МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи студентів

з навчальної дисципліни фізика

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧАХ

для студентів спеціальностей
E5 «Фізика та астрономія», E6 «Прикладна фізика та наноматеріали»,
E7 «Математика», F1 «Прикладна математика», G9 «Прикладна механіка»,
G11 «Машинобудування», G12 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка»,
G7 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 19.02.2026 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2026

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів з навчальної дисципліни фізика «Диференціальні рівняння у фізичних задачах» для студентів спеціальностей E5 «Фізика та астрономія», E6 «Прикладна фізика та наноматеріали», E7 «Математика», F1 «Прикладна математика», G9 «Прикладна механіка», G11 «Машинобудування», G12 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка», G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» / уклад. А.О. Савченко, О.А. Галуза. – Харків: НТУ «ХПІ». – 59 с.

Укладачі А.О. Савченко

О.А. Галуза

Рецензент О.В. Тоніца

Кафедра фізики

ВСТУП.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ОСНОВНІ УЯВЛЕННЯ

- Математичний аналіз описує швидкості зміни між двома змінними та накопичення величин, зокрема площі під графіком, як границю сум (визначений інтеграл).
- Розуміння швидкостей зміни та накопичення величин допомагає *моделювати, інтерпретувати й аналізувати* задачі з реального світу.
- Математичний аналіз дає змогу досліджувати *поведінку функцій* і тлумачити *особливості їхніх графіків*.

У цьому розділі ви навчитеся:

- складати диференціальні рівняння за умовою задачі;
- визначати, коли і як розв'язувати диференціальні рівняння методом відокремлення змінних;
- будувати ескізи розв'язків диференціальних рівнянь навіть без явного розв'язування;
- знаходити наближені розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку;
- аналізувати системи диференціальних рівнянь як наближено, так і аналітично;
- подавати системи диференціальних рівнянь графічно;
- аналізувати диференціальні рівняння другого порядку як наближено, так і аналітично.

У цьому розділі розглядаються такі поняття:

- Похідна має фізичний зміст як швидкість зміни, а геометричний — як кутовий коефіцієнт дотичної (коефіцієнт нахилу прямої).
- Багато фізичних явищ можна описати диференціальними рівняннями; для знаходження оптимальних величин застосовують аналітичні та чисельні методи.
- Фазові портрети дають змогу наочно уявити поведінку динамічних систем.
- У багатьох реальних ситуаціях нам відомо, *як саме змінюється певна величина*. На основі цієї інформації можна побудувати модель, яку називають *диференціальним рівнянням*. Часто на перебіг процесу впливає не один чинник, а кілька, і тоді такі явища доцільно описувати *системами зв'язаних (взаємопов'язаних) диференціальних рівнянь*.
- У цьому розділі ви побачите, як деякі диференціальні рівняння можна *розв'язати точно*. Проте не кожне диференціальне рівняння має розв'язок, який можна виразити через *відомі елементарні та стандартні функції.* Оскільки диференціальні рівняння надзвичайно важливі для опису багатьох процесів у реальному світі, то навіть коли точний розв'язок отримати неможливо, існують методи, що дають змогу знаходити *наближені розв'язки*.

РОЗДІЛ 1. ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

➢ Складання диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння описує швидкість зміни певної величини. Інакше кажучи, це рівняння, яке пов'язує $\frac{dy}{dx}$ зі змінними x та y.

❖ Розв'язаний приклад 1.1

Швидкість, з якою вода витікає з відра, пропорційна квадратному кореню з об'єму води, що залишився. Запишіть це як диференціальне рівняння.

- Визначимо змінні: нехай V - об'єм води, що залишився (у літрах), а t - час (у секундах).
- «Пропорційна» означає «помножена на сталу»:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}.$$

- Пам'ятайте: якщо величина зменшується, її похідна є від'ємною.

➢ Загальний розв'язок диференціального рівняння

❖ Розв'язаний приклад 1.2

Якщо $\frac{ds}{dt} = e^{-t}$, знайдіть вираз для s через t.

- Можна «скасувати» диференціювання, проінтегрувавши за t:

$$s = \int e^{-t}\,dt$$

- Не забудьте сталу інтегрування:

$$s = -e^{-t} + c.$$

Зверніть увагу, що ваш вираз для s через t містить невідому сталу c. Це називають *загальним розв'язком*, тобто виразом, який описує всі можливі розв'язки, що отримуються при зміні значення c.

Значення c у конкретній задачі можна знайти, якщо відома пара значень t і s. Наприклад, якщо відомо, що спочатку (тобто при $t = 0$) $s = 0$, то

$$c = s + e^{-t} = 0 + e^{0} = 1.$$

➢ Відокремлення змінних

Найпростіший тип диференціальних рівнянь, які ви могли вже розв'язувати, мав вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

і ви робили це, інтегруючи обидві частини за x. Проте часто трапляються ситуації, коли права частина є функцією і x, і y. У такому разі не можна проінтегрувати праву частину за x, оскільки y не є сталою.

Однак, якщо праву частину можна подати як добуток функції від x і функції від y, тоді можна застосувати метод, який називають *відокремленням змінних.*

Ключова ідея 1.1.

Якщо

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y),$$

то

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Порада: це дуже схоже на те, ніби ви розглядаєте $\frac{dy}{dx}$ як дріб. На цьому етапі це не створює проблем, якщо ви мислите саме так, але формально це не зовсім правильно. У більш поглибленому курсі ви побачите, що насправді виконується перетворення

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx.$$

❖ Розв'язаний приклад 1.3

Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = xy,}$$

за умови, що $\boldsymbol{y > 0}$**.**

Зберіть усі множники з xв одному боці, а з yв іншому, і проінтегруйте:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x\, dx$$

Виконайте інтегрування з обох боків. Сталу інтегрування достатньо записати з одного боку:

$$\ln\ |\, y\, |= \frac{x^2}{2} + c$$

Оскільки $y > 0$, модуль можна прибрати, а потім піднести e до степеня обох частин, щоб позбутися натурального логарифма:

$$y = e^{\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}$$

Формально це вже відповідь, але корисно записати її інакше. Замість доданка $+c$ у показнику можна перейти до сталого множника (зазвичай його позначають A):

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\, e^c = A\, e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Порада: Поширена помилка під час розв’язування таких диференціальних рівнянь: просто дописати «$+c$» у кінці розв’язку. Але, як видно з опрацьованого прикладу 1.3, відповідь не є

$$y = e^{\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}.$$

<table>
<tr><td colspan="3">Знайдіть загальний розв’язок диференціального рівняння
$$\frac{dy}{dx} = ky,$$
де k є сталою, а $y > 0$. Який із наведених розв’язків є правильним? Визначте помилки в неправильних розв’язках.</td></tr>
<tr><td>Розв’язання 1
$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int k\, dx$$
$$\ln\ y = kx + c$$
$$y = Ae^{kx}$$</td><td>Розв’язання 2
$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int k\, dx$$
$$-\frac{1}{y^2} = kx + c$$
$$y = \sqrt{\frac{1}{c - kx}}$$</td><td>Розв’язання 3
$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int k\, dx$$
$$\ln\ y = kx + c$$
$$y = e^{kx} + c$$</td></tr>
</table>

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

Для завдань 1–4 використайте метод, продемонстрований у Розв'язаному прикладі 1.1, щоб записати диференціальне рівняння, яке моделює наведену ситуацію.

1. а) Швидкість росту бактерій у чашці Петрі пропорційна кількості бактерій (b).

   б) Швидкість зростання площі, вкритої мохом, пропорційна квадратному кореню з уже вкритої площі (a).

2. а) Швидкість збільшення радіуса повітряної кульки, що надувається, обернено пропорційна квадрату поточного радіуса (r).

   б) Швидкість збільшення зросту людини обернено пропорційна зросту (h).

3. а) Швидкість зменшення чисельності популяції риб пропорційна квадратному кореню з її поточної чисельності (F).

   б) Швидкість зменшення швидкості автомобіля обернено пропорційна його поточній швидкості (v).

4. а) Швидкість зростання кількості людей із хворобою (I) у популяції розміру N пропорційна кількості людей із хворобою та пропорційна кількості людей без хвороби.

   б) Швидкість поширення чутки пропорційна кількості людей, які знають чутку (R), у групі розміру N та кількості людей, які не знають чутки, і обернено пропорційна часу (t), що минув від початку поширення чутки.

Для завдань 5–8 використайте інтегрування, як показано в Розв'язаному прикладі 1.2, щоб знайти загальний розв'язок наведених диференціальних рівнянь.

5. а) $\frac{dy}{dx} = x^2$

   б) $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

6. а) $\frac{dy}{dt} = e^{2t}$

   б) $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{t}$

7. а) $\frac{ds}{dt} = \sin\ 3t$

   б) $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{\cos^2 t}$

8. а) $\frac{dF}{dm} + \frac{3}{m} = 1$

   б) $\frac{dF}{dm} + \frac{1}{m^2} = 3$

Для завдань 9–12 використайте метод відокремлення змінних, як показано в Розв'язаному прикладі 1.3, щоб знайти загальний розв'язок наведених диференціальних рівнянь.

9. а) $\frac{dy}{dx} = 2y,\ y > 0$

   б) $\frac{dy}{dx} = -y,\ y > 0$

10. а) $\frac{dy}{dx} = y + 1,\ y > -1$

    б) $\frac{dy}{dx} = 1 - y,\ y < 1$

11. а) $\frac{dy}{dx} = x^2 y^2$

    б) $\frac{dy}{dx} = x^3 y^3,\ y > 0$

12. а) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},\ x, y > 0$

    б) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},\ x, y > 0$

13. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = y^2$.

14. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^2}.$$

15. Розв'яжіть диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-y}.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x\frac{dy}{dx} = y.$$

Подайте відповідь у вигляді $y = f(x)$.

17. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 2x.$$

18. Нехай

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\cos^2 x}.$$

а) Знайдіть загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

б) Також відомо, що $y = 4$ при $x = 0$. Знайдіть вираз для yчерез x.

19. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2}{4y},$$

для якого $y = 3$ при $x = 0$. Відповідь можна залишити у вигляді $f(y) = g(x)$.

20. Для диференціального рівняння

$$y^2\frac{dy}{dx} = 3x$$

знайдіть розв'язок за умови $y = 3$ при $x = 2$.

21. а) Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+2)(y-1).$$

б) Нехай $y = 2$ при $x = 0$. Покажіть, що

$$y = 1 + e^{x^2+4x}.$$

22. Нехай

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cos^2 y.$$

Використовуючи метод відокремлення змінних, покажіть, що

$$\sin x - \tan y = c$$

для деякої сталої c.

23. Маса m (у грамах) радіоактивної речовини зменшується зі швидкістю, пропорційною до її поточної маси. Спочатку маса речовини дорівнює 25 г, а швидкість розпаду становить 5 г/с.

а) Знайдіть сталу k таку, що

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

б) Знайдіть вираз для маси речовини через t секунд.
в) За який час маса зменшиться до половини свого початкового значення?

24. Чисельність популяції бактерій, N (у тисячах), зростає зі швидкістю, пропорційною до її розміру. Початковий розмір популяції дорівнює 2000, а початкова швидкість зростання становить 500 бактерій за хвилину.

а) Знайдіть сталу k таку, що

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

б) Знайдіть розмір популяції через 10 хвилин, подаючи відповідь з округленням до найближчої тисячі.

25. Повітряну кульку надувають зі швидкістю, обернено пропорційною до її поточного об'єму. Спочатку об'єм кульки дорівнює 300 см^3 і зростає зі швидкістю 10 $\frac{\text{см}^3}{\text{с}}$.

а) Покажіть, що

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3000}{V}.$$

б) Знайдіть об'єм кульки через t секунд.

26. Тіло масою 1 кг падає вертикально крізь повітря. З урахуванням опору повітря прискорення тіла задається рівнянням

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 0.1v,$$

де v це швидкість у м /с.

а) Вважаючи, що тіло починає рух із стану спокою, знайдіть вираз для швидкості v у момент часу t секунд.

б) Знайдіть шлях, пройдений тілом за перші три секунди.

27. Змінні x і yзадовольняють диференціальне рівняння

$$y\frac{dy}{dx} = 4e^{-2x}.$$

Коли $x = 0$, $y = -2$. Знайдіть вираз для y через x.

28. Знайдіть загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}.$$

29. Нехай

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{x-2y},$$

і $y = 0$ при $x = 0$. Виразіть y через x.

30. Змінні x і y задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y}.$$

Коли $x = 0$, $y = 10$. Знайдіть вираз для y через x.

31. а) Використовуючи відокремлення змінних, покажіть, що загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y}$$

можна подати у вигляді

$$\sin x + \cos y = c.$$

б) Частинний розв’язок цього диференціального рівняння задовольняє умови $0 \le x \le \pi$ та $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, і має $y = \frac{\pi}{3}$ при $x = \frac{\pi}{6}$. Знайдіть два можливі значення y при $x = \frac{\pi}{2}$.

32. Краплю дощу моделюють як ідеальну сферу. Її об’єм зменшується зі швидкістю, пропорційною до площі поверхні. Коли об’єм дорівнює 0.5 см^3, він зменшується зі швидкістю 0.1 см^3 за хвилину.

а) Знайдіть вираз для $\frac{dr}{dt}$, де r вимірюється в сантиметрах, а t у хвилинах.

б) Звідси визначте, скільки часу потрібно, щоб крапля повністю випарувалась.

Контрольні запитання до РОЗДІЛУ 1

1. Що таке диференціальне рівняння? Які величини воно пов'язує, і який фізичний зміст має похідна dy/dx у прикладних задачах?
2. Поясніть, як з текстового опису процесу скласти диференціальне рівняння. Які кроки треба виконати (вибір змінних, одиниці, знак, пропорційність)?
3. У прикладі 1.1 з відром води чому в рівнянні $dV/dt = -k\sqrt{V}$ стоїть мінус? У яких ситуаціях знак "мінус" буде обов'язковим, а в яких ні?
4. Що означає, що швидкість зміни величини пропорційна деякій функції? Як правильно інтерпретувати сталу пропорційності k (її роль і розмірність)?
5. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння? Чому він містить сталу інтегрування c?
6. Як з загального розв'язку отримати частинний розв'язок? Яку інформацію дає початкова умова (наприклад, значення yпри $x = x_0$)?
7. Чим відрізняються рівняння вигляду $dy/dx = f(x)$ від рівнянь, у яких права частина залежить і від x, і від y? Чому в другому випадку не можна просто "інтегрувати за x" без додаткових перетворень?
8. Сформулюйте умову застосовності методу відокремлення змінних. Яким має бути вигляд правої частини dy/dx, щоб метод працював?
9. Якщо $dy/dx = f(x)\, g(y)$, то як виглядає рівність інтегралів після відокремлення змінних?

10. Чому корисно “думати про dy/dx як про дріб”, і чому це формально не зовсім коректно? Як більш точно записати перетворення з точки зору інтегрування?
11. Розв’яжіть (схемою, без повних обчислень) рівняння $dy/dx = xy$ методом відокремлення змінних: які кроки робимо від початкового рівняння до інтегрування?
12. У розв’язку $\ln \mid y \mid = \frac{x^2}{2} + c$ за якої умови можна прибрати модуль? Чому в прикладі припускають $y > 0$?
13. Поясніть перехід від $y = e^{x^2/2+c}$ до $y = Ae^{x^2/2}$. Чому доданок $+c$ у показнику зручно замінювати на сталий множник A?
14. Назвіть типову помилку при розв’язуванні рівнянь із відокремленням змінних, пов’язану зі сталою інтегрування. Чому запис “$y = \cdots + c$” часто є неправильним?
15. У яких практичних задачах (крім наведених у розділі) ви очікуєте появу рівнянь, що розв’язуються відокремленням змінних? Наведіть 2–3 приклади процесів (охолодження, радіоактивний розпад, зростання популяції тощо) і поясніть, що там є “змінною” та “швидкістю зміни”.

РОЗДІЛ 2. ПОЛЯ НАПРЯМІВ І МЕТОД ЕЙЛЕРА

Для багатьох диференціальних рівнянь неможливо знайти точний вираз y через x. Проте це не означає, що рівняння не має розв'язків: їх можна досліджувати графічно.

➢ **Поля напрямів**

Нехай задано диференціальне рівняння

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y).}$$

Тоді в будь-якій точці $(a; b)$ можна знайти нахил (кутовий коефіцієнт) дотичної до розв'язку, просто підставивши $x = a$ і $y = b$ у праву частину рівняння. Хоча для цього можна обирати будь-які координати, найзручніше використовувати точки з цілими значеннями координат.

Ключова ідея 2.1.

Графік відрізків дотичних (напрямних відрізків) у точках $(x; y)$ називають *полем напрямів* диференціального рівняння.

За полем напрямів можна побудувати наближені криві розв'язків, що відповідають різним початковим умовам. Для цього достатньо дотримуватися двох правил: криві розв'язків

1. у кожній точці йдуть у напрямі, заданому дотичною;
2. не перетинаються.

❖ **Розв'язаний приклад 2.1**

Дано диференціальне рівняння

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = x - y^2 + 2.}$$

а) Побудуйте таблицю значень нахилу (тобто значень $\frac{dy}{dx}$) поля напрямів у точках з цілими координатами, де

$$\boldsymbol{-2 \le x \le 2, \qquad -2 \le y \le 2.}$$

б) Накресліть поле напрямів для цього диференціального рівняння.

в) Використовуючи побудоване поле напрямів, накресліть криві розв'язків (інтегральні криві), що проходять через точки $(-2;\ 2)$, $(2;\ 1)$ ***і*** $(0;\ -2)$.

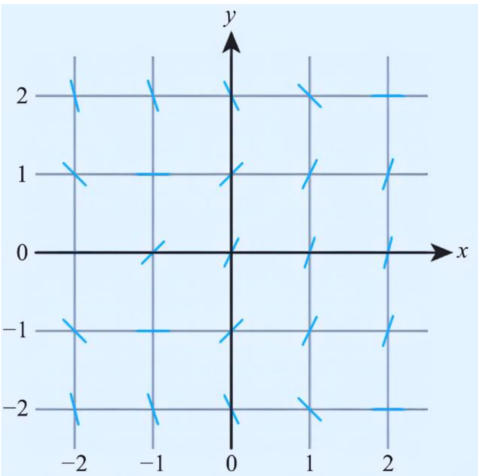
Вказівка. Для кожної точки підставте відповідні значення xта yу диференціальне рівняння, щоб обчислити $\frac{dy}{dx}$. Покажіть обчислення щонайменше для однієї точки.

