

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою

«ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форм навчання

Харків
НТУ «ХПІ»
2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою

«ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 30.10.2020 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2021

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Числові та функціональні ряди» з курсу «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей заочної та скороченої форм навчання / уклад. Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська, Г. В. Руднєва. – Харків : НТУ «ХПІ». – 36 с.

Укладачі: Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська, Г. В. Руднєва

Рецензент доц. С. М. Решетнікова

Кафедра прикладної математики

ВСТУП

Тема “Числові та функціональні ряди” вивчається в курсі вищої математики на технічних факультетах. У роботі викладено у мінімально необхідному обсязі базові теоретичні відомості: поняття числового ряду, його суми та збіжності; необхідні та достатні умови збіжності числових додатних рядів; знакопереміжні ряди; поняття абсолютної та умовної збіжності знакозмінних рядів; функціональний ряд та його збіжність; поняття радіуса та області збіжності степеневого ряду; розвинення функцій в ряди Тейлора і Маклорена. Наведені варіанти індивідуальних завдань. Розібрані зразки виконання індивідуальних завдань.

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

Числовим рядом (або просто **рядом**) називають вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots. \quad (1)$$

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – називають членами ряду. u_n – загальним членом ряду.

Ряд вважають заданим, якщо відомий загальний член ряду, виражений як функція свого номера n : $u_n = f(n)$.

Сума перших n членів ряду називається **частковою сумою** ряду та позначається S_n . Тобто $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Розглянемо часткові суми

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Якщо існує кінцева границя $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ послідовності часткових сум ряду (1), то ця границя називається **сумою ряду** (1), а сам ряд називається **збіжним**.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує або $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд (1) називають **розбіжним**.

Залишком R_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається сума

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \dots \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Найпростіші властивості числових рядів

1) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і його сума дорівнює A , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ також збігається і його сума дорівнює $c \cdot A$, де c – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ також розбігається.

2) Два збіжних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, з сумами A та B відповідно, можна почленно додавати та віднімати. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

3) Сума (різниця) збіжного та розбіжного рядів є розбіжним рядом.

4) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігаються, то їх сума може збігатися, а може розбігатися.

5) Збіжність ряду не зміниться, якщо з нього викреслити перші n доданків. Тобто, ряд та його залишок збігаються або розбігаються одночасно.

1.1. Необхідна ознака збіжності числового ряду

Знаходження n -ї часткової суми S_n та її границі для довільного ряду в багатьох випадках є складною задачею. Тому для з'ясування збіжності ряду встановлюють *ознаки збіжності*. Першою з них є необхідна ознака.

Для збіжності числового ряду необхідно, щоб його загальний член прямував до нуля, коли n нескінченно зростає. Тобто, якщо ряд збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (**необхідна ознака збіжності** числового ряду).

Але не навпаки: коли $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то не можна зробити висновок, що ряд обов'язково збігається: він може, як збігатись, так і розбігатись. Тобто ця ознака є лише необхідною, але не є достатньою для збіжності.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається (**достатня ознака розбіжності** числового ряду).

Приклад 1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{5n-1}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{5n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5n} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 - n + 5}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 - n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n-1} \right)^n.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n-1} \right)^n = \|1^\infty\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+4}{n-1} - 1 \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+4-n+1}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{5} \cdot \frac{5}{n-1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{5n}{n-1}} = e^5 \neq 0. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

1.2. Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів

Як було зазначено вище, необхідна ознака не дає можливості зробити висновок, збігається даний ряд, чи ні. Збіжність та розбіжність ряду в багатьох випадках можна встановити за допомогою так званих *достатніх ознак*.

Розглянемо деякі з них для рядів з додатними членами (знакододатних рядів). Знаковід'ємний ряд переходить в знакододатний ряд шляхом множення його на (-1) , що не впливає на збіжність ряду. Тому надалі будемо розглядати ряди з додатними членами.

1.2.1. Ознаки порівняння

Перша ознака порівняння. Нехай дані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

причому для всіх $n > N$ $a_n \leq b_n$. Тоді:

а) зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Друга ознака порівняння (*гранична форма ознаки порівняння*).

Нехай дані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, й існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \Leftrightarrow a_n \sim A \cdot b_n$,

($A \neq 0, A \neq \infty$), тоді обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

При застосуванні ознак порівняння ряд, що досліджується на збіжність, порівнюється з *еталонним рядом*. За еталонні ряди зазвичай приймають:

✓ узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, що збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$,

✓ ряд геометричної прогресії: $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n - \begin{cases} \text{збігається, якщо } |q| < 1, \\ \text{розбігається, якщо } |q| \geq 1. \end{cases}$

Приклад 2. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0.$$

Оскільки

$$a_n = \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} = b_n,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним, то за першою ознакою порівняння заданий ряд також розбігається.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}.$$

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0.$$

Оскільки

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} = b_n,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, $p = \frac{3}{2} > 1$ є збіжним, то за першою ознакою порівняння заданий ряд також збігається.

