МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська,
А. О. Нікульченко, А. Ю. Стрельнікова

ПРАКТИКУМ З КУРСУ «АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ» ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Навчально-методичний посібник для студентів
спеціальностей
113 – Прикладна математика та
124 – Системний аналіз

Рекомендовано
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 30.10.20 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

УДК 512
С 32

Рецензенти

М. В. Сідоров, доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки

О. О. Ларін, доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет «Харківський політехнічний інститут»

Рекомендовано вченою радою НТУ «ХПІ»
як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки
«Прикладна математика» та «Системний аналіз»,
протокол № 03 від 30.10.2020 р.

Сердюк І. В.

С 32 Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Векторна алгебра : навчальний посібник для студентів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Системний аналіз» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, А. О. Нікульченко, А. Ю. Стрельнікова. — Харків : «НТМТ», 2022. — 88 с.

ISBN 978-617-578-334-4

Розглянуто методи розв'язання й дослідження задач курсу «Алгебра і геометрія» з розділу «Векторна алгебра». Посібник містить достатню кількість теоретичного матеріалу, докладно розв'язано приклади, подано вправи для самостійної роботи.

Призначено для студентів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Системний аналіз», інших технічних спеціальностей.

Бібліогр. 16

УДК 512

ISBN 978-617-578-334-4

Навчальне видання

СЕРДЮК Ірина Василівна
АХІЄЗЕР Олена Борисівна
ДУНАЄВСЬКА Ольга Ігорівна
НІКУЛЬЧЕНКО Артем Олександрович
СТРЕЛЬНІКОВА Анна Юріївна

ПРАКТИКУМ З КУРСУ
«АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ» ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Навчально-методичний посібник для студентів спеціальностей
113 – Прикладна математика та 124 – Системний аналіз

Роботу до видання рекомендував Л. І. Безменов
Редактор М. П. Єфремова

План 2020р., поз. 109

Підп. до друку 01,02.2022 Формат 60×90 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 5,5.
Наклад 100 прим. Зам. № 20-2022/0114. Ціна договірна.

Видавництво «НТМТ»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців ДК № 1748 від 15.04.2004 р.
61072, м. Харків, вул. Дерев'янка, б. 16, к. 83. Тел. (095) 249-39-96

ПЕРЕДМОВА

У навчальному посібнику викладено основні методи розв’язання й дослідження задач курсу «Алгебра і геометрія» з розділу «Векторна алгебра». Мета пропонованого видання — сформувати у студентів практичні навички розв’язування задач, розвинути математичне мислення здобувачів вищої освіти.

Посібник складається з двох частин.

У першій частині подано визначення основних понять, формулювання теорем і формули. Теоретичні відомості проілюстровано численними прикладами розв’язання типових задач із детальними поясненнями. Поєднання мінімально необхідного обсягу теорії з великою кількістю прикладів дозволяє здобувачам вищої освіти ефективно засвоїти матеріал у ході самостійного навчання.

У другій частині посібника запропоновано 25 варіантів письмових індивідуальних розрахунково-графічних завдань, перевірка яких відбувається у формі усного захисту. Під час захисту студент повинен правильно відповісти на всі контрольні запитання, перелік яких подано в посібнику, і вміти пояснювати операції, здійснені в ході виконання РГЗ.

Модуль 1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

§ 1. *Вектори. Лінійні операції над векторами*

Означення 1.1. *Скалярними* величинами називаються величини, що їх цілком можна охарактеризувати числами (наприклад, довжина, площа, об'єм, маса, енергія, робота та ін.).

Означення 1.2. *Векторними* величинами називаються величини, для повної характеристики яких потрібно зазначення числа і напрямку у просторі (наприклад, швидкість, прискорення, сила, напруженість поля та ін.).

Означення 1.3. *Вектором* (геометричним вектором) називається напрямлений відрізок. Довжину вектора позначають знаком абсолютної величини (модуля).

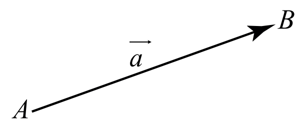

Рисунок 1.1

Означення 1.4. Вектор, початок якого суміщається з його кінцем, називається *нульовим вектором*. Довжина нульового вектора дорівнює нулю.

Означення 1.5. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні одній і тій самій прямій.

Означення 1.6. Вектори називаються *компланарними*, якщо вони паралельні одній і тій самій площині. Два вектори завжди компланарні.

Означення 1.7. *Одиничним вектором* називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Означення 1.8. *Ортом* даного вектора $\vec{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора $\vec{a}$. Орт вектора $\vec{a}$ позначають $\vec{a}_0$, причому $|\vec{a}_0| = 1$ і $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$.

Означення 1.9. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *рівними*, якщо вони мають однакові довжину й напрям. Два вектори рівні тоді і тільки тоді, якщо існує паралельний перенос, за допомогою якого ці два вектори можна сумістити.

Лінійними операціями над векторами є операції їх додавання та множення дійсного числа на вектор.

Означення 1.10. *Сумою двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{b}$, за неодмінної умови, що кінець вектора $\vec{a}$ суміщається з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника).

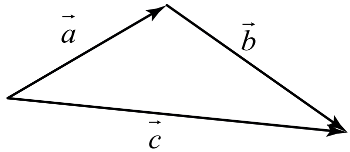

Рисунок 1.2

Додавання двох неколінеарних векторів можна також визначити за допомогою *правила паралелограма*:

якщо ці вектори — доданки звести до спільного початку, то вектор — сума, що виходить з цього початку, суміщається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах — доданках.

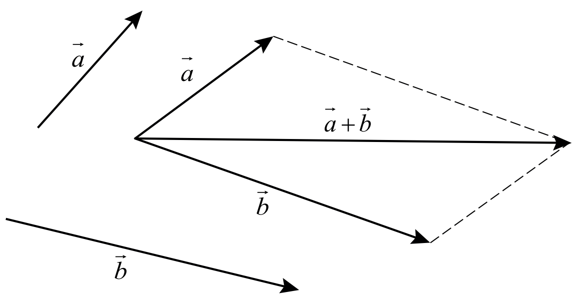

Рисунок 1.3

Означення 1.11. Сумою векторів $\vec{a}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ називається вектор, який позначається $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$, початок якого суміщається з початком першого вектора $\vec{a}_1$, а кінець — з кінцем останнього вектора $\vec{a}_n$.

Властивості дії додавання векторів:

1. (комутативна властивість додавання)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

2. (асоціативна властивість додавання)

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

3. Для довільного вектора $\vec{a}$ існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

4. Для довільного вектора існує протилежний вектор $\left(-\vec{a}\right)$ такий, що

$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}.$$

Означення 1.12. *Вектором, протилежним вектору* $\vec{a} \neq 0$, називається вектор, колінеарний з вектором $\vec{a}$, рівний йому за довжиною і напрямлений в бік, протилежний вектору $\vec{a}$.

Користуючись поняттям протилежного вектора, віднімання векторів виконується за правилом:

щоб відняти вектор $\vec{b}$ від вектора $\vec{a}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний векторові $\vec{b}$.

Означення 1.13. *Добутком числа* α *на вектор* $\vec{a}$ називають вектор $\alpha\vec{a}$, що має довжину $|\alpha\vec{a}|$, і напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо α > 0, і протилежний йому, якщо α < 0.

При множенні вектора $\vec{a}$ на α = –1 дістаємо протилежний вектор.

Ділення вектора $\vec{a}$ а число $m \neq 0$ можна замінити множенням того самого вектора на число $\frac{1}{m}$.

Теорема 1.1 (необхідна й достатня умова колінеарності векторів).

Два ненульових вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, де α — деяке дійсне число.

Введені дії додавання векторів і множення числа на вектор пов'язані між собою дистрибутивними властивостями для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ та дійсних чисел α, β.

1. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$
2. $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}.$
3. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}.$
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a},\ 0\cdot\vec{a}=\vec{0}.$

Множину *n*-вимірних векторів із дійсними компонентами, в якій визначені операції додавання векторів та множення числа на вектор, що мають властивості 1–8, називають *векторним простором*. Позначатимемо його $\mathbb{R}^n$. Елементи простору $\mathbb{R}^n$ можна розглядати не лише як вектори, а й як елементи довільної природи. В цьому разі відповідну множину елементів називають *лінійним простором*.

§ 2. *Розкладання вектора на компоненти*

Два колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ завжди пов'язані співвідношенням

$$\vec{a}=\alpha\vec{b},$$

де α — число, абсолютна величина якого визначає відношення довжини вектора $\vec{a}$ до довжини вектора $\vec{b}$. Знак α однаково (при α > 0) чи протилежно (при α < 0) напрямлені вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \vec{a}^{\,0},$$

якщо ввести так званий одиничний вектор $\vec{a}^{\,0}$, тобто вектор, що його модуль дорівнює одиниці $\left(\left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1\right)$ і який колінеарний з даним вектором $\vec{a}$.

Будь-який вектор $\vec{c}$ можна подати у вигляді векторної суми, складеної з двох компланарних йому векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, помножених на деякі числа α і β. Тоді:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

У результаті ми розклали вектор $\vec{c}$ за його компонентами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. У тому разі, коли один з векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ колінеарний з вектором $\vec{c}$, коефіцієнт при другому векторі слід обрати рівним нулю.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то зазначене зображення вектора $\vec{c}$ можливо здійснити лише єдиним способом.

Аналогічно, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ й $\vec{c}$ попарно не колінеарні, то будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом розкладається по трьох компонентах:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Приклад 2.1.

Нехай $\triangle ABC$ — трикутник, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Позначимо через M основу медіани, K — бісектриси, D — висоти, проведених з вершини A. Виразити через $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектори $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AD}$.

Розв'язання.

1). Використовуючи правило додавання векторів (правило паралелограма), маємо

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

2). Згідно з правилом додавання векторів (правило трикутника), маємо

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \vec{b} + \lambda\left(\vec{c} - \vec{b}\right).$$

Треба визначити число λ. З іншого боку,

$$\overrightarrow{AK} = \alpha\left(\frac{1}{\left|\vec{b}\right|}\vec{b} + \frac{1}{\left|\vec{c}\right|}\vec{c}\right).$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{AK}$ виражається через вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ однозначно, то $1-\lambda=\frac{\alpha}{|\vec{b}|}$ і $\lambda=\frac{\alpha}{|\vec{c}|}$. Із цих рівнянь знаходимо, що $\lambda=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$. Остаточно дістаємо:

$$\overrightarrow{AK}=\vec{b}+\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}\vec{b}+\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}\vec{c}\,.$$

За правилом додавання векторів, маємо

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\lambda\left(\vec{c}-\vec{b}\right).$$

Невідомий коефіцієнт λ знаходимо з умови $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Маємо: $\left(\vec{b}+\lambda\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0$; звідки $\lambda=\frac{\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)}{\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2}$. Отже,

$$\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\frac{\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)}{\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\frac{\vec{c}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)}{\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2}\vec{b}+\frac{\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)}{\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2}\vec{c}\,.$$

Приклад 2.2.

У трикутнику ABC точка D ділить сторону AB у відношенні $AD : DB =$ $= 2 : 7$. Розкласти вектор $\overrightarrow{CD}$ по векторах $\overrightarrow{CA}=\vec{b}, \overrightarrow{CB}=\vec{a}$.

Розв'язання.

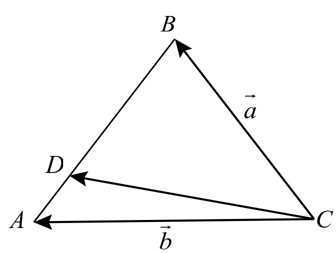

Рисунок 2.1

За означенням суми й різниці двох векторів маємо:

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}\ .$$

Отже,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{9}\left(\vec{a} - \vec{b}\right);$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{2}{9}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b}.$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b}.$$

§ 3. *Поняття про лінійну залежність між векторами*

Означення 3.1. *Лінійною комбінацією векторів* $\overrightarrow{a_i}\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ називають вектор $\vec{a}$, який визначається за формулою $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{a_i}$, де λ_i — деякі числа.

Означення 3.2. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо можна підібрати числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не всі рівні нулю, при яких виконується рівність $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = 0$. У противному разі вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називають *лінійно незалежними.*

Теорема 3.1. Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із них є лінійною комбінацією інших.

Допускаємо, що жодний з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ не є нуль – вектором. Деякі властивості лінійно залежних векторів:

1. Якщо два вектори лінійно залежні, то вони колінеарні (й навпаки).
2. Якщо три вектори лінійно залежні, то вони компланарні (й навпаки).
3. Чотири довільні вектори завжди лінійно залежні.

§ 4. *Розкладання вектора по базисній системі векторів*

Означення 4.1. *Базисом векторного простору* $\mathbb{R}^n$ називають довільну систему n лінійно незалежних векторів й будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$ є лінійною комбінацією векторів даної системи.

Означення 4.2. Векторний простір $\mathbb{R}^n$ називають *n-вимірним*, якщо в ньому існує система *n* лінійно незалежних векторів, а будь-які з $(n+1)$ векторів є лінійно залежними. Число *n* називають *вимірністю простору* $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1 (про розклад вектора за базисом).