Наприклад, у точці (2;2):

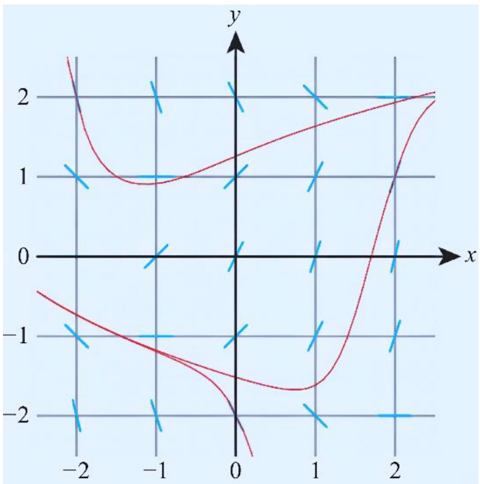
$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2^2 + 2 = -4.$$

Таблиця значень $\frac{dy}{dx}$:

$y\backslash x$	**−2**	**−1**	**0**	**1**	**2**
−2	−4	−3	−2	−1	0
−1	−1	0	1	2	3
0	0	1	2	3	4
1	−1	0	1	2	2
2	−4	−3	−2	−1	0



Можна графічно зобразити нахил у кожній точці, провівши в цій точці дотичну з відповідним кутовим коефіцієнтом.



Далі, починаючи з трьох заданих точок, рухайтеся вздовж поля напрямів і накресліть криві розв'язків, стежачи за тим, щоб ці криві не перетиналися.

➢ **Метод Ейлера**

Ми можемо обчислювати наближені значення y для послідовності значень x, рухаючись уздовж поля напрямів.
Для цього має бути задане диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

а також початкова пара значень (x_0, y_0). Підставивши ці значення в рівняння, знаходимо нахил (градієнт) у цій точці, тобто $f(x_0, y_0)$. Далі беремо фіксований крок h, переходимо до наступного значення x, але зміну yвизначаємо за нахилом у точці, з якої виходимо.

Оскільки зміна yдорівнює зміні x, помноженій на нахил, маємо:

$$y_1 - y_0 \approx h\, f(x_0, y_0).$$

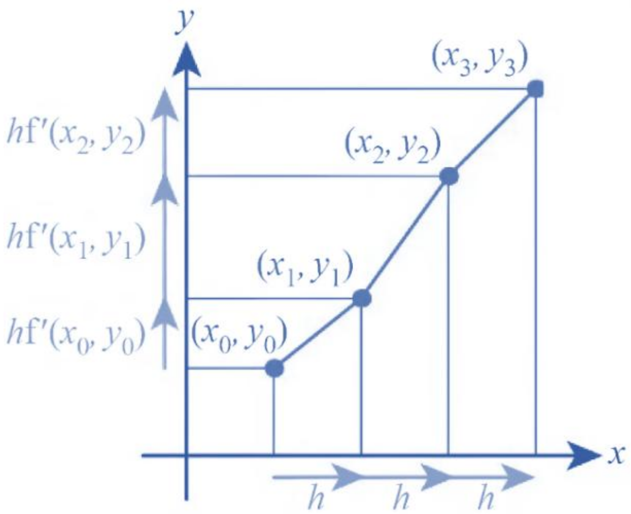
Потім цей процес можна повторювати, отримуючи загальну ітераційну формулу.

Ключова ідея 2.2.

Метод Ейлера $$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h \times f'(x_n, y_n)$$

Цей процес можна наочно подати графічно:



❖ **Розв'язаний приклад 2.2**

Застосуйте метод Ейлера з кроком $\boldsymbol{h = 0.2}$, щоб оцінити значення $\boldsymbol{y(1)}$, якщо

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = x + 2y, \qquad y(0) = 2.}$$

Запишемо ітераційну формулу методу Ейлера (для $h = 0.2$):

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + 2y_n), \qquad x_{n+1} = x_n + 0.2.$$

Виконаємо кілька ітерацій (можна скористатися графічним калькулятором), фіксуючи результат на кожному кроці:

n	x_n	y_n
0	0.0	2
1	0.2	2.8
2	0.4	3.96
3	0.6	5.624
4	0.8	7.9936
5	1.0	11.35104

З таблиці зчитуємо значення y при $x = 1$: $y(1) \approx 11.4$.

Порада.

Переконайтеся, що ви вмієте користуватися на калькуляторі режимом *послідовностей* (ітерацій) для реалізації цього методу. Якщо для досягнення потрібного значення необхідно виконати багато ітерацій, достатньо записати лише кілька перших і кілька останніх кроків ітераційного процесу.

Леонард Ейлер (1707–1783) народився у Швейцарії та був одним із найплідніших і найуніверсальніших математиків в історії. Його наукові здобутки охоплювали широкий спектр галузей: від небесної механіки до кораблебудування й музики. Саме Ейлер увів у сучасну математику усталені значення та вживання символів $f(x)$, e, π і Σ, а також зробив

фундаментальний внесок у розвиток теорії комплексних чисел. Він продовжував працювати й писати навіть після того, як утратив зір. Значну частину обчислень Ейлер виконував подумки, а своїм синам диктував результати, щоб вони занотовували їх.

- **Ти дослідник.**

Існує чимало способів удосконалити метод Ейлера. Наприклад, якщо похідна є лише функцією від x, то можна використовувати значення похідної в серединній точці інтервалу $\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$. Існують також подальші розширення, відомі як методи Рунге-Кутти, які застосовують у більшості сучасних комп’ютерних програм для розв’язування диференціальних рівнянь, що описують реальні процеси. Імовірно, саме ці методи інженери використовують, щоб досліджувати вплив вітру на мости, які ви переходите, аніматори, щоб створювати реалістичне волосся в комп’ютерній графіці, і розробники ігор, щоб персонажі коректно бігали, плавали та стрибали. Це може бути цікавою темою для дослідницької роботи, але пам’ятайте: використання математики має бути достатньо глибоким і строгим.

- **Зв’язок із Теорією пізнання**

Що краще: *ідеальний* розв’язок рівнянь, які лише приблизно (доволі грубо) моделюють реальну ситуацію, чи *наближені* розв’язки рівнянь, що точно описують реальну ситуацію? Як вирішити, коли модель, метод або розв’язок є «достатньо добрим»?

- **Розв’язування задач**

За яких умов метод Ейлера занижує істинне значення? За яких умов він завищує істинне значення? Що можна сказати про будь-які наближені значення, отримані методом Ейлера під час розв'язування диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x^3?$$

➢ **Зв'язані системи**

Існує багато ситуацій, у яких дві змінні пов'язані системою зв'язаних диференціальних рівнянь: швидкість зміни кожної змінної залежить як від часу, так і від значення іншої змінної. Наприклад, зростання двох видів, що конкурують між собою, можна змоделювати такою системою.

Зв'язану систему диференціальних рівнянь можна записати у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t).$$

Метод Ейлера можна узагальнити для знаходження того, як змінюються значення x та y, коли t збільшується на фіксований крок h.

Ключова ідея 2.3.

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$x_{n+1} = x_n + h \times f_1(x_n, y_n, t_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \times f_2(x_n, y_n, t_n)$$

❖ **Розв'язаний приклад 2.3**

Змінні x і y пов'язані системою зв'язаних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{t}} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{sin\,t}, \qquad \frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{t}} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{cos\ t}.$$

За умови $t = 0$, $x = 3$ і $y = 4$. Застосуйте метод Ейлера з кроком $0,1$, щоб знайти значення x та y при $t = 0,5$.

Запишіть ітераційні формули методу Ейлера:

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}1\,(x_n + y_n)\sin t_n,$$

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}1\,(x_n + y_n)\cos\ t_n.$$

Можемо використати графічний калькулятор, виконати ітерації та занести результати в таблицю.

Отримуємо:

t_n	x_n	y_n
0	3,00	4,00
0,1	3,00	4,70
0,2	3,08	5,47
0,3	3,25	6,30
0,4	3,53	7,22
0,5	3,95	8,21

Отже, $x(0{,}5) \approx 3{,}95$ і $y(0{,}5) \approx 8{,}21$.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

Для завдань 1–4 застосуйте метод Ейлера, як показано в *Розв'язаному прикладі 2.2*, з кроком 0,2, щоб наближено знайти $y(1)$, якщо $y(0) = 1$, для кожного з рівнянь.

1. а) $\frac{dy}{dx} = y$ б) $\frac{dy}{dx} = x$

2. а) $\frac{dy}{dx} = x + y$ б) $\frac{dy}{dx} = x - y$

3. а) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ б) $\frac{dy}{dx} = xy$

4. а) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ б) $\frac{dy}{dx} = y\,e^x$

Для завдань 5–7 застосуйте метод Ейлера, як показано в *Розв'язаному прикладі 2.2*, з кроком 0,1, щоб наближено знайти значення x та y при $t = 0{,}5$ для кожної з наведених систем диференціальних рівнянь.

5. а) $\frac{dx}{dt} = 2y - t,\ \frac{dy}{dt} = -3x + t$, за умов $x(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0{,}2$

б) $\frac{dx}{dt} = -4y + t,\ \frac{dy}{dt} = 5x - t$, за умов $x(0) = -1$, $y(0) = 2$

6. а) $\frac{dx}{dt} = 2xy,\ \frac{dy}{dt} = -3xy^2$, за умов $x(0) = 0{,}5$, $y(0) = -0{,}5$

б) $\frac{dx}{dt} = x + y^2,\ \frac{dy}{dt} = y - 3x^2$, за умов $x(0) = -1$, $y(0) = 1$

7. а) $\frac{dx}{dt} = \sin y \cos t\,,\ \frac{dy}{dt} = -\mathrm{cos}x\mathrm{sin}t$, за умов $x(0) = y(0) = 1$

б) $\frac{dx}{dt} = y + 2e^{-2t},\ \frac{dy}{dt} = 3x - e^{-2t}$, за умов $x(0) = y(0) = 0$

8. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

з початковою умовою $y = 0$ при $x = 0$.

