в розглянутій області. Поміняємо місцями u й v, тоді одержимо

$$\iiint\limits_V v\Delta u dV = \iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \iiint\limits_V \left(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v\right)dV. \qquad (6Д)$$

Віднімемо з (6Д) (5Д), тоді одержимо ***другу формулу Гріна***

$$\iiint\limits_V \left(v\Delta u - u\Delta v\right)dV = \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS. \qquad (7Д)$$

У двовимірному випадку формула (4Д) має вигляд

$$\oint\limits_l a_n dl = \iint\limits_D \operatorname{div}\vec{a}dxdy$$

або, стосовно до векторного поля $\vec{a} = u\vec{\nabla}v$,

$$\oint\limits_l u\frac{\partial v}{\partial n}dl = \iint\limits_D \operatorname{div}\left(u\vec{\nabla}v\right) = \iint\limits_D \left(u\Delta v + \left(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v\right)\right)dxdy,$$

тоді формула (5) у двовимірному випадку запишеться так:

$$\iint\limits_D u\Delta v dxdy = \oint\limits_L u\frac{\partial v}{\partial n}dl - \iint\limits_D \left(\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v\right)dxdy.$$

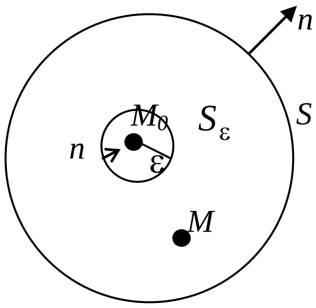
3. Інтегральне подання функції у випадку двох або трьох незалежних змінних

Теорема. Якщо функція $u(x,y,z)$ неперервна, має неперервні частинні похідні першого й другого порядків у замкнутій області W, то значення цієї функції в довільній внутрішній точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ визначається за формулою

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_W\frac{1}{r}\Delta u dW\,, \qquad (8Д)$$

де r – відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до змінної точки $M(x,y,z)$, тобто $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, n – зовнішня нормаль до поверхні S, що обмежує область W.

Доказ



Скористаємося другою формулою Гріна (7Д) $(k\equiv 1)$, приймаючи як функцію v таку $v=\frac{1}{r}$. Але ця функція обертається в нескінченність, якщо точка M співпадає із точкою M_0. Тому безпосереднє застосування формули Гріна до області W неможливо. Розглянемо область W_ε, отриману із замкнутої області W видаленням деякої кулі досить малого радіуса ε із центром у точці M_0. Границя області W_ε буде складатися тепер із двох поверхонь: поверхні S, що обмежувала область W, і сферичної поверхні S_ε. У зв'язку з цим замість одного інтеграла за поверхнею S в правій частині рівності (7Д) буде сума двох інтегралів за S і S_ε. Враховуючи, що $v=\frac{1}{r}$ в області W_ε є гармонійною функцією, то $\Delta v=0$, тоді одержимо

$$\iiint_{W_\varepsilon}\frac{1}{r}\Delta u dW=\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS+\iint_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS\,. \qquad (9Д)$$

Перейдемо тепер в отриманій рівності до границі, коли $\varepsilon \to 0$. Тоді ліворуч одержимо точно такий же інтеграл, але вже поширений на всю область W. Перший доданок правої частини не зміниться, оскільки він від ε не залежить. Оцінимо другий доданок правої частини

$$\iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS = \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} dS - \iint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} dS .$$

Оскільки точка $M(x,y,z)$ знаходиться на поверхні кулі, то для всіх точок поверхні S_ε величина r має постійне значення, рівне ε. З іншого боку, перші частинні похідні функції $u(x,y,z)$ за умовою теореми будуть неперервними функціями в замкнутій області W. Це означає, що вони будуть обмежені в цій області разом з похідною $\frac{\partial u}{\partial n}$. Інакше кажучи, $\exists N$ таке, що $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| < N$. Тоді одержимо, що

$$\left| \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} dS \right| \le \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS < \frac{1}{\varepsilon} N \iint_{S_\varepsilon} dS = \frac{1}{\varepsilon} N 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi N\varepsilon \to 0 \quad (10Д)$$

якщо $\varepsilon \to 0$.

