



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Є. І. БАЙДА

Розв'язання електромеханічних задач за допомогою рівнянь Лагранжа
другого роду

Харків 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Є.І. БАЙДА

Розв'язання електромеханічних задач за допомогою рівнянь Лагранжа
другого роду

Навчально-методичний посібник
з навчальної дисципліни «Пакети прикладних програм
для розв'язання мультифізичних задач»
для здобувачів ступеня доктор філософії зі спеціальності
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 2 від 26.06.2025

Харків
НТУ «ХПІ»
2025 рік

УДК 512.2

Б20

Рецензенти:

М. Г. Пантелят, к. фіз.-мат. н., доц. кафедри «Електричні апарати»
Харківського національного технічного університету «НТУ ХП»;

В.Є. Плюгін, д. т. н., проф., завідувач кафедри «Системи
електропостачання та споживання міст» Харківського національного
університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Байда Є. І.

Б 20 Розв'язання електромеханічних задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду: навчально-методичний посібник з навчальної дисципліни «Пакети прикладних програм для розв'язання мультифізичних задач» для здобувачів ступеня доктор філософії зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» усіх форм навчання / уклад.: Є. І. Байда. – Харків : НТУ «ХП», 2025. – 91 с.

Розглянуто методи розв'язання електромеханічних задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду. Наведені теоретичні відомості та практичні приклади. Усі теми забезпечені алгоритмами та текстами розрахункових програм.

Призначено для здобувачів ступеня доктор філософії зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» усіх форм навчання та інших спеціальностей.

Іл. 58. Табл.1. Бібліогр. 5 назв.

ISBN

УДК 512.2

©Є. І. Байда

©НТУ «ХП», 2025

ВСТУП

Розрахунки навіть простих електромеханічних систем являють собою доволі складну задачу. Річ у тім, що вирішення електромеханічної задачі потребує одночасного вирішення кількох різноманітних задач. Як правило, це наступні задачі:

- розрахунок електричної мережі;
- динаміка руху механічних частин;
- задача розрахунку магнітного поля, яке пов'язує між собою дві перші задачі і так само залежить від них.

Кожна з цих задач може бути доволі складною сама по собі, не кажучи вже про спільне їхнє вирішення.

Одним з можливих підходів до вирішення такої задачі є застосування рівнянь Лагранжа. Гіпотеза про можливість застосування рівнянь Лагранжа була висунута Д. Максвеллом у 1873 році на базі електромеханічної аналогії, яка дає можливість описувати взаємодію між рухом точок, твердих тіл, електричних та електромагнітних явищ.

В даному навчально-методичному посібнику розглянуто розрахунок індукційного датчика руху, наведено теоретичні відомості та практичні приклади.

1. Деякі теоретичні відомості.

1.1. Таблиця механічних та електричних аналогій.

З курсу фізики відомо, що деякій механічній величині завжди можна поставити у відповідність деякий електричний параметр.

Таблиця 1. Співвідношення механічних та електричних параметрів.

Механічні величини	Електричні величини
t – час	t – час
x – узагальнена координата	q – електричний заряд
\dot{x} – узагальнена швидкість	$\dot{q} = i$ – електричний струм
m – маса – поступальний рух, J – момент інерції – обертальний рух	L – індуктивність
$T = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху $T = \frac{J \cdot \dot{\phi}^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху	$T = \frac{L \cdot \dot{q}^2}{2}$ – електрокінетична енергія
c – коефіцієнт пружності	$\frac{1}{C}$ – величина, зворотна ємності
β – коефіцієнт спротиву руху	R – резистивний опір
Q – узагальнена сила	E – електрорушійна сила
$dA = Q \cdot dx$ – елементарна робота	$dA = E \cdot dq$ – елементарна робота

1.2. Узагальнені координати та сили.

Узагальнені координати – це незалежні параметри, які однозначно визначають положення точок матеріальної системи. Їх кількість дорівнює кількості ступенів свободи системи.

Так радіус-вектор, який визначає положення k^{oi} точки системи з s ступенями свободи в нестационарному режимі є функцією узагальнених координат та часу:

$$\mathbf{r}_k = r_k(q_1, q_2 \dots q_s, t), \quad (1.1)$$

де q_k – узагальнені координати; t – час.

Тоді швидкість k^{oi} точки системи буде:

$$\mathbf{v}_k = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial r_k}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial r_k}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial r_k}{\partial t}, \quad (1.2)$$

де \dot{q} – похідна від координати по часу.

Можливе переміщення можна записати:

$$dr_k = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial r_k}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \dots + \frac{\partial r_k}{\partial q_s} \cdot dq_s, \quad (1.3)$$

де dq_i – узагальнені можливі переміщення.

Узагальненими силами Q_i (де $i = 1 \dots s$) зуться коефіцієнти, що стоять в виразах робіт всіх активних сил при відповідних можливих переміщеннях. Кількість узагальнених сил дорівнює кількості узагальнених координат.

Розмірність узагальненої сили може бути різною і не обов'язково виражатися в Ньютонах, вона залежить від вибору узагальненої координати.

Розрахунок узагальнених сил можна проводити наступним чином:

1. Усвідомити кількість ступенів свободи системи та вибрати узагальнені координати.
2. Накреслити всі активні сили системи.
3. Якщо не всі зв'язки є ідеальними, то додати до активних сил відповідні реакції зв'язку (наприклад сили тертя).
4. Надати системі незалежні узагальнені переміщення по числу узагальнених координат.

Великою перевагою рівнянь Лагранжа є те, що в них не входять реакції зв'язків.

1.4. Послідовність дій для складання рівнянь Лагранжа другого роду.

Послідовність складання рівнянь Лагранжа наступна:

- 1) визначити число ступенів свободи системи;
- 2) визначити систему координат та визначити незалежні узагальнені координати;
- 3) визначити узагальнені сили Q_i у відповідності до узагальнених координат;
- 4) визначити кінетичну енергію системи;
- 5) визначити часткові похідні від кінетичної енергії по швидкостям, а потім по часу $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$;
- 6) визначити часткові похідні від кінетичної енергії по координатам $\frac{\partial T}{\partial q_s}$;
- 7) отримані результати підставити в рівняння (1.6).

2. Загальна схема розрахунку електромеханічної системи.

На рис. 2.1 показана схема електромеханічного механізму, розрахунок котрого і буде проводитися. Механізм складається з якоря, виготовленого з феромагнітного матеріалу; котушки, яка намотана тонким проводом; зворотної пружини; електричного ланцюга постійного струму.

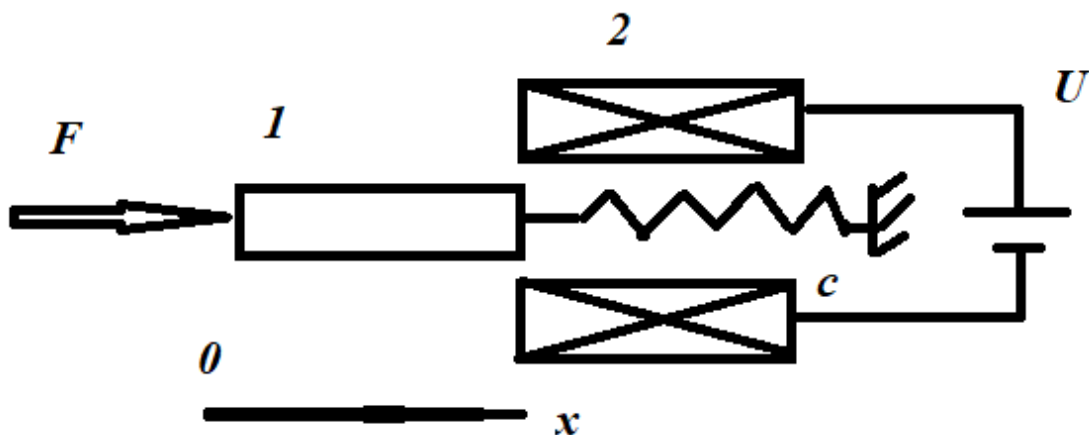


Рис. 2.1. Узагальнена схема де: U – постійна напруга яка прикладена до котушки; 1 – феромагнітний яркір; 2 – котушка; c – пружина; F – сумарна сила, що прикладена до яркіря; x – зміщення яркіря.

На рис. 2.1 яркір безпосередньо з'єднано з пристроєм, рух якого вимірюється. Котушка підключена до джерела напруги U і має активний опір R . На рис. 2.1. показано загальний випадок – на яркір діє сумарна сила F . В подальшому буде розглянуто випадок, коли задано тільки зміщення яркіря.

При зміщенні яркіря в середину котушки буде змінюватися її індуктивність, тобто $L = L(x)$. При цьому буде змінюватися струм котушки, який можна виміряти. Якщо шкалу амперметра градуювати в одиницях ходу яркіря, то можна безпосередньо отримувати ці величини.

Складемо рівняння руху електромеханічної системи не враховуючи сили тертя та вагу яркіря.

Електромеханічна система, що складається з яркіря та котушки має два ступені свободи, тому буде мати і дві узагальнені координати. Одна з них – переміщення x , що визначає положення яркіря. Друга – q , електричний заряд, що характеризує стан електричного ланцюга.

Цим узагальненим координатам відповідають два рівняння Лагранжа

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Q_x, \\ \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right) = Q_q. \end{cases} \quad (2.1)$$

До механічної частини (якорю) прикладені наступні сили; зовнішня сила, реакція сил пружності та сила спротиву руху, що пропорційна швидкості якоря.

2.1. Узагальнені сили.

Для розрахунку узагальненої механічної сили треба згадати, що елементарна робота є скалярним добутком вектора сили на вектор переміщення

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F \cdot dx \cdot \cos(\mathbf{F} \wedge d\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

де \mathbf{F} – вектор сили; $d\mathbf{x}$ – вектор переміщення.

Дамо якорю можливе узагальнене переміщення dx , вважаючи при цьому незмінним електричний заряд котушки, тоді робота активних сил буде

$$dA_x = F_x \cdot dx - c \cdot x \cdot dx - \beta \cdot v \cdot dx, \quad (2.3)$$

де F – зовнішня сила; $c \cdot x$ – протидіюча сила пружини; $\beta \cdot v$ – сила спротиву руху.

Таким чином

$$Q_x = F_x - c \cdot x - \beta \cdot v. \quad (2.4)$$

Згідно з законом Ома, напруга на котушці зменшується завдяки Омичним втратам і дорівнює

$$E = U - i \cdot R, \quad (2.5)$$

де E – електрорушійна сила; U – напруга мережі; i – струм котушки; R – активний опір котушки.

Далі будемо вважати, що змінюється електричний заряд dq , а узагальнене переміщення $dx = 0$.

Тоді робота електрорушійної сили буде

$$dA_q = E \cdot dq = (U - i \cdot R) \cdot dq = (U - \dot{q} \cdot R) \cdot dq. \quad (2.6)$$

Звідси

$$Q_q = U - \dot{q} \cdot R. \quad (2.7)$$

2.2. Кінетична енергія системи та рівняння Лагранжа.

Кінетична енергія системи складається з двох частин – механічної та електрокінетичної

$$T = T_1 + T_2. \quad (2.8)$$

Так як якор 1 (рис. 2.1) здійснює поступальний рух, то

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2, \quad (2.9)$$

де m – маса якоря.

Електрокінетична енергія дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot L(x) \cdot \dot{q}^2, \quad (2.10)$$

де $L(x)$ – індуктивність, що залежить від положення якоря.

Для складання рівнянь Лагранжа розрахуємо часткові похідні по узагальненим швидкостям \dot{x} та \dot{q}

$$\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} = L(x) \cdot \dot{q}. \quad (2.11)$$

Далі розрахуємо похідні по часу від виразу (2.11)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}} = m \cdot \ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} = L(x) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q}, \quad (2.12)$$

де x'' та q'' – другі похідні по часу від зміщення та заряду.

Лишилося розрахувати часткові похідні від кінетичної енергії по узагальненій координаті

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot \dot{q}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0. \quad (2.13)$$

Підставивши отримані результати (2.4, 2.7, 2.12, та 2.13) в рівняння Лагранжа (2.1) отримаємо

$$\begin{aligned} m \cdot x'' - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot \dot{q}^2 &= F_x - c \cdot x - \beta \cdot \dot{x}, \\ L(x) \cdot q'' + \left(\frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} + R \right) \cdot \dot{q} &= U. \end{aligned} \quad (2.14)$$

У результаті розв'язання системи (2.14) отримаємо залежності ходу та заряду від часу. Дали можна знайти струм, як похідну від заряду та виключивши час знайти значення струму котушки від ходу якоря.

Але перед тим, проаналізуємо систему (2.14). Для цього перенесемо всі члени в ліву частину та помножимо на мінус одиницю

$$-m \cdot x'' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot \dot{q}^2 + F_x - c \cdot x - \beta \cdot \dot{x} = 0. \quad (2.15)$$

В (2.15) перший член – сили інерції; другий – електромагнітна сила, що діє на якір і яка залежить від швидкості зміни індуктивності та струму; третій – зовнішня сила; четвертий – сила спротиву пружини; п'ятий – втрати енергії при русі.

Друге рівняння

$$L(x) \cdot q'' + \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q} + R \cdot \dot{q} - U = 0, \quad (2.16)$$

де перший член – падіння на пруги на індуктивності, яке пропорційне швидкості зміни струму; другий член – так звана проти рушійна сила, що обумовлена швидкістю зміни індуктивності та швидкістю руху якоря; третій член – втрати напруги на активному опорі котушки; четвертий член – прикладена зовнішня напруга.

Для зручності подальшого використання перепишемо (2.14) у вигляді

$$\begin{aligned}
 m \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot i^2 &= F_x - c \cdot x - \beta \cdot v, \\
 \frac{dx}{dt} &= v, \\
 L(x) \cdot \frac{di}{dt} + \left(\frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot v + R \right) \cdot i &= U,
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

де v – швидкість, яка є похідною від переміщення якоря; i – струм.

З другого рівняння (2.17) випливає, що при незначній швидкості якоря (повільний рух якоря) зміни струму в котушці не буде, якщо не зважати на перехідний режим в електричній мережі.

3. Розрахунок індуктивності системи.

Одним з найбільш складних елементів, які потрібні для розрахунку системи диференціальних рівнянь (2.17) є розрахунок функціональної залежності індуктивності системи від ходу якоря. У зв'язку з тим, що магнітна система (рис. 2.1) є «відкритою», розрахунок можна провести тільки на базі рівнянь магнітного поля з використанням спеціалізованих комп'ютерних програм. Одною з таких програм, яка знаходиться у вільному доступі є програма femm 4.2.

3.1. Загальні відомості про програму femm.

Femm являє собою програму вирішення задач для низькочастотних або постійних магнітних полів у двовірній плоскій та вісісиметричній системах координат в лінійній та нелінійній постановці.

У зв'язку з тим, що розглядається магнітна система без урахування вихрових струмів у якорі (рис. 2.1), то задачу можна розглядати як магнітостатичну, тобто таку, в якій магнітне поле створено постійними струмами або струмами, що змінюються з невеликими швидкостями (магнітне поле «встигає» за струмом).

В цьому випадку розрахункові рівняння (рівняння Максвелла) будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

де \mathbf{H} – вектор напруженості магнітного поля; \mathbf{J} – вектор щільності зовнішнього струму; \mathbf{B} – вектор магнітної індукції.

Фізична суть рівнянь (3.1) наступна:

джерелом вихрового магнітного поля є щільність струмів;
магнітні силові лінії замкнуті самі на себе (на відміну від електричного поля, де силові лінії починаються та закінчуються на електричних зарядах);
магнітних зарядів не існує.

В матеріальному середовищі зв'язок між векторами \mathbf{H} та \mathbf{B} в загальному випадку може бути записаний

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r(|\mathbf{B}|) \cdot \mathbf{H},\tag{3.2}$$

де μ_0 – абсолютна магнітна проникність повітря; $\mu_r(|\mathbf{B}|)$ – відносна магнітна проникність матеріалу; $|\mathbf{B}|$ модуль магнітної індукції.

Вводячи поняття векторного магнітного потенціалу, розмірність якого [Вб/м] як

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.3)$$

можна записати перше рівняння (3.1)

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r(|\mathbf{B}|)} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}. \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) розраховується системою `femm` методом кінцевих елементів з відповідними граничними умовами.

Фізичний смисл вектора \mathbf{A} витікає з формули $\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ – магнітний потенціал – це потік на одиницю довжини замкнутого контуру, який цей потік охоплює.

3.2. Короткі відомості про метод кінцевих елементів.

Застосування методу починається з розбиття розрахункової області на кінцеві елементи (трикутники у разі плоскої задачі, або тетраедри у разі 3D задачі). В середині кожного елементарного трикутника (розглядаємо плоску або вісісиметричну задачу) векторний магнітний потенціал можна задати як

$$A = a + b \cdot x + c \cdot y, \quad (3.5)$$

де a , b , c – невідомі коефіцієнти, які знаходяться через значення магнітного потенціалу у вершинах трикутника.

Тобто

$$a = f_1(A_i, x_i, y_i), b = f_2(A_i, x_i, y_i), c = f_3(A_i, x_i, y_i). \quad (3.6)$$

де A_i – невідомі значення потенціалу у вершинах трикутника; x_i, y_i – координати вершин трикутника; $i=1..3$.

Підставивши (3.6) в (3.5) отримаємо значення векторного потенціалу у будь-якій точці трикутника в залежності від потенціалу у вершинах та координат вершин.

Для розрахунку поля в методі кінцевих елементів (розрахунок A_i) розраховується мінімум функціонала

$$F_i = \int_S \left(\left(\int_{B_x \mu} \frac{1}{\mu} \cdot B_x \cdot dB_x + \int_{B_y \mu} \frac{1}{\mu} \cdot B_y \cdot dB_y \right) - A \cdot J \right) \cdot dS, \quad (3.7)$$

де магнітна індукція визначається як $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$; S – площа трикутника; J – щільність струму у вершинах, якщо вона присутня.

Функціонал (3.7) підсумовується по всім трикутникам з урахуванням спільності суміжних вершин.

Екстремум функціонала (3.7) знаходиться як

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \cdot \sum_{i=1}^N F_i = 0, \quad (3.8)$$

де A_i – невідомі значення магнітного потенціалу у вершинах трикутників з урахуванням суміжних вершин; N – загальна кількість вершин.

У результаті розкриття (3.8) утворюється система з багатьох (декілька сотень, а іноді і тисяч) лінійних або нелінійних рівнянь відносно невідомих значень магнітного потенціалу у вершинах трикутників. Систему можна розв'язати при завданні граничних умов на границях розрахункової області та значеннях щільності струму в областях (в яких щільності струму ϵ). Розв'язання системи рівнянь здійснюється чисельними методами, зокрема методом Ньютона.

3.3. Підготовка вхідних розрахункових даних та розрахунок магнітного поля.

Для проведення розрахунків залежності індуктивності електромеханічної системи (рис. 2.1) від ходу якоря необхідно підготувати наступні вхідні дані:

- 1) геометричні розміри системи;
- 2) струм котушки;
- 3) кількість витків котушки;
- 4) активний опір котушки;
- 5) визначитись з матеріалом.

Геометричні розміри системи були вибрані заздалегідь з урахуванням вимог до електромеханічної системи і показані на рис. 3.1.

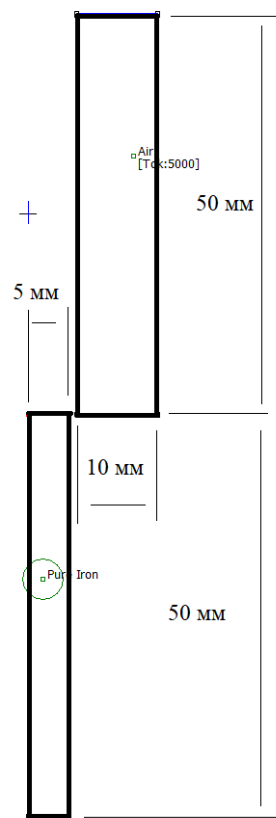


Рис. 3.1. Геометричні розміри системи: розміри котушки $H_k=50$ мм; $A_k=10$ мм; $H_j=50$ мм; $A_j=5$ мм; проміжок між котушкою та якорем дорівнює 1 мм.

При виборі обмотувальних параметрів котушки будемо виходити з того, що

- індуктивність повинна суттєво змінюватись в залежності від ходу якоря;
- індуктивність пропорційна квадрату кількості витків.

Виходячи з цього оберемо кількість витків, що дорівнює 5000. Тоді

$$S_m \cdot w = H_k \cdot A_k \cdot k_f, \quad (3.9)$$

де S_m – перетин мідного дроту; w – кількість витків; H_k , A_k – габарити котушки; k_f – коефіцієнт заповнення, що дорівнює 0,6.

В цьому випадку $S_m = 0,06 \text{ мм}^2$, а виходячи з допустимої щільності струму $2 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$, струм має дорівнювати 0,12 А.

Активний опір котушки з урахуванням її розмірів має бути $R = 100 \text{ Ом}$. Тоді напруга повинна бути 12 В постійного струму.

3.3.1. Створення геометрії у препроцесорі креслення програми fctt.

Ключовими елементами препроцесора креслення є наступні режими:

- ✓ режим креслення точок;
- ✓ режим креслення ліній;
- ✓ дуговий сегмент;
- ✓ метод блока (режим визначення матеріальних властивостей);
- ✓ метод груп (режим блоків).

При роботі у першому та четвертому режимах можна створювати геометричні об'єкти та задавати властивості областей, а також редагувати обрані. П'ятий метод об'єднує різні об'єкти разом, полегшуючи роботу с ними. Перемикання меж режимами здійснюється кнопками панелі креслення (рис. 3.2).

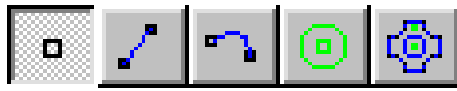
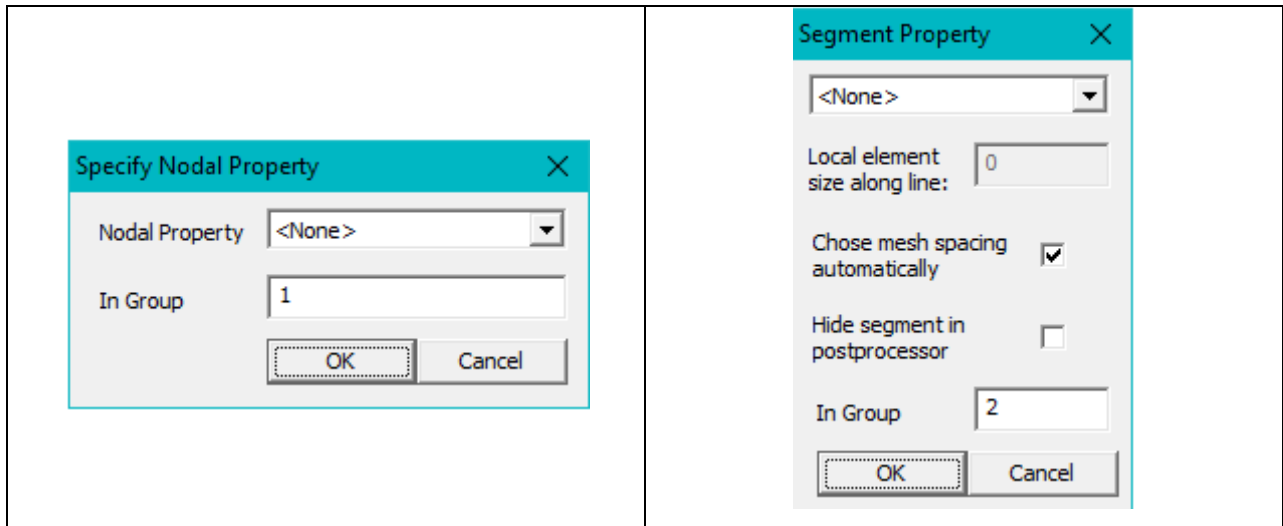



Рис. 3.2 – Кнопки панелі креслення:

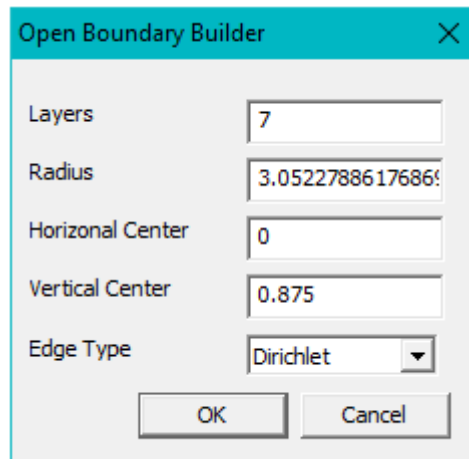
1 – режим креслення точок; 2 – режим креслення ліній; 3 – режим креслення дугових сегментів; 4 – режим визначення матеріальних властивостей; 5 – режим блоків

3.3.2. Порядок креслення.

Після створення нового файлу і вибору типу задачі (магнітна, електрична) та виду задачі в *Problem->Problem type*, в режимі креслення точок за допомогою клавіші *Tab* задати координати точок. Переключитися в режим креслення ліній і за допомогою лівої клавіші миші з'єднати точки. Об'єднати всі точки та лінії якоря за допомогою правої клавіші миші та натиснувши «Пробіл» у групу 1. Аналогічно зробити с контурами котушки об'єднавши його в групу 2 (попередньо переключитися до відповідних режимів креслення).



За допомогою кнопки  – Open boundary задати умови на зовнішній границі з урахуванням розміщення центру та радіуса області.