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 + 5}.$$

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0.$$

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки

$$u_n = \frac{n}{4n^2 + 5} \sim \frac{n}{4n^2} \sim \frac{1}{4n} = v_n,$$

порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 (\neq 0, \neq \infty).$$

Отже, ці ряди поведуть себе однаково, тобто заданий ряд також розбігається.

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2}.$$

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0.$$

Оскільки

$$u_n = \frac{n}{n^3 + 2} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = v_n,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається ($p = 2 > 1$), то, за граничною ознакою порівняння, заданий ряд збігається.

1.2.2. Ознака Даламбера

Нехай для знакосталого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$) існує границя частки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,$$

тоді: при $L < 1$ ряд збігається; при $L > 1$ ряд розбігається; при $L = 1$ ознака Даламбера непридатна.

На практиці ознаку Даламбера доцільно застосовувати до рядів, члени яких містять факторіали, показникові функції.

Приклад 3. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 1}{4^n}$.

Розв'язання. У загальний член цього ряду входить показникова функція 4^n , тому доцільно застосувати достатню ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{3n + 1}{4^n}; \quad u_{n+1} = \frac{3(n + 1) + 1}{4^{n+1}} = \frac{3n + 4}{4^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 4)4^n}{4^{n+1}(3n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)4^n}{4 \cdot 4^n(3n)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 + 3}$.

Розв'язання. У загальний член цього ряду входить $n!$, тому доцільно застосувати достатню ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{n!}{n^2 + 3}; \quad u_{n+1} = \frac{(n + 1)!}{(n + 1)^2 + 3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)!(n^2 + 3)}{((n + 1)^2 + 3)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n + 1)n^2}{n^2 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = \infty > 1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

1.2.3. Радикальна ознака Коші

Нехай для знакосталого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$) існує границя:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L},$$

тоді: при $L < 1$ ряд збігається; при $L > 1$ ряд розбігається; при $L = 1$ ознака Коші непридатна.

Радикальну ознаку Коші зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі степено-показникові функції від n , з яких досить просто добувається корінь n -го степеня.

Приклад 4. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n-3}\right)^n$.

Розв'язання. Загальний член ряду є n -м степенем дробу $\frac{3n+1}{4n-3}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{4n-3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} < 1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n}{4n^2+1}$.

Розв'язання. Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin \frac{n}{4n^2+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{n}{4n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n}{4n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{4n} = \\ &= \sin 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Отже, заданий ряд збігається.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+3}{2n+2}\right)^{n-2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду є $(n-2)$ -м степенем виразу $\frac{5n+3}{2n+2}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+3}{2n+2}\right)^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+3}{2n+2}\right)^{\frac{n-2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n}{2n}\right)^{\frac{n}{n}} = \frac{5}{2} > 1.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

1.2.4. Інтегральна ознака Коші

Ця ознака заснована на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом. Якщо функція $f(x)$ неперервна, монотонно спадає і додатна при $x \geq a$, то

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

а) збігається, коли збігається невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

тобто якщо він дорівнює деякій скінченній величині;

б) розбігається, коли вказаний інтеграл розбігається, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty.$$

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена u_n ряду дискретну змінну n на неперервну змінну x , причому нижня межа інтегрування a дорівнює початковому значенню n для даного ряду.

Приклад 5. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x},$$

що є неперервною, монотонно спадає на інтервалі $[2; +\infty)$, приймає на цьому інтервалі додатні значення, причому $f(n) = u_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} f(x) dx &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \ln^{-3} x d(\ln x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{-2} x}{-2} \Big|_2^A = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^2 x} \Big|_2^A = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln^2 A} - \frac{1}{\ln^2 2} \right) = \frac{1}{\ln^2 2} \neq \infty. \end{aligned}$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому даний ряд теж збігається.

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}.$$

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$$

на інтервалі $[1; +\infty)$ дана функція задовольняє умовам цієї ознаки.

Дослідимо невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \Big|_1^A = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg}^2 A - \operatorname{arctg}^2 1) = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}^2 \infty - \operatorname{arctg}^2 1) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) = \frac{3\pi^2}{32} \neq \infty. \end{aligned}$$

Невластний інтеграл збігається, тому даний ряд теж збігається.