Будь-який вектор $\vec{a}$ векторного простору $\mathbb{R}^n$ можна подати, й причому єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ — *розклад вектора* $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *координатами вектора* $\vec{a}$ в цьому базисі.

Орт осі *Ox* позначається через $\vec{i}$, орт осі *Oy* — через $\vec{j}$, орт осі *Oz* — через $\vec{k}$.

Означення 4.2. *Ортонормований базис* називають базис, вектори якого взаємно перпендикулярні мають довжину 1.

Нехай $\{\vec{i}; \vec{j}\}$ — такий базис в $\mathbb{R}^2$. Базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — ортонормований базис в $\mathbb{R}^3$. Координати вектора в ортонормованому базисі називають його *прямокутними координатами*.

Для будь-якого вектора $\vec{a}(x; y)$, розташованого в площині *xOy*, справедлива рівність

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Для будь-яких векторів, розташованих у просторі $\vec{a}(x; y; z)$ розкладання по ортах має вигляд:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Між векторами та їх координатами існує взаємно однозначна відповідність; отже, розкладання векторів по ортах може бути виконано єдиним способом.

Приклад 4.1.

У базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ простору $\mathbb{R}^3$ задано вектори: $\vec{d} = (2, -1, 8)$, $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, -2)$, $\vec{c} = (1, -6, 0)$. Покажемо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ також утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$. Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розв'язання.

Оскільки визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -31 \neq 0,$$

то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базис.

Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ у базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Запишемо

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{d}, \text{ або } \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ця векторна рівність рівносильна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2, \\ 2\alpha - \beta - 6\gamma = -1, \\ 3\alpha - 2\beta = 8. \end{cases}$$

Методом Жордана – Гаусса розв'яжемо систему:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 8 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} II - 2I \to II \\ III - 3I \to III \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left| III - 2II \to III \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 13 & 12 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} I - III \to I \\ III \leftrightarrow II \\ II + 3III \to III \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -12 & -10 \\ 0 & 1 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 31 & 31 \end{array}\right) \sim \left| \frac{1}{31} III \to III \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -12 & -10 \\ 0 & 1 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} I + 12III \to I \\ II - 13III \to II \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = 1$. Таким чином, $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

§ 5. *Проекція вектора на вісь*

Означення 5.1. *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається довжина відрізка A_1B_1 (A_1 і B_1 — проекції точок A та B на вісь l), взята зі знаком плюс, якщо напрям вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ збігається з напрямом одиничного вектора $\vec{l}^0$ осі l, та зі знаком мінус, якщо напрям $\overrightarrow{A_1B_1}$ протилежний напрямку $\vec{l}^0$ (рис. 5.1)

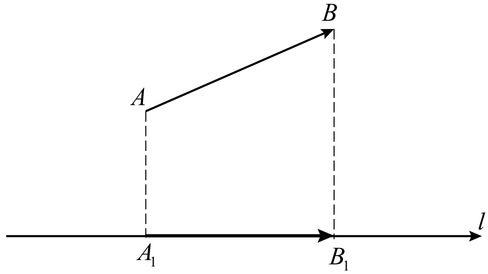

Рисунок 5.1

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначається $Пр_l\overrightarrow{AB}$.

Зазначимо *основні властивості проекцій векторів на вісь*.

1. Якщо $\overrightarrow{AB} \neq 0$, то $Пр_l\overrightarrow{AB} = 0$ в тому і тільки в тому разі, якщо $AB \perp l$.
2. Проекції рівних векторів на одну й ту саму вісь рівні між собою.
3. Якщо A_1 і B_1 — проекції точок A та B на вісь, то

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{l}^{\,0} \cdot Пр_l\ \overrightarrow{AB}.$$

4. Проекція вектора $\alpha\vec{a}$ на довільну вісь l дорівнює проекції на цю саму вісь вектора $\vec{a}$, помноженій на число α:

$$Пр_l\alpha\vec{a} = \alpha Пр_l\vec{a}.$$

5. Проекція вектора на вісь l — дорівнює добуткові довжини цього вектора на косинус кута між ними та додатним напрямом осі l:

$$Пр_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{l}}\right).$$

6. Проекція алгебраїчної суми векторів на вісь l дорівнює відповідній сумі проекцій на ту саму вісь векторів-доданків.

§ 6. *Координати вектора на площині та у просторі*

Означення 6.1. *Координатами вектора* $\vec{a}$ називають його проекції на осі координат Ox, Oy, Oz. Вони позначаються відповідно буквами x, y, z.

$$x = Пр_{Ox}\vec{a},\ y = Пр_{Oy}\vec{a},\ z = Пр_{Oz}\vec{a}.$$

Вектор з координатами x, y, z позначається символом $\vec{a}(x;\ y;\ z)$, наприклад, $\vec{a}(3; -2; 5)$.

Означення 6.2. Вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого суміщається з точкою O (початком системи координат) називається *радіус-вектором точки М*.

За відомими координатами двох векторів можна легко визначити координати результуючого вектора. Також можна легко визначити координати добутку заданого вектора на число.

Якщо в системі координат $\underline{xOy}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають відповідно координати $(a_1; a_2), (b_1; b_2)$, то вектор — сума в тій самій системі xOy має координати

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2).$$

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $\alpha\vec{a}$ в тій самій системі має координати

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1; \alpha a_2).$$

Аналогічно у тривимірному просторі для суми векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ дістанемо

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2; a_3 + b_3),$$

а для добутку вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число α одержимо

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1; \alpha \cdot a_2; \alpha \cdot a_3).$$

Означення 6.2. *n-Вимірним вектором* називають упорядковану сукупність n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і позначають вектор-стовпцем

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$

або вектор-рядком $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Числа $a_i, i = \overline{1, n}$ називають компонентами вектора, або його координатами.

Означення 6.3. *Сумою двох n-вимірних векторів* називають вектор, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент векторів доданків, тобто

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Означення 6.4. *Добутком дійсного числа* α *на вектор* $\vec{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається вектор $\alpha\vec{a}$, компоненти якого дорівнюють добуткам числа α на відповідні компоненти вектора $\vec{a}$:

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Нехай у прямокутній системі координат дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Тоді координати вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Аналогічно у тривимірному просторі вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ з початком $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і кінцем $M_2(x_2, y_2, z_2)$ записується у вигляді

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Довжина вектора визначається за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,\ \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Приклад 6.1.

Дано: $Пр_l\vec{a} = -3,\ Пр_l\vec{b} = 5$. Обчислити проекцію вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ на вісь l.

Розв'язання.

Згідно з умовою задачі, маємо

$$Пр_l\vec{c} = Пр_l\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = Пр_l\vec{a} + 2Пр_l\vec{b} = -3 + 2\cdot 5 = 7.$$

Приклад 6.2.

Перевірити, що точки A (2, 4, 1), B (3, 7, 5), C (4, 10, 9) лежать на одній прямій?

Розв'язання.

Точки A, B, C лежать на одній прямій, якщо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ колінеарні. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = (3-2;\ 7-4;\ 5-1) = (1;\ 3;\ 4),$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(x_C - x_B;\ y_C - y_B;\ z_C - z_B\right),$$

$$\overrightarrow{BC} = (4-3;\ 10-7;\ 9-5) = (1;\ 3;\ 4).$$

Відповідні координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ пропорційні:

$$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BC}}},$$

$$\frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}\ .$$

Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ колінеарні, а це свідчить про те, що точки A, B, C лежать на одній прямій.

Приклад 6.3.

При яких p і q вектори $\vec{a}(p;1;-2)$ та $\vec{b}(2;q;-1)$ колінеарні?

Розв'язання.

З умови колінеарності векторів

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

випливає

$$\frac{p}{2} = \frac{1}{q} = \frac{-2}{-1} = 2\,,$$

$$\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4,\ \frac{1}{q} = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2}\,.$$

Приклад 6.4.

Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, його орт, коли відомо, що $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$.

Розв'язання.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A\}\,;$$

$$\overrightarrow{AB} = \{-1-2;\, 3-(-3);\, 2-(-5)\} = \{-3;\, 6;\, 7\}\,.$$

Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ визначається так:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \text{ або } \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2 + z_{\overrightarrow{AB}}^2}\,;$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{9+36+49} = \sqrt{94}\,.$$

Напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$ обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\,.$$

Отже,

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{94}}, \quad \cos\beta = \frac{6}{\sqrt{94}}, \quad \cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{94}}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}^{орт} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ є ортом (одиничним вектором) вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}^{орт} = \left(\frac{-3}{\sqrt{94}}; \frac{6}{\sqrt{94}}; \frac{7}{\sqrt{94}}\right).$$

Приклад 6.5.

Чи існує вектор, який утворює з координатними осями кути 60°, 120° і 135°?

Розв'язання.

Скористаємося співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

$$\cos^2 60^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 135^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 .$$

Да, існує.

Приклад 6.6.

Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями *Ox, Oy* відповідно кути $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Знайти його координати, якщо довжина дорівнює 2.

Розв'язання.

Обчислимо напрямні косинуси вектора $\vec{a}$:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\beta = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Для знаходження третього напрямного косинуса скористаємося співвідношенням:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 ,$$

звідки

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, умові задачі задовольняють два вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Координати цих векторів знайдемо за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$$

$$a_y = |\vec{a}|\cos\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1;$$

$$a_z = |\vec{a}|\cos\gamma = 2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{2} .$$

Тоді $\vec{a}_1 = \left(1; -1; \sqrt{2}\right)$ і $\vec{a}_2 = \left(1; -1; -\sqrt{2}\right)$.

§ 7. *Поділ відрізка в заданому відношенні*

Теорема 7.1. Якщо точка $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ поділяє відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координати точки M обчислюють за формулами

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (7.1)$$

Наслідок 1. Якщо M є серединою відрізка AB, то $\frac{AM}{MB} = \lambda = 1$. Тоді формули (7.1) поділу відрізку в заданому відношенні можна записати так:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (7.2)$$

За цими формулами знаходять координати середини відрізка.

Наслідок 2. Якщо точка M, яка ділить відрізок AB у відношенні $m : n$, то $\frac{AM}{MB} = \lambda = \frac{m}{n}$. Тоді формули (7.1) можна записати так:

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \quad y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}, \quad z_0 = \frac{nz_1 + mz_2}{n+m}. \qquad (7.3)$$

Приклад 7.1.

Визначити координати точки C на відрізку AB, якщо A (–5; 3; 1), B (2; 4; 4) і $AC : CB = 3 : 2$.

Розв'язання.

Нехай координати шуканої точки C (x_C; y_C; z_C). Враховуючи формули (7.3), маємо при $m : n = 3 : 2$:

$$x_C = \frac{nx_A + mx_B}{n+m}, \quad y_C = \frac{ny_A + my_B}{n+m}, \quad z_C = \frac{nz_A + mz_B}{n+m}.$$

Підставляючи координати кінців відрізку AB, обчислюємо координати точки C:

$$x_C = \frac{2\cdot(-5) + 3\cdot 2}{2+3} = -\frac{4}{5} = -0,8;$$

$$y_C = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 4}{2+3} = \frac{18}{5} = 3,6;$$

$$z_{\underset{C}{\tilde{N}}} = \frac{2\cdot(-1)+3\cdot 4}{2+3} = \frac{10}{5} = 2.$$

Таким чином, C (–0,8; 3,6; 2).

§ 8. *Скалярний добуток двох векторів*

Означення 8.1. *Скалярним добутком двох векторів* називається число (скаляр), яке дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними. Такий добуток позначається символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$, а також символом $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi\,. \tag{8.1}$$

Означення 8.2. *Скалярним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$* називається добуток довжини вектора $\vec{a}$ і проекції на нього вектора $\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| Пр_{\vec{a}}\vec{b}. \tag{8.2}$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих їх координатами $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$, обчислюється за формулою:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \tag{8.3}$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}$;
3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
4. $\forall\vec{a}:\ \vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 \ge 0$;
5. $\forall\vec{a}\ne\vec{0}:\ \vec{a}\cdot\vec{a} > 0$.

Якщо φ — гострий кут, то скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ додатний; якщо φ — прямий кут, то скалярний добуток векторів дорівнює нулю; якщо φ — тупий кут, то скалярний добуток від’ємний.

При множенні двох рівних векторів їх скалярний добуток (8.1) набирає виду

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0 = \left|\vec{a}\right|^2. \tag{8.4}$$

Теорема 8.1 (необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів).

Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні тоді й лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

Формула для знаходження кута між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у n-вимірному просторі $\mathbb{R}^n$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \text{ або } \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}. \qquad (8.5)$$

Означення 8.3. Два вектори називають *ортогональними*, якщо їх добуток дорівнює нулю.

Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$ утворюють ортонормований базис, якщо ці вектори попарно ортогональні й довжина кожного з них дорівнює одиниці, тобто якщо $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ при $i \neq j$, $|\vec{e}_i| = 1$, де $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Вектори $\vec{i} = (1;0;0), \vec{j} = (0;1;0), \vec{k} = (0;0;1)$ ортогональні й утворюють ортонормований базис простору $\mathbb{R}^3$. Базис векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називатимемо канонічним базисом простору $\mathbb{R}^3$. Справедливе таке твердження: будь-який вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ простору $\mathbb{R}^3$ можна записати єдиним способом у вигляді

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Робота A дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ на вектор переміщення $\vec{s}$:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s}. \qquad (8.6)$$

Приклад 8.1.

Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 3 і 7, а кут між їх напрямами становить 30°.

Розв'язання.

Оскільки $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 7, \varphi = 30^0$, то

$$\vec{a}\vec{b} = 3\cdot 7\cdot\cos 30^0 = 21\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10,5\sqrt{3}.$$

Приклад 8.2.

Обчислити роботу рівнодіючої $\vec{F}$ сил, приложених до матеріальної точки, яка під їх дією переміщається прямолінійно з точки $M_1(4,2,-3)$ в точку $M_2(7,4,1)$.

Розв'язання.

Оскільки $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = (4,3,3), \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{s} = (3,2,4)$, то $A = \vec{F}\cdot\vec{s} = = 4\cdot 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 4 = 30$.

Приклад 8.3.

Обчислити $\left|\vec{c}\right|$, якщо $\vec{c} = 5\vec{p} - 2\vec{q}, \left|\vec{p}\right| = 3, \left|\vec{q}\right| = 4, \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

Довжина цього вектора дорівнює

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{\left(\vec{c}, \vec{c}\right)} = \sqrt{\left(5\vec{p} - 2\vec{q}, 5\vec{p} - 2\vec{q}\right)} = \sqrt{25\left(\vec{p}, \vec{p}\right) - 20\left(\vec{p}, \vec{q}\right) + 4\left(\vec{q}, \vec{q}\right)} =$$

$$= \sqrt{25\left|\vec{p}\right|^2 - 20\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\cos\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) + 4\left|\vec{q}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{25 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 4 \cdot 4^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Приклад 8.4.

При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, якщо $\vec{a}(3; -2; 1)$ і $\vec{b}(m; 4; 0,5)$?

Розв'язання.

Скалярний добуток векторів можна обчислити за формулою:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 3 \cdot m + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 0,5 = 3m - 7,5.$$

Враховуючи умову перпендикулярності двох:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0,$$

маємо

$$3m - 7,5 = 0, \ m = 2,5.$$

Приклад 8.5.

Знайти $\left(\vec{c_1}, \vec{c_2}\right)$, коли відомо, що $\vec{c_1} = 5\vec{a} + \vec{b}, \vec{c_2} = 4\vec{a} - \vec{b}, \left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°.

Розв'язання.

Використовуючи властивості та означення скалярного добутку, маємо

$$\vec{c_1} \cdot \vec{c_2} = \left(5\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(4\vec{a} - \vec{b}\right) = 20\vec{a}\vec{a} - 5\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{b} =$$

$$= 20\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2 = 20\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) - \left|\vec{b}\right|^2 = 20 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3\cos 120^\circ - 3^2 = 74.$$

Приклад 8.6.

Дано вектори $\vec{a} = -\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, де $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 5, \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$. Знайти:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

б) $np_{\vec{b}}\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(2\vec{b} - \vec{a}, 4\vec{b}\right)$.

Розв'язання.

а) Використовуючи властивості та означення скалярного добутку, маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-\vec{m} + 6\vec{n}\right) \cdot \left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right) = -3\vec{m}^2 - 4\vec{m}\vec{n} + 18\vec{m}\vec{n} + 24\vec{n}^2 =$$

$$= -3|\vec{m}|^2 + 14|\vec{m}||\vec{n}|\cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) + 24|\vec{n}|^2 = -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + 24 \cdot 5^2 = 518.$$

б) Нехай $\vec{c} = 4\vec{a} - 5\vec{b} = -19\vec{m} + 4\vec{n}$. Тоді

$$\text{ï ð}_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \left(-19\vec{m} + 4\vec{n}\right) \cdot \left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right) = -57\vec{m}^2 - 64|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|\cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) + 16\vec{n}^2 = -148,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{\left(3\vec{m} + 4\vec{n}\right)^2} = \sqrt{9\vec{m}^2 + 24|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|\cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) + 16\vec{n}^2} = \sqrt{316}.$$

Отримаємо

$$np_{\vec{b}}\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right) = -\frac{148}{\sqrt{316}}.$$

в) Нехай $\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{a} = 7\vec{m} + 2\vec{n}, \ \vec{f} = 4\vec{b} = 12\vec{m} + 16\vec{n}$. Тоді

$$\cos\angle\left(\vec{d}, \vec{f}\right) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{f}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{f}|},$$

$$\vec{d} \cdot \vec{f} = \left(7\vec{m} + 2\vec{n}\right) \cdot \left(12\vec{m} + 16\vec{n}\right) = 84|\vec{m}|^2 + 136|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|\cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) + 32|\vec{n}|^2 = 456,$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{\left(7\vec{m} + 2\vec{n}\right)^2} = \sqrt{49|\vec{m}|^2 + 28|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|\cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) + 4|\vec{n}|^2} = \sqrt{156},$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{\left(12\vec{m} + 16\vec{n}\right)^2} = \sqrt{144|\vec{m}|^2 + 384|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|\cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) + 256|\vec{n}|^2} = \sqrt{5056}.$$

Маємо:

$$\cos\left(2\vec{b}-\vec{a},4\vec{b}\right)=\frac{456}{\sqrt{788736}}\approx 0,5\,.$$

Приклад 8.7.

Знайти кут α між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, коли відомо, що $\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=6,\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

Косинус кута між ненульовими векторами можна обчислити за формулою

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}\vec{a}-\vec{b}\vec{b}}{\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)}\cdot\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)}}=$$

$$=\frac{\vec{a}^2-\vec{b}^2}{\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2}\cdot\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2}}=$$

$$=\frac{\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2}{\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)+\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)+\left|\vec{b}\right|^2}}=$$

$$=\frac{1-36}{\sqrt{1+2\cdot1\cdot6\cos\frac{\pi}{3}+36}\cdot\sqrt{1-2\cdot1\cdot6\cos\frac{\pi}{3}+36}}=\frac{-35}{\sqrt{43}\cdot\sqrt{31}}=\frac{-35}{\sqrt{1333}}\,.$$

Звідки,

$$\alpha=\arccos\left(\frac{-35}{\sqrt{1333}}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{35}{\sqrt{1333}}\right).$$

Приклад 8.8.

Обчислити кут між векторами $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}+5\vec{b}$, коли відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні.

Розв'язання.

Оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори, то

$$\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\left(3\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}+5\vec{b}\right)=3\left(\vec{a},\vec{a}\right)+15\left(\vec{a},\vec{b}\right)+2\left(\vec{b},\vec{a}\right)+10\left(\vec{b},\vec{b}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2=1\\(\vec{b},\vec{b})=|\vec{b}|^2=1\\(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})=0\end{array}\right|=3+10=13.$$

$$|\vec{p}|=\sqrt{(\vec{p},\vec{p})}=\sqrt{(3\vec{a}+2\vec{b},3\vec{a}+2\vec{b})}=$$

$$=\sqrt{9(\vec{a},\vec{a})+12(\vec{a},\vec{b})+4(\vec{b},\vec{b})}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\,.$$

$$|\vec{q}|=\sqrt{(\vec{q},\vec{q})}=\sqrt{(\vec{a}+5\vec{b},\vec{a}+5\vec{b})}=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})+10(\vec{a},\vec{b})+25(\vec{b},\vec{b})}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}.$$

Тоді,

$$\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{4}\,.$$

Приклад 8.9.

За координатами точок $A(-5,1,6)$, $B(1,4,3)$, $C(6,3,9)$ знайти:

а) модуль вектора $\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;
б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;
в) проекцію вектора $\overrightarrow{BC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
г) координати точки *M*, яка ділить відрізок *AB* у відношенні $\frac{1}{3}$.

Розв'язання.

а) Послідовно знаходимо $\overrightarrow{AB}=(6,3,-3)$, $\overrightarrow{BC}(5,-1,6)$, $4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$ $=(29,11,-6)$, $\left|4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998}\,.$

б) Маємо $\vec{a}=(29,11,-6)$, $\vec{b}=(5,-1,6)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=29\cdot5+11\cdot(-1)+(-6)\cdot6=98\,.$$

в) Маємо $пр_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{BN}=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{5\cdot6+(-1)\cdot3+6\cdot(-3)}{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{54}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,.$

г) Маємо: $\lambda=\dfrac{1}{3}$, $x_M=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$, $y_M=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$, $z_M=\dfrac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}\,.$

Тому,

$$x_M = \frac{-5 + \frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{7}{2},\ y_M = \frac{1+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{7}{4},\ z_M = \frac{6+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{21}{4},\ M\left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{21}{4}\right).$$

Приклад 8.10.

Нехай A, B, C, D — довільні точки простору. Довести, що $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$.

Розв'язання.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AD}\right)+\left(-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0.$$

Приклад 8.11.

Перевірити, що для будь-яких двох векторів $\vec{a},\vec{b}$ виконується рівність

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right).$$

Який геометричний факт вона виражає?

Розв'язання.

Спочатку перевіримо рівність:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=$$

$$=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right).$$

Геометричний факт: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Приклад 8.12.

Для яких векторів $\vec{a},\vec{b}$ вектори $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ взаємно перпендикулярні? Який геометричний факт виражає знайдений результат?

Розв'язання.

$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$. Діагоналі паралелограма перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли він є ромбом.

Приклад 8.13.

$\overrightarrow{AB} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j},\ \overrightarrow{AC} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Обчислити площу трикутника $\triangle ABC$.

Розв'язання.

Природно скористатися формулою $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Маємо:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},\ \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \pm\frac{\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Оскільки $0 < \varphi < \pi$, то $\sin\varphi > 0$. Остаточно дістаємо:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|.$$

Приклад 8.14.

Обчислити гострий кут між медіанами рівнобедреного прямокутного трикутника, проведеними з вершин гострих кутів.

Розв'язання.

Нехай $\triangle ABC$ — прямокутний рівнобедрений трикутник з катетами AC і BC, $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$ — його медіани. Позначимо $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Тоді

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a},\ \overrightarrow{B_1B} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{B_1B} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2 = t^2,$$

де $t = \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$. Маємо

$$\left|\overrightarrow{B_1B}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2 = \frac{5}{4}t^2,$$

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{B_1B}\right) = \frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{B_1B}}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1B}\right|} = \frac{4}{5}.$$

Приклад 8.15.

Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1$ і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Довести, що $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = -\dfrac{3}{2}$.

Розв'язання.

Перший спосіб.

$$0 = \vec{0}\cdot\vec{0} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\left(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}\right) =$$

$$=3+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}.$$

Другий спосіб.

Вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють правильний трикутник. Тому $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$. Звідки, $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}$.

Приклад 8.16.

До вершини куба прикладено три сили, які за величиною дорівнюють 1, 2, 3 і напрямлені вздовж діагоналей граней куба, що збігаються в цій вершині. Визначити величину рівнодійної цих трьох сил, а також кути, які вона утворює з напрямами заданих сил.

Розв'язання.

Нехай $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — одиничні вектори, напрямлені уздовж ребер куба, які збігаються у заданій вершині. Тоді з точністю до перейменувань цих векторів задані сили

$$\vec{F_1}=\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{F_2}=\left(\frac{2}{\sqrt{2}};0;\frac{2}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{F_3}=\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}};0\right).$$

Їх рівнодійна

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\left(\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{4}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Оскільки $\left|\vec{F}\right|=5,\ \left|\vec{F_1}\right|=1,\ \left|\vec{F_2}\right|=2,\ \left|\vec{F_3}\right|=3$, то

$$\cos\angle\left(\vec{F_1},\vec{F}\right)=\frac{\vec{F_1}\cdot\vec{F}}{\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{F_1}\right|}=\frac{7}{10},\ \cos\angle\left(\vec{F_2},\vec{F}\right)=\frac{\vec{F_2}\cdot\vec{F}}{\left|\vec{F_2}\right|\left|\vec{F}\right|}=\frac{4}{5},$$

$$\cos\angle\left(\vec{F_3},\vec{F}\right)=\frac{\vec{F_3}\cdot\vec{F}}{\left|\vec{F_3}\right|\cdot\left|\vec{F}\right|}=\frac{9}{10}.$$

Приклад 8.17.

Нехай $\left\{\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right\}$ — ортогональний $\left(\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=\vec{q}\cdot\vec{r}=0\right)$, але, взагалі кажучи, не нормований базис (вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ не обов'язково мають довжину 1). Як записати скалярний добуток векторів через їх координати в цьому базисі?

Розв'язання.

Якщо $\vec{a} = x_1\vec{p} + x_2\vec{q} + x_3\vec{r},\ \vec{b} = y_1\vec{p} + y_2\vec{q} + y_3\vec{r}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{p}\right|^2 x_1y_1 + \left|\vec{q}\right|^2 x_2y_2 + \left|\vec{r}\right|^2 x_3y_3$.