Щоб оцінити другий інтеграл по поверхні S_ε, обчислимо похідну $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$.

У розглянутому випадку нормаль n спрямована в прямо протилежну сторону відносно радіуса кулі (нормаль береться зовнішня). Тому

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{S_\varepsilon} = -\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

$$\iint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon} u dS = \frac{1}{\varepsilon^2} u(M_\varepsilon) 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(M_\varepsilon),$$

де M_ε – внутрішня точка сфери S_ε. Скористаємося теоремою про середнє значення для поверхневого інтеграла. Остаточно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \lim_{\varepsilon\to 0}4\pi u\left(M_\varepsilon\right) = 4\pi u\left(M_0\right). \qquad (11Д)$$

Таким чином, переходячи до границі в рівності (9Д) і з огляду на (10Д) і (11Д), одержуємо формулу (8Д). Якщо виходити з відповідного фундаментального розв'язку для двовимірного рівняння Лапласа $v = \ln\frac{1}{r}$ й повторити попередні доведення, то можна одержати формулу

$$u\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{2\pi}\oint_l \left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dl - \frac{1}{2\pi}\iint_D \ln\frac{1}{r}\Delta u d\sigma,$$

яка дає інтегральне подання значення функції $u\left(x, y\right)$ у внутрішній точці області для випадку двох незалежних змінних.

Якщо u є гармонійною в замкнутій області W, тобто $\Delta u = 0$, то отримані формули набувають особливо простого вигляду:

$$u\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS. \qquad (12Д)$$

У випадку гармонійної функції u двох незалежних змінних одержуємо

$$u\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{2\pi}\oint_L \left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)dl. \qquad (13Д)$$

Формули (12Д), (13Д) дають можливість обчислити значення гармонійної функції u в будь-якій внутрішній точці M_0 деякої замкнутої області, якщо відомі її значення й значення нормальної похідної на границі цієї області. Якщо згадати, що задача Діріхле полягає в тому, щоб знайти гармонійну функцію в деякій області, що набуває на границі цієї області заданого значення, то отримані формули дуже важливі для розв'язання крайових задач для рівняння Лапласа.

4. Основні властивості гармонійних функцій

Теорема 1. Якщо гармонійна в деякій скінченній області функція дорівнює нулю на границі, то вона дорівнює нулю у всій області.

Доказ. У першій формулі Гріна (5Д) покладемо $u = v$. Тоді одержимо

$$\iiint_V (u\Delta u)\,dV = \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS - \iiint_V \left(\vec{\nabla}u\right)^2 dV$$

або, враховуючи, що $\Delta u = 0,$ останню рівність перепишемо так:

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla}u\right)^2 dV = \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS\,.$$

Оскільки $u\big|_S = 0,$ то $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$. Отже,

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla}u\right)^2 dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow u = \text{const},$$

а тому що $u\big|_S = 0,$ то цією константою є нуль.

Наслідок **1**. Якщо дві гармонійні функції співпадають на границі області, то вони співпадають у всій області.

Наслідок **2**. Задача Діріхле для рівняння Лапласа має єдиний розв’язок у скінченній області.

Теорема 2. Якщо в деякій скінченній області гармонійна функція така, що на границі області її нормальна похідна дорівнює нулю, то ця функція усередині області є константою.