Наведемо схему дослідження знакосталого числового ряду на збіжність.

Схема дослідження збіжності знакосталого числового ряду:



1.3. Ознака Лейбніца

Раніше ми розглядали тільки ряди з додатними членами, але можна розглядати й інші ряди.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ називається **знакопереміжним**.

Якщо збігається ряд, складений із модулів членів даного ряду, тобто ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ називається **абсолютно збіжним**.

Якщо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, а сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ збігається,

тоді він називається **умовно збіжним**.

Сформулюємо ознаку Лейбніца (збіжності знакопереміжного числового ряду):

Якщо для знакопереміжного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0$$

виконуються дві умови:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- 2) $a_n > a_{n+1}$, для всіх $n = 1, 2, \dots$,

тоді цей ряд є збіжним.

Зауваження. Виконання ознаки Лейбніца гарантує не абсолютну, а лише умовну збіжність ряду.

Приклад 6. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n^2 + 1}$.

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + 1}$.

Використаємо ознаку порівняння.

Оскільки $\frac{1}{3n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^2}$, порівняємо зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $p = 2 > 1$.

$$u_n = \frac{1}{3n^2 + 1} < v_n = \frac{1}{n^2}.$$

Оскільки $u_n < v_n$, то ряд з модулів збігається.

Таким чином, даний знакопереміжний ряд збігається абсолютно.

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(n+1)(n+4)}$$

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)(n+4)}$.

Оскільки $\frac{2n}{(n+1)(n+4)} \sim \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$, порівняємо з розбіжним гармонічним

рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Використаємо граничну форму ознаки порівняння:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot n}{(n+1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2 (\neq 0, \neq \infty).$$

Таким чином, ряд з модулів розбігається.

Дослідимо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(n+1)(n+4)}$ на умовну

збіжність за ознакою Лейбниця.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0;$$

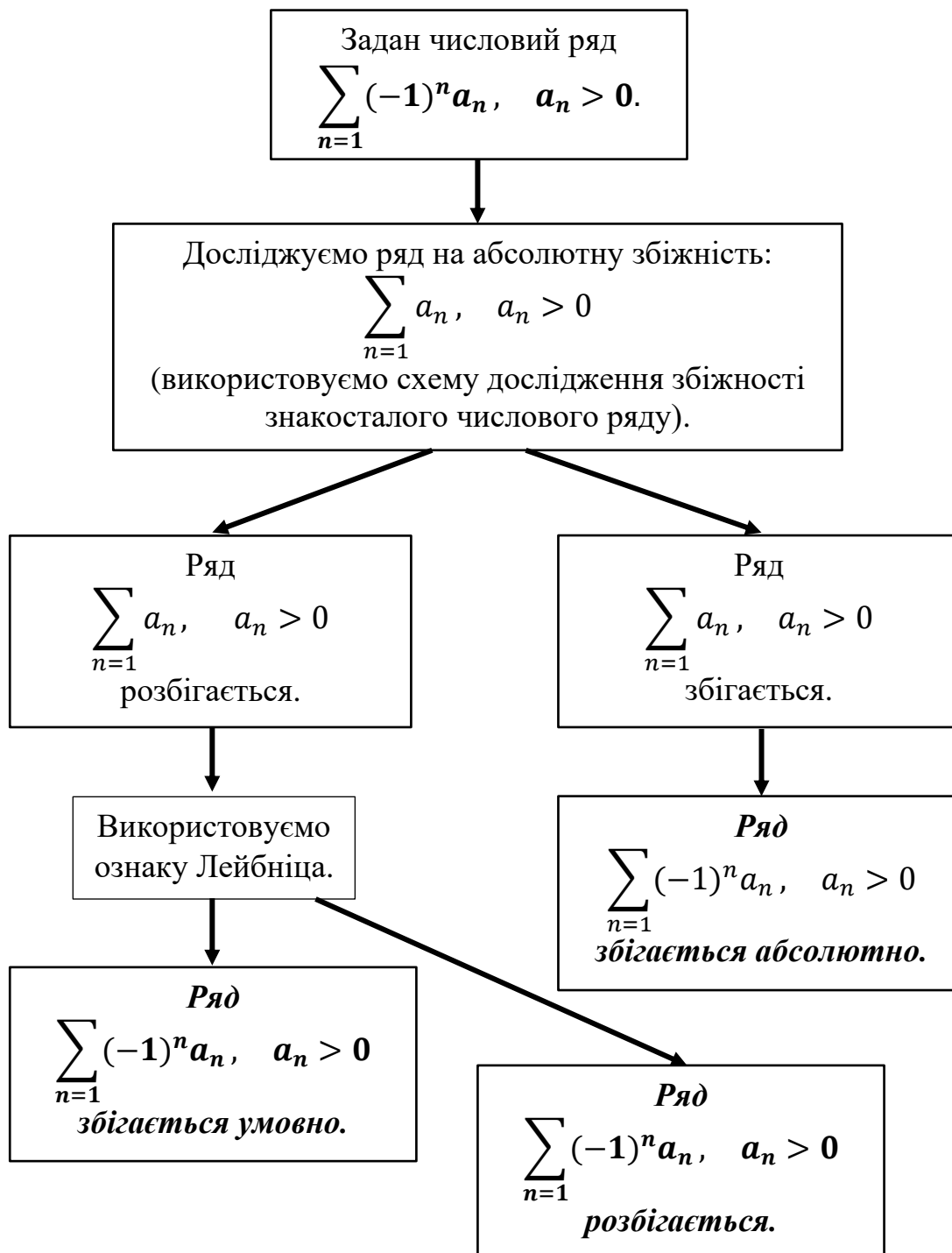
$$2) a_n = \frac{2n}{(n+1)(n+4)} > a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{((n+1)+1)((n+1)+4)} = \frac{2n+2}{(n+2)(n+5)},$$