§ 9. *Векторний та мішаний добутки векторів*

Означення 9.1. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ зі спільним початком називається *правою*, якщо найменший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ з кінця вектора $\vec{c}$ спостерігається проти годинникової стрілки. У протилежному випадку трійка називається лівою.

Означення 9.2. *Векторним добутком векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ (рис. 9.1), який позначається символом $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ $\left(\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\right)$ і задовольняє наступним умовам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними, тобто

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b};$$

3) вектор $\vec{c}$ має напрямок такий, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою.

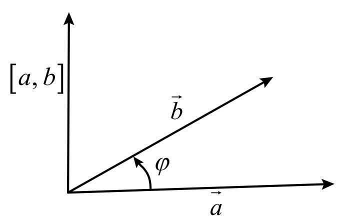

Рисунок 9.1

Основні властивості векторного добутку:

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$;

2. $\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$;

3. $\left[\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{c}, \vec{b}\right]$;
$\left[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$;

4. $\left[\vec{a}, \vec{a}\right] = 0$ для будь-якого вектора $\vec{a}$;

5. $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 0$;

6. Довжина (або модуль) векторного добутку $\left\| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right\|$ дорівнює площині S паралелограма (рис. 8.2), побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_{\square} = \left\| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right\|$.

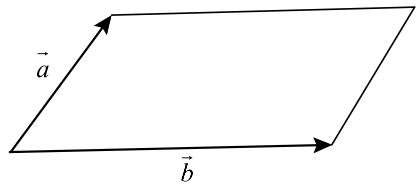

Рисунок 9.2

Якщо два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задані своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$, то векторний добуток цих векторів має вигляд:

$$\left[\vec{a}, \vec{b} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \qquad (9.1)$$

За допомогою векторного добутку можна обчислити момент $\overrightarrow{M}$ сили $\vec{F}$, приложеної до точки B приложеної до точки тіла, закріпленого в точці A:

$$\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{F} \right]. \qquad (9.2)$$

Приклад 9.1.

Обчислити координати моменту $\overrightarrow{M}$ сили $\vec{F} = (3, 2, 1)$, приложеної до точки A (–1, 2, 4), відносно початку координат.

Розв'язання.

Маємо за формулою (9.2)

$$\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{DA}, \vec{F} \right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, 13, -8).$$

Приклад 9.2.

Знайти скалярний і векторний добутки векторів $\overrightarrow{c_1} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2} = -4\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{b}\{-2; 4; -2\}$. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{c_1}$ і $\overrightarrow{c_2}$? Чи ортогональні вектори $\overrightarrow{c_1}$ і $\overrightarrow{c_2}$?

Розв'язання.

$$\overrightarrow{c_1}=2\vec{a}+3\vec{b}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1\\2\cdot(-2)\\2\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot(-2)\\3\cdot 4\\3\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+(-6)\\-4+12\\6+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{c_2}=-4\vec{a}+\vec{b}=-4\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\cdot 1\\-4\cdot(-2)\\-4\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\\-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4+(-2)\\8+4\\-12+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\12\\-14\end{pmatrix}$$

Скалярний добуток:

$$\left(\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2}\right)=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2\,;$$

$$\left(\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2}\right)=-4\cdot(-6)+8\cdot 12+0\cdot(-14)=24+96=120\,.$$

Векторний добуток:

$$\left[\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right\};$$

$$\left[\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&8&0\\-6&12&-14\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot(-14)-12\cdot 0\\-\left(-4\cdot(-14)-(-6)\cdot 0\right)\\-4\cdot 12-(-6)\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-112\\-56\\0\end{pmatrix}.$$

Умова колінеарності векторів $\overrightarrow{c_1}$ і $\overrightarrow{c_2}$:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2};\quad \frac{-4}{-6}=\frac{8}{12}\neq\frac{0}{-14}\Rightarrow \text{ вектори } \overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2} \text{ неколінеарні.}$$

Умова ортогональності $\overrightarrow{c_1}$ і $\overrightarrow{c_2}$:

$$\left(\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2}\right)=0;\quad \left(\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2}\right)=120\neq 0\Rightarrow \text{ вектори } \overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2} \text{ неортогональні.}$$

Приклад 9.3.

Відомі вершини трикутника $ABC: A(2,-1,4), B(4,0,2), C(2,-3,1)$. Обчислити його площу і косинус внутрішнього кута $\angle B$.

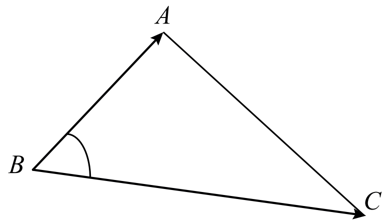

Рисунок 9.3

Розв'язання.

Внутрішній кут $\angle B$ трикутника ABC — це кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ (рис. 9.3). У даному випадку

$$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}x_A-x_B\\ y_A-y_B\\ z_A-z_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4\\ -1-0\\ 4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}x_C-x_B\\ y_C-y_B\\ z_C-z_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4\\ -3-0\\ -1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -3\\ -3\end{pmatrix}.$$

$$\cos\angle B=\frac{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|};$$

$$\cos\angle B=\frac{-2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-3)+2\cdot(-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-3)^2}}=$$

$$=\frac{4+3-6}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+9+9}}=\frac{1}{3\sqrt{22}}.$$

Площу трикутника обчислюємо за формулою

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|.$$

Знаходимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$$\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -3 & -3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 3-(-3)\cdot 2\\ -\left((-2)\cdot(-3)-(-2)\cdot 2\right)\\ (-2)\cdot(-3)-(-2)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+6\\ -6+4\\ 6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 4\end{pmatrix}.$$

Отже, площа трикутника

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+(-2)^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{81+4+16}=\frac{\sqrt{101}}{2}\ .$$

Приклад 9.4.

Спростити вираз $\left[2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right]$.

Розв'язання.

Використовуючи властивості векторного добутку, маємо

$$\left[2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right]=2\left[\vec{a},\vec{a}\right]-2\left[\vec{a},\vec{b}\right]+2\left[\vec{a},\vec{c}\right]-\left[\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},\vec{c}\right]=$$

$$=-2\left[\vec{a},\vec{b}\right]+2\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},\vec{c}\right]=-\left[\vec{a},\vec{b}\right]+2\left[\vec{a},\vec{c}\right]-\left[\vec{b},\vec{c}\right].$$

Приклад 9.5.

Обчислити площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо $\left|\vec{p}\right|=5, \left|\vec{q}\right|=3, \left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює

$$S_{\square}=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

$$S_{\square}=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\left[\vec{p}+2\vec{q},\vec{p}-3\vec{q}\right]\right|=\left|\left[\vec{p},\vec{p}\right]-3\left[\vec{p},\vec{q}\right]+2\left[\vec{q},\vec{p}\right]-6\left[\vec{q},\vec{q}\right]\right|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\left[\vec{p},\vec{p}\right]=0;\\ \left[\vec{q},\vec{q}\right]=0;\\ \left[\vec{p},\vec{q}\right]=-\left[\vec{q},\vec{p}\right]\end{matrix}\right\|=\left|5\left[\vec{p},\vec{q}\right]\right|=5\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=5\cdot 5\cdot 3\cdot\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=5\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{75}{2}=37{,}5$$

Приклад 9.6.

Обчислити площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(8;4;1)$ і $\vec{b}=(2;-2;1)$.

Розв'язання.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює

$$S_{\square} = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

Знаходимо координати вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right),$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot1-1\cdot(-2) \\ -(8\cdot1-1\cdot2) \\ 8\cdot(-2)-4\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -24 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо модуль вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$:

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = 6\sqrt{1^2+(-1)^2+(-4)^2} = 18\sqrt{2}.$$

Отже, $S_{\square} = 18\sqrt{2}$.

Приклад 9.7.

Знайти вектор $\vec{p}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3;1;2)$ та $\vec{b} = (1;3;2)$ і задовольняє умові $\left(\vec{p},\vec{c}\right) = 8, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{p}$ колінеарний векторному добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, отже, $\vec{p} = \lambda\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Оскільки

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2-3\cdot2 \\ -(3\cdot2-1\cdot2) \\ 3\cdot3-1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix},$$

то

$$\vec{p} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\lambda \\ -4\lambda \\ 8\lambda \end{pmatrix}.$$

Невідомий коефіцієнт λ знаходимо з умови $\left(\vec{p},\vec{c}\right) = 8$. Маємо:

$$-4\lambda\cdot 1-4\lambda\cdot(-1)+8\lambda\cdot 2=8,$$

$$16\lambda=8,$$

$$\lambda=\frac{1}{2}.$$

Остаточно дістаємо координати вектора

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}.$$

Якщо два даних вектори перемножимо векторно, а потім результат $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ (вектор-добуток) помножимо на третій вектор $\vec{c}$ скалярно, то одержимо число. Такий добуток векторів називається мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Для позначення мішаного добутку векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ вживається символ

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

Основні властивості мішаного добутку векторів:

1. $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{c},\vec{a}\right],\vec{b}\right)$ (від циклічної перестановки векторів — співмножників мішаний добуток не змінюється);
2. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (у мішаному добутку знаки скалярного і векторного множення можна міняти місцями);
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (від перестановки співмножників мішаний добуток змінює знак на протилежний);
4. геометричний зміст мішаного добутку: абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах – співмножниках

$$V_{паралелепіпеда}=\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|, \tag{9.3}$$

$$V_{тетраедра}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|; \tag{9.4}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ компланарні.}$$

Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a}\left(a_x,a_y,a_z\right),\vec{b}\left(b_x,b_y,b_z\right),\vec{c}\left(c_x,c_y,c_z\right)$, то мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ визначається формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (9.5)$$

Приклад 9.8.

Дані вектори $\vec{a}(1,3,1)$, $\vec{b}(-2,4,-1)$, $\vec{c}(2,4,-6)$. Встановіть компланарні чи дані вектори, у випадку їх некомпланарності з'ясувати яку трійку (праву чи ліву) вони утворюють, і обчислить об'єм, побудованого на них паралелепіпеда.

Розв'язання.

Обчислимо

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}=-78<0.$$

Таким чином, вектори не компланарні й утворюють ліву трійку. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, обчислюється за формулою $V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$:

$$V=\left|-78\right|=78 \text{ куб. од.}$$

Приклад 9.9.

Чи належать точки $A(1;-1;-2)$, $B(6;5;5)$, $C(7;6;7)$ і $D(5;4;3)$ однієї площині?

Розв'язання.

Точки *A, B, C* и *D* лежать в одній площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ й $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Знайдемо координати цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}=\left\{x_B-x_A;\, y_B-y_A;\, z_B-z_A\right\},$$

$$\overrightarrow{AB}=\left\{6-1;\, 5-(-1);\, 5-(-2)\right\}=\left\{5;\, 6;\, 7\right\};$$

$$\overrightarrow{AC}=\left\{x_C-x_A;\, y_C-y_A;\, z_C-z_A\right\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\left\{7-1;\, 6-(-1);\, 7-(-2)\right\}=\left\{6;\, 7;\, 9\right\};$$

$$\overrightarrow{AD}=\left\{x_D-x_A;\, y_D-y_A;\, z_D-z_A\right\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\left\{5-1;\, 4-(-1);\, 3-(-2)\right\}=\left\{4;\, 5;\, 5\right\}.$$

Перевіримо їх компланарність

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\overrightarrow{AC}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}} \\ x_{\overrightarrow{AD}} & y_{\overrightarrow{AD}} & z_{\overrightarrow{AD}} \end{vmatrix},$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 175 + 216 + 210 - 196 - 225 - 180 = 0 .$$

Точки *A, B, C* й *D* лежать в одній площині.

Приклад 9.10.

Спростити вираз $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\right)$.

Розв'язання.

Використовуючи властивості векторного та мішаного добутків, маємо

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\right) =$$

$$= \underbrace{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a}}_{=0} + \underbrace{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b}}_{=0} + 2\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} - \underbrace{\vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{a}}_{=0} - \vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{b} - \underbrace{2\vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{c}}_{=0} = 3\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} .$$

Приклад 9.11.

Обчислити об'єм піраміди з вершинами у в точках *A* (2; –1; 1), *B* (5; 5; 4), *C* (2; –1; 1), *D* (4; 1; 3).

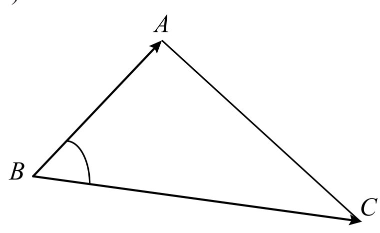

Рисунок 9.4

Розв'язання.