а) Використайте метод Ейлера з кроком 0,1, щоб наближено обчислити:

i $y(1)$; ii $y(2)$

б) Використайте метод Ейлера з кроком 0,2, щоб наближено обчислити:

i) $y(1)$; ii) $y(2)$

в) Розв'яжіть диференціальне рівняння точно. Звідси визначте, яка з ваших наближених оцінок у пунктах (а) та (б) є найбільш віддаленою від істинного значення.

9. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x+y}$$

з початковою умовою $y = 1$ при $x = 0$.

а) Використайте метод Ейлера з кроком 0,5, щоб наближено знайти значення y при $x = 10$.

б) Як можна підвищити точність цієї оцінки?

10. Популяції кролів x і лисиць yна острові в момент часу t (у роках) моделюються пов'язаною системою рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = 0.005x(x - 3y - 20), \qquad \frac{dy}{dt} = 0.005y(3x - 5y - 300).$$

Спочатку на острові є 150 кролів і 40 лисиць.

Застосуйте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб знайти кількість кролів і лисиць через шість місяців.

11. Два водосховища з'єднані так, що вода може перетікати між ними.

Глибини води в цих водосховищах xм і yм описуються системою:

$$\frac{dx}{dt} = -0.2x\cos(\pi t), \qquad \frac{dy}{dt} = (-0.5y + 0.2x)\cos(\pi t),$$

де t – час у роках. Початково $x = 8.5$ і $y = 10.2$.

Застосуйте метод Ейлера з кроком 0.01, щоб знайти глибину води в кожному водосховищі через три місяці.

12. Висота частинки попелу h (у метрах), що падає вертикально у вогонь, моделюється рівнянням

$$\frac{dh}{dt} = -0.1h^2 - 0.5t,$$

де t вимірюється в секундах.

Спочатку попіл перебуває на висоті 2 м над вогнем. Використайте метод Ейлера, щоб:

а) оцінити висоту частинки попелу через 1 секунду;

б) оцінити час (до найближчої секунди), за який частинка досягне вогню.

13. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{xe^y},$$

за умови $\mathrm{y} = 0.3$ при $\mathrm{x} = 1$.

а) Застосуйте метод Ейлера з кроком $\mathrm{h} = 0.1$, щоб знайти наближене значення y при $\mathrm{x} = 1.3$.

б) Розв’яжіть диференціальне рівняння.

в) і) Знайдіть відсоткову похибку наближення з пункту а.

ii) Як можна зменшити цю похибку?

14. Функція $y = f(x)$ задовольняє диференціальне рівняння $f'(x) = x^2y$ за умови $f(0) = 0.5$.

а) і) Застосуйте метод Ейлера з кроком $h = 0.25$, щоб знайти наближене значення $f(1)$.

ii) Як зробити ваше наближення точнішим?

б) Розв’яжіть диференціальне рівняння та знайдіть фактичне значення $f(1)$.

15. У таблиці наведено швидкість автомобіля під час розгону, виміряну через кожні 3 секунди.

t , с	0	3	6	9	12	15
v , м/с	0	6	12	19	24	27

Використайте метод Ейлера, щоб оцінити відстань, пройдену автомобілем за перші 15 секунд.

16. У наведеній таблиці подано швидкість автомобіля під час уповільнення, виміряну через кожні 3 секунди.

t , с	0	3	6	9	12	15
v , м/с	20	15	10	8	6	5

Застосуйте метод Ейлера, щоб оцінити відстань, пройдену автомобілем за перші 15 секунд.

Контрольні запитання до РОЗДІЛУ 2

Поля напрямів

1. Чому для багатьох диференціальних рівнянь неможливо знайти точний розв’язок $y(x)$? Які альтернативні підходи дозволяють досліджувати розв’язки?
2. Для рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ як знайти нахил дотичної в точці $(a; b)$? Що означає підстановка $x = a$, $y = b$ у праву частину?
3. Сформулюйте означення поля напрямів. Яку інформацію дає поле напрямів про поведінку розв’язків?
4. Чому при побудові поля напрямів зручно брати точки з цілими координатами? У яких випадках має сенс брати густішу сітку?
5. Поясніть два правила побудови інтегральних кривих за полем напрямів:
   а) крива “йде за дотичними”;
   б) криві не перетинаються.
   Чим обґрунтовується заборона перетинів?
6. У прикладі $\frac{dy}{dx} = x - y^2 + 2$: як змінюється нахил при фіксованому x і різних y? Який вплив має член $-y^2$ на нахил?
7. Що таке інтегральна крива? Як початкові умови впливають на вибір конкретної інтегральної кривої в полі напрямів?

Метод Ейлера для одного рівняння

8. Поясніть ідею методу Ейлера: що означає “рухатися вздовж поля напрямів” кроками h?

9. Виведіть наближення $y_1 - y_0 \approx h\, f(x_0, y_0)$. Яке геометричне тлумачення має ця формула?
10. Запишіть ітераційні формули методу Ейлера для x_{n+1} і y_{n+1}. Яку роль відіграє крок h?
11. Як зміниться точність обчислень, якщо зменшувати крок h? Який "компроміс" виникає між точністю та кількістю кроків?
12. У прикладі $\frac{dy}{dx} = x + 2y$, $y(0) = 2$: що саме означає отримане наближення $y(1) \approx 11.4$? Чому це лише оцінка, а не точне значення?
13. Опишіть типові джерела похибки методу Ейлера. Чому похибка накопичується при багатьох ітераціях?
14. За яких умов метод Ейлера занижує істинне значення розв'язку, а за яких завищує? Поясніть це через опуклість/увігнутість траєкторії $y(x)$ на інтервалах.
15. Що можна сказати про значення, отримані методом Ейлера для рівняння $\frac{dy}{dx} = x^3$? (Підказка: похідна залежить лише від x).

Удосконалення методу і роль чисельних методів

16. Яка ідея "покращення" методу Ейлера через використання похідної в серединній точці $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$? Чому це може підвищити точність?
17. Що таке методи Рунге–Кутти в загальних рисах? Чому саме вони часто використовуються в комп'ютерних програмах?
18. Як би ви сформулювали критерії "достатньо доброго" наближеного розв'язку: з точки зору моделі, методу і практичного застосування?

Зв'язані системи та узагальнення методу Ейлера

19. Що називають системою зв'язаних диференціальних рівнянь? Наведіть приклад ситуації, де зміна однієї змінної залежить від іншої.
20. Запишіть загальний вигляд системи:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t).$$

Яку роль відіграє незалежна змінна t у таких моделях?

21. Сформулюйте ітераційні формули методу Ейлера для систем для t_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}.

22. У прикладі 2.3 чому на кожному кроці потрібно підставляти поточні значення x_n, y_n, t_n у f_1 та f_2?

23. Які додаткові труднощі з'являються при чисельному розв'язуванні систем порівняно з одним рівнянням (похибка, стійкість, вибір кроку)?

24. Як інтерпретувати отримані методом Ейлера значення $x(t)$ та $y(t)$ для системи? Які перевірки "здорового глузду" можна зробити для оцінки правдоподібності результатів?

РОЗДІЛ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Прискорення матеріальної точки зі зміщенням x задається величиною $\frac{d^2x}{dt^2}$. Багато фізичних ситуацій найзручніше описувати саме через прискорення.

Зв'язок математики із фізикою. Одна з причин, чому так багато фізичних ситуацій доцільно описувати через прискорення, полягає в тому, що другий закон Ньютона пов'язує силу та прискорення.

Диференціальне рівняння другого порядку це рівняння, у якому входить $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Наприклад,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 12.$$

Щоб розв'язувати такі диференціальні рівняння, можна використати факт, що

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

і звести рівняння до системи зв'язаних диференціальних рівнянь першого порядку.

Ключова ідея 3.1.

Щоб дослідити розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right),$$

запишіть його у вигляді системи зв'язаних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x, y, t). \end{cases}$$

❖ **Розв'язаний приклад 3.1**

а) Запишіть

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

як систему зв'язаних диференціальних рівнянь першого порядку.

б) Звідси визначте, чи є розв'язок диференціального рівняння стійким (тобто чи прямує x до нуля зі зростанням t).

а) Використаємо $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(y)$ і $y = \frac{dx}{dt}$, тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - 2x.$$

Отже,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 2x. \end{cases}$$

Розглянемо систему як

$$\frac{dx}{dt} = 0x + 1y, \frac{dy}{dt} = -2x + 2y.$$

б) Система описується матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Власні значення системи знаходимо з характеристичного рівняння:

$$-\lambda(2 - \lambda) + 2 = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

З графічного калькулятора одержуємо розв'язки:

$$\lambda = 1 \pm i.$$

Оскільки власні значення комплексні з додатною дійсною частиною, розв'язки є нестійкими.

Той факт, що власні значення є комплексними, означає, що розв'язки диференціального рівняння другого порядку здійснюють коливання. Оскільки розв'язки є нестійкими, амплітуда коливань з часом зростає.

❖ **Розв'язаний приклад 3.2**

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - x = 0$$

і за умов $t = 0$, $x = 1$та $\frac{dx}{dt} = 2$. Оцініть $x(2)$ методом Ейлера з кроком 0,1.