для всіх $n = 1, 2, \dots$

Таким чином, даний ряд збігається, але, оскільки ряд з його абсолютних величин розбігається, то ця збіжність умовна.

Наведемо схему дослідження знакопереміжного числового ряду на абсолютну та умовну збіжність.

Схема дослідження збіжності знакопереміжного числового ряду:



2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Ряд, члени якого є функції від x , називається **функціональним**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

Для кожного значення $x = x_0$, маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots,$$

який може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо цей ряд збіжний, то точка x_0 називається **точкою збіжності ряду** (1).

Множина точок збіжності функціонального ряду (1) називається **областю збіжності** цього ряду.

Сума функціонального ряду є функцією $S = S(x)$ /

Для знаходження області збіжності ряду використовуються ознаки Даламбера або радикальна Коші:

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |L(x)|$, то при $|L(x)| < 1$ ряд збігається.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = |L(x)|$, то при $|L(x)| < 1$ ряд збігається

При значеннях $|L(x)| > 1$ границя загального члена ряду не дорівнює нулю, отже, при відповідних значеннях x , ряд буде розбіжним.

Випадок $|L(x)| = 1$ потребує додаткових досліджень.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n}$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(\cos x)^n}{n}; \quad u_{n+1} = \frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1};$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\cos x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|\cos x|^n} = |\cos x|.$$

Отже, заданий ряд збігається, якщо

$$|\cos x| < 1, \quad \text{або} \quad -1 < \cos x < 1.$$

Ця нерівність виконується при всіх значеннях x окрім тих, де

$$\cos x = 1 \quad \text{або} \quad \cos x = -1.$$

Нехай $\cos x = 1$. Маємо $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\cos x = -1$. Маємо $x = (2k + 1)\pi, k \in Z$.

Досліджуємо даний ряд цих точках.

При $x = 2\pi k, \cos x = 1$ маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

При $x = (2k + 1)\pi, k \in Z$ маємо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який збігається за ознакою Лейбниці, тобто умовно.

Отже, область збіжності даного ряду $x \neq 2\pi k, k \in Z$.

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}.$$

Розв'язання. Скористаємося радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln x)^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln x|}{\sqrt[n]{n}} = |\ln x| \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \right).$$

Отже, заданий ряд збігається, якщо $|\ln x| < 1$, або

$$-1 < \ln x < 1; \quad \frac{1}{e} < x < e.$$

Досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку.

При $x = e$ маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

При $x = \frac{1}{e}$ маємо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який є умовно збіжним.

Отже, областю збіжності даного ряду є множина $\left[\frac{1}{e}; e\right)$.

2.1. Рівномірна збіжність функціонального ряду

Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

називається **рівномірно збіжним** на деякому проміжку, якщо, яким би не було $\varepsilon > 0$ для всіх x з даного проміжку існує таке число N з множини натуральних чисел, що для кожного $n > N$ виконується нерівність

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

де $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ – залишок ряду.

Теорема (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду).

Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2)$$

збігається абсолютно і рівномірно на деякому проміжку, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3)$$

такий, що для всіх x з даного проміжку мають місце нерівності

$$|u_n(x)| < a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

В цьому випадку ряд (3) називається *мажорантним*, а ряд (2) – *мажорованим*.