Об'єм трикутної піраміди, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (рис. 9.4), обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| .$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(5-2;\, 5-(-1);\, 4-1\right) = (3;\, 6;\, 3);$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(x_C - x_A;\, y_C - y_A;\, z_C - z_A\right),$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(3-2;\, 2-(-1);\, -1-1\right) = (1;\, 3;\, -2);$$

$$\overrightarrow{AD} = \left(x_D - x_A;\, y_D - y_A;\, z_D - z_A\right),$$

$$\overrightarrow{AD} = \left(4-2;\, 1-(-1);\, 3-1\right) = (2;\, 2;\, 2).$$

Тоді,

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left|18+6-24-18-12+12\right| = 3 .$$

Відомо, що об’єм піраміди можна обчислити за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H .$$

Звідки, висота дорівнює

$$H = \frac{3V}{S_{осн.}} .$$

Обчислимо $S_{осн.}$ — площу трикутника ΔABC, скориставшись геометричним змістом векторного добутку

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\| .$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-21;\, 9;\, 3) ,$$

$$\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\| = \sqrt{(-21)^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{531} = 3\sqrt{59} ,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{59}}{2} .$$

Тоді

$$H = \frac{3 \cdot 3}{3\sqrt{59}} = \frac{3\sqrt{59}}{59}.$$

Отже, $V = 3$ куб.од., $H = \dfrac{3\sqrt{59}}{59}$ лін.од.

§ 10. *Симетрія у просторі*

Розрізняють три види симетрії:

- симетрія відносно точки;
- симетрія відносно прямої;
- симетрія відносно площини.

Означення 10.1. Точки M і M_1 називаються *симетричними відносно точки O*, якщо точка O — середина відрізка MM_1. Тоді точку O називають *центром симетрії*.

Означення 10.2. Точки M і M_1 називаються *симетричними відносно прямої l*, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка MM_1 і проходить через його середину.

Означення 10.3. Точки M і M_1 називаються *симетричними відносно площини* α, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка MM_1 і проходить через його середину.

Точки, симетричні точці M (x, y, z) відносно координатних площин, осей і початку координат, мають координати:

Елемент симетрії	Координати симетричної точки M_1
Площина Oxy	$(x; y; -z)$
Площина Oxz	$(x; -y; z)$
Площина Oyz	$(-x; y; z)$
Вісь Ox	$(x; -y; -z)$
Вісь Oy	$(-x; y; -z)$
Вісь Oz	$(-x; -y; z)$
Початок координат O (0, 0, 0)	$(-x; -y; -z)$

§ 11. *Паралельне перенесення у просторі*

Означення 11.1. *Паралельним перенесенням фігури* Ф у напрямку променя OA на відстань b (або вектор $\overrightarrow{OA}$) називається перетворення фігури Ф у фігуру $Ф_1$, унаслідок якого кожна точка X фігури Ф переходить у точку X_1 фігури $Ф_1$ так, що промені XX_1 і OA співнапрямлені і $XX_1 = b$. Співнапрямлені промені лежать по один бік від початку одного з них.

Паралельне перенесення у прямокутній системі координат, яке переводить точку $M(x, y, z)$ у точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ можна задати формулами:

$$x_1 = x + a, y_1 = y + b_1, z_1 = z + c \qquad (11.1)$$

де a, b, c — деякі числа, одні й ті самі для всіх точок простору при заданому паралельному перенесенні.

Зразки модульної контрольної роботи з теми «Векторна алгебра»

Варіант 1

1. Що називається мішаним добутком трьох векторів? Перелічіть основні властивості мішаного добутку векторів. Як виражається мішаний добуток трьох векторів через координати векторів? У чому полягає умова компланарності векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

2. Дайте означення векторного добутку двох векторів. Перелічить основні властивості векторного добутку. Як виражається векторний добуток векторів через координати векторів? У чому полягає умова колінеарності векторів $\vec{a}, \vec{b}$?

3. A, B — дві протилежні вершини паралелепіпеда. Ребра AE, AF, AG цього паралелепіпеда мають довжину 1 і утворюють між собою однакові кути, які дорівнюють α. 1) Визначити довжину діагоналі AB. 2) Знайти кут між діагоналлю AB і ребром AE.

4. Відомо, що $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

5. Для яких ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?

6. Задано точки: $A(2; -3; 5)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(6, 1, 19)$, $D(9, -5, 12)$. Визначити:

   1) одиничний вектор напрямку $\overrightarrow{AB}$;
   2) косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$;

3) чи лежать точки A, B, C, D в одній площині;

4) площу чотирикутника $ABCD$.

7. Задано вектори: $\vec{a}(3;1;2), \vec{b}(-4;3;-1), \vec{c}(2;3;4), \vec{d}(14;14;20)$.

Визначити:

1) орієнтацію трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

2) об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Варіант 2

1. Дайте означення скалярного добутку двох векторів. Як виражається скалярний добуток двох векторів з використанням проекції одного вектора на другий? Перелічіть основні властивості скалярного добутку. Як виражається скалярний добуток векторів через координати векторів? У чому полягає умова ортогональності векторів $\vec{a}, \vec{b}$?

2. Нехай у прямокутній системі координат задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Чому дорівнюють координати точки C (x, y, z), що ділить відрізок AB у відношенні λ : а) $\lambda = 1$; б) $\lambda = \frac{m}{n}$?

3. S – довільна точка простору, $ABCDEF$ — правильний шестикутник, Q — його центр. Виразити вектори $\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SE}, \overrightarrow{SF}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$.

4. Відомо, що $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 23, |\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

5. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Довести, що $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{-3}{2}$?

6. Задано точки: A (3; –1; 2), B (1; 2; –1), C (–1, 1, –3), D (3, –5, 3). Визначити:

1) одиничний вектор напрямку $\overrightarrow{AB}$;

2) косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$;

3) чи лежать точки A, B, C, D в одній площині;

4) площу чотирикутника $ABCD$.

7. Задано вектори: $\vec{a}(5;7;-2), \vec{b}(-3;1;3), \vec{c}(1;-4;6), \vec{d}(14;9;-1)$.

Визначити:

1) орієнтацію трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

2) об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються колінеарними?
3. Які вектори називаються компланарними?
4. Перелічіть лінійні операції.
5. Що називається сумою двох векторів?
6. Дайте означення добутку вектора $\vec{x}$ на число α.
7. Дайте означення базису в E_2, E_3.
8. Що називається розкладом вектора за базисом в E_2, E_3?
9. Нехай задані координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у деякому базисі. Чому дорівнюють координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$, $\lambda\vec{a}$ у тому ж базисі?
10. Який базис називається ортогональним?
11. Який базис називається ортонормованим?
12. Що називається прямокутною системою координат на площині; у просторі?
13. Що називається радіусом – вектором точки M?
14. Нехай у прямокутній системі координат задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$; модуль вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$?
15. Нехай у прямокутній системі координат задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Чому дорівнюють координати точки C (x, y, z), що ділить відрізок AB у відношенні λ: а) $\lambda = 1$; б) $\lambda = \dfrac{m}{n}$?
16. Дайте означення скалярного добутку двох векторів.
17. Як виражається скалярний добуток двох векторів з використанням проекції одного вектора на другий?
18. Який фізичний зміст скалярного добутку?
19. Перелічіть основні властивості скалярного добутку.
20. Як виражається скалярний добуток векторів через координати векторів?
21. Чому дорівнює кут φ між ненульовими векторами $\vec{a}, \vec{b}$?
22. Дайте означення векторного добутку двох векторів.
23. Який фізичний зміст векторного добутку векторів?
24. Який геометричний зміст модуля векторного добутку двох неколінеарних векторів?
25. Перелічить основні властивості векторного добутку.
26. Як виражається векторний добуток векторів через координати векторів?
27. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
28. Перерахуйте основні властивості мішаного добутку векторів.
29. Як виражається мішаний добуток трьох векторів через координати векторів?
30. У чому полягає умова ортогональності векторів $\vec{a}, \vec{b}$?
31. У чому полягає умова колінеарності векторів $\vec{a}, \vec{b}$?
32. У чому полягає умова компланарності векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА»

Варіант 1

1. Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\, \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\, \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=-3$, $\beta=3$, $\vec{a}=\{-3;\, 1;\, 1\}$, $\vec{b}=\{0;\, 2;\, 1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{0;\, -4;\, 1\}$, $\vec{b}=\{-5;\, \beta;\, 1\}$, $\vec{c}=\{1;\, 2;\, 3\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{-1;\, -1;\, -3\}$ і $\vec{b}=\{-2;\, 0;\, 3\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\, Ox\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=94$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: $A(-1;-1;-3)$, $B(2;-2;-1)$, $C(-3;-2;-1)$. Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–2; 2; 1), B (3; –1; 2), C (1; 3; –3); D (–3; –3; –3). Обчислити:

а) $\left|2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(2\overrightarrow{AB},\, -2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[2\overrightarrow{AB},\, -2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\, \left[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-1;-5;0\}$, $\vec{b}=\{1;4;3\}$, $\vec{c}=\{-3;3;-1\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{3;-6;10\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-3;-5;-1\}$, $\vec{b}=\{4;4;-5\}$, $\vec{c}=\{1;-1;4\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=-15$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=-8$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=17$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)\left(4\vec{u}+3\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=-2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{v}=-3\vec{a}-4\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,6$.

9. При якому значенні параметра p трапеція $ABCD$ з вершинами А (–3; 2), B (–4;6); C (0; 7); D (5; p) прямокутна?

10. При якому значенні α точки A (–1; –1;–4), B (4; 2; –1), C (5; 3; 3), D (–4; 5; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=4$, $\left|\vec{q}\right|=3$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

12. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=\{-3;1;3\}$ на напрямок вектора $\overrightarrow{AB}$, де A (7; 3; –2), B (8; 2; –2).

13. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут 30°, $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=1$. Знайти довжину вектора $\vec{p}$, що дорівнює векторному добутку векторів $(7\vec{a}-2\vec{b})$ і $(2\vec{a}+3\vec{b})$.

14. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$, де $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ — взаємно перпендикулярні орти.

15. Визначити значення m, за яким вектори $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{i}+(m+1)\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ будуть компланарні?

16. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, які дорівнюють $\dfrac{\pi}{2}$. Обчислити $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\left|\vec{c}\right|=8$.

17. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a}\left(8,-15,3\right)$, утворює гострий кут з віссю Ox. Знайти його координати, якщо $\left|\vec{m}\right|=51$.

Варіант 2

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=3$, $\beta=-2$, $\vec{a}=\{-3;1;-3\}$, $\vec{b}=\{3;-2;2\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{0;2;-1\}$, $\vec{b}=\{0;\beta;0\}$, $\vec{c}=\{-1;-5;-5\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{-4;1;-3\}$ і $\vec{b}=\{1;-1;-1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}, \vec{x}\perp\vec{b}$,. $\angle\left(\vec{x}, Ox\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=74$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (3; –2; 3); B (–1; 3; 2), C (–3; –2; –3). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (1; –2; –3), B (–2; –1; 2), C (1; 1; –2), D (3; –3; 2). Обчислити:

а) $\left|-2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-2\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-2\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-3;4;0\}$, $\vec{b}=\{-3;-3;5\}$, $\vec{c}=\{5;-1;3\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-31;-8;0\}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-2;-1;-1\}$, $\vec{b}=\{1;0;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;4;3\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x}, \vec{a}\right)=10$, $\left(\vec{x}, \vec{b}\right)=-11$, $\left(\vec{x}, \vec{c}\right)=2$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(4\vec{u}-4\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=4\vec{a}-4\vec{b}, \vec{v}=-4\vec{a}-3\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=3, \left|\vec{b}\right|=2, \varphi=\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right), \cos\varphi=0,3.$

9. При якому значенні параметра *p* трапеція *ABCD* з вершинами *A* (– 3; –5), *B* (– 4; –1), *C* (0; 0), *D* (*p*; –3) прямокутна?

10. При якому значенні α точки *A* (–3; 5; 2), *B* (5; 3; –1), *C* (–1; 3; –3), *D* (α; –5; 1) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}, \vec{b}=5\vec{p}+\vec{q}; \left|\vec{p}\right|=2, \left|\vec{q}\right|=3, \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{2}.$

12. Знайти одиничний вектор, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$

13. Обчислити момент сили $\vec{f}=\{2;-4;5\}$, що прикладена до точки *A* (4; –2; 3), відносно *B* (3; 2; –1).

14. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, якщо *A* (5; 2; 0), *B* (2; 5; 0), *C* (1; 2; 4), *D* (– 1; 1; 1).

15. Знайти модуль вектора $\vec{a}=-\vec{m}+2\vec{n}$, де $\vec{m}, \vec{n}$ — одиничні вектори, кут між якими дорівнює 45°.

16. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}\left(4,-2,-3\right), \vec{b}\left(0,1,3\right)$, утворює з віссю *Oy* тупий кут. Знайти його координати, якщо $\left|\vec{x}\right|=26.$

17. Вектори $\overrightarrow{AB}=\left(2,6,-4\right), \overrightarrow{AC}=\left(4,2,-2\right)$ співпадають зі сторонами ΔABC. Визначити координати векторів, приложених до вершин трикутника і співпадаючих з його медіанами *AM*, *BN*, *CP*.

