

Е.Г. ЯНЮТИН, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;
П.А. ЕГОРОВ, аспирант, ХНАДУ, Харьков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ «БАЛКА-МАССА»

Механическая система состоит из шарнирно-опертой балки и присоединенной к ней массы. С использованием информации о перемещениях некоторой точки балки в зависимости от времени определяется точка приложения нестационарной сосредоточенной силы. Для этой же механической системы также рассматривается задача об идентификации величины присоединенной массы.

Ключевые слова: балка, масса, нагрузка, контактная сила, перемещение, идентификация, уравнение Вольтерра, метод регуляризации.

Введение. Среди задач математического моделирования принято выделять прямые и обратные задачи. В постановке *прямых задач* известны причины, необходимо найти следствия. В случае *обратных задач* известны следствия, исходя из которых, необходимо найти причины [1]. Решению прямых задач посвящено значительное количество работ, в которых приведены аналитические модели процессов и механических систем, разработаны методы их решения. Также прямые задачи могут быть исследованы с помощью численных методов, таких как *метод конечных элементов*, *метод конечных разностей* и т.п. Методы решения обратных задач развиты в меньшей степени.

Постановка и решение некоторых обратных задач представлены в монографии [2]. Также стоит отметить статью [3], где рассмотрены постановка и решение обратной задачи по восстановлению точки приложения и изменения во времени нестационарной нагрузки, воздействующей на балку. В настоящей статье рассмотрим более сложный случай, когда к нестационарно колеблющейся балке жестко присоединена сосредоточенная масса. В описываемом далее исследовании кроме *метода сглаживающих функционалов* используется метод перебора.

Идентификация точки приложения сосредоточенной нагрузки. Рассмотрим случай, когда на шарнирно-опертую балку с жестко присоединенной в некоторой точке x_{Mas} массой постоянной величины воздействует сосредоточенная возмущающая нагрузка (рис. 1). При этом точка x_0 приложения возмущающей нагрузки подлежит определению. В данном случае в качестве дополнительной информации об объекте исследования будет выступать величина перемещений (или деформаций) в некоторой точке балки x_s . Для решения задачи об идентификации точки приложения возмущающей нагруз-

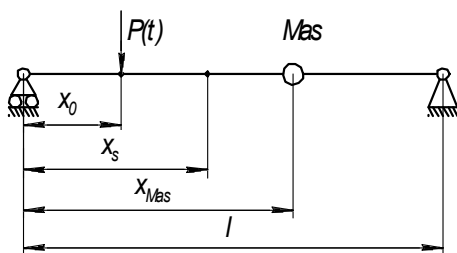


Рис. 1 – Схема исследуемой системы.

ки сначала приведем решение задачи о нестационарных колебаниях шарнирно-опертой балки с присоединенной массой в общем виде.

Процесс деформирования шарнирно-опертой балки с присоединенной массой рассмотрим с использованием

дифференциальных уравнений теории *С.П. Тимошенко* [4]:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) FG = P(x, t) - R(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) FG - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $P(x, t) = P(t)\delta(x - x_0)$ – возмущающая нагрузка; $R(x, t) = R(t)\delta(x - x_{Mas})$ – контактная сила, обусловленная присоединением сосредоточенной массы.

Описание остальных величин, входящих в (1), приведено в [4].

Примем, что начальные перемещения и скорости точек, а также пере­мещения и углы поворота на концах балки, равны нулю:

$$w(0, t) = w(l, t) = 0; \quad w(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Указанную задачу можно решить с использованием разложения иско­мых функций в *ряды Фурье*:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin(k\pi x) / l; \\ \psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cos(k\pi x) / l. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим (3) в (1) и умножим первое уравнение (1) на $\sin(k\pi x) / l$, а второе на $\cos(k\pi x) / l$; полученные выражения проинтегрируем в пределах от 0 до l . Воспользуемся свойством ортогональности тригонометрических функций, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k(t)}{\partial t^2} + \frac{k'G}{\rho} \left(\left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 w_k(t) - \frac{k\pi}{l} \psi_k(t) \right) = \\ = 2 / (\rho FL) \sin((k\pi x_0) / l) P(t) - 2 / (\rho FL) \sin((k\pi x_{Mas}) / l) R(t); \\ \frac{\partial^2 \psi_k(t)}{\partial t^2} + \frac{E}{\rho} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \psi_k(t) + \frac{k'FG}{\rho I} \left(\psi_k(t) - \frac{k\pi}{l} w_k(t) \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Найденное, например, с помощью операционного исчисления решение дифференциальных уравнений (4) будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} w(x, t) &= \frac{2}{\rho FL} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{k\pi x_0}{l} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \sin(\gamma_{ik}(t-\tau)) d\tau - \right. \\ &\left. - \sin \frac{k\pi x_{Mas}}{l} \int_0^t R(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \sin(\gamma_{ik}(t-\tau)) d\tau \right) \sin(\lambda_k x); \\ \psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k}{\rho FL} \left(\sin \frac{k\pi x_0}{l} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{b}{\gamma_{ik} \sqrt{D_k}} \sin(\gamma_{ik}(t-\tau)) d\tau - \right. \\ &\left. - \sin \frac{k\pi x_{Mas}}{l} \int_0^t R(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{b}{\gamma_{ik} \sqrt{D_k}} \sin(\gamma_{ik}(t-\tau)) d\tau \right) \cos(\lambda_k x), \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где $C_{ik} = \frac{c\lambda_k^2 + b - \gamma_{ik}^2}{\gamma_{ik} \cdot \sqrt{D_k}}$, $c = \frac{E}{\rho}$, $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $\gamma_{ik} = \sqrt{\frac{(a+c)\lambda_k^2 + b + (-1)^{i+1} \sqrt{D_k}}{2}}$,

