**УДК 621.314**

**Вербицький Євген Володимирович**, канд. техн. наук, асистент кафедри промислової електроніки Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна, пр. Перемоги, 37, Київ, Україна, 03056, тел.: (044) 454-90-69. *E-mail:* verbitsky@bigmir.net *(orcid.org/0000-0001-7275-5152)*.

## ВИКОРИСТАННЯ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШЕВА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОЕФІЦІЄНТІВ РЯДУ ФУР'Є ДВОХ ЗМІННИХ

*Показано доцільність використання ряду Фур'є двох змінних для формування модульованого сигналу з оптимальними параметрами. Проаналізовано методику розрахунку інтегральних показників якості модульованої напруги. Запропоновано в формулах розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних замість функцій Бесселя використовувати поліноми Чебишева, що дозволяє розрахувати інтегральны показники у аналітичному виді з мінімальним обсягом математичних операцій.*

***Ключові слова**: ряд Фур'є двох змінних, модуляція, інтегральні показники якості, оптимізація.*

**Вербицкий Евгений Владимирович**, канд. техн. наук, ассистент кафедры промышленной электроники Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина, пр. Победы, 37, Киев, Украина, 03056, тел. (044) 454-90-69. *E-mail:* verbitsky@bigmir.net *(orcid.org/0000-0001-7275-5152)*.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Показана целесообразность использования ряда Фурье двух переменных для формирования модулированного сигнала с оптимальными параметрами. Проанализировано методику расчета интегральных показателей качества модулированного напряжения. Предложено в формулах расчета коэффициентов ряда Фурье двух переменных вместо функций Бесселя использовать полиномы Чебышева, что позволяет рассчитать интегральные показатели в аналитическом виде с минимальным количеством математических операций.*

***Ключевые слова**: ряд Фурье двух переменных, модуляция, интегральные показатели качества, оптимизация.*

**Verbitskyi Ievgen Volodymyrovych**, Ph. D., assistant of industrial electronics department
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic University», Kyiv, Ukraine, Peremohy 37 av., Kyiv, Ukraine, 03056, tel. (044) 454-90-69. *E-mail:* verbitsky@bigmir.net *(orcid.org/0000-0001-7275-5152)*.

## USE CHEBYSHEV POLYNOMIALS TO CALCULATE THE FOURIER SERIES TWO VARIABLES

*Feasibility of using two variables Fourier series to generate a modulated signal with the optimal settings are shown. Methodology of calculation of modulated voltage integral quality parameters are analyzed . In formulas for the calculation coefficients of the Fourier of two variables instead of Bessel functions use the Chebyshev polynomials are proposed, that allows get the formula for calculating integral parameters in analytical form with a minimum of mathematical operations.*

***Key words**: two variables Fourier series, modulation, integral quality parameters, optimisation.*

## Вступ

У перетворювальній техніці формування напруги необхідної форми переважно здійснюють імпульсними методами модуляції параметрів несучої функції. Залежно від модульованого параметру несучої функції розрізняють амплітудний, частотний, широтний методи модуляції [1]. Вказані методи мають досить просту апаратну реалізацію, що обумовило їх значне розповсюдження. Вказані методи модуляції вносять певні спотворення у спектр промодульованого сигналу, ефект від яких можливо зменшити за умови збільшення кратності періода модульованого сигналу відносно періода модуляції.

З розвитком обчислювальної техніки стало можливим реалізувати програмні алгоритми аналогових методів імпульсної модуляції, що дало можливість спростити апаратну структуру модуляторів. Однак безпосереднє копіювання методів модуляції, зменшує гнучкість і збільшує надлишковість процедури формування модульованого сигналу. Тому актуальною задачею є розробка алгоритмів, які дозволяють формувати модульований сигнал з оптимальними параметрами, що дозволить мінімізувати коефіцієнт гармонік сигналу, зменшити втрати енергії і покращити електромагнітну сумісність.

Критерієм якості вихідної напруги є коефіцієнт гармонік $K_Г$. Використання коефіцієнта гармонік як цільової функції передбачає визначення спектрального складу модульованого сигналу. Застосуванням ряду Фур'є однієї змінної до розрахунку спектру модульованого сигналу полягає у сумуванні спектру сигналу на кожному періоді несучої, що є достатньо трудомісткою операцією і обмежує верхню межу частоти модуляції сигналу [2].