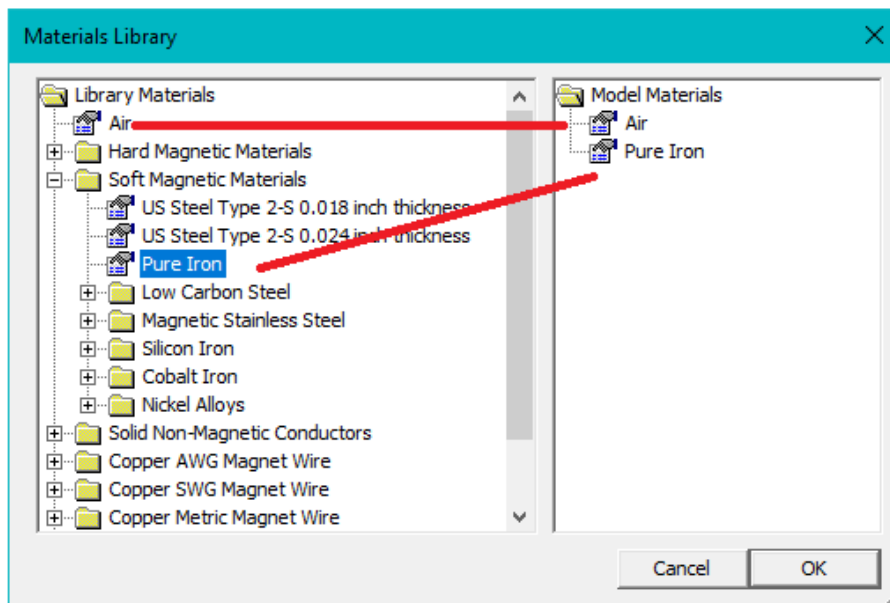


3.3.3. Завдання властивостей матеріалу та струму котушки.

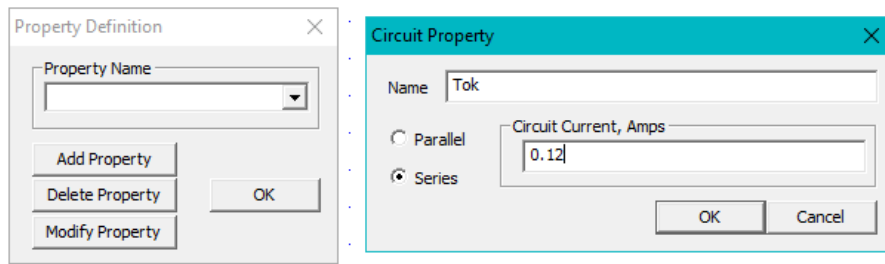
Наступним етапом є завдання властивостей матеріалів, які використовуються в розрахунках, завдання струму та кількості витків котушки.

Для завдання матеріалів необхідно:

1) за допомогою команди *Properties->Materials Library* «перетягнути» потрібні матеріали в програму.

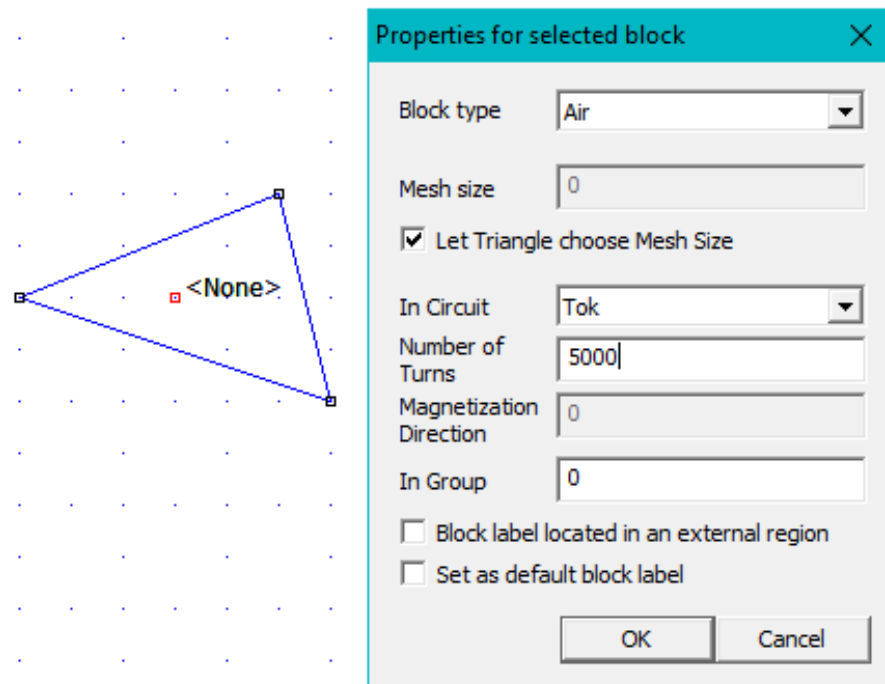



2) за допомогою команди *Properties->Circuits-> Add Properties* задати назву та значення току котушки (режим *Series*).



3) Вибрати «режим визначення матеріальних властивостей» і за допомогою лівої клавіші миші позначити відповідні області.

4) Правою клавішею миші позначити вибрані точки і натиснувши «Пробіл» в «Blok Type» обрати властивості матеріалу, а для котушки – струм та кількість витків та заповнити параметр «In Group» відповідно – для якоря – 1; для котушки – 2.

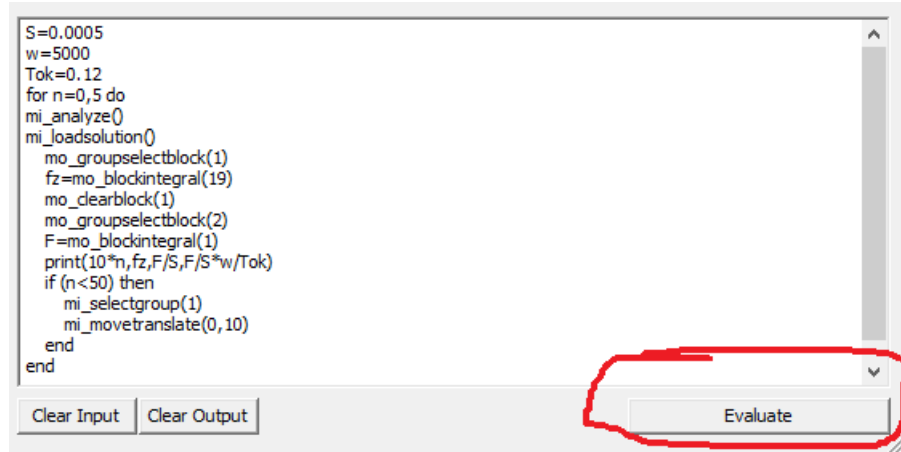


5) Розрахунок та отримання результатів здійснюється за допомогою кнопок .

Для автоматизації режиму розрахунку (отримання декількох розрахункових значень індуктивності від ходу якоря) треба натиснути на



кнопку «*Lua console*» та вставити програму, набрану у текстовому редакторі (Блокнот, Word) у вікно та натиснути кнопку «*Оцінити*».



3.4. Розрахунок індуктивності системи в програмі fetm.

На рис. 3.2 показана розрахункова модель та картина магнітного поля в початковому положенні якоря.

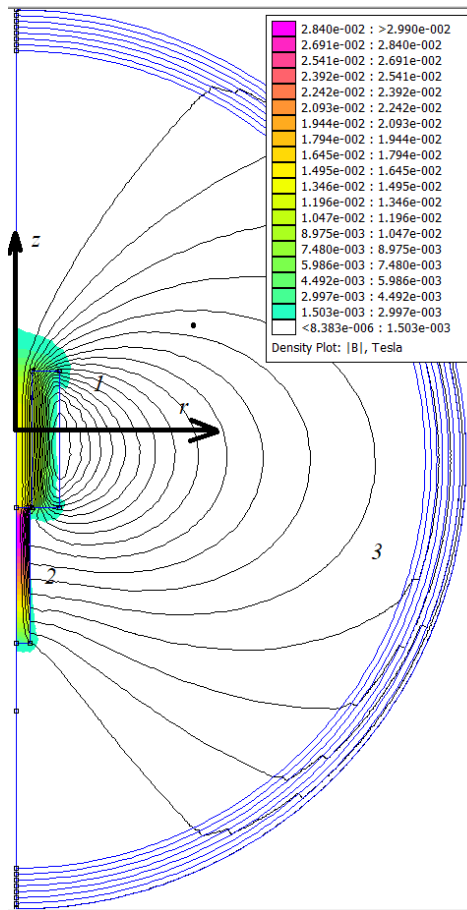


Рис. 3.3. Розрахункова модель та результати розрахунку поля в початковому положенні якоря, де 1 – котушка; 2 – яркір; 3 – «віддалена» границя

Для розрахунку індуктивності в залежності від положення якоря використовується алгоритмічна мова *Lua*, за допомогою якої розрахунки можна значно прискорити і яка є частиною програми *femm*.

Розрахунок індуктивності проводився по формулі

$$L = \frac{w \cdot \Phi}{i}, \quad (3.10)$$

де L – індуктивність; w – кількість витків; Φ – магнітний потік; i – струм котушки.

Але проблема в тому, що в (3.5) магнітний потік залежить від координат в границях котушки (див. рис. 3.2), тобто $\Phi = \Phi(r, z)$. В цьому випадку треба

скористатися розрахунком потоку, приведеного по потокощепленню, котрий по визначенню дорівнює

$$\begin{aligned}\Phi_{\Psi} &= \frac{1}{w} \cdot \int_{S_k} \Phi \cdot dw = \left| dw = \frac{w}{S_k} \cdot dS_k \right| = \\ \frac{1}{S_k} \cdot \int_{S_k} \Phi \cdot dS_k &= \left| \Phi = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l A_{\varphi} \cdot dl_{\varphi} \right| = \frac{1}{S_k} \cdot \int_{V_k} A_{\varphi}(r, z) \cdot dV_k \\ &= \frac{2 \cdot \pi}{S_k} \cdot \int_{V_k} A_{\varphi}(r, z) \cdot r \cdot dr \cdot dz,\end{aligned}\quad (3.11)$$

де S_k – площа поперечного перетину котушки; V_k – об’єм котушки; A_{φ} – векторний магнітний потенціал, кутова складова; l – довжина витка котушки.

В програмі femm як раз і є стандартний інтеграл, котрий розраховується

$$\int_{V_k} A_{\varphi}(r, z) \cdot dV_k.$$

Ще один стандартний інтеграл, який використовує програма femm, це інтеграл обчислення сили, що діє на об’єкт у магнітному полі

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_G \mathbf{H} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \right) \cdot dG, \quad (3.12)$$

де \mathbf{F}_m – магнітна сила; \mathbf{H} – напруженість магнітного поля; \mathbf{B} – магнітна індукція; \mathbf{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі; G – контур інтегрування, що охоплює об’єкт ззовні.

По описаній методиці було проведено розрахунок магнітної сили, магнітного потоку та індуктивності системи в залежності від ходу якоря (див. рис. 3.3) при умові, що провід, яким намотана котушка достатньо тонкий і рівномірно заповнює простір котушки.

Нижче приведена розрахункова програма на мові *Lua* та результати розрахунку у тому вигляді, в якому вони отримані в програмі femm.

Програма на мові *Lua*.

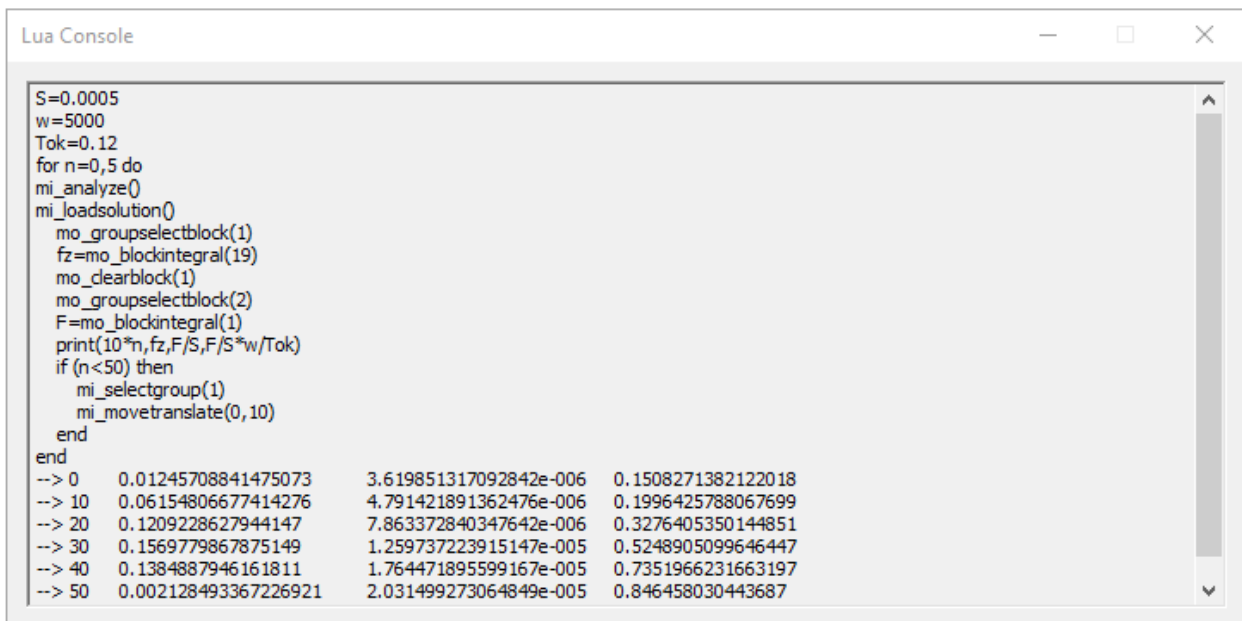
S=0.0005

```

w=5000
Tok=0.12
for n=0,5 do
mi_analyze()
mi_loadsolution()
  mo_groupselectblock(1)
  fz=mo_blockintegral(19)
  mo_clearblock(1)
  mo_groupselectblock(2)
  F=mo_blockintegral(1)
  print(10*n,fz,F/S,F/S*w/Tok)
  if (n<50) then
    mi_selectgroup(1)
    mi_movetranslate(0,10)
  end
end
end

```

Результати розрахунку наведені у тому вигляді, як вони представлені в програмі.



```

Lua Console
S=0.0005
w=5000
Tok=0.12
for n=0,5 do
mi_analyze()
mi_loadsolution()
  mo_groupselectblock(1)
  fz=mo_blockintegral(19)
  mo_clearblock(1)
  mo_groupselectblock(2)
  F=mo_blockintegral(1)
  print(10*n,fz,F/S,F/S*w/Tok)
  if (n<50) then
    mi_selectgroup(1)
    mi_movetranslate(0,10)
  end
end
end
--> 0    0.01245708841475073    3.619851317092842e-006    0.1508271382122018
--> 10   0.06154806677414276    4.791421891362476e-006    0.1996425788067699
--> 20   0.1209228627944147    7.863372840347642e-006    0.3276405350144851
--> 30   0.1569779867875149    1.259737223915147e-005    0.5248905099646447
--> 40   0.1384887946161811    1.764471895599167e-005    0.7351966231663197
--> 50   0.002128493367226921    2.031499273064849e-005    0.846458030443687

```

Рис. 3.4. Результати розрахунку, де перший стовбець – хід у мм; другий – електромагнітна сила у H ; третій – магнітний потік у $Bб$; четвертий – індуктивність у $Гн$

Отримані дані (рис. 3.4) були передані в електронні таблиці Excel і в результаті отримані наступні графіки.

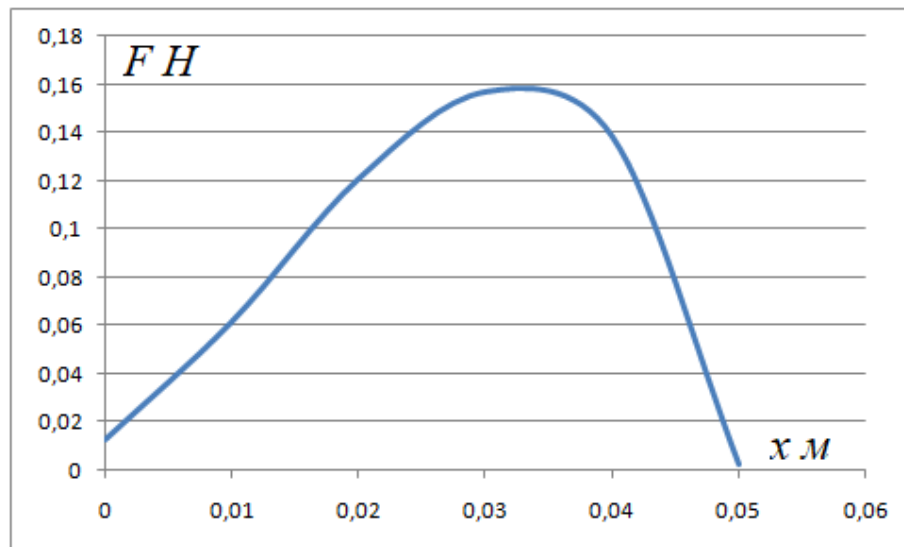


Рис.3.5. Електромагнітна сила в залежності від ходу якоря

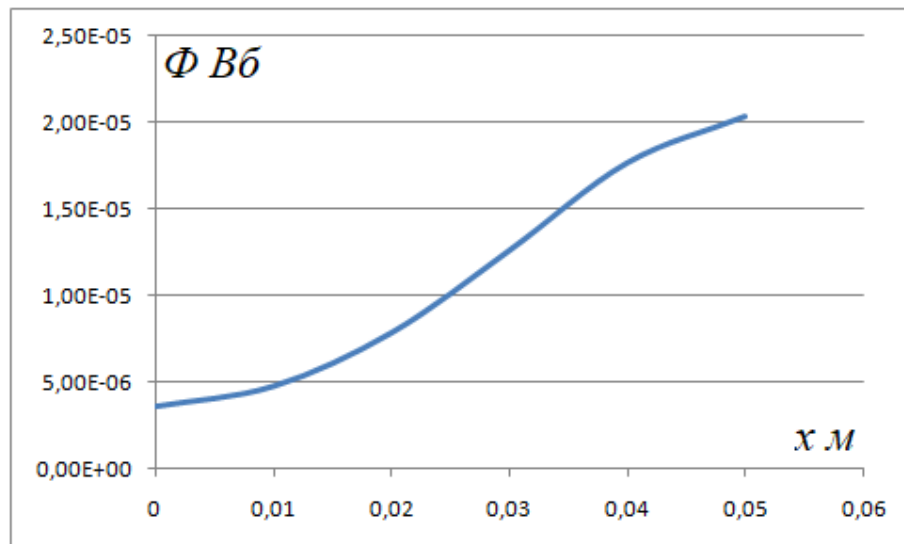


Рис. 3.6. Магнітний потік в залежності від ходу якоря

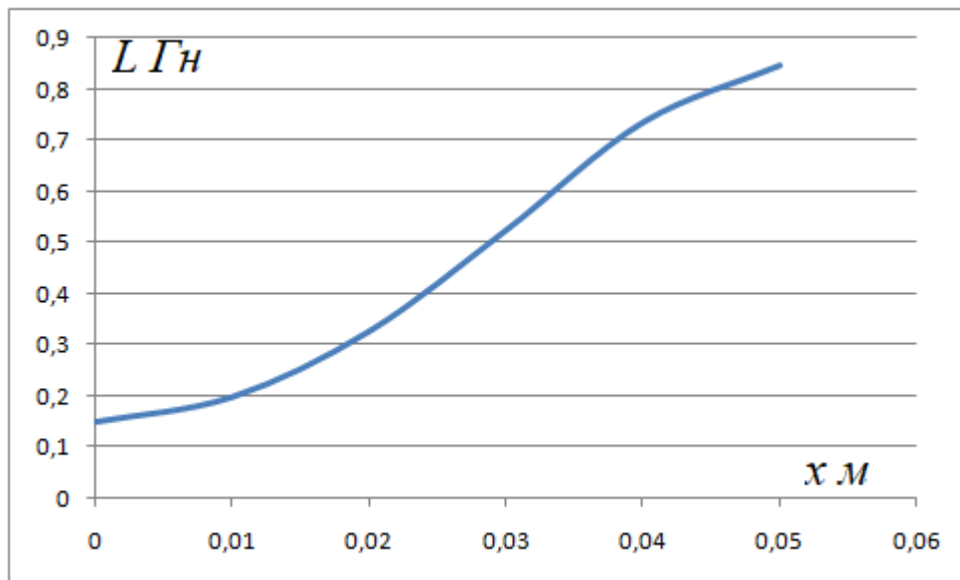


Рис. 3.7. Індуктивність в залежності від ходу якоря

Отримані графіки відображають зміни параметрів від ходу якоря в табличному вигляді. Але для розрахунків по рівнянням (2.17) потрібна функціональна залежність індуктивності системи від ходу якоря. Таку залежність можна отримати різними способами і, зокрема, за допомогою глобальної апроксимації, яка полягає у визначенні параметрів апроксимуючої функції $L(x)$ та її похідної $\frac{dL(x)}{dx}$ на всьому інтервалі зміни аргументу x .

Нижче приведено фрагмент програми в системі *MAPLE*.

> restart;

Табличні значення ходу якоря

```
> X := [
  0
  0.010
  0.020
  0.030
  0.040
  0.050
];
```

Табличні значення індуктивності

$$L := \begin{bmatrix} 0.1508 \\ 0.1996 \\ 0.3276 \\ 0.5249 \\ 0.7352 \\ 0.8464 \end{bmatrix}$$

> $L := \text{unapply}(\text{interp}(X, L, x), x)$ – розрахунок коефіцієнтів глобальної апроксимації

$$L := x \rightarrow -7.83333333310^5 x^5 - 1.15000000010^5 x^4 + 7208.333333x^3 + 272.000000x^2 + 1.562000000x + 0.1508$$

> $dL := \text{unapply}(\text{diff}(L(x), x), x)$ – похідна від індуктивності

$$dL := x \rightarrow -3.91666666610^6 x^4 - 4.60000000010^5 x^3 + 21625.00000x^2 + 544.0000000x + 1.562000000$$

Залежність похідної від індуктивності по ходу якоря наведена нижче по даним апроксимації.

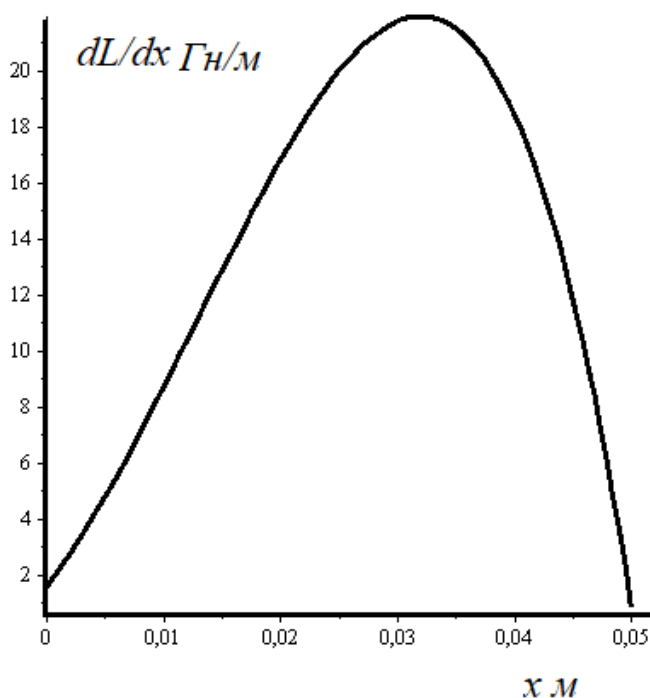


Рис. 3.8. Зміна похідної від індуктивності в залежності від ходу якоря

З графіка можна помітити, що характер кривої (рис. 3.4) такий самий як і електромагнітної сили бо електромагнітна сила і обумовлена зміною індуктивності.

4. Вирішення рівнянь Лагранжа.

Розглянемо декілька можливих варіантів розв'язання рівнянь (2.17).

4.1. Якір системи рухається по апріорі заданому закону.

Закон руху якоря задамо у наступній формі

$$x(t) = x_{\max} \cdot (1 - \cos(\omega t)) \cdot 0.5, \quad (4.1)$$

де $x_{\max}=0,05$ [м] – амплітуда коливань; $\omega=2*\pi*f$ [1/с] – кругова частота; $f=5$ [1/с] – частота.

Тоді від системи (2.17) лишається тільки друге рівняння, яке треба доповнити початковими умовами. Нижче наведено фрагмент програми *MAPLE* в якому показано як вирішуються такі рівняння та отримані результати.