Доказ. Знову скористаємося I формулою Гріна, вважаючи, що $u = v$. Так само, як і в теоремі 1, одержимо

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla}u\right)^2 dV = \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS\,.$$

З огляду на те, що $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0,$ одержимо $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$, тоді

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla}u\right)^2 dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = \text{const}.$$

Теорема 3. Якщо функція u є гармонійною в якійсь скінченній області, то $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS = 0.$

Доказ. Скористаємося I формулою Гріна, приймаючи одиницю як функцію v, тобто $v=1$. Тоді одержимо, що

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

***Наслідок* 1**. Задача Неймана для рівняння Лапласа в скінченній області має розв'язок, за умови, що

$$\iint_S f(x,y)\,dS = 0, \tag{14Д}$$

де $f(x,y)$ є функція, що входить у крайову умову задачі Неймана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(x,y).$$

***Наслідок* 2**. Задача Неймана для рівняння Пуассона в скінченній області

$$\Delta u = f(x,y,z),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$$

має розв'язок, за умови, що

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = 0. \tag{15Д}$$

де $f(x,y)$ є функція, що входить у крайову умову задачі Неймана.

Дійсно, застосуємо першу формулу Гріна, вибираючи як функцію v одиницю, $v=1$. Тоді одержимо, що $\iiint_V \Delta u dV = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Враховуючи, що $\Delta u = f(x,y,z)$, одержимо $\iiint_V f(x,y,z)\,dV = 0$.

Таким чином, виконання умов (14Д) і (15Д) є необхідним для існування розв'язку задачі Неймана.

5. Γ-функція (інтеграл Ейлера II роду)

Гамма-функцію визначає інтеграл Ейлера II роду:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Покажемо, що для $a>0$ цей невласний інтеграл збігається:

$$\int_0^{\infty}e^{-x}x^{a-1}dx=\int_0^{1}e^{-x}x^{a-1}dx+\int_1^{\infty}e^{-x}x^{a-1}dx=I_1+I_2;$$

$$I_1\le\int_0^{1}x^{a-1}dx=(\text{оскільки } \frac{1}{e}\le e^{-x}<1)=\left.\frac{x^a}{a}\right|_0^1=\frac{1}{a}.$$

При фіксованому $a>0$ ця величина скінченна.

$$I_2=\int_1^{\infty}e^{-x}x^{a-1}dx\le\int_1^{\infty}e^{-x}x^{m}dx=\left\|\begin{matrix}x^m=u, mx^{m-1}dx=du\\ e^{-x}dx=dv,\ v=-e^{-x}\end{matrix}\right\|$$

(m – найближче ціле, що обмежує степінь x зверху, тобто $a-1\le m$, $x^{a-1}\le x^m\ \ \forall x>1$). Останній інтеграл обчислюємо за допомогою методу інтегрування частинами, застосовуючи його $m-1$ раз. Тоді одержимо

$$\int_1^{\infty}e^{-x}x^{m}dx=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^x}+\frac{1}{e}+m\int_1^{\infty}e^{-x}x^{m-1}dx=...$$

і т.д. частинами $(m-1)$ раз, поки одержимо:

$$=m!\int_1^{\infty}e^{-x}dx=-m!e^{-x}\Big|_1^{\infty}=\frac{m!}{e}\text{ – обмежено.}$$

Отже, для $a>0$ інтеграл збігається. Відзначимо, що:

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1;$$

$$\Gamma(0)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx>\frac{1}{e}\int_0^{1}\frac{dx}{x}+\int_1^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}=\frac{1}{e}\ln x\Big|_0^1+\int_1^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}=\infty+const.$$

Таким чином, $\Gamma(a)\underset{a\to0+0}{\to}+\infty$.

Виведемо рекурентну формулу.

$$\Gamma(a+1)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{a}dx=-e^{-x}x^a\Big|_0^{\infty}+a\int_0^{\infty}e^{-x}x^{a-1}dx.$$

Отже, $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, звідси

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+1)}{a}.$$

За допомогою одержаної рекурентної формули розширимо поняття гамма-функції для від'ємних значень параметра a. Враховуючи, що $\Gamma(1)=1$, визначимо значення $\Gamma(0+0)$, та $\Gamma(0-0)$.