Варіант 3

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|, \left(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right), \left[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=2, \beta=-3, \vec{a}=\{-3; 3; 1\}, \vec{b}=\{3; 0; 2\}.$

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-1; 4; -3\}, \vec{b}=\{-4; \beta; 3\}, \vec{c}=\{1; -5; 4\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{-2; 1; -5\}$ і $\vec{b}=\{-1; -5; -1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}, \vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x}, Oz\right)$— тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=806$. Знайти абсцису вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: *A* (–2; 3; 1), *B* (1; – 2; 3), *C* (–1; – 3; –3). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–2; –1; –1), B (1; 3; –3), C (–2; 3; 1), D (–2; 1; –2). Обчислити:

а) $\left|-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-3\overrightarrow{AB},\ -4\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-3\overrightarrow{AB},\ -4\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{1;\ -2;\ -5\}$, $\vec{b}=\{4;\ -4;\ 3\}$, $\vec{c}=\{-5;\ -4;\ -3\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-11;\ -2;\ 22\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{4;\ 0;\ 1\}$, $\vec{b}=\{-1;\ -2;\ -2\}$, $\vec{c}=\{4;\ 3;\ 2\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\ \vec{a}\right)=-8$, $\left(\vec{x},\ \vec{b}\right)=-7$, $\left(\vec{x},\ \vec{c}\right)=-1$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-\vec{u}-4\vec{v}\right)\left(-3\vec{u}-2\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{v}=3\vec{a}+2\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,9$.

9. Задані вершини чотирикутника A (3; –5), B (1; –3), C (5; –3), D (p; –8). При якому значенні параметра p діагоналі AC і BD перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки A (2; –4; 1), B (–5; 0; 1), C (1; –1; 0), D (0; α; 5) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=2$, $\left|\vec{q}\right|=1$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

12. У трикутнику ABC задані координати вершин A (–1; –2; 4), B (–4; –2; 0), C (3; –2; 1). Обчислити його зовнішній кут при вершині B.

13. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $3\vec{a}-\vec{b}$ і $2\vec{b}-\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, а кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 150°.

14. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=\{6;3;4\}, \vec{b}=\{-1;-2;-1\}, \vec{c}=\{2;1;2\}$.

15. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$, $\angle(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.

16. Дано вершини трикутника: *A* (1; –1; 2), *B* (5; –6; 2), *C* (1; 3; –1). Обчислити довжину його висоти, проведеної з вершини *B* на сторону *AC*.

17. Два вектори $\vec{a}(2,-3,6)$, $\vec{b}(-1,2,-2)$ приложені до однієї точки. Визначити координати вектора $\vec{c}$, напрямленого за бісектрисою кута між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, за умови, що $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$.

Варіант 4

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$, $(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b})$, $[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}]$, якщо $\alpha=2$, $\beta=2$, $\vec{a}=\{2;2;3\}$, $\vec{b}=\{-3;-2;2\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{1;-4;1\}$, $\vec{b}=\{4;\beta;0\}$, $\vec{c}=\{-3;-3;-4\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{0;2;-3\}$ і $\vec{b}=\{-3;3;-1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}, \vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle(\vec{x}, Oz)$ — тупий, $|\vec{x}|^2=166$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: *A* (–3; –3; –1), *B* (0; –3; –1), *C* (3; 1; –1). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника *ABC*;

г) координати вектора з початком в точці *C*, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: *A* (3; 1; –3), *B* (–3; 3; 1), *C* (–1; 1; 1), *D* (1; 0; 2). Обчислити:

а) $|4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}|$;

б) $\left(4\overrightarrow{AB},\, 2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[4\overrightarrow{AB},\, 2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника *ABC*;

е) об'єм тетраедра *ABCB*;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини *A*;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини *D* перпендикулярно грані *ABC*;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки *D* всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2;\, -4;\, -3\}$, $\vec{b} = \{4;\, 2;\, -4\}$, $\vec{c} = \{2;\, 5;\, 5\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d} = \{-22;\, -41;\, -15\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a} = \{3;\, -3;\, -4\}$, $\vec{b} = \{0;\, 1;\, 1\}$, $\vec{c} = \{-3;\, 4;\, -2\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\, \vec{a}\right) = 1$, $\left(\vec{x},\, \vec{b}\right) = 1$, $\left(\vec{x},\, \vec{c}\right) = 7$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(3\vec{u} + 3\vec{v}\right)\left(-\vec{u} - \vec{v}\right)$, якщо $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\varphi = \angle\left(\vec{a},\, \vec{b}\right)$, $\cos\varphi = 0{,}6$.

9. Задані вершини чотирикутника *A* (3; 1), *B* (0; 4), *C* (5; 3), *D* (6; *p*). При якому значенні параметра *p* діагоналі *AC* і *BD* перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки *A* (–3; 3; 0), *B* (–1; –4; 1), *C* (–2; 2; 5), *D* (1; 2; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right| = \dfrac{1}{2}$, $\left|\vec{q}\right| = 4$, $\left(\widehat{\vec{p},\, \vec{q}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

12. У прямокутному трикутнику *ABC* кути при вершинах *A* і *C* дорівнюють $60°$ і $90°$ відповідно, а довжина гіпотенузи дорівнює 2. Обчислити скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

13. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний вектору $\vec{a} = \{0; -1; 2\}$ та вектору $\vec{b} = \{1; 3; 3\}$ і його скалярний добуток на вектор $\vec{p} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ дорівнює 8.

14. Обчислити об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{b} = \{4; 3; 6\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.

15. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b} - \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\vec{a}^2}\vec{a}$ ортогональний вектору $\vec{a}$.

16. З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}(2, 3, -1)$, $\vec{b}(1, -1, 3)$, $\vec{c}(1, 9, -11)$.

17. Перевірити, що трикутник з вершинами $A\left(5\vec{i} - 4\vec{j}\right)$, $B\left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right)$, $C\left(2\vec{i} - 5\vec{j}\right)$ — прямокутний.

Варіант 5

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\vec{a} = \{2; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a} = \{-2; 5; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; \beta; -2\}$, $\vec{c} = \{3; -1; -5\}$?

3. Задано вектори $\vec{a} = \{1; 0; 4\}$ і $\vec{b} = \{-3; 5; -2\}$. $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\angle\left(\vec{x}, Oy\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2 = 525$. Знайти абсцису вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: $A(-1; -1; 1)$, $B(3; -1; -3)$, $C(-1; -1; -3)$. Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: $A(-2; 1; -2)$, $B(1; -2; -1)$, $C(2; -2; -3)$, $D(-1; 0; -3)$. Обчислити:

а) $\left|3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(3\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[3\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-3;5;-2\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-5;0\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{9;-28;-2\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{3;4;5\}$, $\vec{b}=\{-4;4;-2\}$, $\vec{c}=\{3;1;4\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=-11$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=24$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=-14$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)\left(4\vec{u}+3\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=4\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{v}=3\vec{a}-4\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,8$.

9. Задані вершини чотирикутника A (1; –5), B (–4; –1), C (6; 0), D (21; p). При якому значенні параметра p $ABCD$ трапеція?

10. При якому значенні α точки A (–4; 5; –2), B (1; –4; 2), C (–2; 4; –2), D (α; 2; 4) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=2$, $\left|\vec{q}\right|=3$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

12. Знайти координати вектора $\vec{p}$, колінеарного вектору $\vec{q}=\{3;-4;0\}$, якщо відомо, що вектор $\vec{p}$ утворює з віссю Ox тупий кут і $\left|\vec{p}\right|=10$.

13. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущеної з вершини C на сторону AB, якщо A (2; 3; 4), B (4; 3; 2), C (1; 1; 1).

14. З'ясувати, яку трійку (ліву або праву) утворюють вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, якщо A (1; 1; –1), B (2; 3; 1), C (3; 2; 1), D (5; 9; 8)?

15. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{q}=5\vec{m}-4\vec{n}$ взаємно перпендикулярні?

16. Довести, що точки A (1; 2; –1), B (0; 1; 5), C (–1; 2; 1), D (2; 1; 3) лежать в одній площині.

17. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

Варіант 6

1 Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=-3$, $\beta=-1$, $\vec{a}=\{1;\ -1;\ -2\}$, $\vec{b}=\{-1;\ 0;\ -2\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-1;\ 5;\ 1\}$, $\vec{b}=\{-1;\ \beta;\ 3\}$, $\vec{c}=\{4;\ 3;\ -5\}$?

3.Задановектори$\vec{a}=\{-2;\ 3;\ 3\}$і$\vec{b}=\{-1;\ 2;\ -2\}$.$\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\ Oy\right)$— гострий, $\left|\vec{x}\right|^2=194$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: *A* (–3; –2; 0), *B* (0; –3; –3), *C* (2; –3; 2). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника *ABC*;

г) координати вектора з початком в точці *C*, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: *A* (–1; –3; 2), *B* (1; 2; –2), *C* (3; –3; 3), *D* (–1; 0; –2). Обчислити:

а) $\left|-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-2\overrightarrow{AB},\ 2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-2\overrightarrow{AB},\ 2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника *ABC*;

е) об'єм тетраедра *ABCD*;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини *A*;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини *D* перпендикулярно грані *ABC*;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки *D* всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-2;\,-2;\,2\}$, $\vec{b}=\{1;\,2;\,4\}$, $\vec{c}=\{0;\,-3;\,3\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-5;\,-12;\,6\}$ у базисі $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{4;\,4;\,0\}$, $\vec{b}=\{-4;\,-2;\,-2\}$, $\vec{c}=\{1;\,-1;\,4\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $(\vec{x},\,\vec{a})=0$, $(\vec{x},\,\vec{b})=-4$, $(\vec{x},\,\vec{c})=0$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $(2\vec{u}+2\vec{v})(-4\vec{u}+2\vec{v})$, якщо $\vec{u}=2\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{v}=-\vec{a}-4\vec{b}$ і $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\angle(\vec{a},\,\vec{b})$, $\cos\varphi=0,6$.

9. При якому значенні параметра p трапеція $ABCD$ з вершинами $A\,(-3;\,-4)$, $B\,(-4;\,0)$, $C\,(0;\,1)$, $D\,(5;\,p)$ прямокутна?

10. При якому значенні α точки $A\,(0;\,2;\,3)$, $B\,(0;\,-4;\,4)$, $C\,(2;\,0;\,4)$, $D\,(2;\,\alpha;\,-4)$ лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=3$, $(\widehat{\vec{p},\,\vec{q}})=\dfrac{5\pi}{6}$.

12. Задані вершини $A\,(1;\,1;\,-1)$, $B\,(2;\,4;\,-1)$, $C\,(8;\,3;\,-1)$ трикутника ABC. З'ясувати, яким він є прямокутним, гострокутним або тупокутним.

13. Задані вектори $\vec{a}=\{3;1;-1\}$, $\vec{b}=\{-2;1;4\}$. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}-2\vec{i}$.

14. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, якщо $A\,(1;\,2;\,-2)$, $B\,(-1;\,4;\,0)$, $C\,(4;\,1;\,1)$, $D\,(5;\,5;\,-3)$.

15. Вектори утворюють трикутник: $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}+7\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=-3\vec{a}-\vec{b}$, де $\vec{a},\,\vec{b}$ взаємно перпендикулярні орти. Визначити кути трикутника.

16. З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}\,(3,-2,1)$, $\vec{b}\,(2,1,2)$, $\vec{c}\,(3,-1,-2)$.

17. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}$, де $\vec{a},\,\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Варіант 7

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$, $(\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b})$, $[\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}]$, якщо $\alpha=2$, $\beta=2$, $\vec{a}=\{1;\,3;\,-3\}$, $\vec{b}=\{-2;\,3;\,-3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-1;\,4;\,-4\}$, $\vec{b}=\{3;\,\beta;\,4\}$, $\vec{c}=\{0;\,-4;\,-1\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{2;\,0;\,5\}$ і $\vec{b}=\{-1;\,-2;\,-4\}$. $\vec{x}\perp\vec{a},\ \vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\,Ox\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=125$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: $A\,(-1;-2;3)$, $B\,(3;-1;1)$, $C\,(-3;1;-1)$. Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: $A\,(-3;-3;3)$, $B\,(1;2;3)$, $C\,(2;-1;-3)$, $D\,(2;2;-3)$. Обчислити:

а) $\left|2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(2\overrightarrow{AB},\,2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[2\overrightarrow{AB},\,2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-3;\,-1;\,-1\}$, $\vec{b}=\{0;\,0;\,-4\}$, $\vec{c}=\{-5;\,2;\,5\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-32;\,4;\,32\}$ у базисі $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-2;\,2;\,-4\}$, $\vec{b}=\{-3;\,-4;\,-1\}$, $\vec{c}=\{5;\,0;\,1\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\,\vec{a}\right)=4$, $\left(\vec{x},\,\vec{b}\right)=31$, $\left(\vec{x},\,\vec{c}\right)=-17$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-3\vec{u}-3\vec{v}\right)\left(4\vec{u}+2\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=-\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{v}=4\vec{a}-4\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0{,}6$.