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

1. Сумою рівномірно збіжного на відрізку $[a, b]$ функціонального ряду, члени якого неперервні на $[a, b]$, є функція, неперервна на цьому відрізку.

2. Якщо члени збіжного ряду (1) мають неперервні на $[a, b]$ похідні, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ збігається рівномірно на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку ряд (1) можна почленно диференціювати, тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad x \in [a, b].$$

3. Якщо члени ряду (1) неперервні на відрізку $[a, b]$ і цей ряд збігається рівномірно на $[a, b]$, то його можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

2.2. Степеневі ряди

Степеневим рядом називається функціональний ряд такого вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (4)$$

де x_0 – фіксована точка числової осі; a_n – сталі числа ($n=0, 1, 2, \dots$).

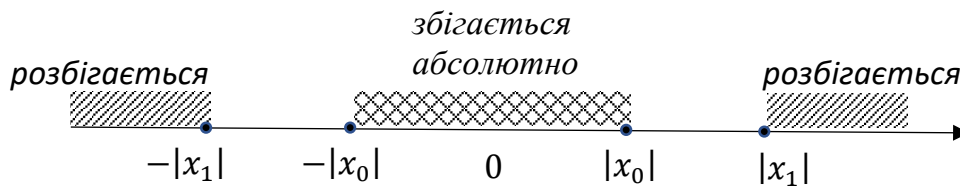
При $x_0 = 0$ ряд (4) набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots. \quad (5)$$

Область збіжності степеневому ряду на дійсній осі задається такою теоремою.

Теорема Абеля. Нехай степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається в точці $x_0 \neq 0$, тоді він збігається абсолютно в довільній точці x , що задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо ряд розбігається в деякій точці x_1 , то він розбігається і у всіх точках x , таких, що $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневому ряду. Дійсно, якщо x_0 – точка збіжності ряду (5), тоді він збігається абсолютно в інтервалі $(-|x_0|, |x_0|)$ з центром в точці 0. Якщо x_1 – точка розбіжності ряду (5), тоді ряд розбігається в області $(-\infty; -|x_1|) \cup (|x_1|; +\infty)$.



Отже, для області збіжності степеневому ряду (5) можливі лише три випадки:

- 1) ряд збігається лише в точці x_0
- 2) ряд збігається при всіх $(-\infty; +\infty)$;
- 3) існує таке скінченне число $R > 0$, що при $|x| < R$ степеневий ряд (5) абсолютно збігається, а при $|x| > R$ – розбігається.

Невід’ємне число R , таке, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається в інтервалі $(-R; R)$ й розбігається при $|x| > R$, називають **радіусом збіжності степеневому ряду**, а інтервал $(-R; R)$ – **інтервалом збіжності степеневому ряду**.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається лише в точці $x = 0$, тоді вважають $R = 0$.

Якщо ж ряд збігається на всій дійсній осі, то $R = +\infty$.

Зауваження. Питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = -R$ та $x = R$ розглядається для кожного ряду окремо. Таким

чином, областю збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ є інтервал $(-R; R)$, до

якого може додаватись одна або обидві кінцеві точки інтервалу.

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad R = \frac{1}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|}}.$$

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ визначається за тими самими формулами, що й для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ є симетричним відносно точки x_0 : $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Приклад 1. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання. Знаходимо радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = 1.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $(-1; 1)$. Досліджуємо поведінку ряду в точках $x = -1$ та $x = 1$.

При $x = 1$ маємо розбіжний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, ($p = \frac{1}{2} < 1$).

При $x = -1$ маємо умовно збіжний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Таким чином, областю збіжності ряду є інтервал $[-1; 1)$.

Приклад 2. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$$

Розв'язання. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

Це означає, що областю збіжності даного функціонального ряду є одна точка $x = 0$.

Приклад 3. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}.$$

Розв'язання. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$ Отже, ряд збігається в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Зауваження. Область збіжності степеневому ряду можна знаходити безпосередньо застосовуючи ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші для ряду, складеного з модулів членів заданого степеневому ряду.

Приклад 4. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n}.$$

Розв'язання. Скористаємося безпосередньо радикальною ознакою Коші.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-3)^n}{4^n} \right|} = \frac{|x-3|}{4}.$$

Отже, заданий ряд збігається, якщо $\frac{|x-3|}{4} < 1$, або

$$|x-3| < 4; \quad -4 < x-3 < 4; \quad -1 < x < 7.$$

Досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку.

При $x = 7$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + \dots$, який є розбіжним.

При $x = -1$ маємо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$, який теж розбіжний.