Запишіть як систему зв'язаних лінійних рівнянь, поклавши $y = \frac{dx}{dt}$.

Якщо $y = \frac{dx}{dt}$, тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + x = 2y + x.$$

Записуючи це у стандартній формі для диференціальних рівнянь, дістаємо

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

Далі можна скористатися методами з *Ключової ідеї 3.4*, щоб отримати рекурентні формули методу Ейлера:

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}1\,(y_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + 0{,}1\,(x_n + 2y_n).$$

З калькулятора:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1,2	2,5

Потрібна відповідь:

$$x_{20} = 64{,}571 \approx 64{,}6.$$

ІНСТРУМЕНТАРІЙ: Розв'язування задач

Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

Визначте умову, за якої розв'язок є стійким.

Можна почати з дослідження різних значень параметрів b і c.

Коли сформулюєте гіпотезу, спробуйте її довести.

Зв'язок математики із фізикою

Модель руху вантажу на пружині (який здійснює коливання) стверджує, що прискорення пропорційне видовженню x. До якого диференціального рівняння це приводить? Який його розв'язок?

Така поведінка називається простим гармонічним рухом (ПГР) і є фундаментальною для багатьох розділів фізики. Можна простежити, як закони Ньютона та Гука призводять до цього рівняння для вантажу на пружині. Цю модель також застосовують до маятника, але вона є правильною лише для коливань малої амплітуди.

Спробуйте знайти точне рівняння коливань маятника та за допомогою чисельних методів оцінити, яку похибку дає моделювання маятника за допомогою інженерного калькулятора.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 3

Для завдань **1-5** використайте метод, показаний у *Розв'язаному прикладі 3.1*, щоб визначити, чи є розв'язки поданих диференціальних рівнянь *стійкими* чи *нестійкими*.

1. а) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} - 9\frac{dx}{dt} + 20x = 0$

2. а) $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0$

3. а) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 8x = 0$

4. а) $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 13x = 0$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$

5. а) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} - 16x = 0$

Для завдань 6-8 використайте метод, показаний у Розв'язаному прикладі 3.2, щоб оцінити значення $x(2)$методом Ейлера з кроком 0,1.

6. а) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0,\ x(0) = 2,\ x'(0) = -1$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$

7. а) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0,\ x(0) = 2,\ x'(0) = -1$

8. а) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0,\ x(0) = 5,\ x'(0) = 0$

б) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 5$

9. а) Покажіть, що диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

можна записати у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = y + 2x.$$

б) Якщо початкові умови такі: $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 2$, оцініть значення $x(10)$ за методом Ейлера з кроком

і) 0.5

іі) 1

в) Чи є ваша відповідь у пункті б (і) або б (іі) точнішою оцінкою істинного значення? Обґрунтуйте відповідь.

10. а) Покажіть, що диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 1 - t$$

можна записати у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = y - x + 1 - t.$$

б) При $t = 0$: $x = 0$і $\dot{x} = 2$. За допомогою методу Ейлера з кроком 0.2 оцініть значення x при $t = 4$.

11. Зміщення x (у мм) дзвона через t мілісекунд після удару моделюється рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 9x = e^{-t},$$

за початкових умов $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

а) Покажіть, що це диференціальне рівняння можна записати у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -4y - 9x + e^{-t}.$$

б) За допомогою методу Ейлера з кроком 0.1 оцініть $x(1)$.

в) Використайте спеціальний калькулятор чи комп'ютер для побудови графіка результатів методу Ейлера на проміжку $0 < t < 2$.

г) Звідси оцініть максимальне зміщення; відповідь подайте з двома значущими цифрами.

12. Фінансовий аналітик прогнозує, що ціну акцій компанії (фінансового інструмента) можна змоделювати рівнянням

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 1.5\frac{dp}{dt} + 5p = 10 - e^{-t},$$

де p ціна в гривнях, а t час у роках.

Початкова ціна дорівнює 1 гривня, і очікується, що спочатку вона зменшуватиметься зі швидкістю 2 гривні на рік. Використовуючи метод Ейлера з кроком 0.1, визначте (до 1 десяткового знака) згідно з моделлю:

а) коли аналітику слід купити акції;

б) як довго аналітику слід утримувати акції;

в) який прибуток отримає аналітик з однієї акції;

г) довгострокову (граничну) ціну акцій;

д) враховуючи спостережувану поведінку, запропонуйте, чому модель навряд чи буде точною.

13. Гітарна струна здійснює коливання зі зміщенням x мм у момент часу t мілісекунд.

а) Рух моделюється диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

за початкових умов $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 1$ при $t = 0$.

і) Використайте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб побудувати ескіз поведінки на проміжку $0 < t < 7$.

іі) Звідси оцініть амплітуду та період коливань, подайте відповідь з точністю до двох значущих цифр.

б) Далі рух збуджується двома різними камертонами. Спочатку струна нерухома, тобто $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$.

і) Коли до струни прикладають перший камертон, рух моделюється рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -\sin\ t.$$

Використайте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб оцінити максимальне зміщення протягом перших 7 мілісекунд.

іі) Коли до струни прикладають другий камертон, рух моделюється рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -\sin\ 4t.$$

Використайте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб оцінити максимальне зміщення протягом перших 7 мілісекунд.

Примітка: Задача 13 ілюструє дуже важливе поняття резонансу, яке має велике значення в музиці, оптиці та інженерії. Один із показових прикладів того, що може статися, якщо резонанс не враховувати, це руйнування мосту Такома-Нерроуз.

14. Диференціальне рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 0.7\frac{dy}{dt} + 0.12y = 0$$

задовольняє початкові умови $y = 1, \dot{y} = 0.2$ при $t = 0$.

а) Оцініть значення $y(3)$, використовуючи метод Ейлера з кроком:

i) 0.5

ii) 0.1

б) Подавши рівняння у вигляді системи зв'язаних диференціальних рівнянь, знайдіть точний розв'язок цього диференціального рівняння.

в) Звідси знайдіть відсоткову похибку кожної з оцінок, отриманих у пункті (а).

15. Диференціальне рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 = 1 - \sin\, t$$

має початкові умови $y = 0$ та $\frac{dy}{dt} = 1$ при $t = 0$.

а) Використайте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб оцінити y, коли:

i) $t = 1$

ii) $t = 2$

б) Покажіть, що $y = \sin t$ задовольняє диференціальне рівняння та початкові умови.

в) Звідси знайдіть відсоткові похибки для кожної з відповідей у пункті (а).

Контрольні запитання до РОЗДІЛУ 3

1. Що називають диференціальним рівнянням другого порядку? Яка похідна в ньому обов'язково присутня?

2. Чому в багатьох фізичних задачах зручно починати моделювання саме з прискорення d^2x/dt^2? Як це пов'язано з другим законом Ньютона?

3. Наведіть приклад рівняння другого порядку (за зразком із розділу) і поясніть, які фізичні величини можуть відповідати членам x, dx/dt, d^2x/dt^2.

4. Поясніть ідею зведення рівняння другого порядку до системи рівнянь першого порядку. Яке перетворення використовується для d^2x/dt^2?

5. Сформулюйте Ключову ідею 3.1: якщо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right),$$

то як записати еквівалентну систему для змінних x та y, де $y = dx/dt$?

6. Для рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

поясніть, як отримати систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = 2y - 2x.$$

Який крок є ключовим?

7. Що означає стійкість розв'язку в контексті цього розділу (формулювання через поведінку $x(t)$ при $t \to \infty$)?

8. Як для лінійної системи першого порядку

$$\dot{z} = Az$$

пов'язана стійкість із власними значеннями матриці A? (Укажіть роль дійсної частини власних значень).

9. У прикладі 3.1 отримано власні значення $\lambda = 1 \pm i$. Чому це означає:

а) наявність коливань;

б) нестійкість;

в) зростання амплітуди з часом?

10. Запишіть характеристичне рівняння для матриці Aрозміру 2×2. Які етапи знаходження власних значень ви використовуєте на практиці (аналітично або за допомогою калькулятора)?

11. Для задачі чисельного розв'язування рівняння другого порядку чому необхідно мати дві початкові умови (наприклад, $x(0)$і $x'(0)$)?

12. У прикладі 3.2 поясніть, як з рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - x = 0$$

отримують рівняння для $y' = dy/dt$ у вигляді $y' = x + 2y$.

13. Запишіть рекурентні формули методу Ейлера для системи

$$x' = y, \;\; y' = x + 2y$$

з кроком $h = 0{,}1$. Чому формула для x_{n+1}містить лише y_n, а для y_{n+1} містить x_n і y_n?

14. Як вибір кроку h впливає на точність і стабільність чисельного розв'язку для рівнянь другого порядку? Чому для нестійких систем похибка може "розганятися" швидше?

15. Розгляньте рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

Які параметри b і c ви очікуєте побачити у фізичних моделях (наприклад, тертя/демпфування та жорсткість)? Який якісний вплив кожного параметра на рух?

16. Сформулюйте гіпотезу: за яких умов на b і cрозв'язок буде стійким? Яку ознаку стійкості через власні значення системи ви могли б використати для доведення?

17. Модель "вантаж на пружині": чому прискорення пропорційне $-x$? До якого диференціального рівняння це приводить у найпростішому випадку без тертя?

18. Що таке простий гармонічний рух (ПГР) з точки зору диференціального рівняння і з точки зору траєкторії $x(t)$? Які основні характеристики коливань можна зчитати з розв'язку (період, амплітуда, частота)?