9. При якому значенні параметра p трапеція $ABCD$ з вершинами A (2; 3), B (1; 7), C (5; 8), D (p; 5) прямокутна?

10. При якому значенні α точки A (–4; –3; 4), B (1; –2; –2), C (1; –4; –3), D (–2; –3; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

12. З'ясувати, чи буде ABC з вершинами в точках A (1; 2; 3), B (7; 10; 3), C (–1; 3; 1) прямокутним.

13. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \{2; -1; 5\}$ та $\vec{b} = \{2; 3; 6\}$.

14. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \{3; 7; 1\}, \vec{b} = \{-1; -2; -1\}, \vec{c} = \{2; 1; 2\}$.

15. Дано вектори: $\vec{a}(3, 1, 2)$, $\vec{b}(2, 7, 4)$, $\vec{c}(5, -8, 10)$. Знайти $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\vec{c}$.

16. $ABCD$ — паралелограм, P — його центр, Q — середина сторони CD. Виразити вектори $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PC}$ через вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (O — довільна точка простору).

17. Обчислити векторний добуток векторів $\left(4\vec{b} - \vec{a}\right), \left(2\vec{b} + 3\vec{a}\right)$, якщо $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$.

Варіант 8

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\vec{a} = \{1; -2; -1\}$, $\vec{b} = \{1; 1; -2\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a} = \{1; -4; 3\}$, $\vec{b} = \{1; \beta; -1\}$, $\vec{c} = \{1; -4; 4\}$?

3. Задано вектори $\vec{a} = \{-4; 5; -5\}$ і $\vec{b} = \{0; -3; -5\}$. $\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{x} \perp \vec{b}$, $\angle\left(\vec{x}, Ox\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2 = 2144$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (–2; –3; 1), B (–1; –1; 2), C (–2; 1; –1). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–1; 2; –2), B (2; 3; –2), C (3; 2; –3), D (–3; 2; 1). Обчислити:

а) $\left|2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(2\overrightarrow{AB},\,-4\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[2\overrightarrow{AB},\,-4\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-4;\,0;\,-4\}$, $\vec{b}=\{-4;\,-1;\,1\}$, $\vec{c}=\{-2;\,-2;\,-1\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{26;\,6;\,5\}$ у базисі $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-5;\,-1;\,1\}$, $\vec{b}=\{0;\,-1;\,-5\}$, $\vec{c}=\{3;\,5;\,3\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $(\vec{x},\,\vec{a})=-7$, $(\vec{x},\,\vec{b})=4$, $(\vec{x},\,\vec{c})=5$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $(4\vec{u}+\vec{v})(2\vec{u}-4\vec{v})$, якщо $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b},\ \vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}$ і $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \varphi=\angle(\vec{a},\,\vec{b}),\ \cos\varphi=0,7.$

9. Задані вершини чотирикутника A (1; –4), B (0; –3), C (3; 0), D (p; –5). При якому значенні параметра p діагоналі AC і BD перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки A (–1; –5; 2), B (4; –3; –3), C (–1; –2; –5), D (α; –2; 4) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q},\ \vec{b}=3\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=5,\ \left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}.$

12. Знайти вектор $\vec{A}$, ортогональний векторам $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ та такий, що утворює з віссю Oy тупий кут і має довжину $|\vec{n}|=\sqrt{7}$.

13. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ та $\vec{b}=(1;-2;3)$ і його скалярний добуток на вектор на вектор $\vec{p}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ дорівнює – 6.

14. При якому значенні m вектори $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=-j+m\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ компланарні?

15. Знайти скалярний добуток колінеарних векторів і протилежно напрямлених векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$.

16. Дано: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\vec{b}=12$. Знайти $\left|\left[\vec{a},\,\vec{b}\right]\right|$.

17. Точка O — центр мас ΔABC. Довести, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$.

Варіант 9

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=2$, $\beta=2$, $\vec{a}=\{-2;\,-1;1\}$, $\vec{b}=\{0;\,2;\,3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{1;\,-2;\,-3\}$, $\vec{b}=\{-1\,\beta;\,5\}$, $\vec{c}=\{0;\,3;\,1\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{4;\,1;\,2\}$ і $\vec{b}=\{4;\,-2;\,2\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\,Oz\right)$ — гострий, $\left|\vec{x}\right|^2=180$. Знайти абсцису вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (–1; 0; 1), B (0; 2; –2), C (–1; 1; 1). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (2; –2; 0), B (3; –1; –3), C (2; 1; –3), D (2; –1; 2). Обчислити:

а) $\left|-2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-2\overrightarrow{AB},\,-2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-2\overrightarrow{AB},\,-2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\,\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{2;2;4\}$, $\vec{b}=\{4;0;-3\}$, $\vec{c}=\{-3;5;-5\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-18;18;21\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{3;-4;5\}$, $\vec{b}=\{-4;4;-5\}$, $\vec{c}=\{-1;0;-4\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=11$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=-14$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=-11$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)\left(-4\vec{u}-4\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=4\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=4\vec{a}-\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,3$.

9. Задані вершини чотирикутника A (3; 4), B (2; 7), C (6; 7), D $(7;p)$. При якому значенні параметра p діагоналі AC і BD перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки A (–1; 0; –1), B (–2; –3; 1), C (–3; –3; –5), D (2; α; –5) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=7\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=3$, $\left|\vec{q}\right|=1$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

12. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ та $\vec{q}=2\vec{b}+\vec{a}$, якщо $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$ і $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.

13. Знайти орт $\vec{e}$, перпендикулярний векторам $\vec{a}=\{1;-1;0\}$, $\vec{b}=\{2;1;-1\}$.

14. Показати, що чотирикутник з вершинами A (4; 0; 8), B (5; 2; 6), C (3; 1; 4), D (2; –1; 6) є квадрат.

15. Відомо дві сторони трикутника $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$. Обчислити довжину його висоту $\overrightarrow{CD}$ при умові, що $\vec{p}$, $\vec{q}$ — взаємно перпендикулярні орти.

16. Дано тетраедр $ABCD$, $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, K — внутрішня точка ребра CB. Розкласти вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

17. Знайдіть координати кінців відрізка, який точками $C(2;0;2)$, $D(5;-2;0)$ розділений на три рівні частини.

Варіант 10

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\, \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\, \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=3$, $\beta=3$, $\vec{a}=\{1;\, 2;\, -2\}$, $\vec{b}=\{3;\, -1;\, 1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{2;\, 4;\, -1\}$, $\vec{b}=\{-5;\, \beta;\, -1\}$, $\vec{c}=\{-5;\, 1;\, 2\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{1;\, -1;\, 1\}$ і $\vec{b}=\{-4;\, -2;\, -3\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\, Oz\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=62$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (3; –3; –2), B (–1; 2; 1), C (–2; –1; 1). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (2; 2; –3), B (–1; 2; –3), C (–3; –2; –1), D (1; –2; 3). Обчислити:

а) $\left|3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(3\overrightarrow{AB},\, -4\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[3\overrightarrow{AB},\, -4\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\, \left[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною ординатою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{2;\,-2;\,-1\}$, $\vec{b}=\{1;\,-5;\,-3\}$, $\vec{c}=\{0;\,-3;\,4\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-7;\,4;\,-16\}$ у базисі $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-3;\,2;\,2\}$, $\vec{b}=\{-1;\,5;\,-2\}$, $\vec{c}=\{1;\,-5;\,1\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\,\vec{a}\right)=24$, $\left(\vec{x},\,\vec{b}\right)=20$, $\left(\vec{x},\,\vec{c}\right)=-22$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(2\vec{u}+2\vec{v}\right)\left(-3\vec{u}+2\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=-4\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{v}=-\vec{a}-\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,7$.

9. Задані вершини чотирикутника $ABCD$: A (–2; 0), B (–6; 4), C (1; 5), D (12; p). При якому значенні параметра p $ABCD$ трапеція?

10. При якому значенні α точки A (–1; 2; 4), B (0; 2; 2), C (2; 1; 3), D (5; 0; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{q}-\vec{p}$; $\left|\vec{p}\right|=2,5$, $\left|\vec{q}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

12. Знайти кут між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

13. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{n}$, $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{n}$, де $\vec{p},\,\vec{q},\,\vec{n}$ — взаємно перпендикулярні орти.

14. Дано вершини трикутника $A\left(2,1,\sqrt{2}\right)$, $B\left(1,0,0\right)$, $C\left(1+\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6}\right)$. Знайти його кути.

15. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ будуть колінеарними, якщо $\vec{a},\,\vec{b}$ не колінеарні.

16. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{B_1B}=\vec{c}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{B_1M}$ по векторах $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$, якщо M — точка перетину відрізків AC, BD.

17. Дано: $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=26$, $\left|\left[\vec{a},\,\vec{b}\right]\right|=72$. Знайти $\vec{a}\vec{b}$.

Варіант 11

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\vec{a}=\{3;\,1;\,2\}$, $\vec{b}=\{-2;\,3;\,3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-2;\,-4;\,3\}$, $\vec{b}=\{-4;\,\beta;\,1\}$, $\vec{c}=\{-3;\,-1;\,4\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{3;\,3;\,5\}$ і $\vec{b}=\{-4;\,-4;\,-5\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\,Oy\right)$ — гострий, $\left|\vec{x}\right|^2=50$. Знайти абсцису вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (–1; 3; 0), B (–2; 1; –3), C (–3; –3; 1). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–3; –3; –2), B (1; 2; 2), C (1; 3; 3), D (–3; 0; 3). Обчислити:

а) $\left|2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(2\overrightarrow{AB},\,-4\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[2\overrightarrow{AB},\,-4\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\,\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об’єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-5;\,1;\,5\}$, $\vec{b}=\{-3;\,1;\,2\}$, $\vec{c}=\{-5;\,-2;\,0\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-20;\,3;\,10\}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{0;\,3;\,1\}$, $\vec{b}=\{-3;\,4;\,2\}$, $\vec{c}=\{0;\,-1;\,3\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\,\vec{a}\right)=6$, $\left(\vec{x},\,\vec{b}\right)=14$, $\left(\vec{x},\,\vec{c}\right)=-2$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=3\vec{a}-4\vec{b}, \vec{v}=-4\vec{a}+2\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=5, \left|\vec{b}\right|=5, \varphi=\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right), \cos\varphi=0,7.$

9. При якому значенні параметра *p* трапеція *ABCD* з вершинами *A* (1; –1), *B* (0; 3), *C* (4; 4), *D* (9; *p*) прямокутна?

10. При якому значенні α точки *A* (–3; 5; 4), *B* (4; –4; –1), *C* (–5; –3; –1), *D* (α; –5; 4) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}; \left|\vec{p}\right|=8, \left|\vec{q}\right|=\frac{1}{2}, \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right)=\frac{\pi}{3}.$

12. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\frac{\pi}{3}$. Знайти довжину вектора $\vec{a}-2\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right|=2, \left|\vec{b}\right|=1.$

13. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний векторам $\vec{a}=\left\{1;-1;-1\right\}, \vec{b}=2\vec{j}+\vec{k}.$

14. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}, \vec{b}=-\vec{j}+2\vec{k}.$

15. Дано вектори $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і має довжину $\left|\vec{x}\right|=14$, утворює з віссю *Oy* тупий кут.

16. Кінці відрізка *A* (5; –2; 1), *B* (5; 3; 6). Знайдіть точку, симетричну середині відрізка відносно площини *xOy*.

17. Точки *A* (4; 2; –1), *C* (–4; 2; 1) *D* (7; –3; 4) — вершини паралелограма *ABCD*. Знайдіть координати вершини *B*.

Варіант 12

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|, \left(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right), \left[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=1, \beta=2, \vec{a}=\left\{-1;-1;3\right\}, \vec{b}=\left\{-2;1;3\right\}.$

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\left\{1;5;3\right\}, \vec{b}=\left\{-1;\beta;-4\right\}, \vec{c}=\left\{-2;5;-5\right\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\left\{2;-4;3\right\}$ і $\vec{b}=\left\{-2;-2;-2\right\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}, \vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x}, Oy\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=344$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: *A* (–1; 1; 2), *B* (3; 1; 2), *C* (1; –1; 3). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1 D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–2; 1; 2), B (–1; –2; –3), C (2; –1; 0), D (1; –3; –2). Обчислити:

а) $\left|-5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-5\overrightarrow{AB},\ 3\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-5\overrightarrow{AB},\ 3\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-4;\ -4;\ 5\}$, $\vec{b}=\{4;\ 1;\ 2\}$, $\vec{c}=\{-2;\ 2;\ -4\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-2;\ 16;\ -31\}$ у базисі $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-3;\ 1;\ 0\}$, $\vec{b}=\{0;\ 2;\ 1\}$, $\vec{c}=\{-5;\ -4;\ -2\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\ \vec{a}\right)=13$, $\left(\vec{x},\ \vec{b}\right)=6$, $\left(\vec{x},\ \vec{c}\right)=3$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(2\vec{u}-4\vec{v}\right)\left(-2\vec{u}-\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{v}=-2\vec{a}-2\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=4,\ \left|\vec{b}\right|=4,\ \varphi=\angle\left(\vec{a},\ \vec{b}\right),\ \cos\varphi=0,9.$

9. При якому значенні параметра p трапеція $ABCD$ з вершинами A (–2; –2), B (–3; 2), C (1; 3), D (p; 0) прямокутна?