> `plot([x], t = 0..0.5, color = black, thickness = 3)` – графік зміни ходу

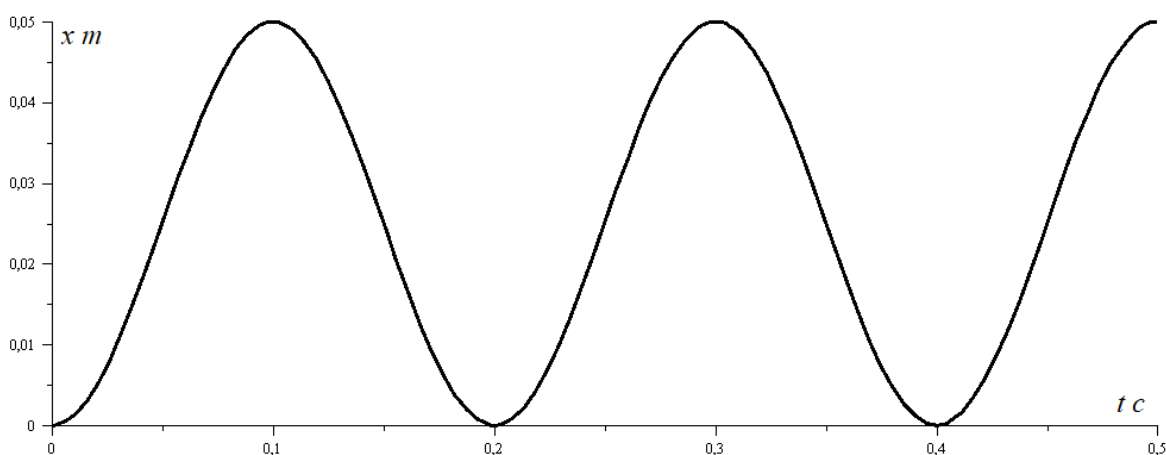


Рис. 4.1. Графік зміни ходу якоря від часу

Система, що розв'язується

$$s := L(x) \cdot \text{diff}(TT(t), t) + (dL(x) \cdot \text{diff}(x, t) + R) \cdot TT(t) = 12;$$

Початкові умови

$$v := TT(0) = \frac{U}{R};$$

Вирішення диференційного рівняння чисельним методом

```
sols := dsolve({s, v}, {TT(t)}, numeric)
```

```
with(plots)
```

Графік струму від часу

```
odeplot(sols, [t, TT(t)], 0..0.5, numpoints = 400, color = black,
        thickness = 3)
```

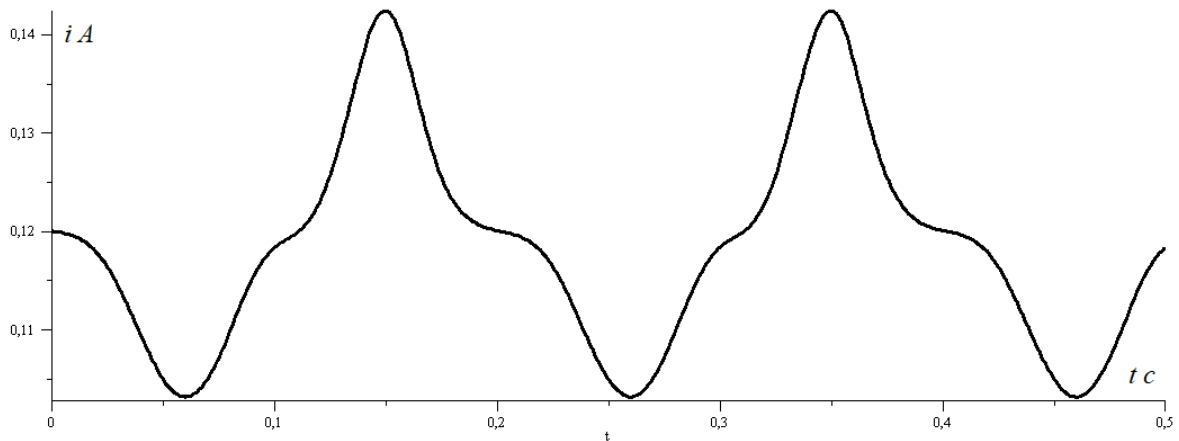


Рис. 4.2. Зміна струму в залежності від часу

Залежність струму від ходу якоря

```
odeplot(sols, [x, TT(t)], 0..0.5, numpoints = 400, color = black,
        thickness = 3)
```

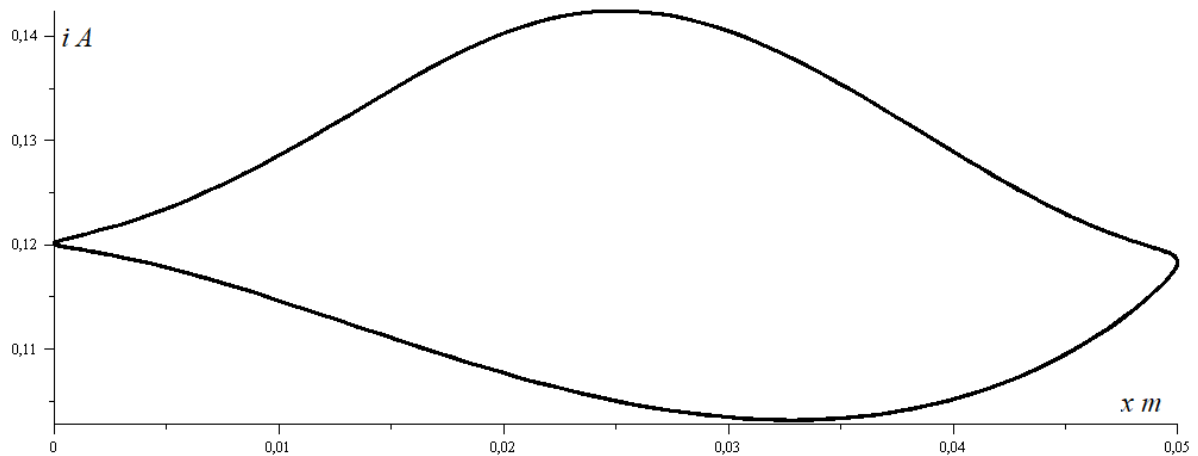


Рис. 4.3. Фазовий портрет системи

Як випливає з рис. 4.2 – рис. 4.3 нелінійна залежність індуктивності та її похідної від ходу якоря впливає як на форму струму, так і на фазовий портрет системи.

4.2. На якір системи діє періодична сила.

У цьому випадку виникає необхідність вирішення системи (2.17).

Нехай зовнішня сила, що діє на якір має вигляд

$$F = F_{\max} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)) \cdot 0,5 + \frac{F_{\max}}{2}, \quad (4.2)$$

де F_{\max} – максимальне значення сили, що дорівнює 50 [Н]; ω – кругова частота зовнішньої сили, що дорівнює $2 \cdot \pi \cdot f$, де $f=5$ [1/с], при цьому частота власних коливань системи дорівнювала $\omega_0=255,5$ [1/с].

Маса якоря та жорсткість пружини дорівнювали $m_j=0,0305$ кг; $c=2000$ Н/м.

Нижче приведено роздруківку розрахункової програми з коментарями.

restart;

Завдання функціональної залежності індуктивності від ходу

$$L := z \rightarrow -7.8333333310^5 z^5 - 1.1500000010^5 z^4 + 7208.333333z^3 + 272.000000z^2 + 1.56200000z + 0.1508;$$

Графік індуктивності від ходу

`plot(L(z), z = 0 .. 0.05, color = black, thickness = 3);`

Завдання функціональної залежності похідної індуктивності від ходу

$$dL := z \rightarrow -3.9166666610^6 z^4 - 4.6000000010^5 z^3 + 21625.00000z^2 + 544.000000z + 1.562000000$$

Графік похідної індуктивності від ходу

`plot(dL(z), z = 0 .. 0.05, color = black, thickness = 3)`

Завдання параметрів механічної системи

$$f := 5.0; \omega := 2 \cdot \pi \cdot f; \text{Period} := \frac{1}{f}; F_{max} := 50.0; F := F_{max} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)) \cdot 0.5 + \frac{F_{max}}{2};$$

$$C := 2000.00000 \text{ mj}; m_j := 0.030615; \omega_0 := \sqrt{\frac{C}{m_j}}; \beta := 5.0;$$

Графік періодичної сили від часу

`plot(F, t = 0 .. 2 \cdot \text{Period}, color = black, thickness = 3)`

Завдання параметрів електричної системи

$$R := 100.0; U := 12.0;$$

Система, що вирішується

$$\begin{aligned}
s &:= m_j \cdot \text{diff}(v(t), t) - 0.5 \cdot dL(x(t)) \cdot Tok(t)^2 = F - C \cdot x(t) - \beta \\
&\quad \cdot v(t), \\
&\quad \text{diff}(x(t), t) = v(t), \\
&\quad L(x(t)) \cdot \text{diff}(Tok(t), t) + (dL(x(t)) \cdot v(t) + R) \cdot Tok(t) = U;
\end{aligned}$$

Початкові умови

$$v := Tok(0) = \frac{U}{R}, x(0) = \frac{F0}{C}, v(0) = 0.0;$$

Розв'язання системи чисельним методом

```
sols := dsolve({s, v}, {Tok(t), x(t), v(t)}, numeric);
```

Підключення бібліотеки графіки

```
with(plots);
```

Побудова графіка струму від часу

```
odeplot(sols, [t, Tok(t)], 0..5*Period, numpoints = 400, color
= black, thickness = 3)
```

Побудова графіка ходу від часу

```
odeplot(sols, [t, x(t)], 0..5*Period, numpoints = 400, color = black,
thickness = 3)
```

Побудова графіка фазового портрету

```
odeplot(sols, [x(t), Tok(t)], 0..5*Period, numpoints = 400, color
= black, thickness = 3)
```

4.2.1. Розрахунок без урахування втрат енергії в системі.

Розглянемо результат розрахунку зміни ходу якоря та струму котушки, яке відбувається в системі, якщо не враховувати втрати енергії, тобто коефіцієнт $\beta=0$ (2.17).

На рис. 4.4 – рис. 4.7 наведено відповідні графіки.

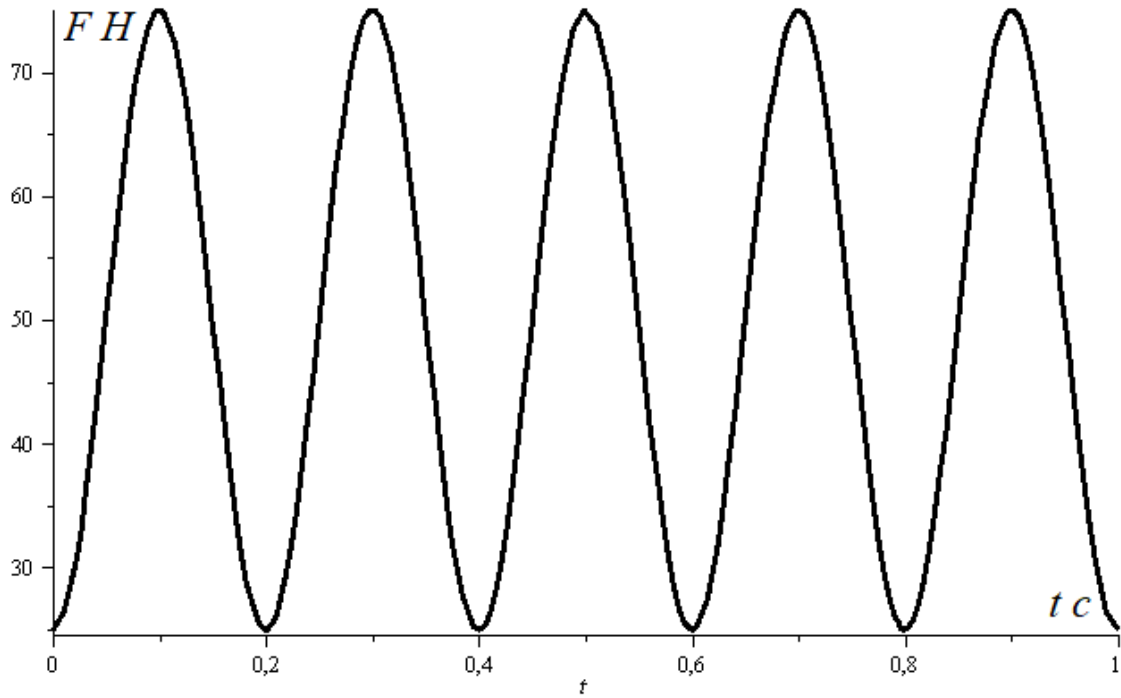


Рис. 4.4. Зміна зовнішньої сили

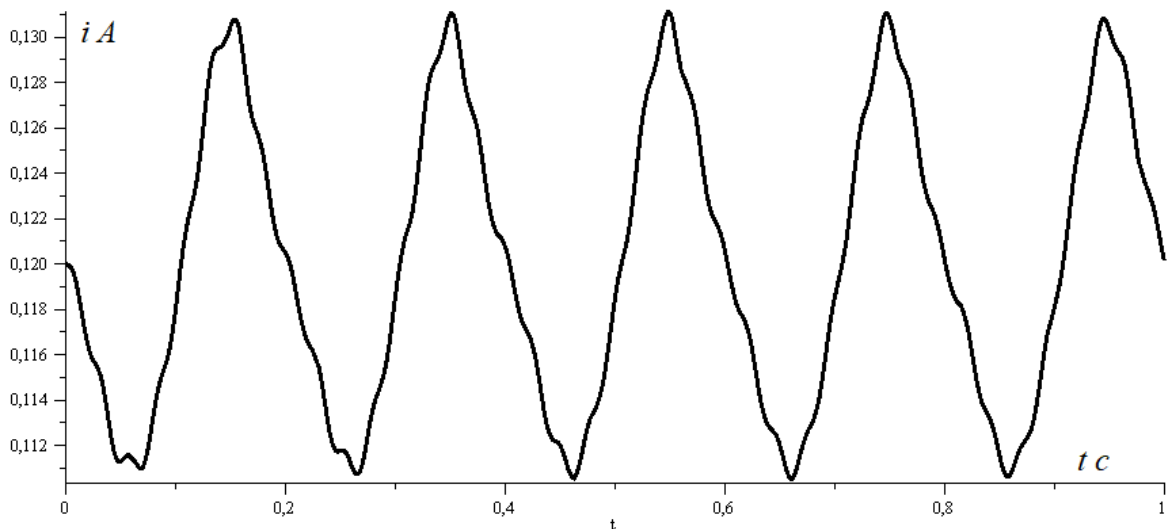


Рис. 4.5. Зміна струму котушки

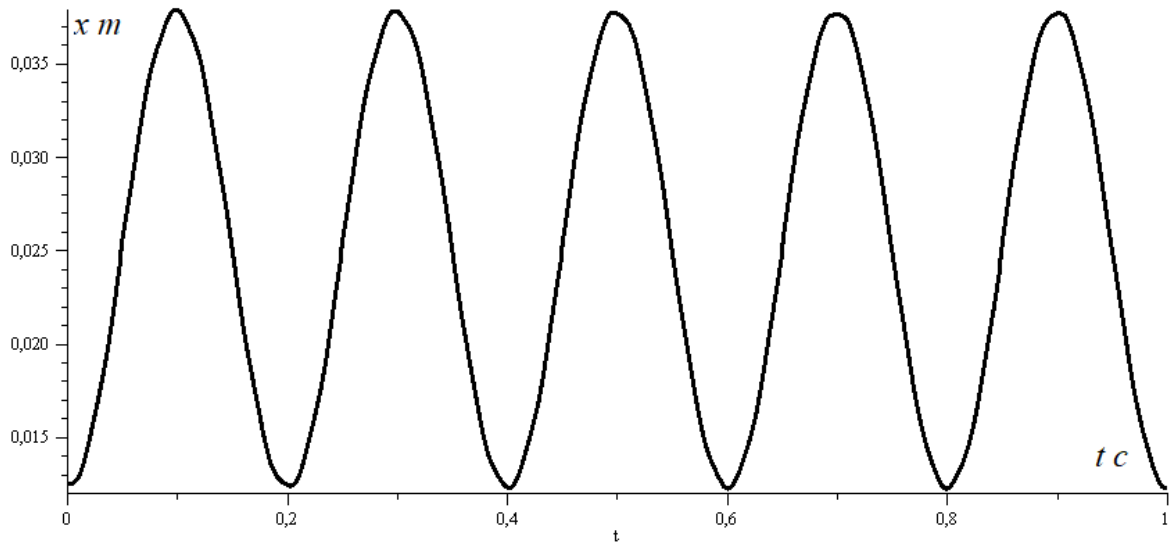


Рис. 4.6. Графік ходу якоря

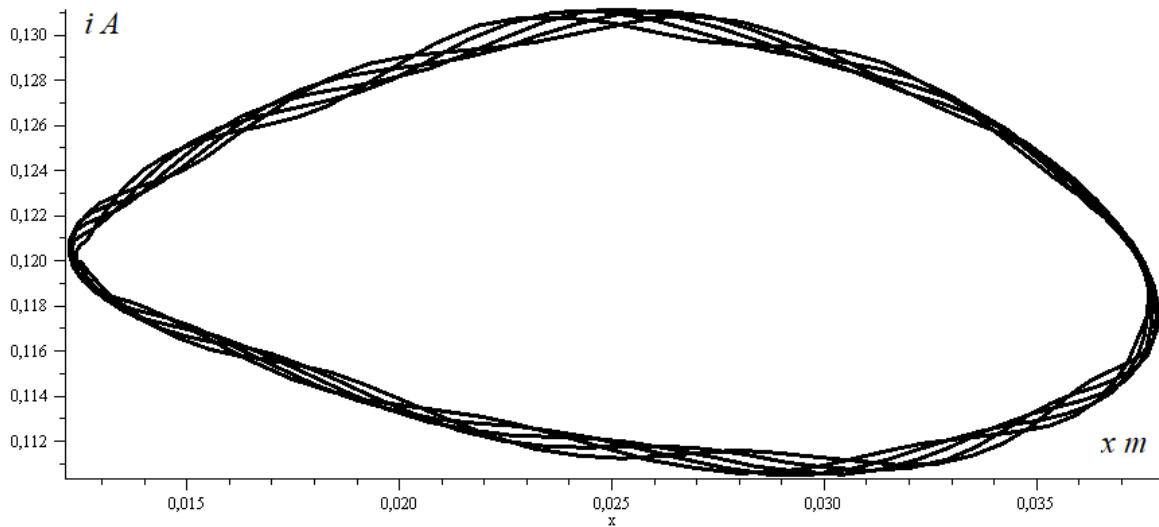


Рис. 4.7. Фазовий портрет системи

Як можна обачити з рисунків, струм в котушці не співпадає по фазі з зовнішньою силою та ходом якоря і має в своєму складі вищі гармоніки. Фазовий портрет є неоднозначним. Таке можна пояснити тим, що при неврахуванні втрат енергії, вільні коливання механічної частини ($\omega_0=255,5$ [1/с]), що є незатухаючими, накладаються на примусові.

4.2.2. Розрахунок з урахування втрат енергії.

Для врахування втрат енергії при коливаннях якоря введемо коефіцієнт $\beta = 10$ [кг/с].

У цьому випадку графіки, аналогічні попереднім, будуть мати наступний вигляд.

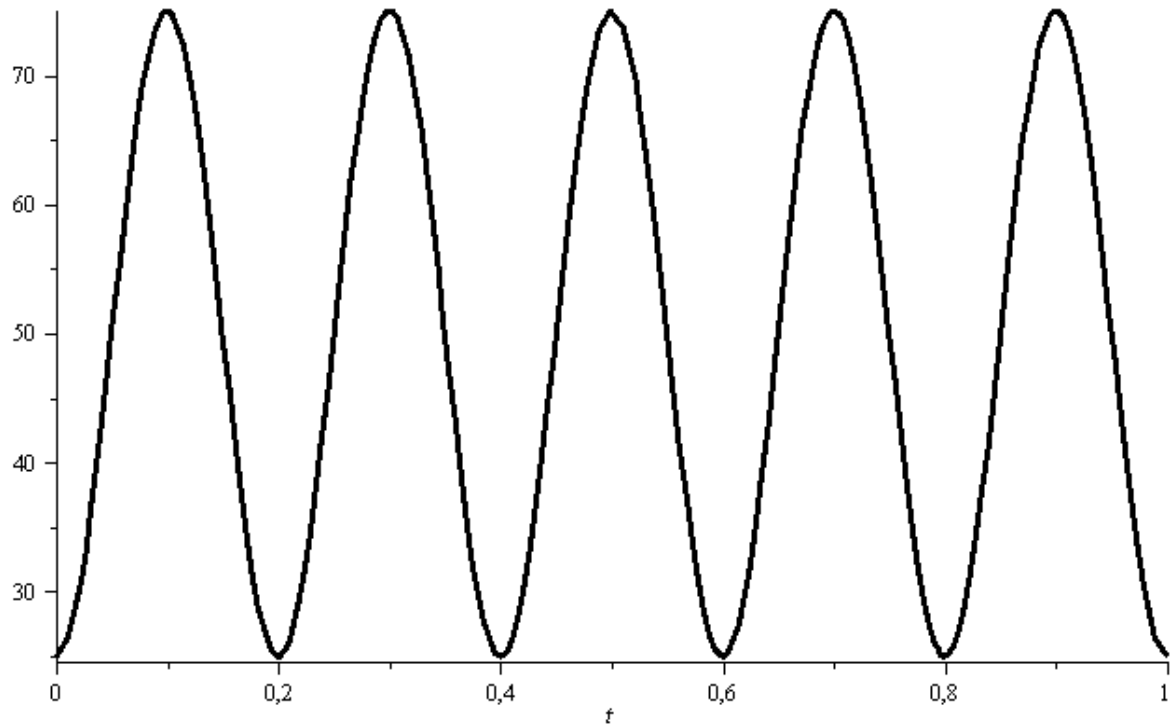


Рис. 4.8. Зміна зовнішньої сили

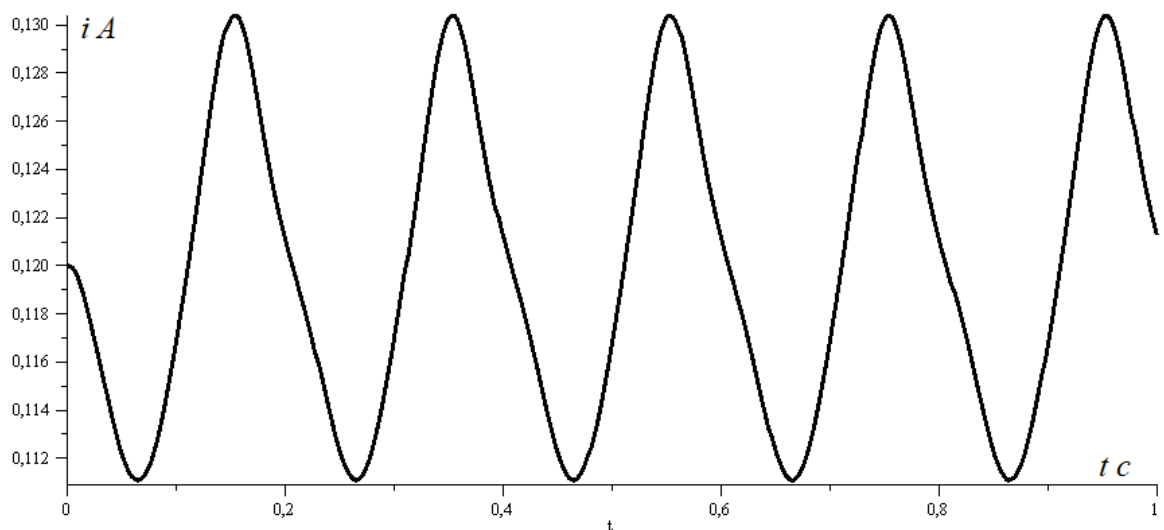


Рис. 4.9. Зміна струму котушки

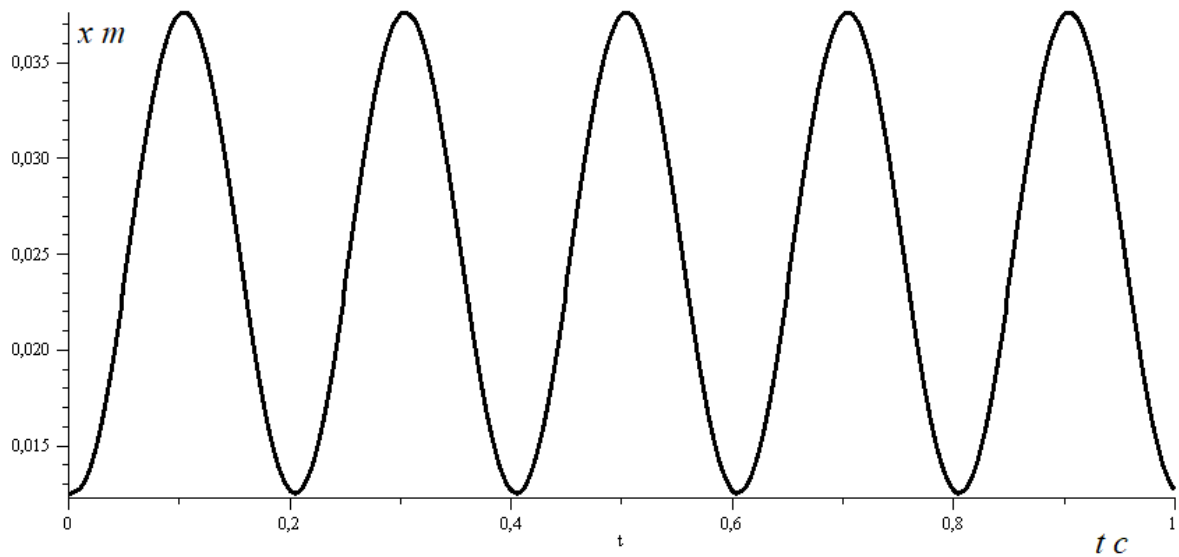


Рис. 4.10. Графік ходу якоря

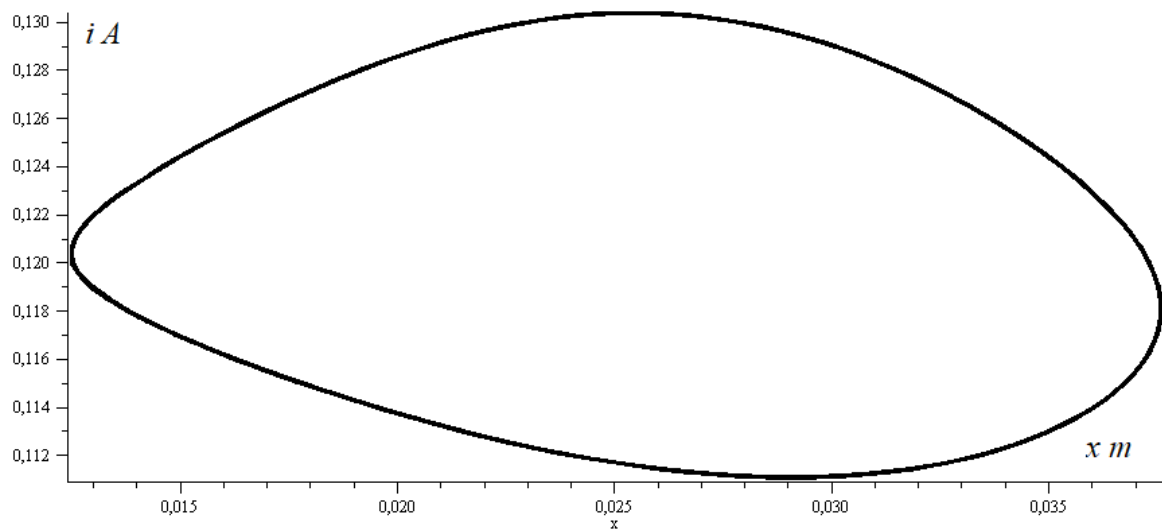


Рис. 4.11. Фазовий портрет системи

Як видно з графіків, введення коефіцієнту розсіяння енергії поліпшує вид залежностей.