19. Чому модель маятника як ПГР є коректною лише для малих амплітуд? Який тип нелінійності з'являється в "точнішому" рівнянні маятника?

20. Які практичні кроки ви б виконали, щоб оцінити похибку "інженерної" моделі маятника (ПГР) порівняно з точнішою моделлю, використовуючи чисельні методи?

КОНТРОЛЬНИЙ СПИСОК ДО РОЗДІЛІВ 1- 3

- Ви маєте вміти складати диференціальне рівняння за описом ситуації (контекстом).
- Ви маєте вміти розв'язувати диференціальне рівняння методом розділення змінних. Диференціальні рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

  можна розв'язувати так:

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

- Ви маєте вміти користуватися та інтерпретувати поля напрямів (поля нахилів).
- Ви маєте вміти застосовувати метод Ейлера для знаходження наближених розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y):$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h \times f'(x_n, y_n)$$

- Ви маєте вміти застосовувати метод Ейлера для знаходження наближених розв'язків систем зв'язаних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t), \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t):$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$x_{n+1} = x_n + h \times f_1(x_n, y_n, t_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \times f_2(x_n, y_n, t_n)$$

- Ви маєте вміти розв'язувати зв'язані системи вигляду

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Якщо матриця M має дійсні та різні власні значення λ_1 і λ_2 з відповідними власними векторами p_1 і p_2, то загальний розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^{\lambda_1 t}\mathrm{p}_1 + Be^{\lambda_2 t}\mathrm{p}_2.$$

- Ви маєте вміти будувати та використовувати фазові портрети для систем диференціальних рівнянь, знаходячи власні значення матриці M використовуючи технології (комп'ютерні засоби).

- Ви маєте вміти розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right),$$

подаючи їх як систему зв'язаних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x, y, t). \end{cases}$$

ЗМІШАНА ПРАКТИКА ДО РОЗДІЛІВ 1-3

1. а) Використайте метод відокремлення змінних, щоб знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 3y\cos 2x, \qquad y > 0.$$

б) Знайдіть частинний розв'язок, якщо $y = 5$ при $x = 0$.

2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3x^2 y$$

методом відокремлення змінних.

3. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = e^x$$

з початковою умовою $y(0) = 2$.

Застосуйте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб наближено обчислити $y(2)$.

4. а) Побудуйте поле напрямів для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

використовуючи точки з $x \in \{0,1,2,3,4\}$ та $y \in \{0,1,2,3,4\}$.

б) Додайте до ескізу криву розв'язку, що проходить через точку (2; 2).

в) Для цієї кривої розв'язку застосуйте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб наближено знайти значення y при $x = 2.5$.

5. Змінні x та y задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$$

і відомо, що при $x = 1$ маємо $y = 5$.

а) Застосуйте метод Ейлера з кроком 0.05, щоб наближено знайти y при $x = 2$. Відповідь подайте з точністю до 3 десяткових знаків.

б) Використайте відокремлення змінних, щоб знайти точний розв'язок рівняння.

в) Знайдіть відсоткову похибку методу Ейлера.

6. а) Використайте метод відокремлення змінних, щоб знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}.$$

б) Накресліть (побудуйте ескіз) кривої розв'язку, що задовольняє умову $y = 4$ при $x = 0$.

7. а) Побудуйте поле напрямів для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

для $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

б) Додайте до ескізу криву розв'язку, що проходить через точку (0; 0).

8. Швидкість збільшення об'єму повітряної кульки пропорційна квадратному кореню з її поточного об'єму. Коли об'єм дорівнює 225 см^3, він зростає зі швидкістю 90 см$^3/$с.

а) Покажіть, що

$$\frac{dV}{dt} = 6\sqrt{V}.$$

б) Використайте відокремлення змінних, щоб знайти загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

в) Якщо $V = 225$ см^3 при $t = 0$, знайдіть, скільки часу потрібно, щоб об'єм збільшився до 2500 см^3.

9. Розгляньте систему зв'язаних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y, \frac{dy}{dt} = 4x + 3y.$$

а) Покажіть, що власні значення матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

дорівнюють 1 і 5.

б) Відповідні власні вектори: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Запишіть загальний розв'язок системи.

10. Змінні x та y задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = 3x - 2y, \qquad \dot{y} = -x + 5y.$$

При $t = 0$: $x = 0$, $y = 2$. Застосуйте метод Ейлера з кроком 0,1, щоб наближено знайти значення x і y при $t = 0{,}6$.

11. На поданому полі напрямів крива проходить через точку $(-1;\ 1)$. Оцініть:

а) максимальне значення yна цій кривій (подайте відповідь з точністю до двох значущих цифр);

б) значення y, коли $x \to \infty$.

12. Поданий фазовий портрет відповідає системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = (x - 1)(1 - y), \qquad \frac{dy}{dt} = x - y.$$

Показана крива розв'язку починається в точці $(1.5;\ -1)$. Оцініть (до одного десяткового знака):

а) максимальне значення xна кривій розв'язку;

б) максимальне значення yна кривій розв'язку;

в) довготривалу поведінку кривої розв'язку (за великих t).

13. Для кривої розв'язку, що починається в початку координат: а) оцініть максимальне значення y (до одного десяткового знака); б) оцініть граничне (довготривале) значення x.

14. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \text{де } y = 1 \text{ при } x = 0.$$

а) За допомогою методу Ейлера з кроком 0.1 знайдіть наближене значення y при $x = 0.4$.

б) Запишіть (із поясненням), чи є ваше наближене значення yбільшим чи меншим за точне значення y.

15. Швидкість зміни маси (R) радіоактивної речовини пропорційна кількості речовини, що залишилася. Це можна записати як диференціальне рівняння

$$\frac{dR}{dt} = -kR.$$

а) Розв'яжіть це диференціальне рівняння, якщо початкова маса речовини дорівнює R_0.

б) Знайдіть час, за який маса речовини зменшиться вдвічі порівняно з початковою.

в) Що означає той факт, що ваша відповідь у пункті (б) не залежить від R_0?

16. а) За допомогою методу Ейлера з кроком 0.25 побудуйте ескіз розв'язку на проміжку $0 < x < 10$для рівняння

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{y} = \sqrt{x},$$

де $y = 1$ при $x = 0$.

б) На основі цього оцініть (з точністю до однієї десяткової) мінімальне значення yна цій кривій.

17. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = e^{\,y-x},$$

з початковою умовою $y(0) = -1$.

а) За допомогою методу Ейлера з кроком 0.1 оцініть значення $y(2)$.

б) Розв'яжіть рівняння точно та знайдіть похибку вашої оцінки з пункту а.

в) Як можна зменшити похибку у вашому наближенні?

18. Швидкість зростання популяції комах залежить від її поточного розміру, а також змінюється залежно від пори року. Це можна змоделювати диференціальним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = 0.2\,N\left(1 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right),$$

де N (у тисячах) є чисельністю популяції, а t є часом у місяцях від початку спостережень. Початкова чисельність популяції дорівнює 2000. Розв'яжіть диференціальне рівняння та знайдіть чисельність популяції в момент часу t.

19. Дві змінні задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x^2}.$$

Коли $x = 1$, $y = 2$.

а) Використайте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб знайти наближене значення yпри $x = 1.3$. Подайте відповідь до двох знаків після коми.

б) Розв'яжіть це диференціальне рівняння.

в) Знайдіть відсоткову похибку вашого наближення з пункту (а).

г) Як можна підвищити точність наближеного розв'язку?

20. Побудовано економічну модель для прогнозування роздрібної ціни товару (₴R)та витрат на виготовлення (₴C).

Модель має вигляд

$$\frac{dR}{dt} = 0.02R + 0.01C, \frac{dC}{dt} = 0.03R + 0.02C,$$

де t є часом у роках.

а) Прибуток (₴P)задано формулою $P = R - C$. Покажіть, що прибуток є спадною функцією.

Спочатку роздрібна ціна товару дорівнює ₴1, а витрати на виготовлення становлять ₴0.6.

б) Використайте метод Ейлера з кроком 0.5 року, щоб:

i) оцінити роздрібну ціну через 10 років;

ii) побудувати ескіз графіка прибутку як функції часу для $0 \le t \le 25$;

iii) визначити, протягом якого часу (округливши до найближчого року) товар матиме додатний прибуток.

21. а) Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

де k є сталою.

Це диференціальне рівняння використовують для моделювання радіоактивного розпаду, де m є кількістю радіоактивної речовини (у міліграмах), а t є часом у роках.

б) Відомо, що період напіврозпаду радіоактивної речовини дорівнює 7 років. Знайдіть значення k.

в) Знайдіть (округливши до найближчого року) час, потрібний для того, щоб кількість речовини зменшилася до однієї десятої від початкового значення.

22. а) Використайте метод розділення змінних, щоб знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(y+2).$$

б) Відомо, що $y = 5$ при $x = 1$. Знайдіть значення yпри $x = 3$.

23. Використайте метод розділення змінних, щоб знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{-y}\cos\ 2x.$$

24. Розгляньте систему зв'язаних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y, \frac{dy}{dt} = x - y.$$

Коли $t = 0$, $x = 1$ і $y = 2$.

Застосуйте метод Ейлера з кроком за t, що дорівнює 0.1, щоб оцінити значення x і y при $t = 1$.

25. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = e^{-t}.$$

а) Покажіть, що його можна записати у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = f(x,t),$$

де f є функцією, яку потрібно знайти.

Коли $t = 0$, $x = 5$ і $\frac{dx}{dt} = -1$.