$$\Gamma(0+0)=\lim_{a\to 0+0}\Gamma(a)=\lim_{a\to 0+0}\frac{\Gamma(1)}{a}=+\infty,$$

$$\Gamma(0-0)=\lim_{a\to 0-0}\Gamma(a)=\lim_{a\to 0-0}\frac{\Gamma(1)}{a}=-\infty.$$

З $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$ можна отримати: $\Gamma(-1)=-\Gamma(0)\to\pm\infty$; $\Gamma(-2)=-\frac{1}{2}\Gamma(-1)\to\pm\infty$ і т.ін. Тобто у кожній цілочисловій від'ємній точці Γ-функція має розрив другого роду. У всіх інших від'ємних точках вона неперервна.

Якщо a – натуральне число, тобто $a=n$, то

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=...=n(n-1)...2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!.$$

Таким чином, якщо $n=0$, то одержимо, що $0!=\Gamma(1)\Rightarrow 0!=1$.

Обчислимо значення Γ-функції у дрібних точках:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\begin{vmatrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=2\int_0^\infty e^{-t^2}dt=2J;$$

$$J^2=\int_0^\infty e^{-t^2}dt\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}du=\iint_D e^{-\left(t^2+u^2\right)}dtdu=\begin{vmatrix}u=\rho\cos\varphi\\ t=\rho\sin\varphi\end{vmatrix}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}(-2);$$

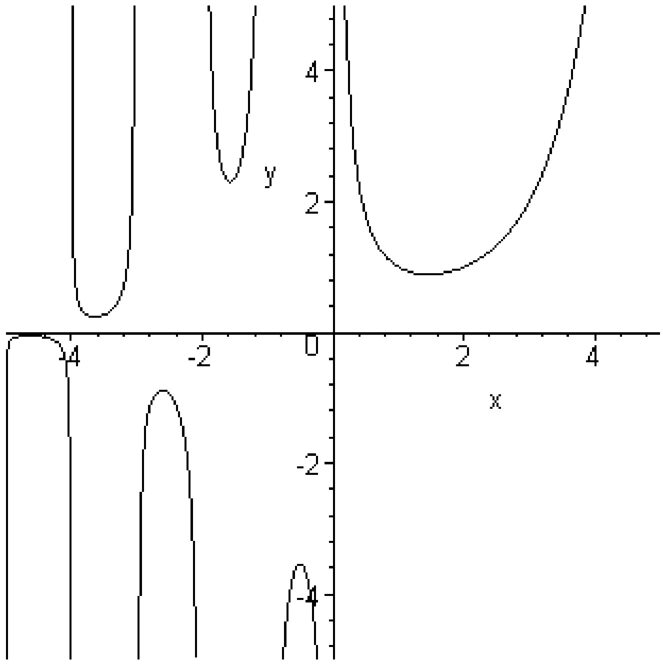
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ і т.д.

$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)...\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}$.

Таким чином, $\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}$.

Графік $\Gamma(a)$ побудуємо за допомогою системи Maple:

```
> plot(GAMMA(x),x=-5..5,y=-
5..5,discont=true,colour=black);
```



6. Функції Бесселя

Рівняння вигляду

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0 \qquad (16Д)$$

називаються рівняннями Бесселя ν-го порядку. Функції, які йому задовольняють, називаються **бесселевими** або **циліндричними функціями**.

Будемо шукати розв’язки рівняння Бесселя у вигляді ряду

$$y=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^{\sigma+k},$$

де σ – будь-яке дійсне число.