$$b = \frac{k'GF}{\rho I}, \quad D_k = ((a+c)\lambda_k^2 + b)^2 - 4ac\lambda_k^4.$$

При условном отсоединении массы от балки на основе *второго закона Ньютона* можно записать уравнение колебаний точечной массы:

$$Mas \cdot w_{Mas}''(t) = -R(t). \quad (6)$$

Решение дифференциального уравнения (6) может быть получено в виде

$$w_{Mas}(t) = -\frac{1}{Mas} \int_0^t (t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Поскольку масса и точка балки, соответствующая расположению массы, нераздельны ($w_{Mas}(t) = w_{Mas}(x_{Mas}, t)$), приравнявая первое уравнение (5), записанное для точки расположения массы, к (7), можно получить интегральное уравнение для $R(t)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{2}{\rho FL} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\lambda_k x_{Mas}) \sin \frac{k\pi x_0}{l} P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \sin(\gamma_{ik}(t-\tau)) d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\frac{2}{\rho FL} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\lambda_k x_{Mas}) \sin \frac{k\pi x_{Mas}}{l} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \sin(\gamma_{ik}(t-\tau)) - \frac{t-\tau}{Mas} \right) R(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегральное уравнение *Вольтерра I рода* (8) можно решить, используя численный способ, основанный на замене интегралов конечными суммами. Таким образом, получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^m P_p \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\lambda_k x_{Mas}) \sin \frac{k\pi x_0}{l} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \left(\frac{\cos(\gamma_{ik} \Delta t(m-p))}{\gamma_{ik}} - \right. \\
& \left. - \frac{\cos(\gamma_{ik} \Delta t(m-p+1))}{\gamma_{ik}} \right) = \sum_{p=1}^m R_p \left(\frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\lambda_k x_{Mas}) \sin \frac{k\pi x_{Mas}}{l} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \times \right. \\
& \left. \frac{\cos(\gamma_{ik} \Delta t(m-p)) - \cos(\gamma_{ik} \Delta t(m-p+1))}{\gamma_{ik}} - \frac{\Delta t^2}{2Mas} (2m-2p+1) \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

В виду некорректности поставленной задачи для построения устойчивого решения можно воспользоваться сглаживающими алгоритмами. Используя *метод регуляризации А.Н. Тихонова*, поиск неизвестной контактной силы может быть произведен в следующем виде:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (10)$$

где α – параметр регуляризации; \mathbf{C} – трехдиагональная матрица, вид которой представлен в [2].

Таким образом, все величины, кроме точки приложения нагрузки x_0 , входящие в (5), определены.

Для отыскания точки приложения нагрузки условно делим длину балки на n равных участков. Точки разбиения обозначаем как s_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$). Силу $P(t)$ последовательно условно помещаем в каждую из точек разбиения, определяя при этом значения перемещений $w(P(t), s_i, t)$ или деформаций $\varepsilon(P(t), s_i, t)$. Сравнивая функции $w(t)$ и $w(P(t), s_i, t)$ или $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon(P(t), s_i, t)$ по принципу

$$\int_0^T (w(t) - w(P(t), s_i, t))^2 d\tau = \xi_i \quad \text{или} \quad \int_0^T (\varepsilon(t) - \varepsilon(P(t), s_i, t))^2 d\tau = \xi_i$$

для перемещений и деформаций соответственно, находим значения ξ_i . Наименьшее из найденных значений ξ_i соответствует точке приложения нагрузки. В приведенных формулах T – время исследования процесса.

При численном эксперименте были приняты следующие исходные данные:

$$\rho = 7850 \text{ кг/м}^3, \quad E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad G = 8,08 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad l = 0,47 \text{ м}, \quad h = 0,0248 \text{ м}, \\
h_b = 0,0586 \text{ м}, \quad k = \frac{6}{5}, \quad x_s = 0,2 \text{ м}, \quad x_{Mas} = 0,3 \text{ м}, \quad Mas = 1,2 \text{ кг}, \quad T = 0,01 \text{ с};$$

изменение во времени возмущающей сосредоточенной силы происходит по закону синуса в течение одного полупериода, достигая максимального значения 400 Н. Перемещения заданной точки балки были определены при решении соответствующей прямой задачи при условии, что точка приложения на-

грузки известна ($x_0 = 0,17$ м).