б) Використайте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб оцінити значення x при $t = 0.8$.

26. Важіль утворює кут θ з вертикаллю. Його повільно повертають так, що швидкість зміни кута θ є пропорційною до $\cos\theta$.

Спочатку важіль утворює з вертикаллю кут $60°$, і кут змінюється зі швидкістю 0.1 радіана за секунду.

а) Покажіть, що

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.2\cos\ \theta.$$

б) Застосуйте метод Ейлера з кроком 0.1, щоб оцінити кут (у градусах), який важіль утворює з вертикаллю через 2 секунди.

27. Прискорення кульки, що падає у в'язкій рідині, є пропорційним до $(10-0.2v^2)$, де v є швидкістю. Кулька починає рух зі стану спокою при $t = 0$, а її початкове прискорення дорівнює 0.5 м/с^2.

а) Запишіть диференціальне рівняння, яке моделює цю ситуацію.

б) Використайте метод Ейлера з кроком 0.05, щоб оцінити швидкість кульки через 2 секунди.

30. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xe^{-x^2} = 0$$

за початкових умов $x = 0$, $y = 0$ та $\frac{dy}{dx} = 1$.

Застосуйте метод Ейлера з кроком 0,1, щоб наближено знайти y при $x = 1$.

31. Розгляньте диференціальне рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + y$$

за початкових умов $x = 0$, $y = 1$ та $\frac{dy}{dx} = 2$. Розгляньте застосування методу Ейлера до диференціального рівняння другого порядку з кроком 0,1.

а) Покажіть, що при $x = 0{,}1$ цей метод дає наближення $y = 1{,}2$ та $\frac{dy}{dx} = 2{,}1$.

б) Використайте метод Ейлера з кроком 0,1, щоб спрогнозувати значення $y(1)$.

32. а) Доведіть, що

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}.$$

Модель для частки людей, які знають чутку (p), описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dp}{dt}=2p(1-p),$$

де t вимірюється в тижнях.

б) Побудуйте поле напрямів для області $0\le p\le 1$ та $0\le t\le 2{,}5$, використовуючи крок $0{,}1$ за p і $0{,}25$ за t. Додайте до ескізу криві розв'язків, що відповідають початковим умовам $p(0)=0{,}1$ та $p(0)=0{,}6$.

в) Нехай при $t=0$ маємо $p=0{,}1$.

і) Розв'яжіть диференціальне рівняння.

іі) Звідси оцініть час, за який половина людей знатиме чутку.

33. а) Запишіть диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x$$

у вигляді системи зв'язаних диференціальних рівнянь першого порядку.

б) і) Побудуйте фазову площину (фазовий портрет) для цієї системи диференціальних рівнянь.

іі) Вкажіть характер розв'язку.

в) Треба знайти $x(2)$, якщо $x(0)=0$ і $x'(0)=2$.

і) Поясніть, чому не можна використати фазовий портрет, щоб оцінити $x(2)$.

іі) Застосуйте метод Ейлера з кроком $0{,}2$, щоб наближено обчислити $x(2)$.

ііі) Поясніть, чому отримане наближення є заниженим порівняно з істинним значенням.

г) і) Знайшовши власні значення відповідної матриці, визначте точний розв'язок диференціального рівняння за умов $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

іі) Звідси оцініть відсоткову похибку наближення, отриманого в пункті c(ii).

iii) Як можна зменшити відсоткову похибку цього наближення?

34. Кількість рослин, Y (у тисячах), інфікованих грибковою інфекцією, моделюється мономолекулярною моделлю

$$\frac{dY}{dt} = 6 - 3Y.$$

а) і) Побудуйте поле напрямів для додатних Y і t, показуючи нахили для $0 \leq t, Y \leq 3$з кроком $0{,}25$.

іі) Додайте до поля напрямів криву розв'язку, що відповідає ситуації, коли спочатку жодна рослина не інфікована.

ііі) Скільки рослин буде інфіковано зрештою?

б) Розв'яжіть модель, вважаючи, що спочатку жодна рослина не інфікована.

в) Оновлена модель враховує, що спори гриба повільно відмирають. Нова модель має вигляд

$$\frac{dY}{dt} = e^{-2t}(6 - 3Y).$$

і) Не обчислюючи конкретних значень нахилів, побудуйте поле напрямів для нової моделі на області $0 \leq t, Y \leq 3$ з кроком $0{,}25$ та додайте криву розв'язку для випадку, коли спочатку жодна рослина не інфікована. іі) Розв'яжіть нову модель за умови, що спочатку жодна рослина не інфікована.

ііі) Відповідно до вашого розв'язку в пункті (іі), скільки рослин буде інфіковано зрештою?

Зв'язок із хімією: цю модель називають *мономолекулярною*, оскільки її також використовують для опису кількості реагенту, що залишається під час реакції, у якій одна молекула розпадається на дві молекули.

35. У простій моделі поширення хвороби людей поділяють на *сприйнятливих* (S мільйонів) та *інфікованих* (I мільйонів).

Швидкість інфікування становить 0,2 на одного сприйнятливого за тиждень.

Швидкість одужання становить 0,4 на одного інфікованого за тиждень. Після одужання людина знову стає сприйнятливою до цієї хвороби.

а) Запишіть систему зв'язаних диференціальних рівнянь для $\frac{dS}{dt}$ та $\frac{dI}{dt}$.

б) і) Покажіть, що загальна чисельність популяції $S + I$ залишається сталою відповідно до цієї моделі.

іі) Звідси, або іншим способом, знайдіть $\frac{dS}{dI}$.

в) Якщо $\frac{dS}{dt} = 0$, встановіть співвідношення між S та I.

Покажіть, що $\frac{dI}{dt} = 0$, якщо виконується те саме співвідношення.

г) На підставі отриманих результатів побудуйте фазовий портрет для I як функції S.

д) Спочатку $I = 1$ і $S = 14$.

і) Знайдіть вираз для S як функції часу t.

іі) Знайдіть довготривалу (граничну) кількість інфікованих осіб.

е) Запропонуйте один аргумент, чому ця модель є надто спрощеною.

ВІДПОВІДІ

Вправи до розділу 1

1. а) $\frac{db}{dt} = kb$; б) $\frac{da}{dt} = k\sqrt{a}$

2. а) $\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r^2}$; б) $\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h}$

3. а) $\frac{dF}{dt} = -k\sqrt{F}$; б) $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{v}$

4. а) $\frac{dI}{dt} = kI\,(N - I)$;

б) $\frac{dR}{dt} = \frac{kR\,(N-R)}{t}$

5. а) $y = \frac{x^3}{3} + c$; б) $y = 8\sqrt{x} + c$

6. а) $y = \frac{e^{2t}}{2} + c$;

б) $y = 3\ln\ t + c$

7. а) $s = -\frac{\cos\ 3x}{3} + c$

б) $s = 2\tan\ t + c$

8. а) $F = m - 3\ln\ m + c$

б) $F = \frac{1}{m} + 3m + c$

9. а) $y = Ae^{2x}$;

б) $y = Ae^{-y}$

10. а) $y = Ae^{x} - 1$

б) $y = Ae^{-x} + 1$

11. а) $y = -\frac{3}{c+x^3}$

б) $y = \sqrt{\frac{2}{c-x^4}}$

12. а) $y = Ax$

б) $y = \sqrt{x^2 + c}$

13. $y = -\frac{1}{x+c}$

14. $y = \sqrt[3]{3\sin\ x + c}$

15. $y = \ln(x^2+c)$

16. $y = Ax$

17. $y = -\frac{1}{x^2+c}$

18. а) $y = Ae^{\tan x}$

б) $y = 4e^{\tan x}$

19. $2y^2 = 3x^3 + 18$

20. $y = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\,(x^2 + 2)}$

21. а) $y = 1 + Ae^{x^2+4x}$

22. а) $k = \frac{1}{5}$

б) $m = 25e^{-t/5}$

в) 3,47 с

23. а) $\frac{1}{4}$

б) 24000

24. б) $V = \sqrt{6000t + 90000}$

25. а) $v = 100 - 100e^{-0,1t}$

б) 40,8 м

26. $y = -2\sqrt{2 - e^{-2x}}$

27. $y = -\ln\,(c - e^{x})$

28. $y = \frac{1}{2}\ln(4e^{x} - 3)$

29. $y = \sqrt{102 - 2\cos\ x}$

30. б) $\pm\frac{\pi}{2}$

31. а) $\frac{dr}{dt} = -0{,}0328$

б) 15 хв

Вправи до розділу 2

1. a) 2.49; б) 1.4

2. a) 2.98; б) 0.655

3. a) 1.36; б) 1.46

4. a) 4.56; б) 3.82

5. a) x = 0.224, y = −0.186

x) = −1.50, y = −3.16

6. a) x = 0.271, y = −0.697

б) x = −1.33, y = −0.458

7. a) x = 1.41, y = 0.969

б) x = 0.667, y = 0.133

8. a) i) 0.9; ii) 3.8

б) i) 0.8; ii) 3.6

в) $y = x^2$, (б) ii розташований найдалі.

9. a) 31.4

б) Використайте меншу довжину кроку.

10. 157 кроликів, 37 лисиць

11. $x(0.25) \approx 8.12$,

$y(0.25) = 9.46$

12. а) 1.46 м; б) 3 секунди

13. а) 0.825

б) $y = -\ln\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + e^{-0.3}\right)$

в) i) 11.0%; ii) Візьміть менше крок h.

14. а) i 0.615; ii) Використайте меншу довжину кроку.