На останок слід відзначити, що струм котушки та форма фазового портрету системи суттєво залежать від частоти коливань. Так на рис. 4.12 приведено фазовий портрет системи в перехідному та сталому режимах при частоті зовнішньої сили 100 Гц.

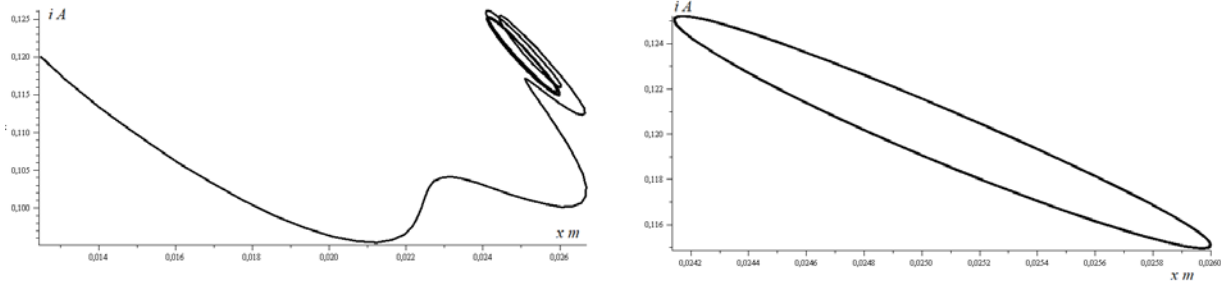


Рис. 4.12. Фазовий портрет системи в перехідному та сталому режимі при частоті зовнішньої сили 100 Гц

4.2.3. Розрахунок залежності струму котушки від положення якоря в статичному режимі або при малій швидкості руху якоря.

Як було показано вище, з рівняння (2.17) випливає, що при незначній швидкості якоря (повільний рух якоря), або в статичному режимі зміни струму в котушці не буде.

Тоді

$$L(x) \cdot \frac{di}{dt} + \left(\frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot v + R \right) \cdot i = U \Rightarrow v = 0 \Rightarrow L(x) \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = U. \quad (4.3)$$

Тобто, рівняння перетворюється на звичайне рівняння для активно-індуктивного ланцюга, що підключено до джерела напруги. При постійній напрузі (якщо не враховувати перехідний струм), струм в такому ланцюзі буде постійним незалежно від індуктивності.

Для отримання залежності струму від положення якоря в сталому режимі треба під'єднати котушку до джерела змінної періодичної напруги. Отримати залежність струму від положення якоря можна використавши символічний метод.

Якщо напруга має вигляд синусоїди, то

$$U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \Rightarrow U_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U}_m \cdot e^{j\omega t}, \quad (4.4)$$

де \underline{U}_m – комплексна амплітуда; ψ – початкова фаза.

Так як змінна x від часу не залежить, а рівняння лінійне (по умовам задачі кожному переміщенню відповідає своє значення індуктивності), то можна припустити, що струм теж буде мати форму таку саму, як і напруга.

Тобто

$$I = \underline{I}_m \cdot e^{j\omega t}. \quad (4.5)$$

Підставивши (4.5) у (4.3) отримаємо

$$\begin{aligned} (j \cdot \omega \cdot L(x) + R) \cdot \underline{I}_m \cdot e^{j\omega t} &= \underline{U}_m \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{R + j \cdot \omega \cdot L(x)} = \\ &= \left| R + j \cdot \omega \cdot L(x) = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L(x))^2} \cdot e^{j\varphi} \right| = \frac{\underline{U}_m}{z} \cdot e^{j(\psi - \varphi)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L(x))^2}$ – импеданс; $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L(x)}{R}\right)$ – кут між струмом і напругою.

З (4.6) випливає, що при зміні індуктивності буде змінюватись не тільки струм, але і фаза струму.

На підставі (4.5 – 4.6) була розроблена програма на мові *Maple*, яка наведена нижче.

> restart;

Завдання табличних даних залежностей ходу якоря та індуктивності

> X := $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.010 \\ 0.020 \\ 0.030 \\ 0.040 \\ 0.050 \end{bmatrix}$

> L := $\begin{bmatrix} 0.1508 \\ 0.1996 \\ 0.3276 \\ 0.5249 \\ 0.7352 \\ 0.8464 \end{bmatrix}$

Глобальна апроксимація табличних даних

```
> L := unapply(interp(X, L, x), x)
```

Графік функції

```
> plot(L(x), x = 0..0.05, color = black, thickness = 3)
```

Завдання параметрів розрахунку

```
> om := 2·π·f; f := 50.0; Um := 12.0; R := 100.0; ψ :=  $\frac{\pi}{5.0}$ ;
```

Розрахунок максимального значення струму

```
> Imax :=  $\frac{Um \cdot \exp(I \cdot \psi)}{R + I \cdot om \cdot L(x)}$ ;
```

```
Imax := 12.0 / (100.0 + 100.0 I π (-7.833333333105 x5  
- 1.150000000105 x4 + 7208.3333333 x3 + 272.0000000 x2  
+ 1.562000000 x + 0.1508))
```

Амплітудне значення струму (модуль максимального значення)

```
> A := evalc(abs(Imax))
```

```
A := 12.0 /  
(10000.00 + (-7.833333333107 π x5  
- 1.150000000107 π x4 + 7.208333333105 π x3  
+ 27200.00000 π x2 + 156.2000000 π x + 15.08000 π)2)1/2
```

Фаза струму

```
> f := evalc(argument(Imax))
```

```
f := arctan(7.833333333107 π x5 + 1.150000000107 π x4  
- 7.208333333105 π x3 - 27200.00000 π x2 - 156.2000000 π x  
- 15.08000 π, 100.0)
```

Графік амплітуди в залежності від ходу

```
> plot(A, x = 0 .. 0.05, color = black, thickness = 3)
```

Графік фази струму в електричних градусах в залежності від ходу

```
> plot( $\frac{(f) \cdot 180}{\pi}$ , x = 0 .. 0.05, color = black, thickness = 3)
```

На рис. 4.13, 4.14 приведені результати розрахунків при початковій фазі напруги $\pi/5$.

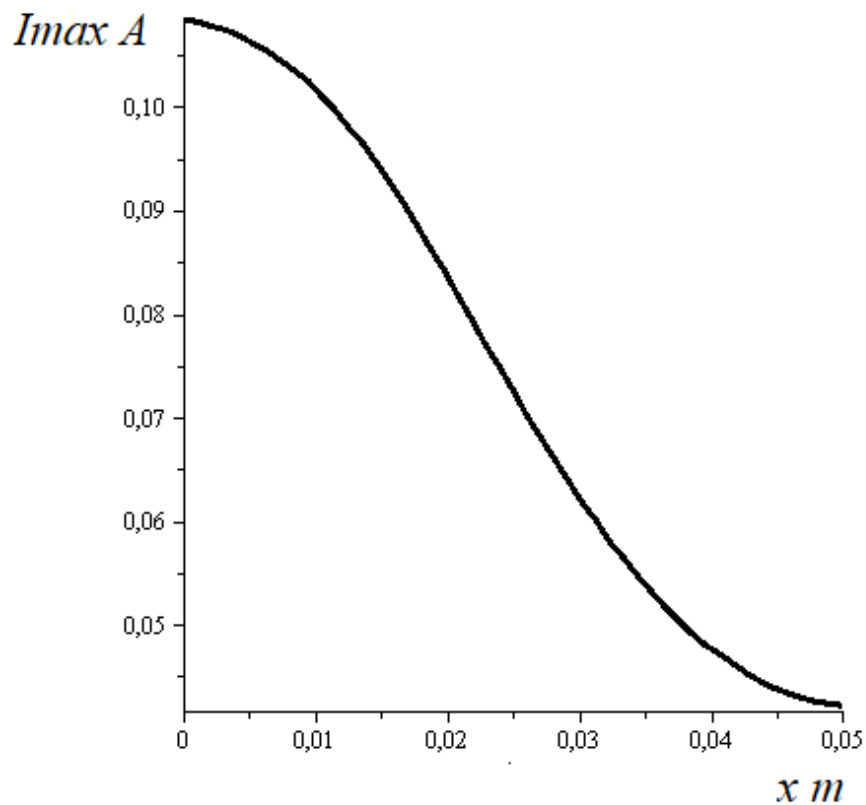


Рис. 4.13. Залежність амплітуди струму від ходу якоря

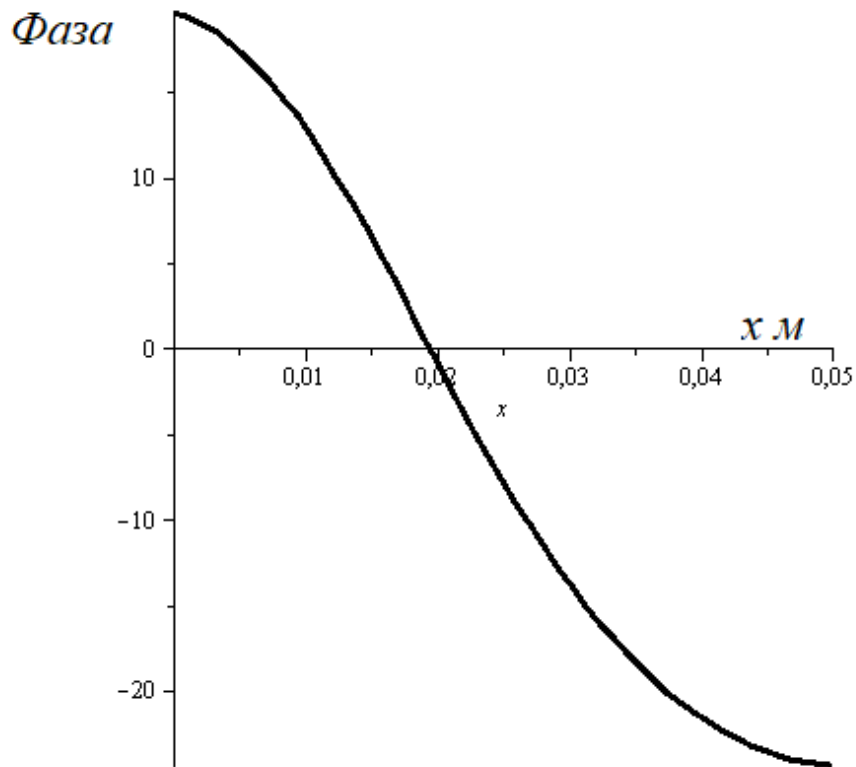


Рис. 4.13. Залежність фази струму від ходу якоря

5. Індукційно-динамічний механізм.

5.1. Конструкція індукційно – динамічних пристроїв та електричні схеми підключення котушки ІДМ до джерела енергії.

Індукційно-динамічні механізми отримали розповсюдження у якості швидкодіючих механізмів, які використовуються у якості розчеплювача в електричних апаратах та інших приладах. Одним з найбільш розповсюджених індукційно-динамічних механізмів (ІДМ) є ІДМ без магнітної системи, рухома частина якого являє собою алюмінієвий, мідний диск або котушка (рис. 5.1).

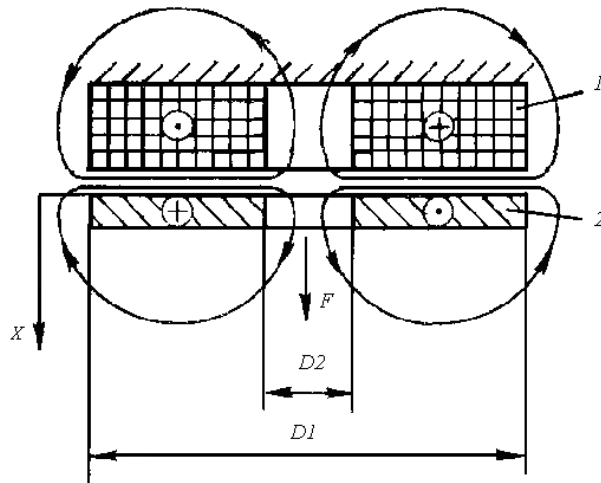


Рис. 5.1. Індукційно-динамічний механізм, де 1 – нерухома котушка (індуктор);
2 – рухомий елемент (диск, котушка)

При розряді на котушку 1 (індуктор) зарядженого конденсатора, струм, що виникає в котушці 1, наводить індукційний струм в диску (котушці) 2. Взаємодія магнітних полів, що виникають за рахунок струмів у котушці та диску, викликає появу сили, що відштовхує диск від котушки.

У швидкодіючих низьковольтних електричних апаратах ІДМ може впливати як безпосередньо на контакти апарата рис. 5.2, так і на пускові пристрої (рис. 5.3).

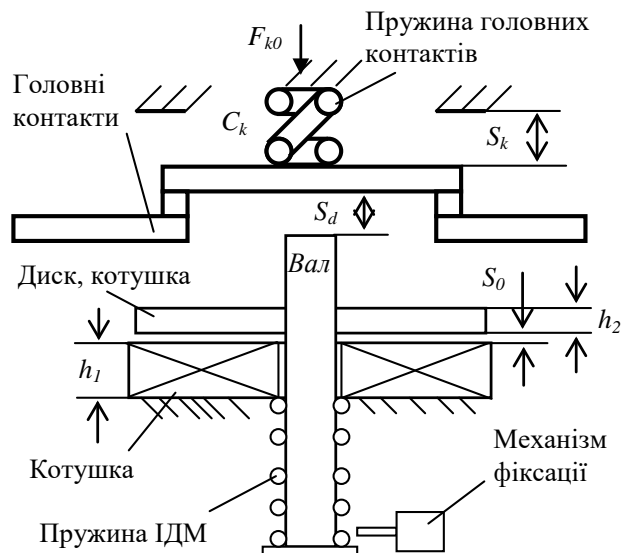


Рис. 5.2. Кінематична схема ІДМ, де S_0 - початковий проміжок між котушкою та диском; h_1 - товщина котушки; h_2 - товщина диска; S_d - вільний хід

диска до зіткнення с контактами; S_k - хід контактів; c_k - жорсткість контактної пружини; F_k – початкове контактна сила

Робота схеми. При розряді накопичувача енергії на індуктор 1 диск 5 та скоба 6 починають рухатися і при деякому куті повороту (ударний механізм пройшов шлях x) приводиться в дію механічна засувка, яка звільняє механізм вільного розчеплення вимикача.

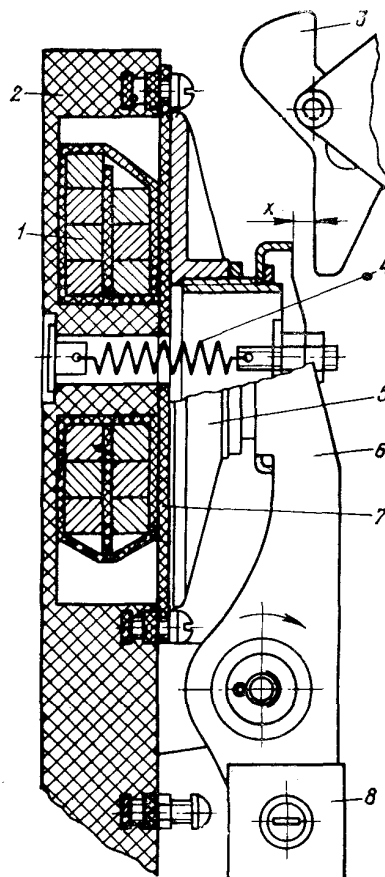


Рис. 5.3. ІДМ, що впливає на спусковий пристрій, де 5 – диск; 6 – скоба; 8 – вантаж що врівноважує систему; 4 – утримуюча пружина; 7 – ізоляційна прокладка; 1 – індуктор; 2 – корпус; 3 – механічна засувка

У високовольтних електричних апаратах ІДМ може приводити в дію безпосередньо електричні контакти (рис. 5.4).

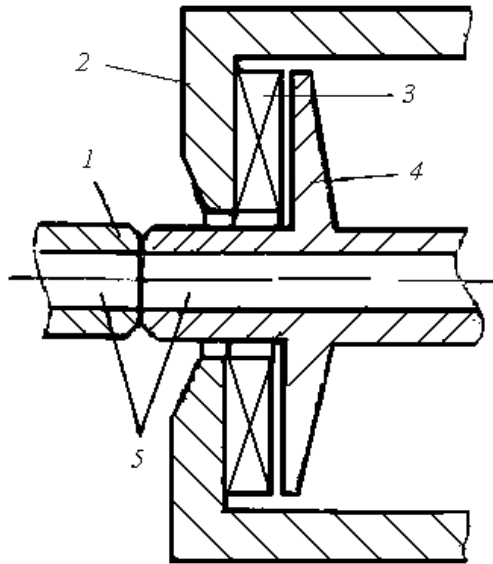
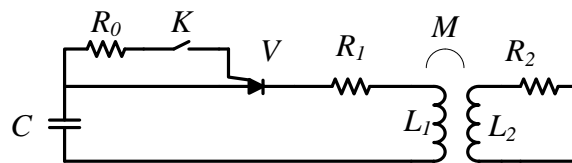
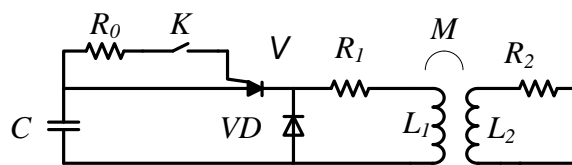


Рис. 5.4. ІДМ високовольтних електричних апаратів, де 2 – корпус; 3 – індуктор; 4 – рухомий контакт; 1 – нерухомий контакт

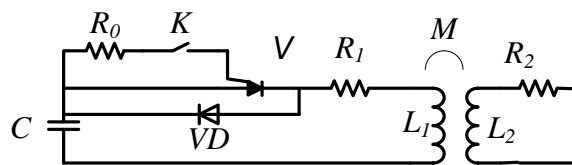
Можливі електричні схеми підключення котушки до джерела енергії (накопичувального конденсатора) показані на рис. 5.5.



а)



б)



в)

Рис. 5.5. – Електричні схеми підключення ІДМ: де C – накопичувальний конденсатор; V - тиристор; VD - діод; R_0 – обмежувальний резистор; K – ключ;

R_1 – активний опір котушки; L_1 – індуктивність котушки; L_2 – індуктивність диска (котушки); R_2 – активний опір диска, котушки; M – коефіцієнт магнітного зв'язку між котушками

Найбільш розповсюдженою є схема б) (рис. 5.5), яка забезпечує аперіодичну форму розряду конденсатора на індуктор. При цьому перезаряд конденсатора не відбувається, а залишкова напруга на конденсаторі дорівнює нулю. В схемі а) залишкова напруга на конденсаторі негативна і дорівнює приблизно 30% від початкової, струм котушки являє собою одну половину хвилі синусоїди (тиристор в нулі струму зачиняється). Недолік схеми – перезаряд та неповне використання енергії ємності. В схемі в) відбувається коливальний процес перезаряду конденсатора. Недолік схеми – перезаряд ємності.

5.2. Рівняння Лагранжа для ІДМ.

Електромеханічна система, що складається з нерухомої котушки та індуктора (рис.5.1, рис.5.2) має три ступені свободи, тому буде мати і три узагальнені координати. Одна з них – переміщення x , що визначає положення якоря. Друга – q_1 , електричний заряд, що характеризує стан електричного ланцюга нерухомої котушки. Третя ступень свободи – електричний заряд, що характеризує стан електричного ланцюга рухомої котушки – q_2 .

Цим узагальненим координатам відповідають три рівняння Лагранжа

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Q_x, \\ \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) = Q_{q_1} \\ \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) = Q_{q_2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Розрахунок будемо вести для розрахункової схеми рис. 5.2. Для цього дамо рухомій котушці можливе переміщення dx , вважаючи при цьому незмінним електричний заряд котушки та індуктора, тоді робота активних сил буде згідно схеми

$$dA_x = \left(\begin{array}{l} x < S_d, \quad -F_d - c_d \cdot x \pm m_d(x) \cdot g \\ S_d \leq x \leq S_k, \quad -F_d - c_d \cdot x - F_k - c_k \cdot (x - S_d) \pm m_d(x) \cdot g \end{array} \right) \cdot dx, \quad (5.1)$$

де F – початкові сили що діють на рухому котушку та контакти, c – жорсткості пружин рухомої котушки та контактів; S – вільний хід рухомої котушки та контактів; $m_d(x)$ – маса рухомої котушки; g – прискорення вільного падіння.

Згідно з законом Ома та схеми заміщення (таб.1), робота електрорушійної сили нерухомої котушки при незмінному переміщенні dx та незмінному заряді рухомої котушки dq_2 буде

$$dA_{q_1} = \left[\left[\left(\begin{array}{l} U_0 - \frac{q_1}{C}, \text{ якщо } U_0 - \frac{q_1}{C} > 0 \\ 0, \text{ якщо } U_0 - \frac{q_1}{C} \leq 0 \end{array} \right) - \dot{q}_1 \cdot R_1 \right] \cdot dq_1, \quad (5.2)$$

де U_0 – початкова напруга на конденсаторі; C – ємність конденсатора; R_1 – активний опір нерухомої котушки.

Рівняння (5.2) враховує відсутність перезаряду конденсатора згідно електричної схеми підключення (рис. 5.4, б)

Робота електрорушійної сили рухомої котушки при незмінному переміщенні dx та незмінному заряді нерухомої котушки dq_1 буде

$$dA_{q_2} = -\dot{q}_2 \cdot R_2 \cdot dq_2, \quad (5.3)$$

де R_2 – активний опір рухомої котушки.

Кінетична енергія системи складається з трьох частин – механічної та електрокінетичної енергії нерухомої та рухомої котушок з урахуванням зв'язку між ними

$$T = \frac{m_d(x) \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{L_1 \cdot \dot{q}_1^2}{2} + \frac{L_2 \cdot \dot{q}_2^2}{2} + M(x) \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2, \quad (5.4)$$

де $m_d(x)$ – маса рухомих частин, яка змінюється в залежності від величини ходу;
 L_1 – індуктивність нерухомої котушки; L_2 – індуктивність рухомої котушки;
 $M(x)$ – взаємна індуктивність котушок, яка змінюється в залежності від ходу.

При використанні рівнянь Лагранжа для тіл, що підпорядковуються ударній взаємодії є деякі нюанси по наступним причинам:

удар є дуже короткотривалий процес;

у теорії удару в класичній механіці здійснюється перехід до нескінченно великих сил, що діють нескінченно малий проміжок часу;

при дії дуже великої сили за дуже малий проміжок часу переміщення точки прикладення сили дорівнює нулю, а швидкість змінюється миттєво.

Тобто, при не пружному ударі швидкість елементів, що рухаються буде

$$u = v \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad (5.5)$$

де m_1 – маса вала та котушки що рухається; m_2 – маса нерухомих контактів; v – швидкість рухомих частин до удару; u – швидкість всіх рухомих частин після удару.

Враховуючи форму рівнянь Лагранжа (2.1), все вищезгадане і враховуючи те, що узагальнені координати x , q_1 і q_2 залежать від часу, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_d(x) \cdot \dot{x}^2}{2} \right) \mapsto 0, \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Другий член в першому рівнянні (5.6) дорівнює нулю, так як за час удару переміщення точки прикладення сили дорівнює нулю.

Далі

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m_d(x) \cdot \dot{x}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= L_1 \cdot \dot{q}_1 + M(x) \cdot \dot{q}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= L_2 \cdot \dot{q}_2 + M(x) \cdot \dot{q}_1.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial m_d(x)}{\partial x} \cdot \dot{x}^2 + m_d(x) \cdot \ddot{x}, \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= L_1 \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q}_2 + M(x) \cdot \ddot{q}_2, \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= L_2 \cdot \ddot{q}_2 + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q}_1 + M(x) \cdot \ddot{q}_1.\end{aligned}\tag{5.8}$$

де \dot{q} , \ddot{q} – перша та друга похідні по часу.

Для отримання остаточного виду рівнянь Лагранжа до рівнянь (5.8) необхідно додати відповідні узагальнені сили

$$\begin{aligned}& \frac{\partial m_d(x)}{\partial x} \cdot \frac{\dot{x}^2}{1} + m_d(x) \cdot \ddot{x} - \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 = \\ & -F_d - c_d \cdot x - (F_k - c_k \cdot (x - S_d)) \cdot (x \geq S_d) \pm m_d(x) \cdot g \\ & L_1 \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q}_2 + M(x) \cdot \ddot{q}_2 = \left(U_0 - \frac{q_1}{C} \right) \cdot \left(U_0 - \frac{q_1}{C} > 0 \right) - \dot{q}_1 \cdot R_1 \\ & L_2 \cdot \ddot{q}_2 + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q}_1 + M(x) \cdot \ddot{q}_1 = -\dot{q}_2 \cdot R_2.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Рівняння 5.9 можна переписати в більш наглядному виді

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial m_d(x)}{\partial x} \cdot \frac{v^2}{2} + m_d(x) \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot i_1 \cdot i_2 = \\
& -F_d - c_d \cdot x - (F_k - c_k \cdot (x - S_d)) \cdot (x \geq S_d) \pm m_d(x) \cdot g, \\
& v = \frac{dx}{dt}, \\
& L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot v \cdot i_2 + M(x) \cdot \frac{di_2}{dt} = \left(U_0 - \frac{q_1}{C} \right) \cdot \left(U_0 - \frac{q_1}{C} > 0 \right) - i_1 \cdot R_1 \quad (5.10) \\
& L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot v \cdot i_1 + M(x) \cdot \frac{di_1}{dt} = -i_2 \cdot R_2, \\
& i_1 = \frac{dq_1}{dt},
\end{aligned}$$

де $(x \geq S_d)$, $\left(U_0 - \frac{q_1}{C} > 0 \right)$ – умовні оператори, які дорівнюють одиниці, якщо умова виконується та нулю, якщо ні.