Тоді

$$xy'=\sum_{k=0}^{+\infty}(\sigma+k)a_k x^{\sigma+k};$$

$$x^2y''=\sum_{k=0}^{+\infty}(\sigma+k)(\sigma+k-1)a_k x^{\sigma+k};$$

$$\left(x^2-\nu^2\right)y=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^{\sigma+k+2}-\nu^2\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^{\sigma+k}=\sum_{k=2}^{+\infty}a_{k-2}x^{\sigma+k}-\nu^2\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^{\sigma+k}.$$

Одержані вирази формально підставимо в рівняння (16Д)

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(\sigma+k)^2-\nu^2\right]a_k x^{\sigma+k}+\sum_{k=2}^{+\infty}a_{k-2}x^{\sigma+k}.$$

Дорівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, одержимо наступну систему рівностей:

x^{σ}	$a_0\left[\sigma^2-\nu^2\right]=0$
	$a_1\left[(\sigma+1)^2-\nu^2\right]=0$
$x^{\sigma+1}$	$a_2\left[(\sigma+2)^2-\nu^2\right]+a_0=0$
$x^{\sigma+1}$	$a_3\left[(\sigma+3)^2-\nu^2\right]+a_1=0$
$x^{\sigma+4}$	$a_4\left[(\sigma+4)^2-\nu^2\right]+a_2=0$
…	……………………
$x^{\sigma+n}$	$a_n\left[(\sigma+n)^2-\nu^2\right]+a_{n-2}=0.$

Припустимо, що $a_0\neq 0$ (інакше ряд почався б з іншого степеня). Тоді $\sigma^2-\nu^2=0 \Rightarrow \sigma=\pm\nu$. Виберемо як $\sigma=\nu>0$, тоді $a_1(2\nu+1)\cdot 1=0$, $\nu>0$ $\Rightarrow$ $a_1=0$. Отже, усі непарні коефіцієнти дорівнюють нулю: $a_1=a_3=...=a_{2k+1}=0$.

У кожній квадратній дужці різниця квадратів

$$(\nu+n)^2-\nu^2=(\nu+n-\nu)(\nu+n+\nu)=n(n+2\nu).$$

Визначимо парні коефіцієнти через a_0

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2+2\nu)}=-\frac{a_0}{2^2(1+\nu)\cdot 1};$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\nu)}=-\frac{a_2}{2^2(2+\nu)\cdot 2}=\frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\cdot 2!};$$

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2^{2n}(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+n)\cdot n!}.$$

Таким чином,

$$y=a_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\nu+2k}}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)k!}.$$

Добуток $(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)$ виразимо через Γ-функцію. З цією метою представимо $\Gamma(\nu+k+1)$ як

$$\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+k)\Gamma(\nu+k)=(\nu+k)(\nu+k-1)\Gamma(\nu+k-1)=...=$$
$$=(\nu+k)(\nu+k-1)...(\nu+1)\Gamma(\nu+1).$$

Звідси одержимо

$(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)=\dfrac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}$. Отже,

$$y=a_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\nu+2k}}{2^{2k}\dfrac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1)}k!}.$$

Якщо покласти $a_0=\dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$, то розв’язок рівняння (16Д) набуває такого вигляду:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Права частина останнього виразу називається функцією Бесселя 1-го роду ν-го порядку і позначається так:

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)k!}. \tag{17Д}$$

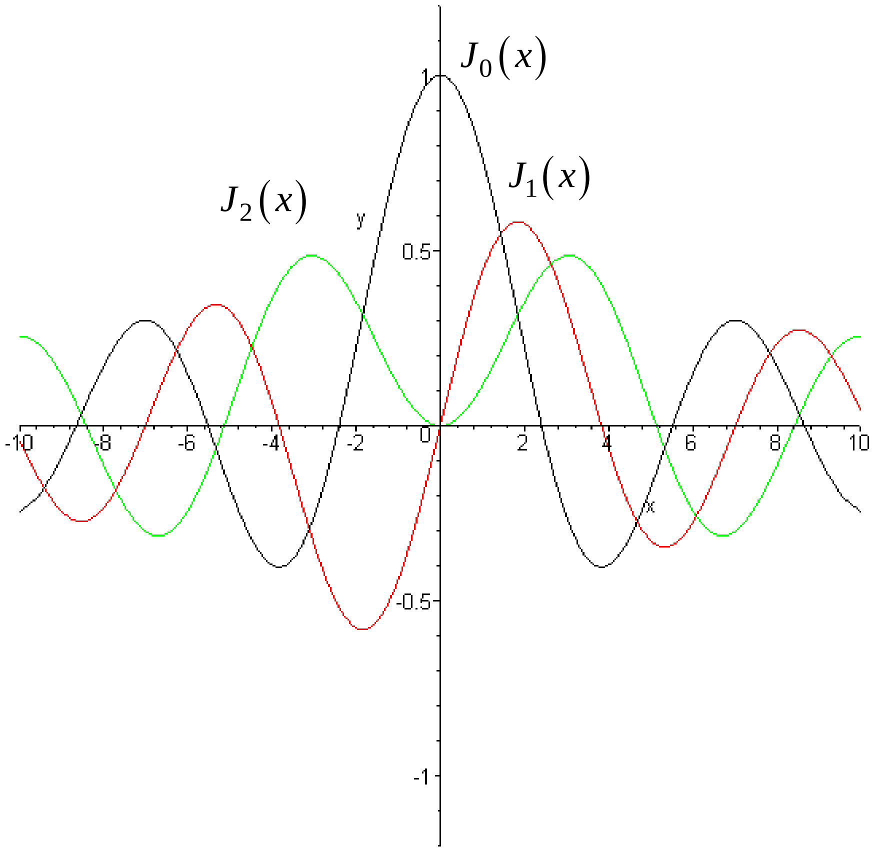
Якщо вибрати $\sigma = -\nu$, то одержимо

$$J_{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)k!}.$$

Ряди збігаються при кожному x $(x \neq 0)$. Це можна довести, наприклад, за ознакою Даламбера.

Графіки $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ побудуємо за допомогою системи Maple:

```
> plot({BesselJ(0, x),BesselJ(1, x),BesselJ(2, x)},x=-
10..10,y=-
1.2..1.2,discont=true,colour=[black,red,green]);
```



Загальний розв’язок рівняння Бесселя

У випадку нецілого індексу ν функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ будуть лінійно незалежними розв’язками рівняння (16Д). Дійсно, початкові члени рядів, мають коефіцієнти, відмінні від нуля, і містять різні степені x.

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}.$$

Звідки випливає лінійна незалежність функцій $J_\nu(x)$ та $J_{-\nu}(x)$.

Таким чином, у випадку нецілого індексу, загальний розв’язок рівняння Бесселя має вигляд

$$y=C_1 J_\nu(x)+C_2 J_{-\nu}(x). \tag{18Д}$$

Якщо $\nu=-n$ (ціле від’ємне число), то функція $J_\nu(x)$, визначена за формулою (17Д) (з огляду на те, що $1/\Gamma(s)$ дорівнює нулю для $s=0,-1,-2,\ldots$), набуває вигляду

$$J_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{-n+2k}}{k!\Gamma(-n+k+1)}=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{-n+2k}}{k!(-n+k)!}$$

або після заміни індексу підсумовування k на $l+n$ одержимо

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(x/2)^{n+2l}}{(l+n)!l!}=(-1)^n J_n(x),$$

звідки видно, що $J_{-n}(x)$ задовольняє разом з $J_n(x)$ рівняння Бесселя

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0.$$

Але J_n і J_{-n} – лінійно залежні і формула (18Д) вже не дає загального розв’язку.

Покладемо

$$\mathrm{Y}_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}}{\sin\nu\pi}\qquad (\nu \text{ – неціле})$$

і доповнюючи це визначення для $\nu=n$ (n – ціле) формулою

$$\mathrm{Y}_n(x) = \lim_{\nu \to n} \mathrm{Y}_\nu(x),$$

одержимо функцію $\mathrm{Y}_\nu(x)$, яка задовольняє рівняння Бесселя (16Д) і у всіх випадках лінійно незалежна з $J_\nu(x)$ (у випадку $\nu = n$, де n – ціле, цей факт, як і саме визначення Y_n, має потребу в обґрунтуваннях, але це не розглядається). Функція $\mathrm{Y}_\nu(x)$ називається бесселевою функцією другого роду з індексом ν. Загальний розв'язок рівняння Бесселя можна у всіх випадках записати у вигляді:

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 \mathrm{Y}_\nu(x).$$

Функції Бесселя 1-го і 2-го роду добре вивчені, складені таблиці їхніх значень і, якщо розв'язок задачі зведено до функцій Бесселя, то вона вважається вирішеною.