Ряд Фур'є двох змінних дозволяє виразити спектр модульованого сигналу у згорнутій формі, незалежно від кратності модуляції $P$, що значно зменшує обсяг математичних розрахунків [3]. Однак під час розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних $C_{mn}$, де $m$ – кратність спектральної складової відносно частоти $\omega$ несучої функції, $n$ – кратність спектральної складової відносно частоти $\Omega$ модулюючої функції, використовують функції Беселя $J_i(z)$ [4], які в свою чергу виражаються через суму нескінченного ряду:

$$J_i(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big( (-1)^m / m! \, \Gamma(m+i+1) \Big) \Big( z/2 \Big)^{2m+i}, \tag{1}$$

де $\Gamma(m+i+1)$ – гамма-функція.

Використання функцій Беселя призводить до громіздких розрахунків при визначенні інтегральних показників якості напруги. Тому актуальною є задача розробки алгоритмів розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних з мінімальним обсягом математичних обчислень.

За умови використання ряду Фур'є двох змінних, зміна $x$ пропорційна кутовій частоті $\omega$ несучої, $x = \omega \cdot t$, змінна $y$ – кутовій частоті $\Omega$ модулюючої функції, $y = \Omega \cdot t$. Коефіцієнти ряду Фур'є $C_{mn}$, які є спектральними складовими сигналу з кратністю $m$ відносно частоти несучої функції і кратністю $n$ відносно частоти модулюючої функції розраховують незалежно від кратності модуляції $P$. Після розрахунку спектральних складових $C_{mn}$, $k$ гармоніку модульованого сигналу виражають через суму комбінацій складових з умови:

$$k = mP + n, \tag{2}$$

де $m$ може змінюватись у діапазоні $m$ Є (0..∞), $n$ знаходиться у діапазоні $n$ Є (-∞..∞).

Формула для визначення k гармоніки модульованого сигналу є такою:

$$C_k = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m(k-mP)}. \tag{3}$$

За значенням гармонік сигналу розраховують інтегральні показники модульованого сигналу. Наприклад діюче значення модульованого сигналу $C_Д$ розраховують за формулою:

$$C_Д = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2}. \tag{4}$$

З процедури розрахунку діючого значення модульованого сигналу можна зробити висновок, що обчислення інтегральних показників бажано виконувати в аналітичному виді для уникнення багаторазового сумування, для чого призначена пропонована методика. Продемонструємо її на прикладі ШІМ другого роду з модуляцією заднього фронту. Формули для розрахунку спектральних складових $C_{mn}$ вказаного типу модуляції є такими:

$$C_{m(2n-1)} = \frac{2H}{m\pi^2} \int_0^{\pi/2} \big( cos(Emf(y)) - 1 \big) sin((2n-1)y)dy + j\frac{2H}{m\pi^2} \int_0^{\pi/2} sin(Emf(y)) sin((2n-1)y)dy,$$

$$C_{0(2n-1)} = \frac{2jHE}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} f(y) sin((2n-1)y)dy, \tag{5}$$

де $f(y)$ – модулююча функція;

$E$ – крутизна пилкоподібної напруги модулятора;

$H$ – амплітуда модульованого сигналу.

За умови використання синусоїдальної гармонічної функції $f(y) = Dsin(\Omega t)$ дійсну частину $A_{mn}$ і уявну $B_{mn}$ частини гармонічної складові $C_{mn}$ можливо виразити через функції Беселя першого роду $J_z(i)$:

$$A_{m(2n-1)} = \frac{2H}{m\pi^2} \big( J_0(mED) - 1 \big) \frac{1}{2n-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(mED) \left( \frac{1}{2n-1+2\nu} + \frac{1}{2n-1-2\nu} \right),$$

$$B_{m(2n-1)} = \frac{H}{m\pi} J_{2n-1}(mED), \; B_{01} = \frac{HD}{C}, \tag{6}$$

де $C$ – амплітуда пилкоподібної напруги.