5.3. Розрахунок індуктивностей та взаємної індуктивності системи.

Для розв'язання рівнянь (5.10) необхідно розрахувати залежність взаємної індуктивності та її похідної від координати x .

5.3.1. Розрахунок взаємної індуктивності між двома круговими витками.

З літератури відомо, що взаємна індуктивність між двома круговими витками може бути розрахована по формулі, що залежить від геометрії витків, які належать котушкам.

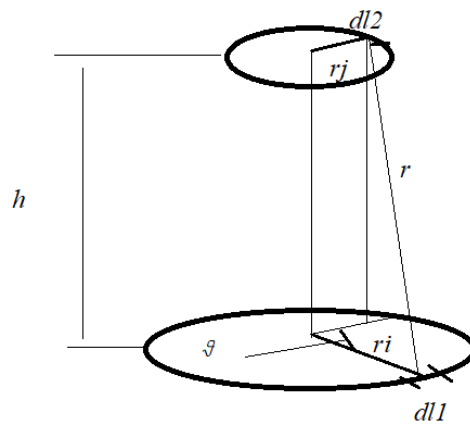


Рис. 5.6. Розрахункова геометрія для обчислення взаємної індуктивності двох кругових витків

Розрахункова формула

$$M_{ij} = \mu_o \cdot \iint \frac{dl_1 \cdot dl_2}{4 \cdot \pi \cdot r}, \quad (5.11)$$

де M_{ij} - взаємна індуктивність двох кругових витків; μ_o - магнітна проникність повітря; dl_1, dl_2 - елементарні довжини дуг; r – радіус, що з'єднує вектори dl_1, dl_2 .

Прийняв до уваги, що

$$dl_1 \cdot dl_2 = dl_2 \cdot r_j \cdot d\vartheta \cdot \cos \vartheta \quad (5.12)$$

та

$$r = \sqrt{h^2 + (r_j \cdot \sin \vartheta)^2 + (r_j \cdot \cos \vartheta - r_i)^2} \quad (5.13)$$

отримаємо розрахункову формулу

$$M_{ij} = \mu_o \cdot \sqrt{r_i \cdot r_j} \cdot K \cdot \frac{(2 \cdot \sin^2 \varphi - 1)}{\sqrt{1 - K^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \cdot d\varphi, \quad (5.14)$$

$$K^2 = \frac{4 \cdot r_i \cdot r_j}{h^2 + (r_i + r_j)^2},$$

$$\varphi = \frac{\pi - \vartheta}{2}.$$

В подальшому будемо мати на увазі

$$M_{ij} = \mu_0 \cdot \sqrt{r_i \cdot r_j} \cdot K \cdot \frac{(2 \cdot \sin^2 \varphi - 1)}{\sqrt{1 - K^2 \cdot \sin^2 \varphi}}. \quad (5.15)$$

Тоді похідна від (5.15) може бути врахована системою Maple як

$$\frac{\partial M_{i,j}}{\partial h} = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{r_i \cdot r_j} \cdot (2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1) \cdot r_i \cdot r_j \cdot h}{\sqrt{\frac{r_i \cdot r_j}{h^2 + (r_i + r_j)^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{4 \cdot r_i \cdot r_j \cdot \sin^2(\varphi)}{h^2 + (r_i + r_j)^2}} \cdot (h^2 + (r_i + r_j)^2)^2} - \frac{8 \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{r_i \cdot r_j} \cdot \sqrt{\frac{r_i \cdot r_j}{h^2 + (r_i + r_j)^2}} \cdot (2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1) \cdot r_i \cdot r_j \cdot h \cdot \sin^2(\varphi)}{\left(1 - \frac{4 \cdot r_i \cdot r_j \cdot \sin^2(\varphi)}{h^2 + (r_i + r_j)^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (h^2 + (r_i + r_j)^2)^2}. \quad (5.16)$$

5.3.2. Розрахунок взаємної індуктивності між двома круговими котушками.

Формула (5.15, 5.16) може бути використана як для розрахунку взаємної, так і власної індуктивності, використовуючи метод масивного витка

$$\begin{aligned} M &= \frac{W_1 \cdot W_2}{S_1 \cdot S_2} \cdot \iint_{S_1 S_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{ij} \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot d\varphi, \\ L_1 &= \frac{W_1^2}{S_1^2} \cdot \iint_{S_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{ij} \cdot dS_1 \cdot dS_1 \cdot d\varphi, \\ L_2 &= \frac{W_2^2}{S_2^2} \cdot \iint_{S_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{ij} \cdot dS_2 \cdot dS_2 \cdot d\varphi, \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{W_1 \cdot W_2}{S_1 \cdot S_2} \cdot \iint_{S_1 S_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial M_{ij}}{\partial x} \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

де S – площі поперечного перетину котушок; W – кількість витків першої та другої котушки.

Відмінність формул – для розрахунку взаємної індуктивності та її похідної треба провести інтегрування по площинам обох котушок, а при розрахунку індуктивності – по площині той самої котушки.

Треба відзначити, що розрахунок інтегралів (5.17) являє собою складну задачу, бо їх не можна виразити через елементарні функції. Розраховувати такі інтеграли простіше за все методом Монте-Карло. І для початку зробимо в (5.15, 5.16) заміну та у відповідності з рис. 5.7, де показано дві кругових котушки з відповідними умовними позначеннями.

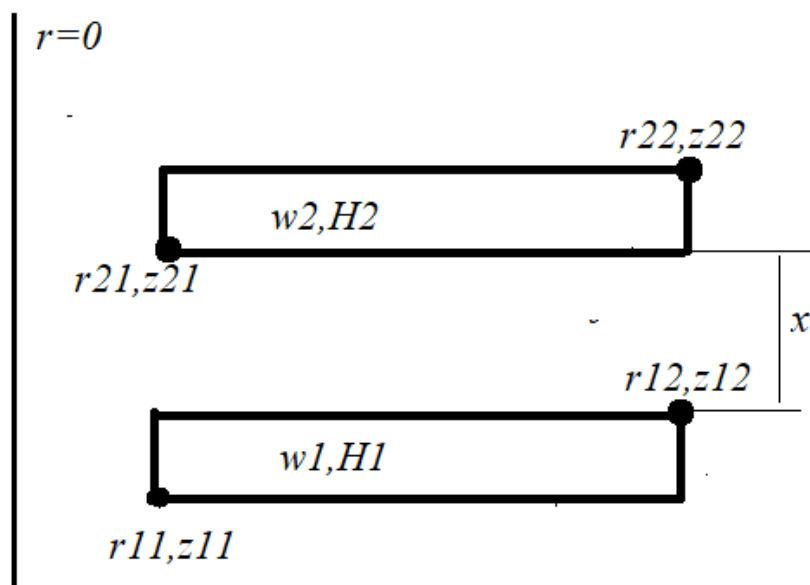


Рис. 5.7. Дві кругових котушки

Визначимо межі інтегрування.

$$\begin{aligned}
 h &= (z_i - z_j), \\
 r_{11} &= R_0, z_{11} = 0, r_{12} = R_1, z_{12} = H_1, \\
 r_{21} &= R_0, z_{21} = z_{12} + x, r_{22} = R_2, z_{22} = z_{21} + H_2,
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

де R, H – габаритні розміри котушки; z_i, z_j – координати елементарних витків всередині котушки.

Для розрахунку інтегралів вчинимо наступне: для кожної змінної $r_i, r_j, z_i, z_j, \varphi$ зробимо заміну

$$\begin{aligned}
r_i &= r_{11} + (r_{12} - r_{11}) \cdot \xi_i; \\
r_j &= r_{21} + (r_{22} - r_{21}) \cdot \xi_i; \\
z_i &= z_{11} + (z_{12} - z_{11}) \cdot \xi_i; \\
z_j &= z_{21} + (z_{22} - z_{21}) \cdot \xi_i; \\
\varphi &= \frac{\pi}{2} \cdot \xi_i.
\end{aligned}
\tag{5.19}$$

де ξ_i – випадкові незалежні величини, рівномірно розподілені в діапазоні від нуля до одиниці.

Тоді згідно методу Монте-Карло кожен з інтегралів (5.13) може бути представлено у вигляді

$$Int \approx \frac{w_1 \cdot w_2 \cdot (r_{12} - r_{11}) \cdot (r_{22} - r_{21}) \cdot (z_{12} - z_{11}) \cdot (z_{22} - z_{21}) \cdot \pi}{2 \cdot N} \cdot \sum_{i=1}^N f(\xi_i),
\tag{5.20}$$

де N – кількість випробувань, w – кількість витків; ξ_i – незалежні випадкові величини.

У разі обчислення власної індуктивності інтегрування ведеться по площі тієї ж самої котушки тобто $r_{21} = r_{12}, z_{21} = z_{12}$.

5.3.3. Розрахунок інтегралів.

Програми розрахунку на мові Maple.

Програма розрахунку власної індуктивності котушки

```

> restart;# Власна індуктивність
> Seed := readlib(randomize)();
                                     Seed := 174030464;
> mu0:=evalf(4*Pi*10^(-7));
                                     mu0 := 0.00000125663706
> k := sqrt( (4*Ri*Rj / ((Zi - Zj)^2 + (Ri + Rj)^2) );
                                     k := 2 * sqrt( Ri*Rj / ((Zi - Zj)^2 + (Ri + Rj)^2) )
> M := mu0 * ( sqrt(Ri*Rj) * k * (2 * sin(f)^2 - 1) / sqrt(1 - k^2 * sin(f)^2) ) * df;

```

$$M := \left(0.000002513274124 \sqrt{R_i R_j} \sqrt{\frac{R_i R_j}{(Z_i - Z_j)^2 + (R_i + R_j)^2}} \sin(f)^2 - 1 \right) df \Bigg/ \sqrt{1 - \frac{4 R_i R_j \sin(f)^2}{(Z_i - Z_j)^2 + (R_i + R_j)^2}} \quad (2)$$

> $R1 := 5.0 \cdot 10^{-3}$; $R2 := 45.0 \cdot 10^{-3}$; $H := 5.0 \cdot 10^{-3}$; $w := 100.0$; # Розміри котушки та кількість її витків

$$R1 := 0.005000000000$$

$$R2 := 0.045000000000$$

$$H := 0.005000000000$$

$$w := 100.0$$

> $R_i := R1 + (R2 - R1) \cdot n1$; $R_j := R1 + (R2 - R1) \cdot n2$;
 $Z_i := 0 + (H - 0) \cdot n3$; $Z_j := 0 + (H - 0) \cdot n4$;
 $f := 0 + \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) \cdot n5$;

$$R_i := 0.005000000000 + 0.040000000000 n1$$

$$R_j := 0.005000000000 + 0.040000000000 n2$$

$$Z_i := 0.005000000000 n3$$

$$Z_j := 0.005000000000 n4$$

$$f := \frac{1}{2} \pi n5$$

> $df := \text{diff}(f, n5)$;

$$df := \frac{1}{2} \pi$$

> M ;

$$\begin{aligned}
& \left(0.000001256637062 (0.005000000000 + 0.04000000000n1) (0.005000000000 \right. \\
& \quad \left. + 0.04000000000n2) \right. \\
& \quad \left. \right)^{1/2} \\
& \left((0.005000000000 \right. \\
& \quad \left. + 0.04000000000n1) (0.005000000000 + 0.04000000000n2) \right) / \\
& \left((0.005000000000n3 - 0.005000000000n4)^2 \right. \\
& \quad \left. + (0.01000000000 + 0.04000000000n1 + 0.04000000000n2)^2 \right) \\
& \quad \left. \right)^{1/2} \left(2 \sin\left(\frac{1}{2} \pi n5\right)^2 - 1 \right) \pi \Big/ \\
& \left(1 - \left(4 (0.005000000000 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 0.04000000000n1) (0.005000000000 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 0.04000000000n2) \sin\left(\frac{1}{2} \pi n5\right)^2 \right) \right) / \\
& \left((0.005000000000n3 - 0.005000000000n4)^2 \right. \\
& \quad \left. + (0.01000000000 + 0.04000000000n1 + 0.04000000000n2)^2 \right) \\
& \quad \left. \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

> N := 1000, s := 0.0;

N := 1000

s := 0.

>

for i from 1 to N **do**

n1 := rand() * 10⁽⁻¹²⁾; n2 := rand() * 10⁽⁻¹²⁾;

n3 := rand() * 10⁽⁻¹²⁾; n4 := rand() * 10⁽⁻¹²⁾;

n5 := rand() * 10⁽⁻¹²⁾;

s := s + evalf(M);

od;

> s;

0.000331058233

> Ls := $\frac{s}{N} \cdot w^2$; #Власна індуктивність

Програма розрахунку взаємної індуктивності

> **restart;# Взаємна індуктивність**

> Seed := readlib(randomize)();

Seed := 174030474;

> **mu0:=evalf(4*Pi*10^(-7));**

mu0 := 0.00000125663706

> k := sqrt($\frac{4 \cdot Ri \cdot Rj}{(Zi - Zj)^2 + (Ri + Rj)^2}$);

$$k := 2 \sqrt{\frac{Ri Rj}{(Zi - Zj)^2 + (Ri + Rj)^2}}$$

> M := mu0 * $\left(\frac{\text{sqrt}(Ri \cdot Rj) \cdot k \cdot (2 \cdot \sin(f)^2 - 1)}{\text{sqrt}(1 - k^2 \cdot \sin(f)^2)} \right) \cdot df;$

M :=

$$\left(0.000002513274124 \sqrt{Ri Rj} \sqrt{\frac{Ri Rj}{(Zi - Zj)^2 + (Ri + Rj)^2}} \sin(f)^2 - 1 \right) df \Bigg/ \sqrt{1 - \frac{4 Ri Rj \sin(f)^2}{(Zi - Zj)^2 + (Ri + Rj)^2}} \quad (2)$$

> #x - Відстань між котушками

>

R11 := 5.0 * 10⁽⁻³⁾; Z11 := 0; R12 := 45.0 * 10⁽⁻³⁾; Z12 := 10.0 * 10⁽⁻³⁾;

R21 := 5.0 * 10⁽⁻³⁾; Z21 := Z12 + x; R22 := 45.0 * 10⁽⁻³⁾; Z22 := Z21 + 5.0 * 10⁽⁻³⁾;

w1 := 200.0; w2 := 100.0;

- Введення розмірів котушок, та кількості витків

R11 := 0.005000000000

Z11 := 0

R12 := 0.04500000000

Z12 := 0.01000000000

R21 := 0.005000000000

Z21 := 0.01000000000+ x

R22 := 0.04500000000

Z22 := 0.01500000000+ x

w1 := 200.0

w2 := 100.0

>

Ri := R11 + (R12 - R11) * n1; Rj := R21 + (R22 - R21) * n2;

Zi := Z11 + (Z12 - Z11) * n3; Zj := Z21 + (Z22 - Z21) * n4;

f := 0 + $\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) \cdot n5;$

Ri := 0.005000000000+ 0.04000000000n1

Rj := 0.005000000000+ 0.04000000000n2

Zi := 0.01000000000n3

Zj := 0.01000000000+ x + 0.00500000000n4

$$f := \frac{1}{2} \pi n5$$

> df := diff(f, n5);

$$df := \frac{1}{2} \pi$$

> M;

$$\left(0.000001256637062 \left((0.005000000000 + 0.04000000000n1) (0.005000000000 + 0.04000000000n2) \right)^{1/2} \right. \\ \left. \left((0.005000000000 + 0.04000000000n1) (0.005000000000 + 0.04000000000n2) \right) / \right. \\ \left. \left((0.01000000000n3 - 0.01000000000 - x - 0.00500000000n4)^2 + (0.01000000000 + 0.04000000000n1 + 0.04000000000n2)^2 \right) \right. \\ \left. \left(2 \sin\left(\frac{1}{2} \pi n5\right)^2 - 1 \right) \pi \right)^{1/2} \\ \left(1 - \left(4 (0.005000000000 + 0.04000000000n1) (0.005000000000 + 0.04000000000n2) \sin\left(\frac{1}{2} \pi n5\right)^2 \right) \right) / \\ \left((0.01000000000n3 - 0.01000000000 - x - 0.00500000000n4)^2 + (0.01000000000 + 0.04000000000n1 + 0.04000000000n2)^2 \right)^{1/2}$$

> dM := diff(M, x)


```

> x := 9.0·10-3;# Введення відстані між котушками
                                     x :=0.009000000000

> N := 10000, sM := 0.0; sdM := 0.0;
                                     N := 10000
                                     sM := 0.
                                     sdM := 0.

>
for i from 1 to N do
  n1 := rand() * 10(-12); n2 := rand() * 10(-12); n3 := rand()
    * 10(-12); n4 := rand() * 10(-12); n5 := rand() * 10(-12);
  sM := sM + evalf(M);
  sdM := sdM + evalf(dM);
od:

> sM; sdM;
                                     0.000163811310
                                     -0.00825586055

> M :=  $\frac{sM}{N} \cdot w1 \cdot w2$ ; dM :=  $\frac{sdM}{N} \cdot w1 \cdot w2$ ;
    # Взаємна індуктивність та її похідна
                                     M :=0.000327622621
                                     dM := -0.0165117211

```

Робота з програмою доволі проста:

- 1) Для розрахунку власної індуктивності потрібно ввести розміри котушки та кількість витків;
- 2) Для розрахунку взаємної індуктивності потрібно ввести розміри котушок у відповідності з рис. 5.7, кількість витків котушок та проміжок між котушками.

5.3.3. Обробка отриманих результатів.

Розрахункові дані, що отримані в результаті попереднього розрахунку потребують подальшої обробки по наступним причинам:

- 1) В розрахункових рівняннях (5.8) бажано мати аналітичну залежність взаємної індуктивності та її похідної від проміжку між котушками, що значно полегшує подальші розрахунки;
- 2) Метод Монте- Карло є статистичним методом, тобто при одних і тих самих початкових умовах ми при розрахунках будемо отримувати результати, що відрізняються один від одного. Ця різниця невелика, але вона існує.

Обробку будемо проводити наступним чином:

1) Проводимо декілька розрахунків власної чи взаємної індуктивності (для кожного значення проміжку між котушками с деяким шагом) та розраховуємо середнє значення;

2) Для взаємної індуктивності підбираємо апроксимуючу функцію та розраховуємо її коефіцієнти за допомогою методу найменших квадратів.

Точність, з якою апроксимуюча функція відображає задані дані таблиці, залежить від вибору способу наближення апроксимуючої функції до табличних значень. Для даних, отриманих експериментальним шляхом, найкращим наближенням вважається середньоквадратичне відхилення, що полягають у визначенні мінімуму виразу квадрата різниці між апроксимуючою функцією та заданими табличними значеннями:

$$S = \sum_{i=0}^n [(\varphi(x_i, a_0, a_1 \dots a_m) - y_i)]^2, \quad (5.21)$$

де x_i, y_i – дані таблиці; $\varphi(x_i, a_0, a_1 \dots a_m)$ – апіорі задана функція; a – невідомі коефіцієнти; n – кількість табличних значень, не менше, ніж $m+1$.

Оскільки параметри $a_0 \dots a_m$ виступають у ролі незалежних змінних, то мінімум S буде за умови:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0. \quad (5.22)$$

Нижче наведено програму розрахунку функціональної залежності взаємної індуктивності та її похідної, якщо у якості апроксимуючої функції вибрана функція виду

$$\varphi(x_i, A, B) = A \cdot \exp(B \cdot x_i), \quad (5.21)$$

де A, B – коефіцієнти, що підлягають розрахунку, x_i – фіксовані значення проміжку.

> restart;

```

> X := array(1..5, [0.001, 0.003, 0.005, 0.007, 0.009]);
    # Масив відстаней між котушками

                                X := [ 0.001 0.003 0.005 0.007 0.009 ]

> # Отримані розрахункові дані
> yM := array(1..5, [0.00051584304640.0004226195622
    0.00020481495820.00018068355040.0001637370234]);

                                yM := [0.00051584304640.00042261956220.0002048149582
    0.00018068355040.0001637370234]

> ydM := array(1..5, [0.030101936400.023319217760.01035706542
    0.0090325502800.008207625654]);

                                ydM := [0.030101936400.023319217760.010357065420.00903255028
    0.008207625654]

> # Апроксимуючі функції
> MM := A1 * exp(X[i] * B1); ln(A1 * exp(X[i] * B1));

                                MM := A1 eX[i] B1
                                ln(A1 eX[i] B1)

> dMM := A2 * exp(X[i] * B2);

                                dMM := A2 eX[i] B2

> S1 := sum((ln(yM[i]) - (A1 + B1 * X[i]))2, i = 1..5);

                                S1 := (-7.569708012 - A1 - 0.001 B1)2 + (-7.769038164 - A1
    - 0.003 B1)2 + (-8.493403629 - A1 - 0.005 B1)2 + (
    -8.618763397 - A1 - 0.007 B1)2 + (-8.717248933 - A1
    - 0.009 B1)2

> S2 := sum((ln(ydM[i]) - (A2 + B2 * X[i]))2, i = 1..5);

                                S2 := (-3.503165777 - A2 - 0.001 B2)2 + (-3.758477462 - A2
    - 0.003 B2)2 + (-4.570086343 - A2 - 0.005 B2)2 + (
    -4.706920528 - A2 - 0.007 B2)2 + (-4.802691599 - A2
    - 0.009 B2)2

> Система рівнянь
> sys1 := diff(S1, A1) = 0, diff(S1, B1) = 0;

                                sys1 := 82.33632427 + 10 A1 + 0.050 B1 = 0, 0.4242608497
    + 0.050 A1 + 0.000330 B1 = 0

> sys2 := diff(S2, A2) = 0, diff(S2, B2) = 0;

                                sys2 := 42.68268343 + 10 A2 + 0.050 B2 = 0, 0.2276033960
    + 0.050 A2 + 0.000330 B2 = 0

> # Вирішення системи рівнянь
> sols1 := fsolve({sys1}, {A1, B1}); assign(sols1);

                                sols1 := {A1 = -7.447430658 B1 = -157.2403538}

> sols2 := fsolve({sys2}, {A2, B2}); assign(sols2);

```

```
sols2 := {A2 = -3.381394668, B2 = -177.3747350}
```

```
> A1 := exp(A1); A2 := exp(A2)
```

```
A1 := 0.000582937455
```

```
A2 := 0.0340000029
```

```
> MM := A1 * exp(x * B1)
```

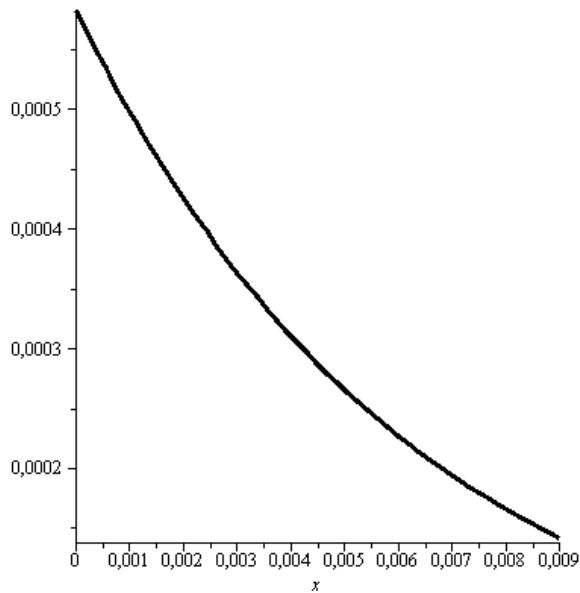
```
MM := 0.000582937455 * e-157.2403538 * x
```

```
> dMM := -A2 * exp(x * B2)
```

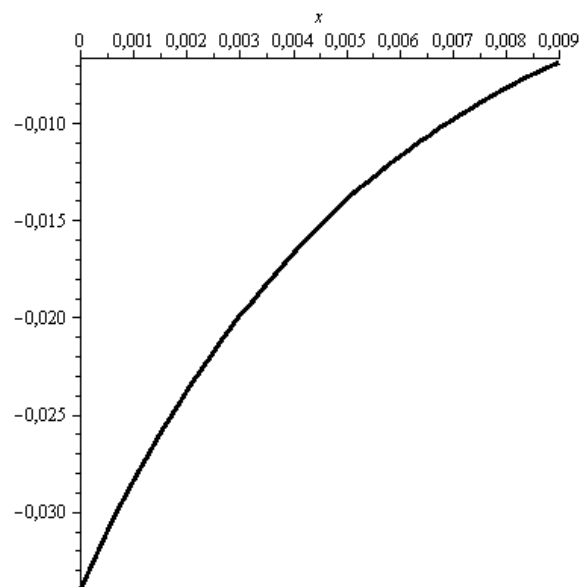
```
dMM := -0.0340000029 * e-177.3747350 * x
```

```
> # Графіки отриманих аналитичних виразів взаємної  
індуктивності та її похідної
```

```
> plot(MM, x = 0 .. 0.009, thickness = 3, color = black)
```



```
> plot(dMM, x = 0 .. 0.009, thickness = 3, color = black)
```



Таким чином, апроксимовані значення власної та взаємної індуктивності та її похідної в залежності від відстані між котушками має вигляд

$$\begin{aligned}
M(x) &= 5,83 \cdot 10^{-5} \cdot \exp(-157,24 \cdot x), \\
\frac{\partial M(x)}{\partial x} &= -3,4 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-177,37 \cdot x), \\
L_1 &= 3,343 \cdot 10^{-3}, \\
L_2 &= 3,4 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}
\tag{5.22}$$

5.4. Розрахунок індукційно-динамічного механізму.