Отже, область збіжності даного ряду $-1 < x < 7$.

Властивості степеневих рядів

1. Якщо радіус збіжності степеневому ряду $R \neq 0$, то цей ряд збігається рівномірно на кожному відрізку $[a, b]$, розташованому строго всередині проміжку збіжності цього ряду.

2. Сума степеневому ряду є неперервною функцією в кожній внутрішній точці його проміжку збіжності.

3. Всередині інтервалу збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати і почленно інтегрувати; причому інтервал збіжності одержаного таким чином ряду співпадає з інтервалом збіжності ряду, який почленно диференціювали або інтегрували.

2.3. Розвинення функцій у степеневий ряд

Сума довільного збіжного степеневому ряду є функцією, яка неперервна та нескінченну кількість разів диференційована в інтервалі збіжності цього ряду. Поставимо зворотню задачу: з'ясуємо, за яких умов задану функцію можна подати у вигляді степеневому ряду і як знайти цей ряд.

Функцію $f(x)$ називають розвинутою у степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, $R > 0$, якщо в цьому інтервалі вказаний ряд збігається і його сума дорівнює $f(x)$.

Теорема (про єдиність розвинення функції у степеневий ряд).

Нехай функція $f(x)$ розвинена у степеневий ряд в околі точки x_0 , тоді таке розвинення єдине, а коефіцієнти степеневому ряду знаходяться за формулою

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

2.3.1. Ряд Тейлора

Рядом Тейлора функції $f(x)$ в околі точки x_0 називають степеневий ряд вигляду

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Коефіцієнти цього ряду $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$, $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$, $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ називають коефіцієнтами Тейлора.

Якщо $x_0 = 0$, тоді ряд

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

називають *рядом Маклорена*.

Твердження. Якщо в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функція $f(x)$ розвинена в степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, то цей ряд є рядом Тейлора.

Для довільної функції $f(x)$, яка в околі точки x_0 має похідні довільного порядку, можна побудувати ряд Тейлора:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Але сумою такого ряду не завжди є функція $f(x)$ (ряд може навіть розбігатись).

Для функції $f(x)$, що має похідні всіх порядків, справедлива **формула Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r_n(x),$$

де $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$, $\theta \in (x_0, x)$ – залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.

Теорема 1. Для того щоб ряд Тейлора збігався в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ до функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член $r_n(x)$ її формули Тейлора прямував до нуля при $n \rightarrow \infty$ для всіх x з цього інтервалу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

На практиці зручно застосовувати достатню умову розвинення функції в ряд Тейлора.

Теорема 2. Якщо похідні довільного порядку функції $f(x)$ обмежені в околі точки x_0 , тобто

$$\exists M > 0 \quad \forall x, n: |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

тоді ряд Тейлора, побудований для функції $f(x)$, збігається до неї.

2.3.2. Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена

Наведемо розвинення основних елементарних функцій в ряд Тейлора (Маклорена) за степенями x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

1. $f(x) = e^x$. За формулою Маклорена для e^x маємо:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

де залишковий член $r_n(x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$, $\theta \in (0, x)$.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ для довільного x , то ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (6)$$

збігається для всіх $x \in R$.

2. $f(x) = \sin x$. Оскільки $|f^{(n)}(x)| = \left| \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \right| \leq 1, \forall x \in R$,

то за теоремою 2 функцію $f(x) = \sin x$ можна розвинути в ряд Маклорена для всіх $x \in R$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (7)$$

3. $f(x) = \cos x$. Застосовуючи властивість степеневого ряду, продиференціюємо ряд для $\sin x$. Дістанемо ряд для всіх $x \in R$:

$$\begin{aligned} \cos x &= (\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right)' \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \quad (8)$$

4. $f(x) = (1+x)^\alpha$. Ряд Маклорена має вигляд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \dots, \quad (9)$$

де $-1 < x < 1$. Цей ряд називають біноміальним. Якщо α — ціле додатне число або нуль, тоді ряд є біномом Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

Збіжність біноміального ряду в кінцевих точках інтервалу $(-1; 1)$ залежить від числа α :

при $\alpha \geq 0$ ряд збігається, якщо $x \in [-1; 1]$;

при $-1 < \alpha < 0$, якщо $x \in (-1; 1]$;

при $\alpha \leq -1$, якщо $x \in (-1; 1)$.

Корисно виділити такі часткові випадки біноміального ряду:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (10)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)}{(2n)!!} x^n, \quad (12)$$

де $x \in (-1; 1)$.

5. $f(x) = \ln(1 + x)$.