Аналітичний вираз (6) розрахунку гармонічної складової $C_{mn}$ підтверджує значний обсяг математичних операцій, необхідний для її розрахунку. Для зменшення обсягу математичних розрахунків відокремимо дійсну складову до якої не входить модулююча функція $f(y)$ і розрахуємо її значення:

$$-\frac{2H}{m\pi^2}\int_0^{\pi/2} sin((2n-1)y)dy = -\frac{2H}{m(2n-1)\pi^2}. \tag{7}$$

В інші складові виразу підставимо аналітичний вираз модулюючої функції:

$$C_{m(2n-1)} = \frac{2H}{m\pi^2}\int_0^{\pi/2}\left(cos(mEDsin(y)) + jsin(mEDsin(y))\right)sin((2n-1)y)dy - \frac{2H}{m(2n-1)\pi^2} =$$

$$= \frac{2H}{m\pi^2}\int_0^{\pi/2} e^{jmEDsin(y)} sin((2n-1)y)dy - \frac{2H}{m(2n-1)\pi^2}. \tag{8}$$

У виразі (8) зробимо заміну $\beta = \pi/2 - y$:

$$C_{m(2n-1)} = \frac{2(-1)^{n-1}H}{m\pi^2}\int_0^{\pi/2} e^{jmEDcos(\beta)} cos((2n-1)\beta)d\beta - \frac{2H}{m(2n-1)\pi^2}. \tag{9}$$

Наступна заміна $z = cos(\beta)$ дасть можливість зобразити підінтегральний вираз за допомогою поліномів Чебишева першого роду $P_{2n-1}(z)$ порядку $2n$-1 [5]:

$$C_{m(2n-1)} = \frac{2(-1)^{n-1}H}{m\pi^2}\int_0^{1} e^{jmEDz}\frac{P_{2n-1}(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz - \frac{2H}{m(2n-1)\pi^2}. \tag{10}$$

Множник $(1 - z^2)^{-0.5}$ можливо розкласти у ряд, однак в околі особливої точки $z = 1$, яка входить у межі інтегрування, збіжність ряду буде повільною, тому доцільно підвищити ступінь множника і усунути цю точку. Усунення особливої точки можливе за умови інтегрування по частинам. Для цього з полінома Чебишева виділимо множник $z$:

$$P_{2n-1}(z) = z \cdot Q(z). \tag{11}$$

Введемо змінні $u$ та $v$:

$$u = e^{jmEDz}Q(z), du = \left(jmEDe^{jmEDz}Q(z) + e^{jmEDz}dQ(z)/dz\right)dz, dv = z(1-z^2)^{-0.5}dz, v = -(1-z^2)^{0.5}, \tag{12}$$

з урахуванням яких отримаємо:

$$\int_0^1 e^{jmEDz}\frac{P_{2n-1}(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz = -\sqrt{1-z^2}e^{jmEDz}Q(z)\Big|_0^1 + \int_0^1\sqrt{1-z^2}\left(jmEDe^{jmEDz}Q(z) + e^{jmEDz}\frac{dQ(z)}{dz}\right)dz. \tag{13}$$

Множник $(1 - z^2)^{0.5}$ можливо розкласти у ряд за поліномами Чебишева:

$$\left(1-z^2\right)^{0.5} = 2/\pi - (4/\pi)\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(z)/4n^2 - 1. \tag{14}$$

Ряд (14) має швидку збіжність. За умови врахування перших трьох членів похибка розрахунків не перевищить 5 %.

Загалом задача інтегрування виразу (13) зводиться до знаходження інтегралів типу:

$$\int e^z z^b dz, \tag{15}$$

що з обчислювальної точки зору є тривіальною задачею і потребує мінімуму математичних обчислень. При цьому розрахунок спектральних складових $C_{m(2n-1)}$ здійснюється у загальному виді відносно параметрів $m$, $E$, $D$, параметр $n$ необхідно задавати чисельно, оскільки від його значення залежить загальний вид полінома Чебишева.