При розрахунку індукційно-динамічного механізму необхідно визначитися з параметрами процесу, які виникають при взаємодії вала котушки, що рухається з контактами (рис. 5.2). В розрахунках приймаємо: удар не пружний, час удару складає 0,4 мс; маса, що рухається, плавно збільшується від початкової до кінцевої; силу тяжіння не враховуємо, вважаючи що вона повністю врівноважується початковою силою пружини, що діє на рухому котушку.

Програма розрахунку індукційно-динамічного механізму з коментарями наведено нижче.

```

> restart;
>
  m0 := 0.1;#маса диска
  mk := 0.25;#маса контактів
  Sd := 0.005;#хід диска до зіткнення з контактами
  L1 := 3.43·10-3; L2 := 3.4·10-4;#власні індуктивності котушок
  R1 := 0.68; R2 := 0.34;#активний опір котушок

                                m0 :=0.1
                                mk :=0.25
                                Sd :=0.005
                                L1 :=0.00343000000
                                L2 :=0.000340000000
                                R1 :=0.68
                                R2 :=0.34

> md := x → A + B· erf(10000· (x - Sd));
  #функція зміни маси, яка здійснює лавний перехід від
  початкового до кінцевого значення

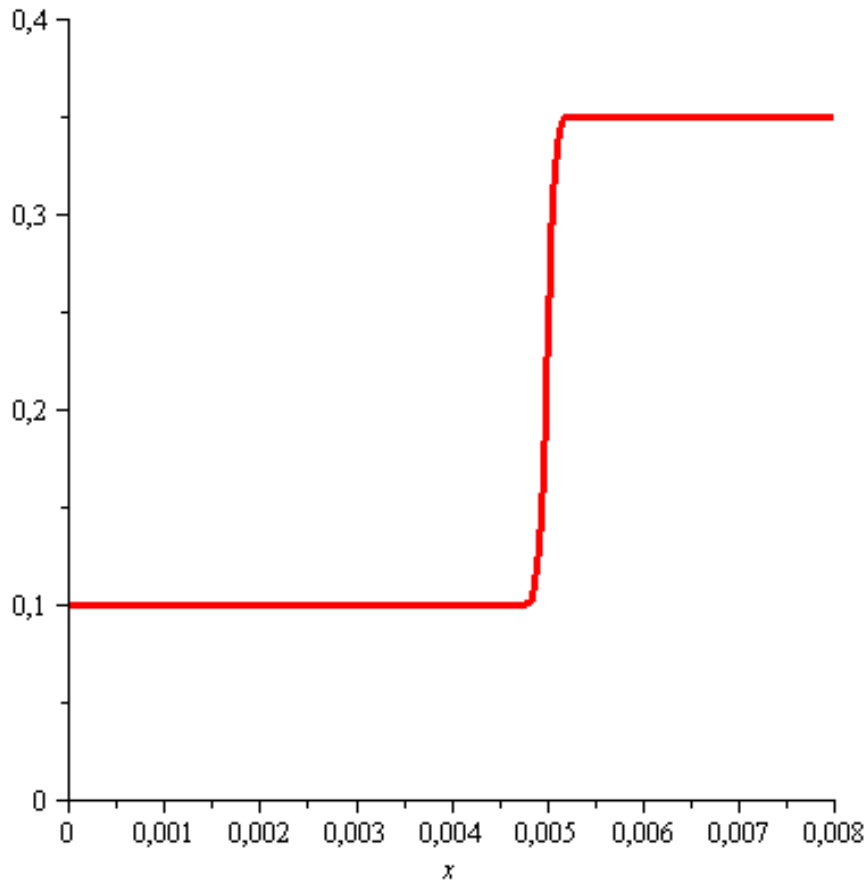
                                md :=x → A + B erf(10000x - 10000Sd)

```

- > `sys := m0 = md(0), m0 + mk = md(Sd + 0.1 · Sd);`
Система рівнянь для розрахунок коефіцієнтів функції маси

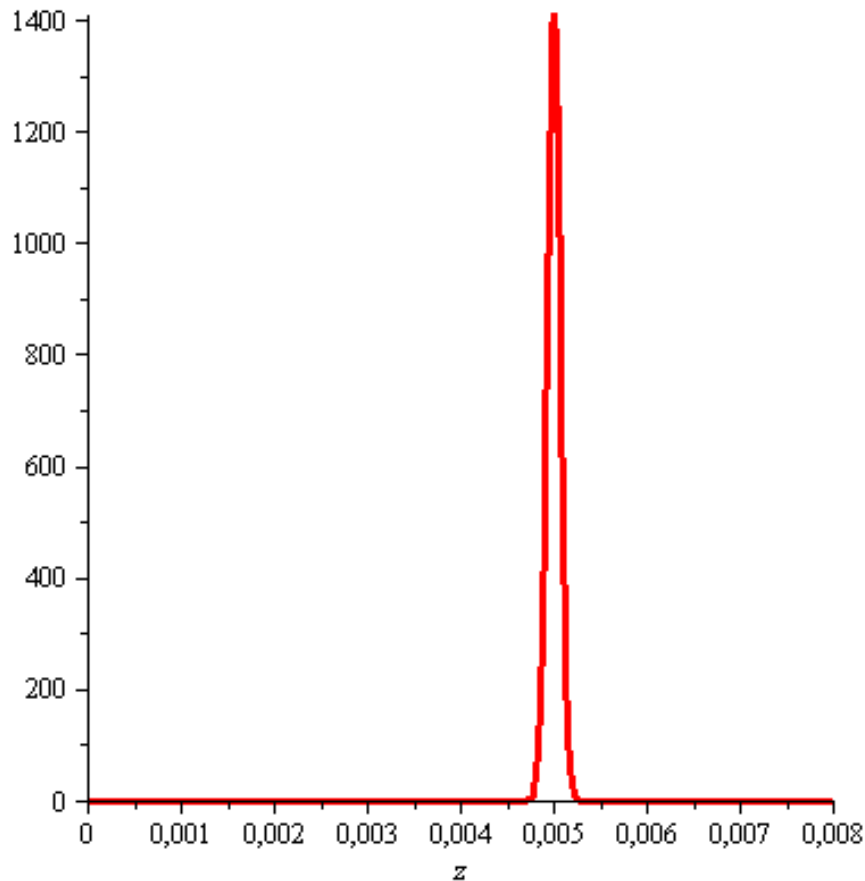
$$\text{sys} := 0.1 = A - 1 \cdot B, 0.35 = A + 1.000000000B$$
- > `sols := fsolve({sys}, {A, B}); assign(sols);`
Розрахунок коефіцієнтів функції маси

$$\text{sols} := \{A = 0.2250000000, B = 0.1250000000\}$$
- > `plot(md(x), x = 0.00..0.008, view = 0..0.4, thickness = 3)`
зміна маси рухомої котушки від ходу



- > `dmd := unapply(diff(md(z), z), z); # похідна ві рухомої маси`

$$dmd := z \rightarrow \frac{2500.000000e^{-(10000z - 50.000)^2}}{\sqrt{\pi}}$$
- > `plot(dmd(z), z = 0.00..0.008, thickness = 3)`
графік похідної маси рухомої котушки від ходу



- > $Fd := 5.0$;#Початкова сила, що діє на рухому котушку
- $cd := 1000.0$;#Жорсткість пружини рухомої котушки
- $Fk := 25.0$;#Початкова сила, що діє на рухому контакти
- $ck := 1500.0$;#Жорсткість контактної пружини
- $Skon := 0.005$;#Хід контактів
- $Sk := Skon + Sd$;#Кінцевий хід механізму

$$Fd := 5.0$$

$$cd := 1000.0$$

$$Fk := 25.0$$

$$ck := 1500.0$$

$$Skon := 0.005$$

$$Sk := 0.010$$

- > $alfa := unapply(piecewise(z < Sk, 0, 1 \cdot 10^5), z)$
#Додаткова функція, що моделює зупинку контактів

$$alfa := z \rightarrow piecewise(z < 0.010, 0, 100000)$$

- > $C := 400.0 \cdot 10^{-6}$;#Емність конденсатора
- $Uc0 := 400.0$;#Початкова напруга на емності

$$C := 0.000400000000$$

$$Uc0 := 400.0$$

- > $M := x \rightarrow 0.0005829374554e^{-157.2403538 x}$;
#Взаємна індуктивність в залежності від ходу
- $dM := x \rightarrow -0.03400000294e^{-177.3747350 x}$;
#Похідна від взаємної індуктивності

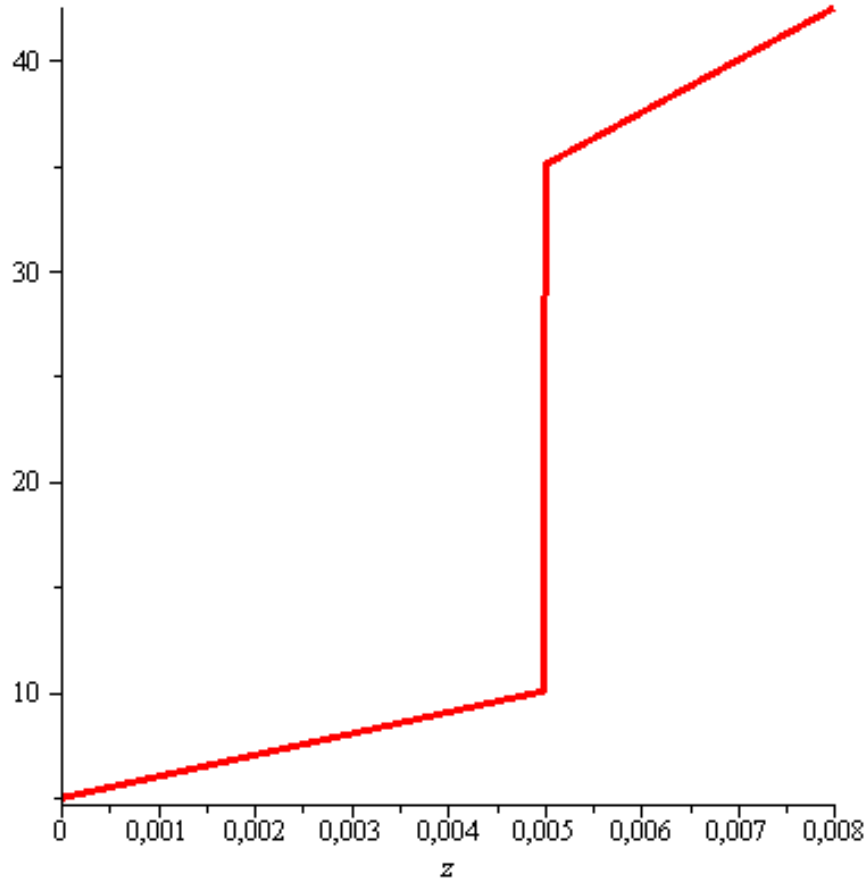
$$M := x \rightarrow 0.0005829374554e^{(-1) \cdot 157.2403538 x}$$

$$dM := x \rightarrow (-1) \cdot 0.03400000294e^{(-1) \cdot 177.3747350 x}$$

- > $F := \text{unapply}(\text{piecewise}(z \leq Sd, Fd + cd \cdot z, Fd + cd \cdot z + Fk + ck \cdot (z - Sd)), z);$ #Сумарна протидіюча сила в функції ходу

$$F := z \rightarrow \text{piecewise}(z \leq 0.005, 5.0 + 1000.0z, 22.5000 + 2500.0z)$$

- > $\text{plot}(F(z), z = 0..0.008, \text{thickness} = 3)$
#Графік сумарної протидіючої сили



- > #Система диференціальних рівнянь

- > $s1 := \frac{dmd(x(t)) \cdot v(t)^2}{1} + md(x(t)) \cdot \text{diff}(v(t), t) - dM(x(t))$
 $\cdot Tok1(t) \cdot Tok2(t) = F(x(t)) - \text{alfa}(x(t)) \cdot v(t);$

$$s1 := \frac{2500.000000e^{-(10000x(t) - 50.000)^2} v(t)^2}{\sqrt{\pi}} + (0.2250000000$$

$$+ 0.1250000000\text{erf}(10000x(t) - 50.000)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)$$

$$+ 0.03400000294e^{-177.3747350x(t)} Tok1(t) Tok2(t) = \left(\begin{array}{ll} 5.0 + 1000.0x(t) & x(t) \leq 0.005 \\ 22.5000 + 2500.0x(t) & \text{otherwise} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{ll} 0 & x(t) < 0.010 \\ 100000 & \text{otherwise} \end{array} \right) v(t)$$

> s2 := v(t) = diff(x(t), t);

$$s2 := v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

> s3 := L1 · diff(Tok1(t), t) + dM(x(t)) · v(t) · Tok2(t) + M(x(t)) · diff(Tok2(t), t) =

$$\left(U_{c0} - \frac{qI(t)}{C} \right) \cdot \left(U_{c0} - \frac{qI(t)}{C} > 0 \right) - Tok1(t) \cdot R1;$$

$$\begin{aligned} s3 := & 0.003430000000 \left(\frac{d}{dt} Tok1(t) \right) \\ & - 0.03400000294 e^{-177.3747350 x(t)} v(t) Tok2(t) \\ & + 0.0005829374554 e^{-157.2403538 x(t)} \left(\frac{d}{dt} Tok2(t) \right) = \text{'*'}(0 \\ & < 400.0 - 2500.000000qI(t), 400.0 - 2500.000000qI(t)) \\ & - 0.68 Tok1(t) \end{aligned}$$

> s4 := L2 · diff(Tok2(t), t) + dM(x(t)) · v(t) · Tok1(t) + M(x(t)) · diff(Tok1(t), t) =
-Tok2(t) · R2;

$$\begin{aligned} s4 := & 0.000340000000 \left(\frac{d}{dt} Tok2(t) \right) \\ & - 0.03400000294 e^{-177.3747350 x(t)} v(t) Tok1(t) \\ & + 0.0005829374554 e^{-157.2403538 x(t)} \left(\frac{d}{dt} Tok1(t) \right) = \\ & -0.34 Tok2(t) \end{aligned}$$

> s5 := Tok1(t) = diff(q1(t), t);

$$s5 := Tok1(t) = \frac{d}{dt} q1(t)$$

> v := x(0) = 0, v(0) = 0, Tok1(0) = 0, Tok2(0) = 0, q1(0) = 0;
#Початкові умови

$$v := x(0) = 0, v(0) = 0, Tok1(0) = 0, Tok2(0) = 0, q1(0) = 0$$

> sols := dsolve({s1, s2, s3, s4, s5, v}, {x(t), v(t), Tok1(t), Tok2(t), q1(t)}, numeric);

sols := proc(x_rkf45) ... end proc

> sols1 := dsolve({s1, s2, s3, s4, s5, v}, {x(t), v(t), Tok1(t), Tok2(t), q1(t)}, numeric, output = listprocedure);

sols1 := [t = proc(t) ... end proc, Tok1(t) = proc(t) ... end proc,
Tok2(t) = proc(t) ... end proc, q1(t) = proc(t) ... end proc,
v(t) = proc(t) ... end proc, x(t) = proc(t) ... end proc]

> Uc := subs(sols1, (Uc0 - qI(t)/C));

Uc := 400.0 - 2500.000000proc(t) ... end proc

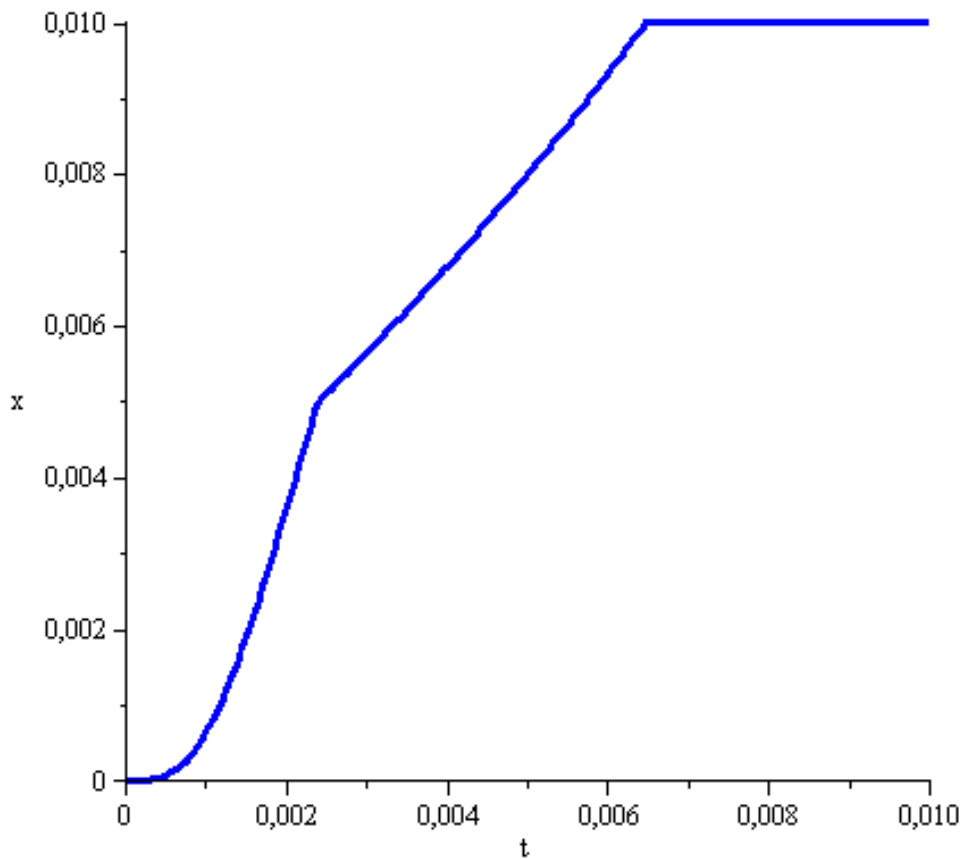
> Ucc := piecewise(Uc(t) > 0, 1, 0)

$$Ucc := \begin{cases} 1 & 0 < 400.0 - 2500.000000qI(t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

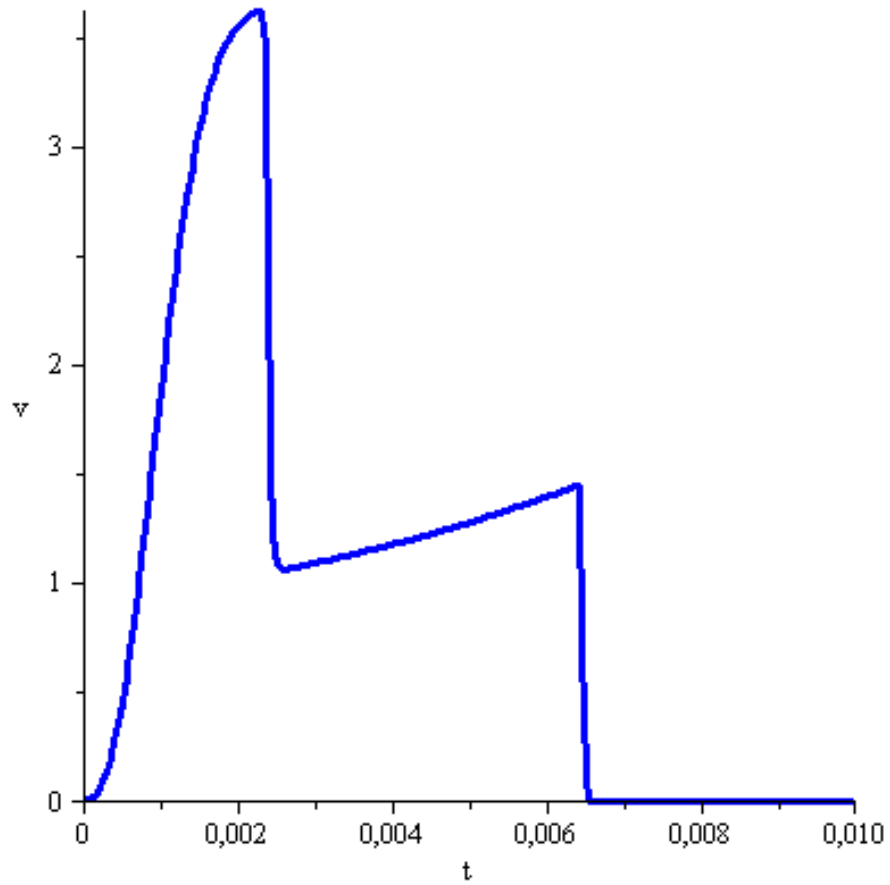
> with(plots);

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

> `odeplot(sols, [t, x(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)` #Графік залежності ходу від часу

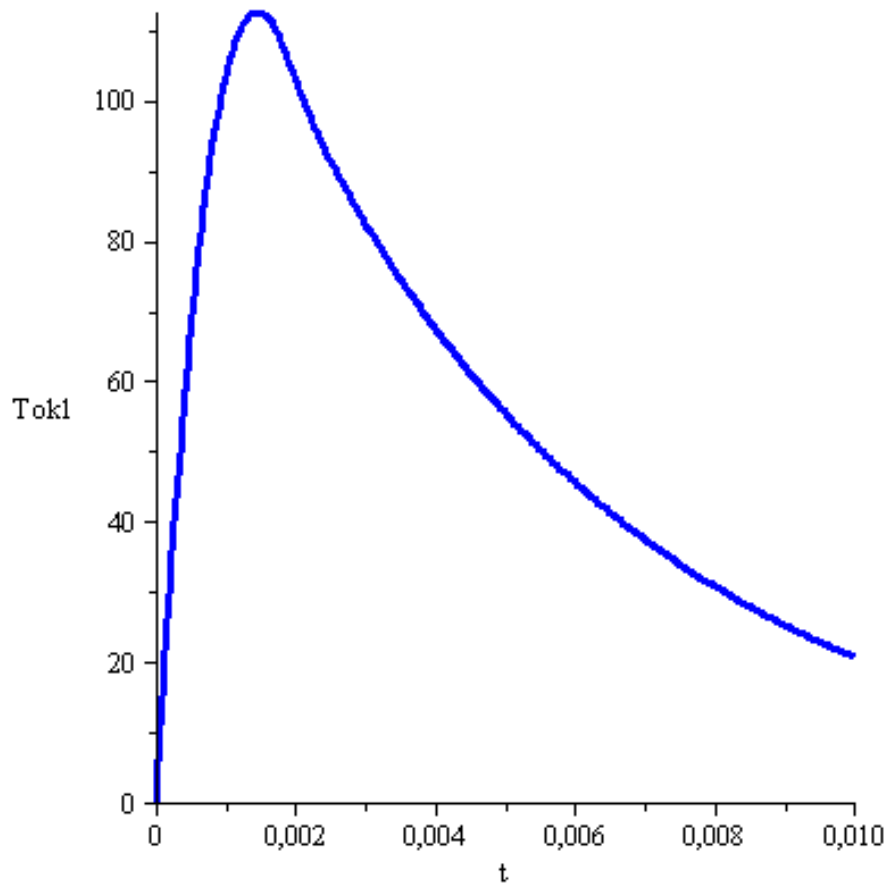


> `odeplot(sols, [t, v(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)` #Графік швидкості від часу

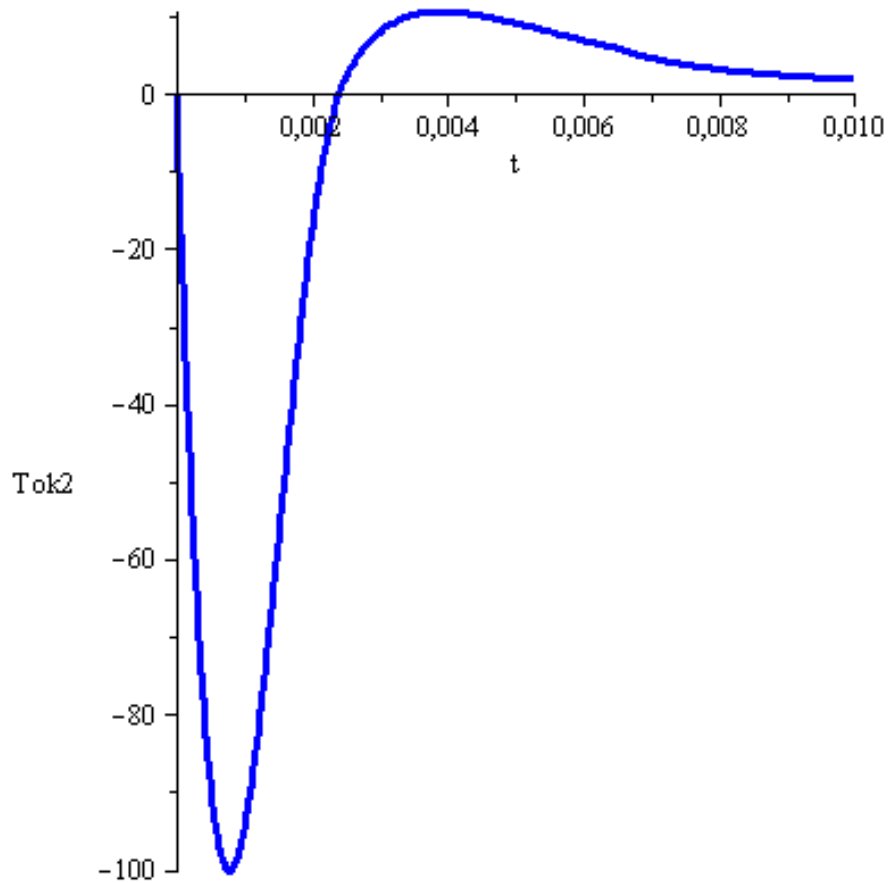


- > `odeplot(sols, [t, Tok1(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)# Струм нерухомої котушки`