Ряд Маклорена знайдемо почленним інтегруванням ряду (10):

$$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

тобто

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1; 1].$$

Приклад. Користуючись формулами розкладу в ряд Маклорена функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$ розкласти дані функції в ряд в околі точки $x = 0$:

а) $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Для $x \in (-\infty; +\infty)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots.$$

б) $y = \sin \frac{x}{2}$.

Розв'язання. Для $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 3!} + \frac{x^5}{2^5 5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!} + \dots$$

в) $y = \cos^2 x$.

Розв'язання. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{2^3 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

3. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Завдання 1. У завданнях а, б, в – дослідити числові ряди на збіжність; у завданні г – дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакопереміжний ряд.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (2n)!}{5^n \cdot (n+2)!}$$

Розв'язання. У загальний член цього ряду входять показникові функції та факторіали, тому доцільно застосувати достатню ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n \cdot (2n)!}{5^n \cdot (n+2)!}; \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (2n+2)!}{5^{n+1} \cdot (n+3)!} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (2n+2)! \cdot 5^n \cdot (n+2)!}{5^{n+1} \cdot (n+3)! \cdot 3^n \cdot (2n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot (2n)! (2n+1)(2n+2) \cdot 5^n \cdot (n+2)!}{5 \cdot 5^n \cdot (n+3)! (n+3) \cdot 3^n \cdot (2n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (2n+1)(2n+2)}{5 \cdot (n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4n^2}{5 \cdot n} = \infty > 1. \end{aligned}$$

Отже, заданий ряд розбігається.

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{6n+5} \right)^n$$

Розв'язання. Загальний член ряду є n -м степенем дробу $\frac{n+1}{6n+5}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{6n+5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{6n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n} = \frac{1}{6} < 1.$$

Отже, заданий ряд збігається.

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{\sqrt[3]{n^7+2}}$$

Розв'язання. Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{\sqrt[3]{n^7+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n^{7/3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^{4/3}} = \left\| \frac{5}{\infty} \right\| = 0.$$

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки

$$u_n = \frac{5n}{\sqrt[3]{n^7+2}} \sim \frac{5n}{n^{7/3}} = \frac{5}{n^{4/3}},$$

порівняємо даний ряд з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$. Це збіжний

ряд ($p = \frac{4}{3} > 1$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n \cdot n^{4/3}}{\sqrt[3]{n^7 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^{7/3}}{n^{7/3}} = 5 (\neq 0, \neq \infty).$$

Отже, ці ряди поводять себе однаково, тобто заданий ряд також збігається.

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{6^n}.$$

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{6^n}$.

Використаємо ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{2n+3}{6^n}; \quad u_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{6^{n+1}} = \frac{2n+5}{6^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)6^n}{6^{n+1}(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)6^n}{6 \cdot 6^n(2n)} = \frac{1}{6} < 1.$$

Отже, ряд з абсолютних величин даного ряду збігається. Таким чином, даний знакопереміжний ряд збігається абсолютно.

Завдання 2. Знайти область збіжності степеневому ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(x-1)^n}{n^2}; \quad u_{n+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|^{n+1} n^2}{(n+1)^2 |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1| n^2}{n^2} = |x-1|.$$

Отже, заданий ряд збігається, якщо $|x-1| < 1$, або

$$-1 < x-1 < 1; \quad 0 < x < 2.$$

Дослідимо даний ряд на кінцях одержаного проміжку.

При $x = 2$ маємо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ($p = 2 > 1$).

При $x = 0$ маємо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається абсолютно.

Отже, область збіжності даного ряду $0 \leq x \leq 2$.

Завдання 3. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до даної функції.

$$f(x) = \ln(10 + x).$$

Розв'язання. Скористаємося властивостями логарифма:

$$\ln(10 + x) = \ln 10 \left(1 + \frac{x}{10}\right) = \ln 10 + \ln\left(1 + \frac{x}{10}\right).$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1; 1].$$

$$\ln(10 + x) = \ln 10 + \ln\left(1 + \frac{x}{10}\right) = \ln 10 + \frac{x}{10} - \frac{x^2}{10^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{10^3 \cdot 3} - \dots - \frac{(-1)^{n-1}}{10^n n} x^n,$$
$$-1 < \frac{x}{10} \leq 1; \quad -10 < x \leq 10; \quad \text{або } x \in (-10; 10].$$

4. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. У завданнях а, б, в – дослідити числові ряди на збіжність; у завданні г – дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакопереміжний ряд:

$$1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{5^n (n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(\ln(n+5))^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^n}.$$

$$3. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8} \right)^n \left(\frac{1}{n} \right)^7; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} \right)^{2n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2 + 5}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}.$$

$$4. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}.$$

$$5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2 + 1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{5^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

$$7. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n n^7; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{5n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}.$$

$$8. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3n} \right)^{2n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)n}.$$

$$9. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

$$10. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n - 15}{7n^2 + 3n + 4} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \sqrt[3]{n}}.$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3+n^4}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n}\right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(n+3)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(1+n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}.$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{3n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5+1}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}.$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{((n+1)/n)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}.$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}.$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}.$$

$$21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin \frac{\pi}{4^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+3))^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+5}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

$$22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}.$$

$$23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n} \cdot 7^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}.$$

$$24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

$$25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n}.$$

$$26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{9^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}.$$

$$27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

$$28. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7} \right)^n.$$

$$29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5n(2n-1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}.$$

$$30. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}.$$

Завдання 2. Знайти область збіжності степеневому ряду.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! x^n}{(n+1)^2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,1)^n x^{2n}}{n}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{2^n (n+1)}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1} 9^n}{n+1}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n (n^2 + 1)}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3n}}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}.$$

Завдання 3. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до даної функції:

$$1. f(x) = \cos \frac{2x^3}{3}.$$

$$3. f(x) = \sin x^2.$$

$$5. f(x) = \cos 5x.$$

$$2. f(x) = \frac{\sin x^2}{x}.$$

$$4. f(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

$$6. f(x) = \frac{2}{1-3x^2}.$$

$$7. f(x) = \frac{2x}{1+x}.$$

$$8. f(x) = \frac{1}{2}e^{2x^3}.$$

$$9. f(x) = x \cos \sqrt{x}.$$

$$10. f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x.$$

$$11. f(x) = \frac{\cos 5x}{x}.$$

$$12. f(x) = e^{-x^4}.$$

$$13. f(x) = x \operatorname{arctg} x.$$

$$14. f(x) = x^2 \cos 3x.$$

$$15. f(x) = e^{3x}.$$

$$16. f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$17. f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}.$$

$$18. f(x) = \sin 5x.$$

$$19. f(x) = \cos x^2.$$

$$20. f(x) = \frac{x^3}{1+x}.$$

$$21. f(x) = \sin \frac{2x^3}{3}.$$

$$22. f(x) = \frac{1}{1-4x^2}.$$

$$23. f(x) = e^{5x}.$$

$$24. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{e^x}}.$$

$$25. f(x) = x \sin \sqrt{x}.$$

$$26. f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}.$$

$$27. f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x.$$

$$28. f(x) = \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$29. f(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

$$30. f(x) = x^2 \sin 2x.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. у 2-х томах. Т. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. / Л. В. Курпа, Н. О. Кириллова, Г. Б. Лінник [та ін.] ; за ред. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2009. – 432 с.
2. Сборник задач по высшей математике. / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – Москва : Айрис-прес, 2011. – 592 с.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб.пособие в 3 ч. Ч.3. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть. – Минск : Выш.шк., 1990. – 271 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. ЧИСЛОВІ РЯДИ.....	4
1.1 Необхідна ознака збіжності числового ряду	5
1.2. Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів	6
1.2.1. Ознаки порівняння.....	6
1.2.2. Ознака Даламбера.....	8
1.2.3. Радикальна ознака Коші.....	9
1.2.4. Інтегральна ознака Коші.....	10
1.3. Знакопереміжні ряди. Ознака Лейбниця.....	13
2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ.....	16
2.1. Рівномірна збіжність функціонального ряду.....	17
2.2. Степеневі ряди.....	18
2.3 Розвинення функцій у степеневий ряд.....	22
2.3.1 Ряд Тейлора.....	22
2.3.2. Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена....	23
3. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ.....	26
4. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.....	29
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	34

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою
«Числові та функціональні ряди»
з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та скороченої форм навчання

Укладачі: ЛІННИК Ганна Борисівна,
МОРАЧКОВСЬКА Ірина Олегівна
РУДНЄВА Гаяне Валериківна

Відповідальний за випуск проф. Лідія КУРПА
Роботу до видання рекомендував проф. Дмитро БРЕСЛАВСЬКИЙ

Редактор Марія ЄФРЕМОВА

План 2020 р., поз. 305

Підп. до друку 16.03.2021. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 1,2.
Наклад 50 прим. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавець

Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Виготовлювач

Надруковано ФОП Секішова Т.Є.

Свідоцтво про державну реєстрацію за №2 480 000 0000 079758 від
21.05.2007 р. м.Харків, вул. Тобольська, 42-а, 067-709-71-16.

u2print.com.ua