Зменшення обсягу математичних розрахунків при визначенні амплітуд гармонік за формулою (3) можливе за умови перетворення підінтегрального виразу формули (8).

$$C_{2k-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2H}{m\pi^2}\int_0^{\pi/2} e^{jmEDsin(y)} sin((2k-1-mP)y)dy - \frac{2H}{m(2k-1-mP)\pi^2}\right). \tag{16}$$

У виразі (16) зробимо заміну $\beta = \pi/2 - y$:

$$C_{2k-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2H}{m\pi^2}\int_0^{\pi/2} e^{jmED\cos(y)}(-1)^{k-1}\cos((2k-1-mP)y)dy - \frac{2H}{m(2k-1-mP)\pi^2}\right). \quad (17)$$

Далі заміною $z = \cos(\beta)$ відбувається перехід до поліномів Чебишева:

$$C_{2k-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2H(-1)^{k-1}}{m\pi^2}\int_0^1 e^{jmEDz}\frac{P_{2k-1-mP}(z)}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{2H}{m(2k-1-mP)\pi^2}\right). \quad (18)$$

Змінивши порядок інтегрування і сумування та розрахувавши,отримаємо:

$$C_{2k-1} = -\frac{2H(-1)^{k-1}}{\pi^2}\int_0^1 ln(1-e^{jEDz})\sum_{m=1}^{\infty} P_{2k-1-mP}(z)(1-z^2)^{-0.5} - L_{2k-1}, \quad (19)$$

де $L_{2k-1} = 2H\sum_{m=1}^{\infty} 1/(m(2k-1-mP)\pi^2)$.

Для усунення особливої точки множника $(1 - z^2)^{-0.5}$, проінтегруємо вираз (19) по частинам аналогічно виразам (12)-(14):

$$u = ln(1-e^{jEDz})Q(z), du = \left(\frac{jEDe^{jEDz}}{1-e^{jEDz}}Q(z) + ln(1-e^{jEDz})\frac{dQ(z)}{dz}\right)dz, dv = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz, v = -\sqrt{1-z^2}, \quad (20)$$

з урахуванням чого отримаємо:

$$\int_0^1 ln(1-e^{jEDz})\frac{\sum_{m=1}^{\infty} P_{2k-1-mP}(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz = -\sqrt{1-z^2}\,ln(1-e^{jEDz})Q(z)\Big|_0^1 +$$
$$+\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\left(\frac{jEDe^{jEDz}}{1-e^{jEDz}}Q(z) + ln(1-e^{jEDz})\frac{dQ(z)}{dz}\right)dz. \quad (21)$$

Формули (13) і (21) можливо використовувати для розрахунку спектральних складових $C_{mn}$ і окремих гармонік сигналу $C_k$ на основі поліномів Чебишева, що дає змогу отримати аналітичні формули розрахунку інтегральних показників напруги відносно параметрів модуляції. Використання аналітичних формул дозволяє у реальному масштабі часу перерараховувати та оптимізувати показники якості вихідної напруги за умови зміни параметрів модуляції.

**Список використаної літератури**


1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
2. Solving the Optimal PWM Problem for Single-Phase Inverters. D. Czarkowski, D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, I. Selesnick. IEEE Transactions on circuits and systems – I: fundamentaly theory and applications, Vol. 49, № 4, 2002. – P. 465–475.
3. D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo. Pulse width modulation for power converters. Theory and practice. - IEEE Press Series on Power Engineering, 2003. – 724 p.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. – 831 с.
5. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005 – 480 с.


**References**


1. Baskakov S. I. (2000). Radiotechnical circuits and signals [Radiotechnicheskiye tsepi i signaly]. M.: Vyshaya shkola, 2000. – 462 p.
2. Solving the Optimal PWM Problem for Single-Phase Inverters (2002). D. Czarkowski, D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, I. Selesnick. IEEE Transactions on circuits and systems – I: fundamentaly theory and applications, Vol. 49, № 4. – P. 465–475.
3. D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo. (2003). Pulse width modulation for power converters. Theory and practice. - IEEE Press Series on Power Engineering. - 724 p.
4. Abramovits M., Stigan I. (1979). Handbook of mathematical functions. With formulas, graphs and mathematical tables [Spravochnik matematicheskih funktsiy. S formulamy, grafikamy i matematicheskimy tablitsamy]. M.: Nauka. – 831 p.
5. Suetin P.K. (2005) Classical orthogonal polynomials [Klassicheskie ortogonalnie polinomy]. M.: Fizmatgiz.– 480 p.


Поступила в редакцию 20.07 2014 г.