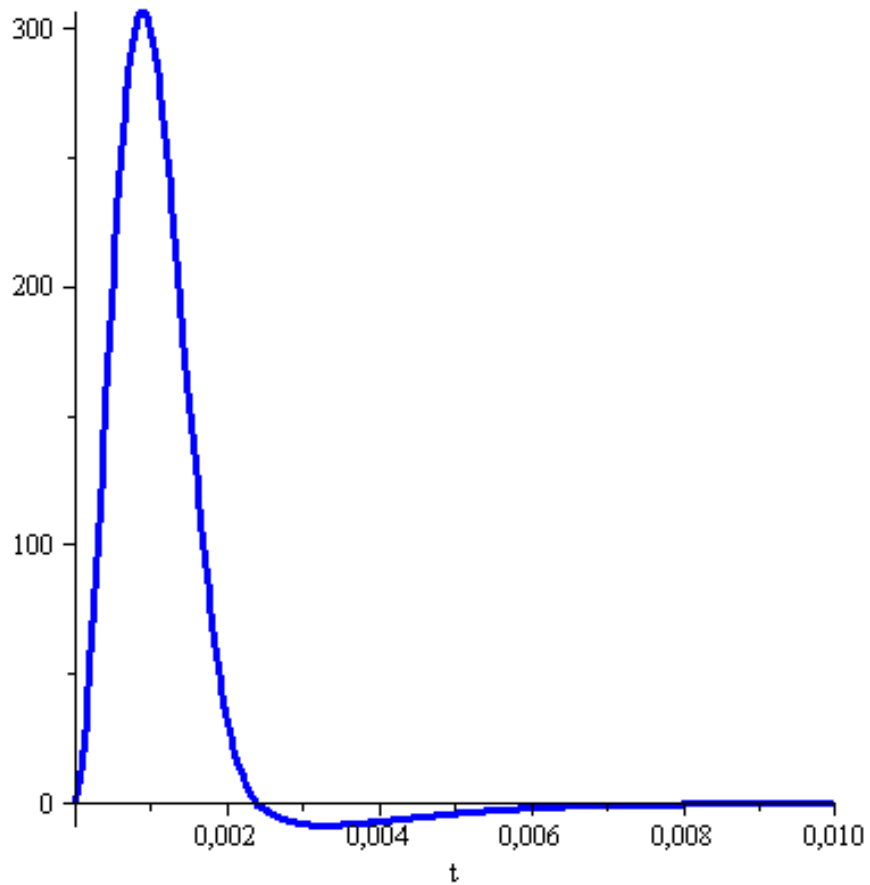
- > `odeplot(sols, [t, Tok1(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)# Струм нерухомої котушки`



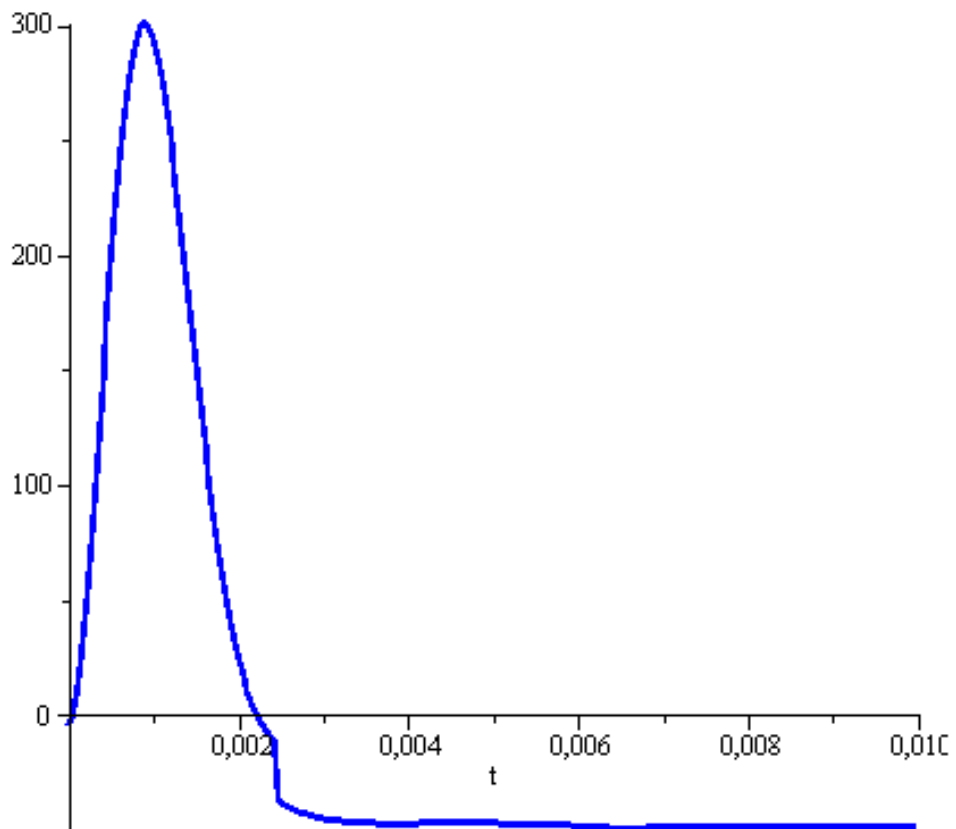
> `odeplot(sols, [t, Tok2(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)` # Струм рухомої котушки



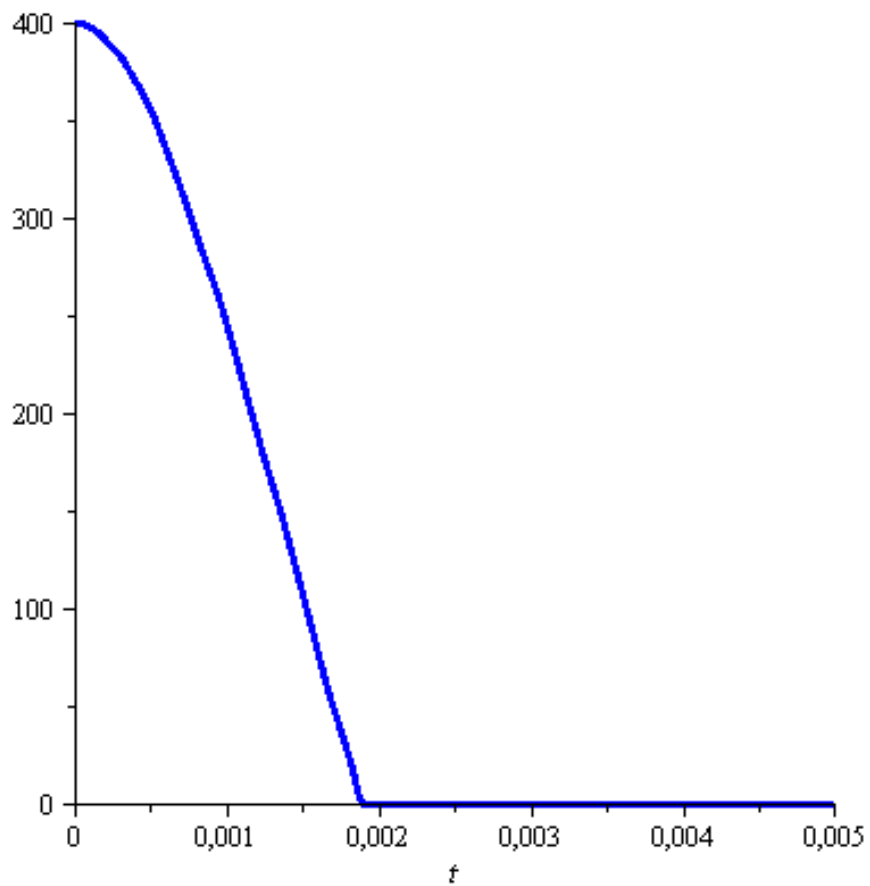
> `odeplot(sols, [t, dM(x(t))·Tok1(t)·Tok2(t)], 0..10.0·10-3,`
`numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)`
 # Електромагнітна сила



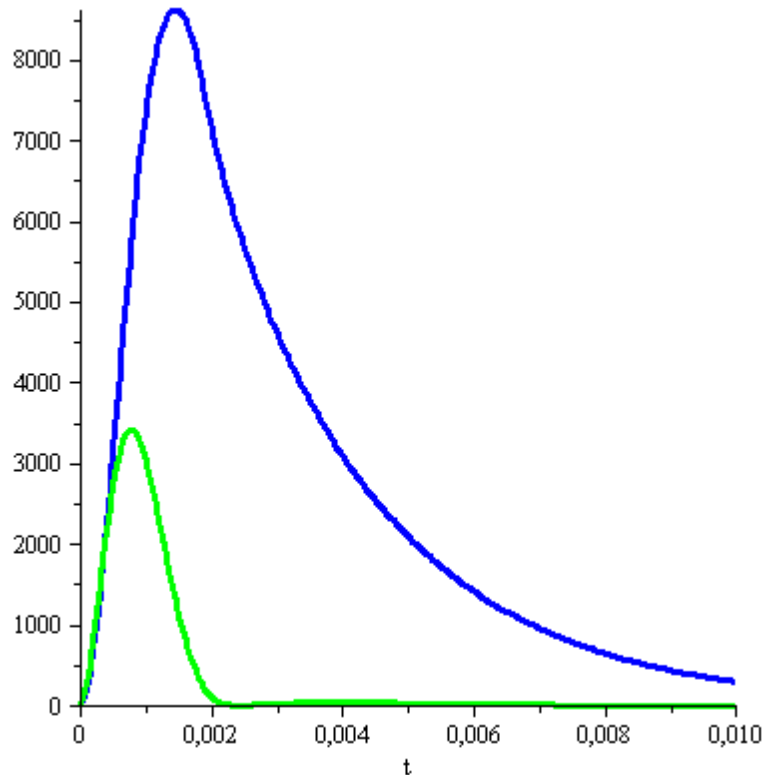
> `odeplot(sols, [t, dM(x(t))·Tok1(t)·Tok2(t) - F(x(t))], 0..10.0`
`·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)`
 # Сумарна сила



> `plot(Uc(t)·Ucc), t = 0..0.005, thickness = 3, color = blue)`
 # Напряга на конденсаторі



> **Графік потужності, що розсіюється на активному опорі котушок**



Подальші розрахунки були проведені для випадку, коли розряд накопичувальної ємності є коливальним.

```

> restart;
>
  m0 := 0.1;#маса диска
  mk := 0.25;#маса контактів
  Sd := 0.003;#хід диска до зіткнення з контактами
  L1 := 3.43·10-3; L2 := 3.4·10-4;#власні індуктивності котушок
  R1 := 0.68; R2 := 0.34;#активний опір котушок

      m0 :=0.1
      mk :=0.25
      Sd :=0.003
      L1 :=0.00343000000
      L2 :=0.000340000000
      R1 :=0.68
      R2 :=0.34

>
  md := x → A + B· erf(10000· (x - Sd));
  #функція зміни маси, яка здійснює лавний перехід від
  початкового до кінцевого значення

      md :=x → A + B erf(10000x - 10000Sd)

>
  sys := m0=md(0), m0 + mk =md(Sd + 0.1·Sd);
  # Система рівнянь для розрахунок коефіцієнтів функції
  маси

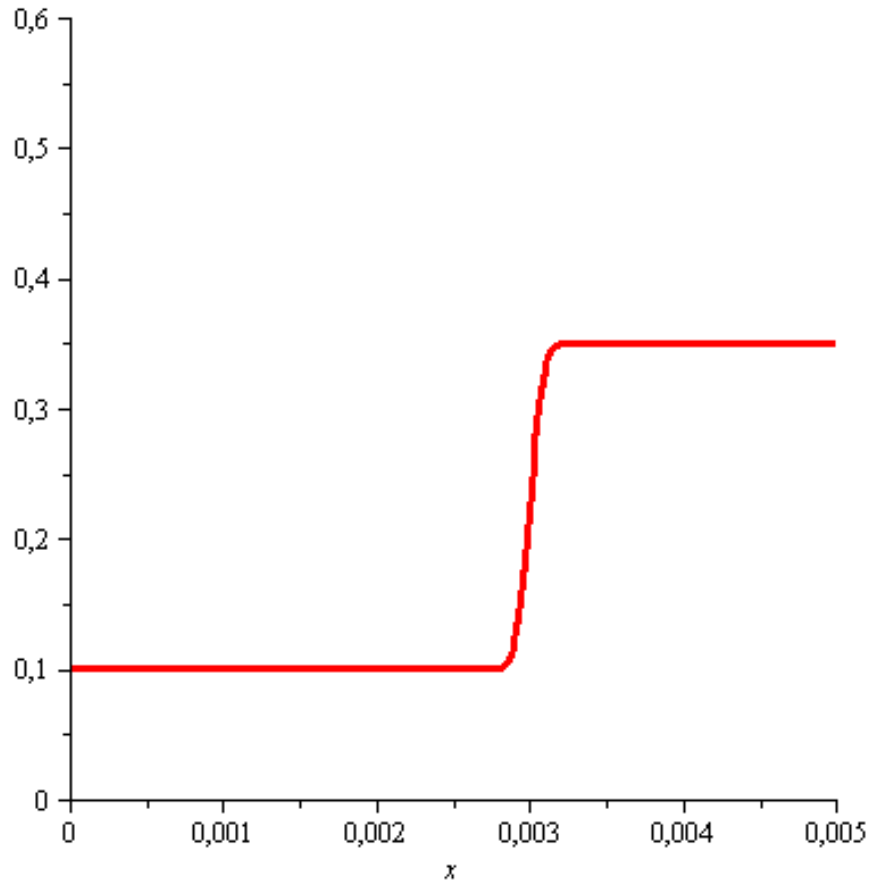
```

```
sys := 0.1 = A - 1. B, 0.35 = A + 0.9999779095B
```

```
> sols := fsolve({sys}, {A, B}); assign(sols);  
# Розрахунок коефіцієнтів функції маси
```

```
sols := {A = 0.2250013806 B = 0.1250013806}
```

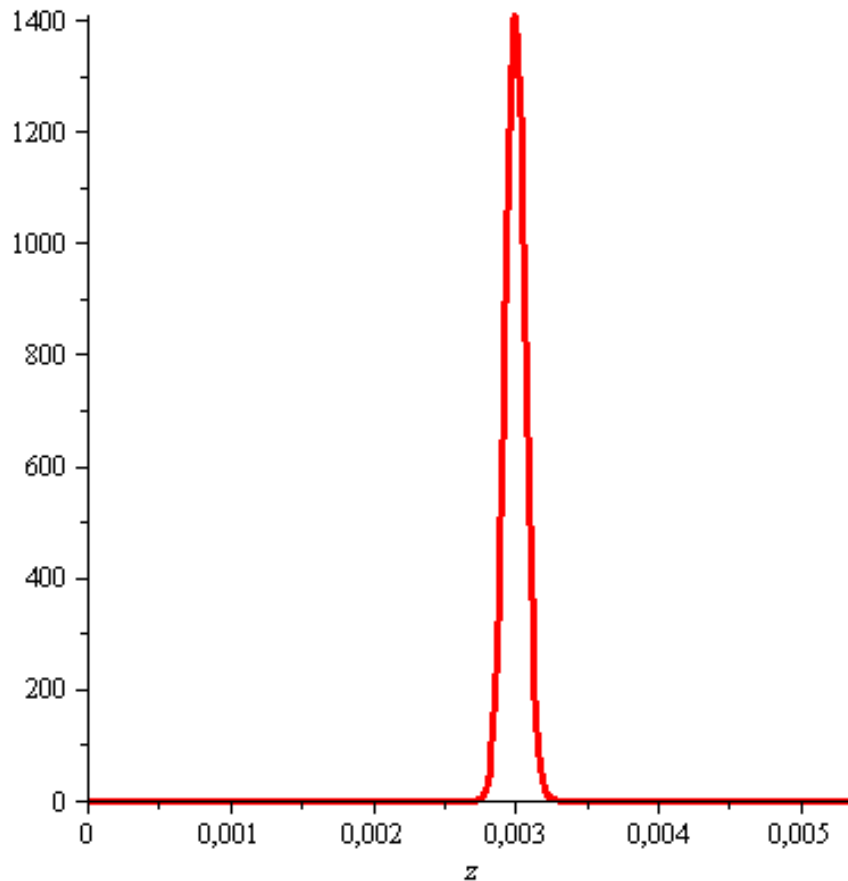
```
> plot(md(x), x = 0.00..0.005, view = 0..0.6, thickness = 3)  
# зміна маси рухомої котушки від ходу
```



```
> dmd := unapply(diff(md(z), z), z); # похідна ві рухомої маси
```

$$dmd := z \rightarrow \frac{2500.027612e^{-(10000z - 30.000)^2}}{\sqrt{\pi}}$$

```
> plot(dmd(z), z = 0.00..0.0054, thickness = 3)  
# графік похідної маси рухомої котушки від ходу
```



- > $Fd := 5.0$;#Початкова сила, що діє на рухому котушку
- $cd := 1000.0$;#Жорсткість пружини рухомої котушки
- $Fk := 25.0$;#Початкова сила, що діє на рухому контакти
- $ck := 1500.0$;#Жорсткість контактної пружини
- $Skon := 0.005$;#Хід контактів
- $Sk := Skon + Sd$;#Кінцевий хід механізму

$$Fd := 5.0$$

$$cd := 1000.0$$

$$Fk := 25.0$$

$$ck := 1500.0$$

$$Skon := 0.005$$

$$Sk := 0.008$$

- > $alfa := unapply(piecewise(z < Sk, 0, 1 \cdot 10^5), z)$
#Додаткова функція, що моделює зупинку контактів

$$alfa := z \rightarrow piecewise(z < 0.008, 0, 100000)$$

- > $C := 400.0 \cdot 10^{-6}$;#Емність конденсатора
- $Uc0 := 400.0$;#Початкова напруга на емності

$$C := 0.000400000000$$

$$Uc0 := 400.0$$

- > $M := x \rightarrow 0.0005829374554e^{-157.2403538 x}$;
#Взаємна індуктивність в залежності від ходу
- $dM := x \rightarrow -0.03400000294e^{-177.3747350 x}$;
#Похідна від взаємної індуктивності

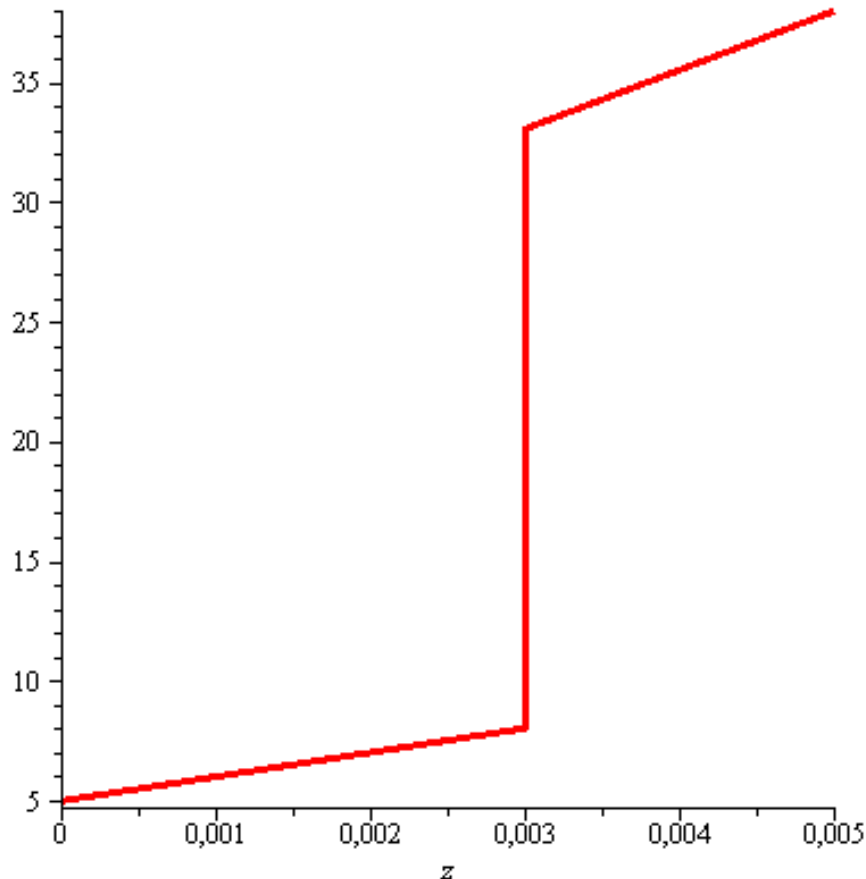
$$M := x \rightarrow 0.0005829374554e^{(-1) \cdot 157.2403538 x}$$

$$dM := x \rightarrow (-1) \cdot 0.03400000294e^{(-1) \cdot 177.3747350 x}$$

- > $F := unapply(\text{piecewise}(z \leq Sd, Fd + cd \cdot z, Fd + cd \cdot z + Fk + ck \cdot (z - Sd)), z);$ #Сумарна протидіюча сила в функції ходу

$$F := z \rightarrow \text{piecewise}(z \leq 0.003, 5.0 + 1000.0z, 25.5000 + 2500.0z)$$

- > $plot(F(z), z = 0..0.005, thickness = 3)$
#Графік сумарної протидіючої сили



- > #Система диференціальних рівнянь

- > $s1 := \frac{dmd(x(t)) \cdot v(t)^2}{1} + md(x(t)) \cdot diff(v(t), t) - dM(x(t))$
 $\cdot Tok1(t) \cdot Tok2(t) = F(x(t)) - alfa(x(t)) \cdot v(t);$

$$s1 := \frac{2500.027612e^{-(10000x(t) - 30.000)^2} v(t)^2}{\sqrt{\pi}} + (0.2250013806$$

$$+ 0.1250013806 \text{erf}(10000x(t) - 30.000)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)$$

$$+ 0.03400000294e^{-177.3747350x(t)} Tok1(t) Tok2(t) = \left(\begin{array}{ll} 5.0 + 1000.0x(t) & x(t) \leq 0.003 \\ 25.5000 + 2500.0x(t) & otherwise \end{array} \right) - \left(\begin{array}{ll} 0 & x(t) < 0.008 \\ 100000 & otherwise \end{array} \right) v(t)$$

> s2 := v(t) = diff(x(t), t);

$$s2 := v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

> s3 := L1 · diff (Tok1 (t), t) + dM(x(t)) · v(t) · Tok2 (t) + M(x(t)) · diff (Tok2 (t), t) =
 $\left(U_{c0} - \frac{q1(t)}{C} \right) - Tok1 (t) \cdot R1;$

$$\begin{aligned} s3 := & 0.003430000000 \left(\frac{d}{dt} Tok1 (t) \right) \\ & - 0.03400000294 e^{-177.3747350 x(t)} v(t) Tok2 (t) \\ & + 0.0005829374554 e^{-157.2403538 x(t)} \left(\frac{d}{dt} Tok2 (t) \right) = 400.0 \\ & - 2500.000000 q1 (t) - 0.68 Tok1 (t) \end{aligned}$$

> s4 := L2 · diff (Tok2 (t), t) + dM(x(t)) · v(t) · Tok1 (t) + M(x(t)) · diff (Tok1 (t), t) =
 $-Tok2 (t) \cdot R2;$

$$\begin{aligned} s4 := & 0.0003400000000 \left(\frac{d}{dt} Tok2 (t) \right) \\ & - 0.03400000294 e^{-177.3747350 x(t)} v(t) Tok1 (t) \\ & + 0.0005829374554 e^{-157.2403538 x(t)} \left(\frac{d}{dt} Tok1 (t) \right) = \\ & -0.34 Tok2 (t) \end{aligned}$$