Формули зведення відносно бесселевих функцій

Маємо

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}; \;\Rightarrow\; \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Знайдемо похідну від дробу $\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}$:

$$\frac{d}{dx} \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-1}}{(k-1)!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Нехай $k = l + 1$. Тоді:

$$\frac{d}{dx} \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} (x/2)^{2l+1}}{l!\Gamma(\nu+l+2)} = -\frac{x}{2^{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (x/2)^{2l}}{l!\Gamma(\nu+l+2)} = -x \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Отже,

$$\frac{d}{xdx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}. \qquad (19Д)$$

Таким чином, операція $\frac{d}{xdx}$ (що полягає в диференціюванні та наступному множенню на $\frac{1}{x}$), застосована до $\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$, підвищує в цьому виразі індекс ν на одиницю і змінює знак. Застосовуючи цю операцію m раз, де m – будь-яке натуральне число, одержуємо

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}.$$

Розглянемо добуток $x^\nu J_\nu(x)$ та знайдемо від нього похідну, тоді

$$x^\nu J_\nu(x) = 2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} = 2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2\nu+2k}}{k!(\nu+k)\Gamma(\nu+k)}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = 2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2\nu+2k-1}}{k!\Gamma(\nu+k)} = x \cdot 2^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2(\nu-1)+2k}}{k!\Gamma(\nu+k)} =$$

$= x \cdot x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x)$. Отже,

$$\frac{d}{xdx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x). \qquad (20Д)$$

Таким чином, операція $\frac{d}{xdx}$, застосована до $x^\nu J_\nu(x)$, знижує в цьому виразі індекс ν на одиницю. Використовуючи цю операцію m раз, отримаємо:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x). \qquad (21Д)$$

З виведених формул можна одержати деякі наслідки. Використовуючи (19Д), одержуємо:

$$\left(\frac{J_\nu}{x^\nu}\right)' = -\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu};$$

З іншого боку похідна від добутку $\frac{1}{x^\nu} \cdot J_\nu(x)$ обчислюється як

$\left(\frac{1}{x^{\nu}}\cdot J_{\nu}\left(x\right)\right)'=\frac{J_{\nu}{}'}{x^{\nu}}-\frac{\nu J_{\nu}}{x^{\nu+1}}$. Тоді маємо, що

$\frac{J_{\nu}{}'}{x^{\nu}}-\frac{\nu J_{\nu}}{x^{\nu+1}}=-\frac{J_{\nu+1}}{x^{\nu}}$; звідки

$$J_{\nu}{}'-\frac{\nu}{x}J_{\nu}=-J_{\nu+1}. \tag{22Д}$$

З формули (22Д), зокрема, випливає, що $J_0{}'=-J_1$. Використовуючи (20Д), одержимо:

$\left(x^{\nu}J_{\nu}\right)'=x^{\nu}J_{\nu-1}$.

З урахуванням, що $\left(x^{\nu}J_{\nu}\right)'=x^{\nu}J_{\nu}{}'+\nu x^{\nu-1}J_{\nu}$ маємо

$$x^{\nu}J_{\nu}{}'+\nu x^{\nu-1}J_{\nu}=x^{\nu}J_{\nu-1};$$

$$J_{\nu}{}'+\frac{\nu}{x}J_{\nu}=J_{\nu-1}. \tag{23Д}$$

Почленне додавання і віднімання рівностей (22Д) та (23Д) дає:

$$2J_{\nu}{}'=J_{\nu-1}-J_{\nu+1};$$

$$\frac{2\nu}{x}J_{\nu}=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}. \tag{24Д}$$