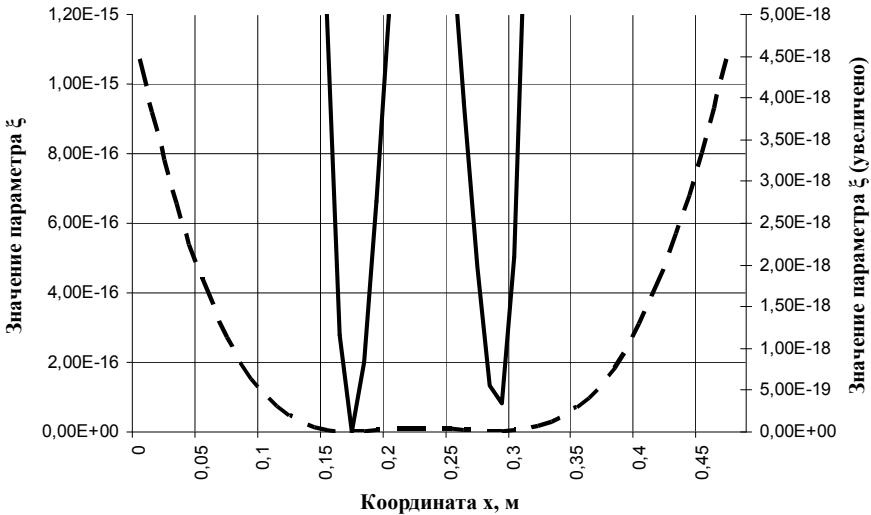


Рис. 2 – График зависимости параметра ξ_i от точки приложения нагрузки x_0 .

Из графика, приведенного на рис.2, можно установить приблизительно, а из расчетов – более точно, что координата точки приложения нагрузки равна 0,17 м. Следует отметить, что на рис.2 график зависимости параметра ξ_i от точки приложения нагрузки x_0 приведен дважды: в полном виде и увеличено.

Идентификация величины присоединенной массы. С помощью аналогичного подхода можно также решить задачу по идентификации величины присоединенной массы. В этом случае необходимо принять величину массы заведомо большей, чем величина действительной присоединенной массы. Принятую величину массы необходимо условно разделить на n равных частей, обозначаемых как mas . Определяя перемещения $w(P(t), i \cdot mas, t)$ или деформации $\varepsilon(P(t), i \cdot mas, t)$, сравниваем их с заданными $w(t)$ или $\varepsilon(t)$ по принципу

$$\int_0^T (w(t) - w(P(t), i \cdot mas, t))^2 d\tau = \xi_i \quad \text{или} \quad \int_0^T (\varepsilon(t) - \varepsilon(P(t), i \cdot mas, t))^2 d\tau = \xi_i,$$

где $i = 1, 2 \dots n$. Наименьшее значение параметра ξ будет указывать на искомую величину.

Для численного эксперимента были приняты такие же исходные данные, как и в предыдущем случае, за исключением информации о величине присоединенной массы. Будем предполагать, что точка приложения сосредоточенной нагрузки известна, а величина присоединенной массы не превышает 5 кг.



Рис. 3 – График зависимости параметра ξ_i от величины присоединенной массы M_{as} .

При решении задачи было установлено, что величина присоединенной массы равна 1,2 кг.

Выводы. В данной статье рассмотрены задачи по идентификации координаты точки приложения сосредоточенной силы и величины присоединенной сосредоточенной массы. Полученные при решении обратных задач значения искомых величин хорошо согласованы со значениями исходных данных для соответствующих прямых задач, что свидетельствует об эффективности используемых подходов.

Следует отметить, что, используя аналогичный подход, можно получить решение более сложных задач, когда неизвестными являются несколько параметров системы, например, координата расположения и величина присоединенной массы.

Список литературы: 1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с. 2. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин., И.В. Янчевский, А.В. Вороний, А.С. Шарамата // Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 3. Bor-Tsuen Wang Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam / Bor-Tsuen Wang, Chun-Hsien Chiu // Mechanical Systems

УДК 539.3

Идентификация параметров нестационарно колеблющейся системы «балка-масса» / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 207 – 213. Бібліогр.: 4 назви.

Механічна система складається з шарнірно-опертої балки та приєднаної до неї маси. З використанням інформації щодо переміщень деякої точки балки в залежності від часу визначається точка прикладання нестационарної зосередженої сили. Для цієї ж механічної системи також розглядається задача щодо ідентифікації величини приєднаної маси.

Ключові слова: балка, маса, навантаження, контактна сила, переміщення, ідентифікація, рівняння Вольтерра, метод регуляризації.

Mechanical system consists of the hinged beam and attached to it mass. The point of application of nonstationary concentrated force is found with using the information about displacements of the certain point of beam depending on time. The problem of the identification of attached mass value is studied for the same mechanical system.

Key words: beam, weight, pressure, contact force, displacement, identification, Volterra equation, the method of regularization.