> s5 := Tok1 (t) = diff (q1 (t), t);

$$s5 := Tok1 (t) = \frac{d}{dt} q1 (t)$$

> v := x(0) = 0, v(0) = 0, Tok1 (0) = 0, Tok2 (0) = 0, q1 (0) = 0;
 #Початкові умови

$$v := x(0) = 0, v(0) = 0, Tok1 (0) = 0, Tok2 (0) = 0, q1 (0) = 0$$

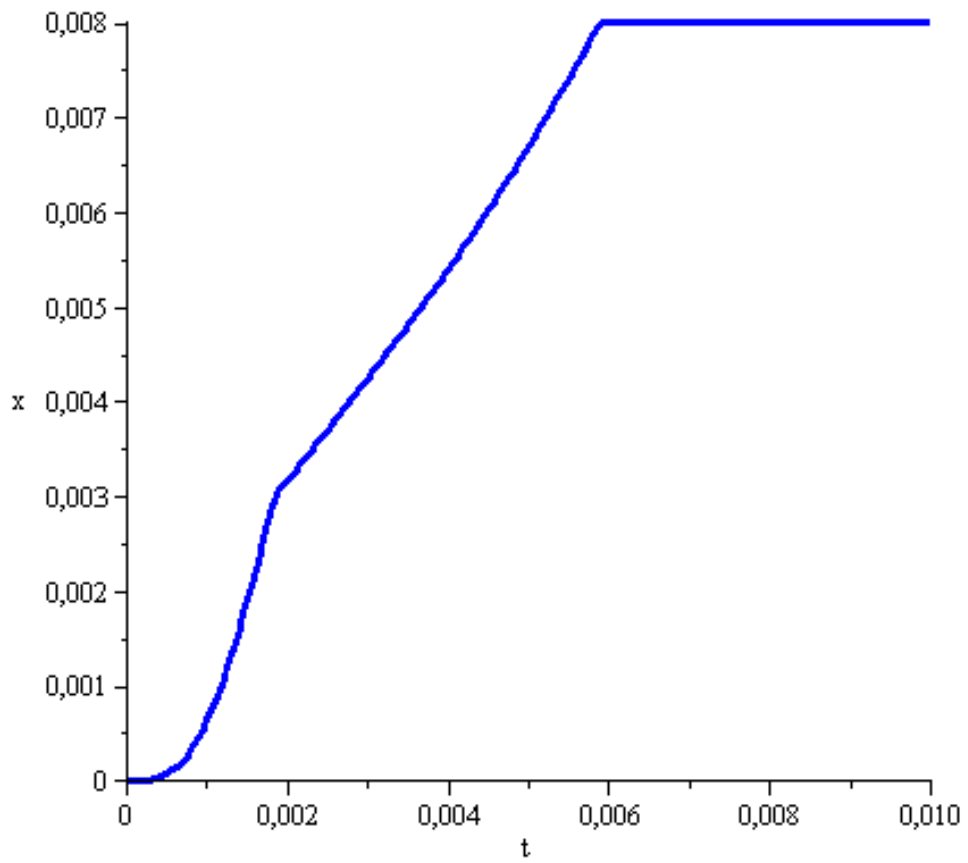
> sols := dsolve ({s1, s2, s3, s4, s5, v}, {x(t), v(t), Tok1 (t), Tok2 (t), q1 (t)}, numeric);

sols := **proc**(x_rkf45) ... **end proc**

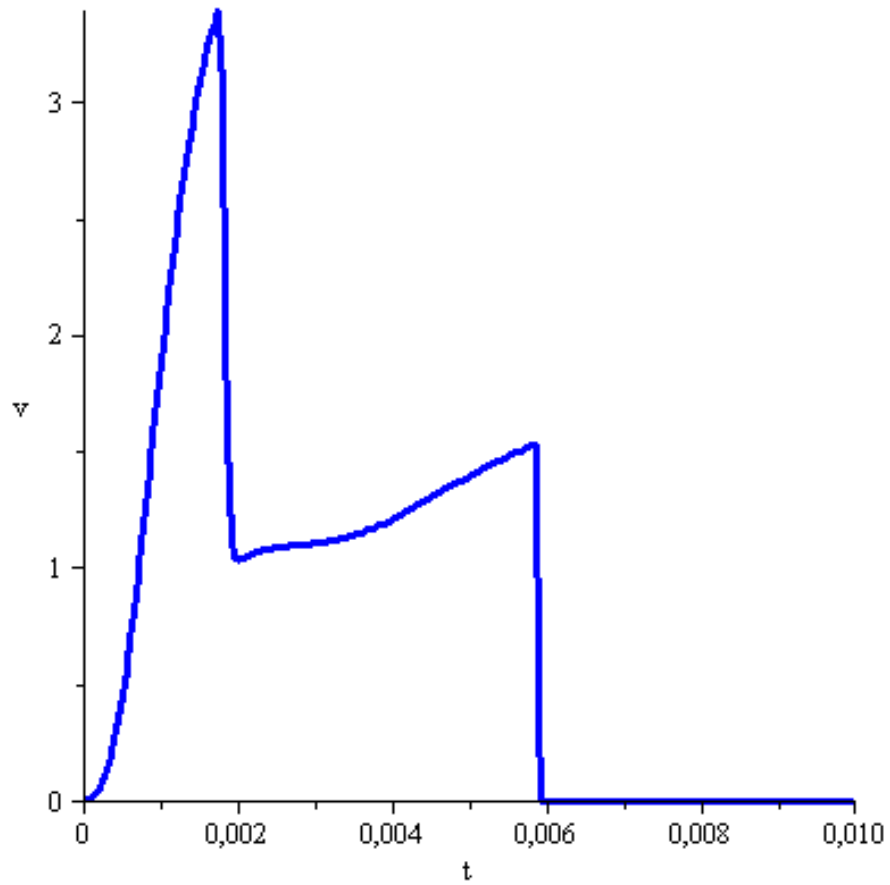
> with(plots);

[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

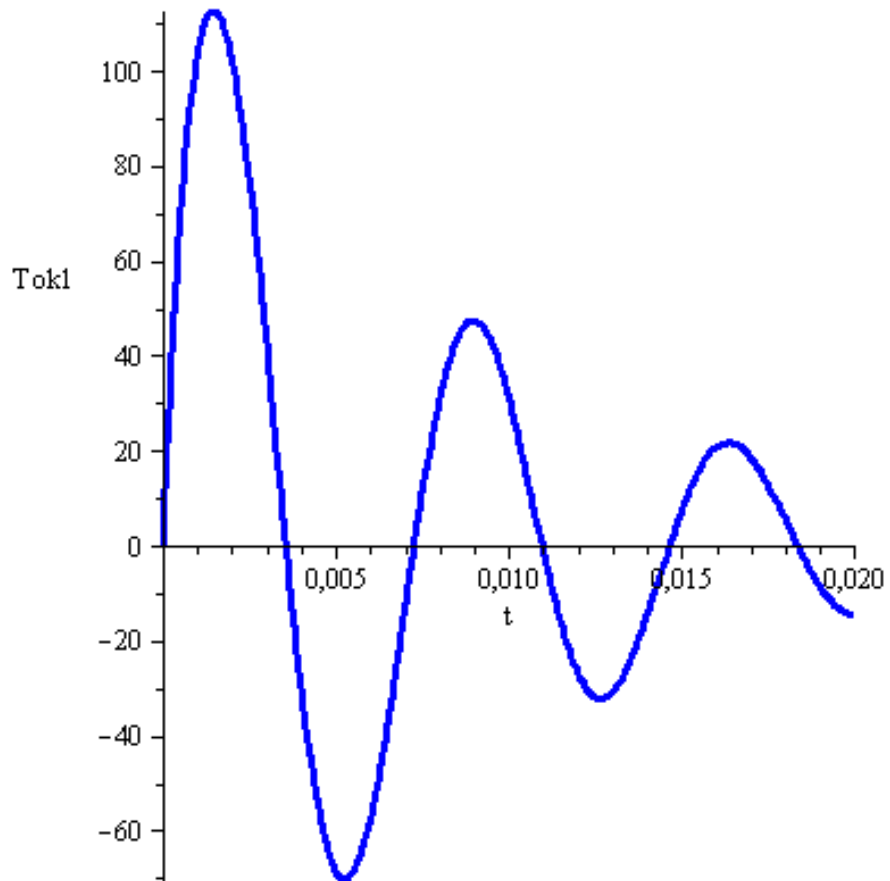
> `odeplot(sols, [t, x(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)` #Графік залежності ходу від часу



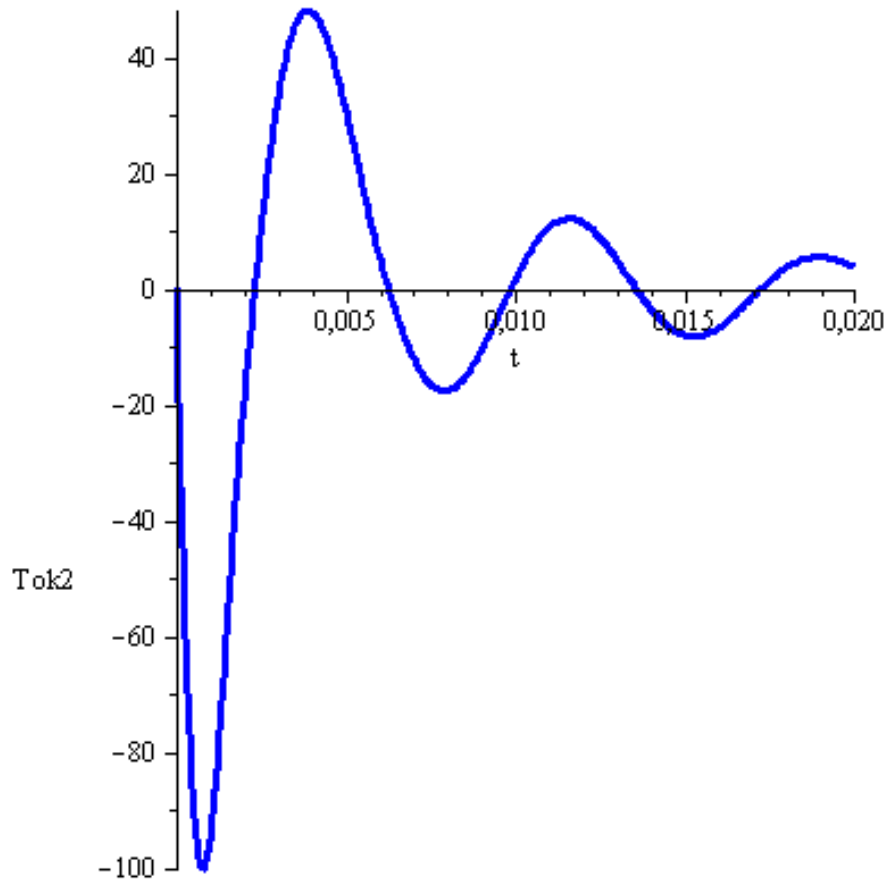
> `odeplot(sols, [t, v(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)` #Графік швидкості від часу



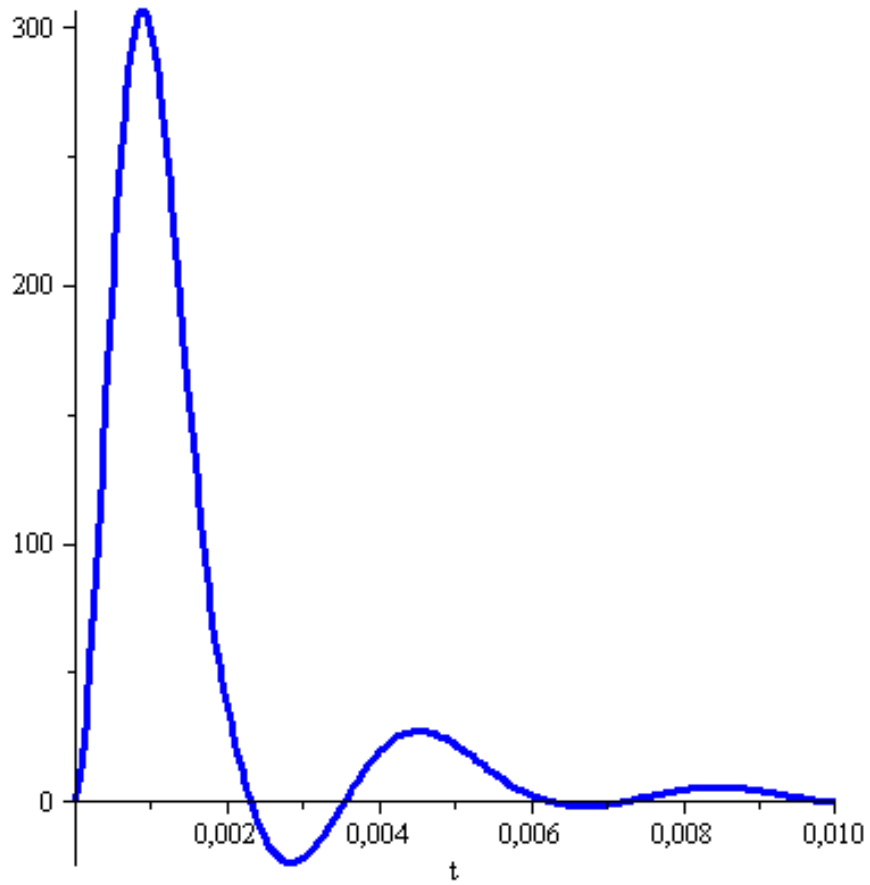
> `odeplot(sols, [t, Tok1(t)], 0..20.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)` # Струм нерухомої котушки



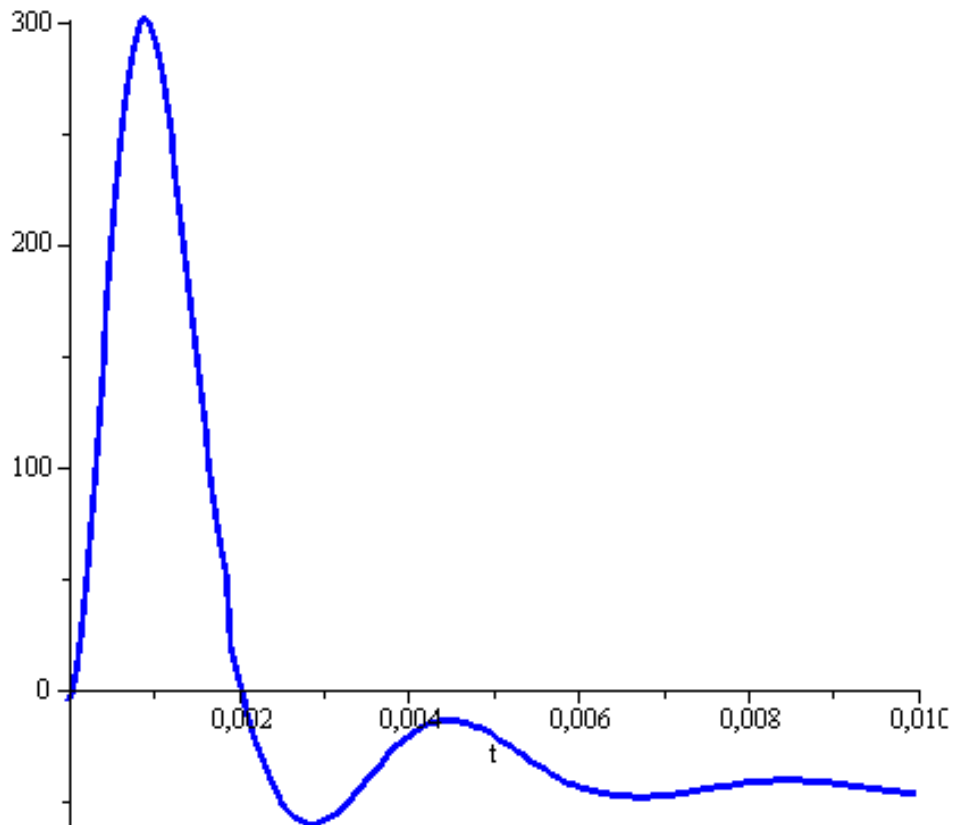
> `odeplot(sols, [t, Tok2(t)], 0..20.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)`
Струм рухомої котушки



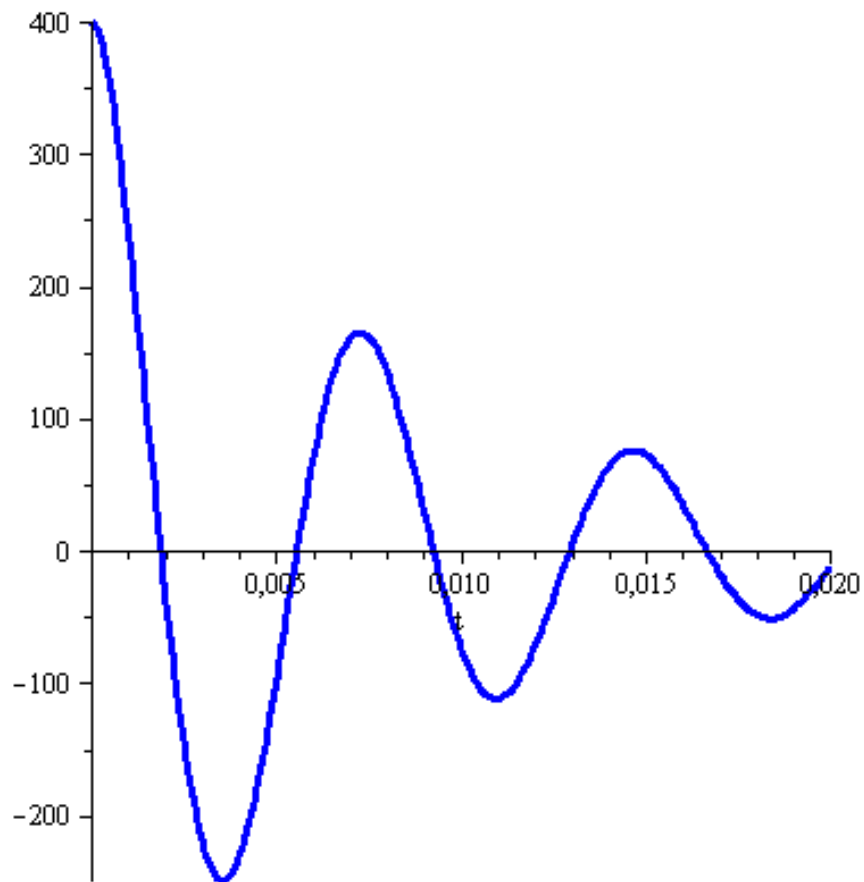
> `odeplot(sols, [t, dM(x(t))·Tok1(t)·Tok2(t)], 0..10.0·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)`
Електромагнітна сила



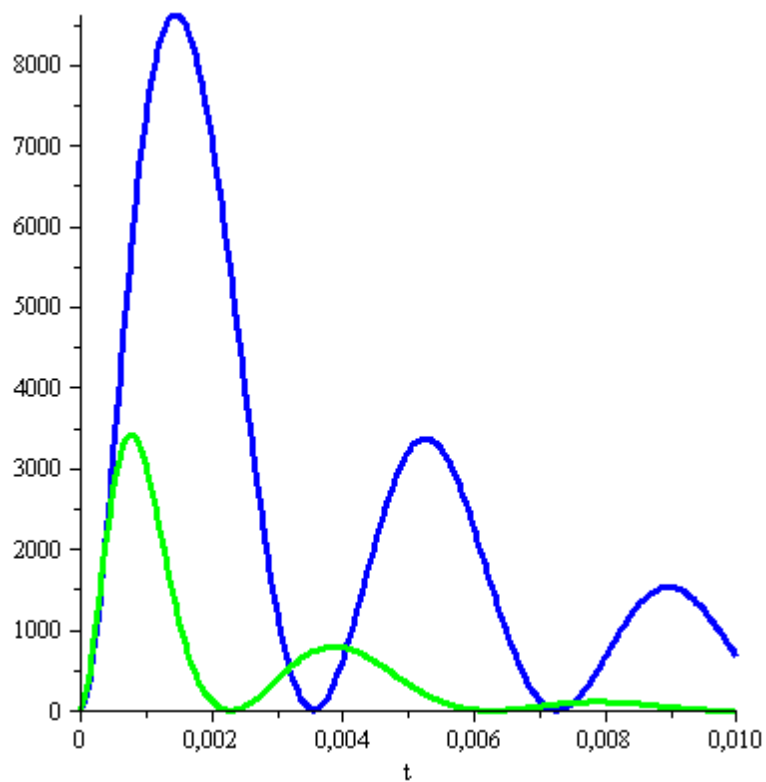
> `odeplot(sols, [t, dM(x(t))·Tok1(t)·Tok2(t) - F(x(t))], 0..10.0
 ·10-3, numpoints = 200, thickness = 3, color = blue)
 # Сумарна сила`



```
> odeplot(sols, [t, Uc0 -  $\frac{qI(t)}{C}$ ], 0..20.0·10-3, numpoints = 200,
  thickness = 3, color = blue) # Сумарна Напруга на ємності
```



Графік потужності, що розсіюється на активному опорі котушок



Як можна побачити з отриманих графіків, характер руху майже не змінився, а от електромагнітні процеси з аперіодичних перетворилися на коливальні. За рахунок цього здійснюється перезаряд ємності що небажано.

Коректність розрахунку ІДМ побічно можна підтвердити перевіркою за допомогою формули (5.5). Підставивши в формулу дані мас, що рухаються, отримаємо значення кінцевої швидкості, що дорівнює 1 м/с. По розрахунку – 1,06 м/с.

ЗАКЛЮЧЕННЯ

У наданих методичних вказівках розглянуто параметри механічних та електричних аналогій, за допомогою яких можна на базі рівнянь Лагранжа другого роду скласти диференційні рівняння складної електромеханічної системи. Розглянуті питання пов'язані з узагальненими координатами та узагальненими силами, що дають можливість на їх основі скласти рівняння Лагранжа другого роду.

На прикладі електромагніта відкритого типу з втяжним якорем розглянуто методи розрахунку індуктивності таких систем за допомогою програми *femm* та використання алгоритмічного мови *Lua Script*, надано теоретичні відомості та наведено приклади розрахунку.

У програмі *Maple* наведено розрахунки електромеханічної системи при різних умовах. Наведено приклади програмування на мові *Maple*, тексти програм та результати у вигляді графіків.

Також у навчально-методичному посібнику розглянуто: конструкції індукційно-механічних механізмів; отримання диференційних рівнянь їхнього руху за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду та вказано на специфічні особливості їх застосування до ударних процесів.

Окремою частиною розглянуто обчислення власної та взаємної індуктивності методом Монте Карло.

Даний навчально-методичний посібник буде корисним не тільки здобувачів ступеня доктор філософії, а і всім іншим зацікавленим особам.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. Теоретична механіка в прикладах та задачах. Видавництво «Наука». Головне видавництво фізико-математичної літератури, т. 2. – М.; 1972 г. – 624 с.
2. Є. І. Байда, О. Ю. Кропачек. Чисельні методи .– Харків.: НТУ «ХП», 2020. – С. 118. НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК Печатний. Затверджено вченою радою університету протокол №3 від 17.03.2019. Віддруковано у ТОВ "ДРУКАРНЯ МАДРИД", 61024, м. Харків.
<https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/49183>
3. В. Дьяконов. Maple 6. Навчальний курс. – СПб: Питер, 2001. – 608 с.
4. Рамо С., Уинери Дж.. Поля та хвилі в сучасній радіотехніці. Видання друге, перероблене. М.-Л., ГИТТЛ, 1950 г. 568 с.
5. Байда Є.І. Метод Монте-Карло. Навчально-методичний посібник з дисципліни «Пакети прикладних програм для розв'язання мультифізичних задач» для здобувачів ступеня доктора філософії зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» усіх форм навчання. Харків.: НТУ «ХП», 2024. – 74 с.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Наведіть співвідношення між механічними та електричними величинами?
2. Що таке робота зовнішніх сил в електричному колі?
3. Охарактеризуйте узагальнені координати та узагальнені сили.
4. Що таке ступені свободи системи?
5. Що таке радіус-вектор?
6. Як обчислюється в узагальненому вигляді швидкість системи?
7. Що таке можливе переміщення?
8. Який алгоритм обчислення узагальненої сили?
9. Запишіть рівняння Лагранжа в загальному вигляді.
10. Який алгоритм складань рівнянь Лагранжа другого роду?
11. Опишіть активні сили, які в діють в системі, що розглядається.
12. Як обчислюється робота електрорушійної сили?
13. Який вираз має кінетична енергія системи?
14. Що фізично означає кожен член диференційних рівнянь?
15. Які задачі можна розраховувати в програмі femm?
16. Що фізично означають рівняння Максвелла?
17. Що таке магнітна індукція та векторний магнітний потенціал?
18. Як розраховується індуктивність в програмі femm?
19. Що таке потік приведений по потоццепленю?
20. Поясніть характер графіка сили на індуктивності системи.
21. Що таке глобальна апроксимація і коли вона застосовується?
22. Як вирішуються системи диференційних рівнянь в системі Maple?
23. Що таке фазовий портрет системи?
24. Як впливають врахування втрат енергії системи на характер отриманих рішень?
25. Що таке ІДМ, та де вони використовуються, їхня конструкція?
26. Як розраховуються індуктивності котушок методом Монте-Карло?

27. Що таке метод найменших квадратів та в яких випадках він використовується?

28. Як в системі Maple вирішується система диференціальних рівнянь?

29. Вкажіть на особливості роботи ІДМ в залежності від електричної схеми підключення ІДМ.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. Деякі теоретичні відомості.....	4
1.1. Таблиця механічних та електричних аналогій.	4
1.2. Узагальнені координати та сили.	4
1.3. Загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах. Рівняння Лагранжа другого роду.	6
1.4. Послідовність дій для складання рівнянь Лагранжа другого роду. .	7
2. Загальна схема розрахунку електромеханічної системи.....	7
2.1. Узагальнені сили.....	9
2.2. Кінетична енергія системи та рівняння Лагранжа.	10
3. Розрахунок індуктивності системи.	12
3.1. Загальні відомості про програму femm.	13
3.2. Короткі відомості про метод кінцевих елементів.	14
3.3. Підготовка вхідних розрахункових даних та розрахунок магнітного поля.	16
3.3.1. Створення геометрії у препроцесорі креслення програми femm.	17
3.3.2. Порядок креслення.	18
3.3.3. Завдання властивостей матеріалу та струму котушки.	19
3.4. Розрахунок індуктивності системи в програмі femm.	21
4. Вирішення рівнянь Лагранжа.	28
4.1. Якір системи рухається по апріорі заданому закону.	28
4.2. На якір системи діє періодична сила.	30
4.2.1. Розрахунок без урахування втрат енергії в системі.	33
4.2.2. Розрахунок з урахування втрат енергії.....	35
4.2.3. Розрахунок залежності струму котушки від положення якоря в статичному режимі або при малій швидкості руху якоря.	37
5. Індукційно-динамічний механізм.....	41
5.1. Конструкція індукційно – динамічних пристроїв та електричні схеми підключення котушки ІДМ до джерела енергії.	41
5.2. Рівняння Лагранжа для ІДМ.	45
5.3. Розрахунок індуктивностей та взаємної індуктивності системи... 49	
5.3.1. Розрахунок взаємної індуктивності між двома круговими витками.	49

5.3.2. Розрахунок взаємної індуктивності між двома круговими котушками.....	51
5.3.3. Розрахунок інтегралів.....	53
5.3.3. Обробка отриманих результатів.....	59
5.4. Розрахунок індукційно-динамічного механізму.....	63
ЗАКЛЮЧЕННЯ.....	84
СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ.....	85
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	86
ЗМІСТ.....	88

Навчальне видання

БАЙДА Євген Іванович

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ
РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

Навчально-методичний посібник
з навчальної дисципліни «Пакети прикладних програм
для розв'язання мультифізичних задач»
для здобувачів ступеня доктор філософії зі спеціальності
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск доц. Байда Є. І.

Роботу рекомендував до випуску доц. Чепелюк О. О.

В авторській редакції

План 2025, поз.50

Підписано до друку 26.06.20254 р.

Гарнітура – Times New Roman. Обсяг. 2,8 арк.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5475 від 21.08.2017 р.

61002, м. Харків, вул. . Кирпичова, 2

Електронна версія