Формула (24Д) дозволяє виразити всі бесселеві функції з цілими індексами через J_0 і J_1. Дійсно, з (24Д) знаходимо (вважаючи $\nu=n-1$):

$$J_n=\frac{2n-2}{x}J_{n-1}-J_{n-2},$$

звідки послідовно одержуємо:

$J_2=\frac{2}{x}J_1-J_0;$ $\qquad J_3=\frac{4}{x}J_2-J_1=\frac{4}{x}\left(\frac{2}{x}J_1-J_0\right)-J_1=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1-\frac{4}{x}J_0.$

Бесселеві функції з півцілим індексом

Бесселеві функції, взагалі кажучи, є новими трансцендентними функціями, що не виражаються через елементарні функції. Виключення складають бесселеві функції з індексом $n+\frac{1}{2}$, де n – ціле. Ці функції можуть бути виражені через елементарні функції. Маємо:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1/2}}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}.$$

З властивостей Γ-функції випливає

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}2^{k+1}}{k!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)\sqrt{\pi}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{\frac{1}{2}+2k}}{2^{\left(k-\frac{1}{2}\right)}k!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)\sqrt{\pi}}.$$

Але $\quad 2^k\cdot k!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)=(2k+1)!$

Отже,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{25Д}$$

Аналогічно,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{26Д}$$

За допомогою формули

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}=(-1)^m\frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}$$

знаходимо

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{1/2}}=(-1)^n\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Але на підставі (25Д),

$$\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}.$$

Отже, при цілому додатному n

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \frac{\sin x}{x}.$$

За допомогою формули (26Д) знаходимо:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left[x^{-1/2} J_{-\frac{1}{2}}(x)\right] = x^{-\frac{1}{2}-n} J_{-\frac{1}{2}-n}(x).$$

Але на підставі (26Д),

$$x^{-1/2} J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{x}.$$

Отже, при цілому додатному n

$$J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \frac{\cos x}{x}.$$

Список літератури

1. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1984. – 313 с.
3. Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. – М. : Наука, 1977. – 224 с.
4. Бойко Б.Т. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Б.Т. Бойко, Л.В. Курпа, Ю.Ф. Сенчук. – Х. : НТУ “ХПІ”, 2001. – 288 с.
5. Будак Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1965. – 512 с.
6. Ильин В.А. Основы математического анализа в 2-х ч. Ч. 2 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1973. – 464 с.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.
8. Курпа Л.В. Рівняння математичної фізики. Лабораторний практикум / Л.В. Курпа, Ж.Б. Кашуба. – Х. : ХДПУ, 2000. – 217 с.
9. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.
10. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики / В.Л. Рвачев. – К. : Техника, 1967. – 212 с.
11. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 551 с.
12. Рвачев В.Л. R-функции в задачах теории пластин / В.Л. Рвачев, Л.В. Курпа. – К. : Наук. думка, 1987. – 175 с.
13. Рвачев В.Л. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов / В.Л. Рвачев, А.Н. Шевченко. – К. : Техника, 1988. – 197 с.
14. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М.М. Смирнов. – М. : Наука, 1975. – 125 с.
15. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 736 с.
16. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер : пер. с нем. – М. : Наука, 1966. – 635 с.
17. Ткаченко В.А. Методические указания по решению задач математической физики с сосредоточенными параметрами / В.А. Тка-ченко. – Х. : ХПИ, 1984. – 24 с.

Зміст

Навчальне видання

КУРПА Лідія Василівна
ЛІННИК Ганна Борисівна

Рівняння математичної фізики

Роботу до видання рекомендував Д.В. Бреславський

Редактор Л.А. Пустовойтова

План 2011 р. п.

Підп. до друку Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Папір друк. Друк – ризографія.
Ум. друк. арк. 16,0. Обл. вид. арк. 31,7. Наклад 200 прим. Зам. №
Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ". 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000 р.

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21