б) $y = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{3}x^3}$; $f(1) = 0.698$

15. 183 м

16. 177 м

Вправи до розділу 3

1. а) Нестійкий б) Нестійкий

2. а) Стійкий б) Стійкий

3. а) Нестійкий б) Нестійкий

4. а) Стійкий б) Стійкий

5. а) Нестійкий б) Нестійкий

6. а) 9,42 б) 0,121

7. а) −1,56 б) −1,51

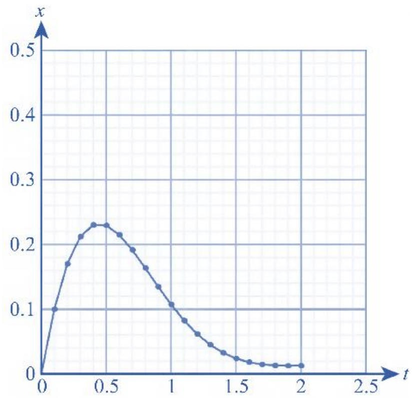
8. а) 0,346 б) 0,144

9. б) i) 699 000 ii) 39 400

в) Наближення з пункту б) i) є точнішим, оскільки для нього використано менший крок (меншу довжину кроку).

10. б) −3,46

11. б) 0,107

в) 

г) 0.23

12. а) 0,3 року

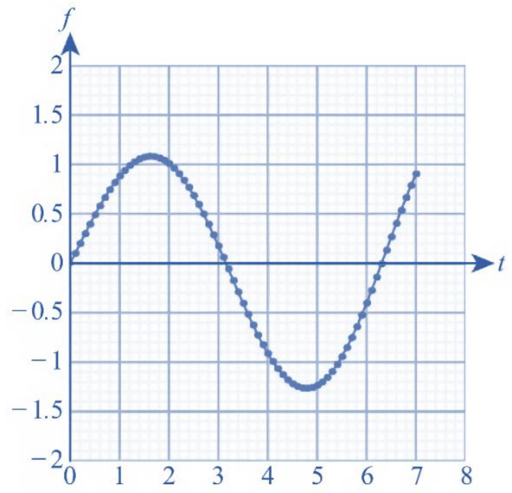
б) 1,5 року

в) 1,9 грн.

г) 2 грн.

д) Наприклад: модель не враховує випадкові коливання. У довгостроковій перспективі ціна виглядає надто стабільною.

13. а) і)



ii) 1.1 мм, 6.3 мс

б) і) 3.7 мм; іі) 0.4 мм

14. а) і) 1,64; іі) 1,61

б) $y = 2e^{0,3t} - e^{0,4t}$

в) і) 2,57%; іі) 0,753%

15. а) і) 0,875; іі) 0,964

в) і) 4,02%; іі) 6,12%

Змішана практика до розділів 1-3

1. а) $y = Ae^{\frac{3}{2}\sin 2x}$

б) $y = 5e^{\frac{3}{2}\sin 2x}$

2. $y = Ae^{x^3-2x}$

3. 2,45

4. в) 1,89

5. а) 5,058

б) $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2+247}{2}}$

в) 0,0256%

6. а) $y = (x^2 + c)^2$

8. б) $V = (3t + c)^2$

в) 11,7 с

9. б) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + Be^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

10. $x = -13{,}6,\ y = 25{,}4$

11. а) 1.3 б) 0

12. а) 2,3

б) 1,7

в) Прямує до $x = 1, y = 1$.

13. а) 0.7; б) 2

14. а) 1,57

б) Наближене значення є меншим за істинне: на кожному кроці нахил зростає, тоді як метод Ейлера використовує сталий нахил у межах кроку.

15. а) $R = R_0e^{-kt}$

б) $\frac{\ln 2}{k}$

в) Час, потрібний для зменшення маси з $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}$ і з $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{8}$ тощо, буде однаковим.

16. б) 0.6

17. а) -0.599

б) $-\ln(e^{-x} + e - 1)$; 0,0178

в) Зменшити крок інтегрування (взяти меншу довжину кроку)

18. $N = 2e^{0,2\left(t - \frac{12}{\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)\right)}$

19. а) 3,92; б) $y = 2e^{3-\frac{3}{x}}$; в) 1,90%

20. б) і) ₴1.31; ііі) 17 років

21. а) $m = Ae^{-kt}$; б) 0,099;

в) 23 роки

22. а) $y = Ae^{\frac{1}{2}(x-1)^2} - 2$; б) 49,7

23. $y = \ln(3\sin\ 2x + c)$

24. $(9{,}46;\ 3{,}71)$

25. а) $f(x,t) = e^{-t} - 4x$; б) $-0{,}427$

26. б) 69,7°

27. а) $\frac{dv}{dt} = 0{,}05\ (10 - 0{,}2v^2)$;

б) 0.994 м/с

28. б) $y = e^{\,2-2e^{-t}}$

в) $\ln\left(\frac{2}{2-\ln\ 2}\right) \approx 0{,}426$ року

г) 738 000

29. а) 2,7701; г) 2.814

30. 0.904

31. б) 3.96

32. в) і) $p = \frac{e^{2t}}{9+e^{2t}}$;

ii) $\ln\ 3 \approx 1{,}10$ тижня

33. а) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x$

б) іі) Сідлова точка.

в) і) Значення t явно не наведено.

ii) 6,08.

iii) Оскільки похідна додатна і зростає зі збільшенням x, то значення похідної на початку кроку (на початку інтервалу) є меншим за її середнє значення на цьому інтервалі. Тому наближення, отримане методом Ейлера, занижує істинне значення.

г) і) $x(t) = e^t - e^{-t}$.

ii) 16,1%.

iii) Зменшити крок інтегрування (крок h) або застосувати точніший чисельний метод, наприклад метод Рунге-Кутти.

34. а) ііі) 2000; б) $y = 2 - 2e^{-3t}$;

в) іі) $Y = 2 - 2e^{\,1.5\left(e^{-2t}-1\right)}$;

iii) 1550

35. а) $\frac{dS}{dt} = -0.2S + 0.4I,$

$\frac{dI}{dt} = 0.2S - 0.4I.$

б) іі) -1

в) $S = 2I$.

д) (і) $S = 10 + 4e^{-6t}$.

Підказка: це можна зробити, знайшовши власні значення та власні вектори матриці, або підставивши $I = 15 - S$ у перше диференціальне рівняння. Який спосіб простіший?

ii) 5 млн.

e) Наприклад: чисельність популяції вважається сталою; смертність не враховується; імунітет (імунна стійкість) не формується; збільшення кількості інфікованих не підвищує інтенсивність зараження.

Список використаних джерел

1. Вдовенко Т. І., Козак Л. В. Диференціальні рівняння: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 108 с.

2. Кагадій В. В., Сушко О. М., Щербина О. В., Онопрієнко Є. М., Шпорта Н. М. Диференціальні рівняння: теорія, приклади розв'язання, тестові завдання. Дніпро: Дніпровський державний аграрно-економічний університет, 2022. 174 с.

3. Дем'яненко О. В., Репета Л. В. Диференціальні рівняння та системи: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 172 с.

4. Коробова М. В. Диференціальні рівняння: практикум (для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз»). Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2024. 100 с.

5. Рего В. Г., Варга Н. В. Диференціальні рівняння. Частина 1: звичайні диференціальні рівняння першого порядку: навчальний посібник. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2021. 127 с. https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi76/0059273.pdf

6. Рего В. Г., Варга Н. В., Король І. М. Диференціальні рівняння. Частина 2: звичайні диференціальні рівняння вищих порядків: навчальний посібник. Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2022 https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/44854/1/Диференціальні%20рівняння.%20Частина%202.pdf

7. Блажевський С. Г., Ленюк О. М. Диференціальні рівняння та елементи математичної фізики: навчально-методичний посібник. Чернівці: ЧНУ, 2021. 248 с.

8. Edwards C. H., Penney D. E., Calvis D. Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling. 6th ed. Hoboken, NJ: Pearson, 2022.

9. Shtelen V. Differential Equations: An Introduction for Engineers. 2021. https://sites.math.rutgers.edu/~shtelen/Teaching/Spring-2022/EngODE_Book.pdf

10. Sundnes J. Solving Ordinary Differential Equations in Python. 2023. https://sundnes.github.io/solving_odes_in_python/ode_book.pdf
11. Kanschat G. Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Lecture Notes. 2021. https://katana.iwr.uni-heidelberg.de/pdfs/NumODE21_notes.pdf
12. Kaw A. K. Euler's Method for Solving Ordinary Differential Equations. Mathematics LibreTexts. 2023. https://math.libretexts.org/Workbench/Numerical_Methods_with_Applications_%28Kaw%29/8%3A_Ordinary_Differential_Equations/8.02%3A_Euler%E2%80%99s_Method_for_Solving_Ordinary_Differential_Equations

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної роботи студентів з навчальної дисципліни фізика «Диференціальні рівняння у фізичних задачах» для студентів спеціальностей E5 «Фізика та астрономія», E6 «Прикладна фізика та наноматеріали», E7 «Математика», F1 «Прикладна математика», G9 «Прикладна механіка», G11 «Машинобудування», G12 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка», G7 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Укладачі:
САВЧЕНКО Алла Олександрівна
ГАЛУЗА Олексій Анатолійович

Відповідальний за випуск проф. Любченко О.А.
Роботу до видання рекомендувала проф. Любченко О.А.

В авторській редакції

План 2026 р., поз. 173

Гарнітура Times New Roman

Видавець Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Електронне видання