10. При якому значенні α точки A (–2; –4; 2), B (–1; –2; –3), C (3; 0; 3), D (3; α; 0) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=10\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

12. При якому значенні *t* вектори $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-t\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні, якщо $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-4\vec{k}$.

13. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний векторам $\vec{a}=\{3;-1;-1\}, \vec{b}=\{0;2;1\}$.

14. Дано вектори: $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє умовам: $\left(\vec{a},\vec{x}\right)=4$, $\left(\vec{b},\vec{x}\right)=35$, $\left(\vec{c},\vec{x}\right)=0$.

15. Дано вектор $\vec{q}=\left[3\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p},\ \vec{m}+6\vec{n}+4\vec{p}\right]$, де $\vec{m},\vec{n},\vec{p}$ — взаємно перпендикулярні орти, які утворюють праву трійку. Обчислити його довжину.

16. При яких значеннях *m, n* вектори $\vec{a}\left(-1,4,-2\right)$, $\vec{b}\left(-3,m,n\right)$ колінеарні?

17. Вектори $\vec{a},\vec{b}$ ортогональні. Відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Знайти $\left\|\left[\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\right]\right\|$, $\left\|\left[3\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}-2\vec{b}\right]\right\|$.

Варіант 13

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=1$, $\beta=2$, $\vec{a}=\{-2;-3;3\}$, $\vec{b}=\{-2;-1;1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-1;5;3\}$, $\vec{b}=\{0;\beta;2\}$, $\vec{c}=\{1;-2;-4\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{0;-2;5\}$ і $\vec{b}=\{5;-3;-2\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}, \vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},Ox\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=1086$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: *A* (1; 3; 1), *B* (–2; –3; –2), *C* (1; 3; –1). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника *ABC*;

г) координати вектора з початком в точці *C*, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (1; –3; 1), B (–3; –1; –3), C (2; –2; –1), D (–1; –3; –3) Обчислити:

а) $\left|-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-3\overrightarrow{AB},\ -4\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-3\overrightarrow{AB},\ -4\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною ординатою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{4;-3;2\}$, $\vec{b}=\{0;-4;4\}$, $\vec{c}=\{-1;5;-2\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{3;-6;10\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{5;-1;-3\}$, $\vec{b}=\{-3;3;-3\}$, $\vec{c}=\{-5;4;5\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=29$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=-15$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=-34$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(2\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=3\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{v}=2\vec{a}+2\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,5$.

9. Задані вершини чотирикутника A (–1; –5), B (–2; –1), C (2; –2), D (p; –7). При якому значенні параметра p діагоналі AC і BD перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки A (–2; 0; 5), B (–4; 5; 1), C (–2; 5; 4), D (0; 3; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=3$, $\left|\vec{q}\right|=4$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

12. Знайти координати вектора $\vec{p}$, колінеарного вектору $\vec{a}=\{1;2;1\}$ і такого, що утворює з віссю Ox гострий кут та $\left|\vec{p}\right|=3$.

13. Знайти вектор $\vec{d}$, якщо відомо, що він перпендикулярний векторам $\vec{a}=\{2;-3;1\}$ та $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ і його скалярний добуток на вектор $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$ дорівнює 10.

14. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}$, $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, де $\vec{p}$, $\vec{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

15. Точка *M* (2, 8, 5) — середина відрізка, кінці якого знаходяться на осі $\underline{Oz}$ і в площині *xOy*. Знайдіть координати кінців і довжину відрізка.

16. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, $\vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$, де $|\vec{n}|=\dfrac{1}{2}$, $|\vec{m}|=3$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=120^\circ$.

17. Вектори $\vec{x}$ і $\vec{a}(2,1,-1)$ колінеарні. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє умові $\vec{x}\vec{a}=3$.

Варіант 14

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$, $(\alpha\vec{a},\beta\vec{b})$, $[\alpha\vec{a},\beta\vec{b}]$, якщо $\alpha=2$, $\beta=1$, $\vec{a}=\{3;1;-2\}$, $\vec{b}=\{-2;2;-3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-4;4;3\}$, $\vec{b}=\{-4;\beta;0\}$, $\vec{c}=\{-3;-4;2\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{-2;-2;-3\}$ і $\vec{b}=\{-1;1;5\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle(\vec{x},Ox)$ — гострий, $|\vec{x}|^2=234$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: *A* (–2; 5; –1), *B* (–2; 3; 1), *C* (–3; 1; 3). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника *ABC*;

г) координати вектора з початком в точці *C*, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: *A* (3; 2; –3), *B* (2; 2; 1), *C* (1; –1; 3), *D* (–3; –3; –1). Обчислити:

а) $|5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}|$;

б) $(5\overrightarrow{AB},-2\overrightarrow{CD})$;

в) $\left[5\overrightarrow{AB},\,-2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\,\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника *ABC*;

е) об'єм тетраедра *ABCD*;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини *A*;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини *D* перпендикулярно грані *ABC*;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки *D* усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{4;\,-5;\,0\}$, $\vec{b}=\{5;\,3;\,-4\}$, $\vec{c}=\{3;\,3;\,-4\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-17;\,28;\,-4\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-2;\,4;\,-1\}$, $\vec{b}=\{1;\,-4;\,1\}$, $\vec{c}=\{4;\,0;\,-1\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\,\vec{a}\right)=0$, $\left(\vec{x},\,\vec{b}\right)=5$, $\left(\vec{x},\,\vec{c}\right)=-22$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(4\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(-2\vec{u}+3\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=4\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{v}=-4\vec{a}-\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,8$.

9. Задані вершини чотирикутника *A* (–3; 4), *B* (–7; 7), *C* (–1; 8), *D* (1; *p*). При якому значенні параметра *p* діагоналі *AC* і *BD* перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки *A* (1; 3; 3), *B* (2; –1; –4), *C* (2; 4; 5), *D* (α; 2; –1) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=7\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=\frac{1}{2}$, $\left|\vec{q}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

12. Знайти координаті вектора $\vec{p}$, колінеарного вектору $\vec{a}=\{-4;3;2\}$ і такого, що задовольняє умові $\left(\vec{p},\,\vec{b}\right)=3$, $\vec{b}=\{-2;-3;3\}$.

13. Спростити вираз $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

14. Дано: $\left|\vec{a}\right|=13$, $\left|\vec{b}\right|=19$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=24$. Обчислити $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

15. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}-5\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}+4\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\vec{a}$, $\vec{b}$. Крім того, відомо, що $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ — взаємно перпендикулярні орти.

16. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{BK}$, де K — середина ребра DD_1.

17. Знайти координати кінців відрізка, який точками C (3; 4; 3) D (2; 5; 4) розділений на три рівні частини.

Варіант 15

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=3,\ \beta=1,\ \vec{a}=\{3;\ 3;\ -1\},\ \vec{b}=\{-3;\ 2;\ -3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-5;\ 5;\ -2\},\ \vec{b}=\{2;\ \beta;\ 5\}$, $\vec{c}=\{3;\ -5;\ 1\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{3;\ 0;\ -5\}$ і $\vec{b}=\{0;\ 1;\ -2\}$. $\vec{x}\perp\vec{a},\ \vec{x}\perp\vec{b},\ \angle\left(\vec{x},\ Oz\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=70$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (1; –2; –2), B (3; 2; –1), C (–2; –3; 0). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (3; 3; 1), B (3; 2; –2), C (–2; 1; –2), D (2; –3; 3). Обчислити:

а) $\left|-3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-3\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-3\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{2;\,-4;\,4\}$, $\vec{b}=\{3;\,5;\,0\}$, $\vec{c}=\{1;\,-3;\,1\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-6;\,-46;\,15\}$ у базисі $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-3;\,1;\,-2\}$, $\vec{b}=\{-3;\,-1;\,3\}$, $\vec{c}=\{4;\,-2;\,1\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $(\vec{x},\,\vec{a})=-10$, $(\vec{x},\,\vec{b})=0$, $(\vec{x},\,\vec{c})=10$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $(4\vec{u}+2\vec{v})(4\vec{u}+3\vec{v})$, якщо $\vec{u}=-4\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{v}=3\vec{a}+2\vec{b}$ і $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\angle(\vec{a},\,\vec{b})$, $\cos\varphi=0,2$.

9. Задані вершини чотирикутника A (–4; –3), B (–8; 1), C (–1; 2), D (10; p). При якому значенні параметра p $ABCD$ трапеція?

10. При якому значенні α точки A (–1; 3; 5), B (0; 2; –5), C (1; 3; 1), D (–5; α; 3) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\widehat{\vec{p},\,\vec{q}})=\dfrac{\pi}{3}$.

12. Обчислити проекцію вектора $\vec{p}=\{2;-1;2\}$ на вісь, що утворює рівні гострі кути з координатними осями.

13. Спростити вираз $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$.

14. Вектори $\vec{a},\,\vec{b}$ утворюють кут 120° і $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.

15. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

16. Кінці відрізка A (7; –3; 4), B (6; 7; 8). Знайдіть точку, симетричну середині відрізка відносно площини xy.

17. Вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Довести, що $[\vec{a},\,\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\,\vec{a}]$.

Варіант 16

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$, $(\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b})$, $[\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}]$, якщо $\alpha=3$, $\beta=1$, $\vec{a}=\{1;\,-2;\,1\}$, $\vec{b}=\{0;\,3;\,-1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a} = \{2; -5; 1\}$, $\vec{b} = \{2; \beta; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 2; 0\}$?

3. Задано вектори $\vec{a} = \{2; -2; 0\}$ і $\vec{b} = \{5; -2; 1\}$. $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\angle(\vec{x}, Oz)$ — тупий, $|\vec{x}|^2 = 44$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (–2; –2; 3), B (–1; –1; 2), C (–2; 2; 0). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1 D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–3; –1; –3), B (–2; –2; 2), C (–2; –3; 2), D (–1; –1; 2). Обчислити:

а) $\left|-2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-2\overrightarrow{AB}, -3\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-2\overrightarrow{AB}, -3\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об’єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a} = \{5; -2; -1\}$, $\vec{b} = \{5; 3; -2\}$, $\vec{c} = \{5; 0; -4\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d} = \{-50; -5; 15\}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{2;\,3;\,5\}$, $\vec{b}=\{-3;\,-5;\,-3\}$, $\vec{c}=\{0;\,-5;\,0\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $(\vec{x},\,\vec{a})=8$, $(\vec{x},\,\vec{b})=8$, $(\vec{x},\,\vec{c})=20$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $(4\vec{u}-3\vec{v})(-3\vec{u}-3\vec{v})$, якщо $\vec{u}=-4\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=-4\vec{a}+2\vec{b}$ і $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\angle(\vec{a},\,\vec{b})$, $\cos\varphi=0,1$.

9. При якому значенні параметра p трапеція $ABCD$ з вершинами A (–5; 2), B (–6; 6), C (–2; 7), D (3; p) прямокутна?

10. При якому значенні α точки A (–5; 2; 0), B (–1; 0; 2), C (–3; 0; 2), D (0; 0; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\dfrac{\pi}{6}$.

12. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут 150°, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$ та $|\vec{a}-\vec{b}|$.

13. Спростити вираз $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

14. З’ясувати, за яких значень α, β вектори $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$, $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ колінеарні.

15. Відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\,\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$. Визначити при якому значенні α вектори $\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ ортогональні.

16. Обчислити $np_{\vec{b}}\vec{a}$, де $\vec{a}=3\vec{p}-12\vec{q}+4\vec{r}$, $\vec{b}=[\vec{p}-2\vec{r},\ \vec{p}+3\vec{q}-4\vec{r}]$ і $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

17. Знайдіть кут між стороною AC і медіаною BB_1 трикутника $\triangle ABC$, якщо A (3; 5; 0), B (0; –6; 0), C (3; 1; 0).

Варіант 17

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$, $(\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b})$, $[\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}]$, якщо $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\vec{a}=\{-1;\,1;\,2\}$, $\vec{b}=\{3;\,0;\,-1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{4;\,5;\,3\}$, $\vec{b}=\{-5;\,\beta;\,4\}$, $\vec{c}=\{-1;\,-1;\,-1\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{-1;\,4;\,2\}$ і $\vec{b}=\{0;\,0;\,5\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle(\vec{x},\,Oy)$ — гострий, $|\vec{x}|^2=425$. Знайти абсцису вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (–1; 3; –2), B (–1; 1; –1), C (–2; –2; 1). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (2; –1; 2), B (3; –3; –2), C (–1; –2; –1), D (3; –2; 2). Обчислити:

а) $\left|3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(3\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[3\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об’єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-5;\,0;\,2\}$, $\vec{b}=\{3;\,5;\,3\}$, $\vec{c}=\{5;\,5;\,5\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-49;\,-40;\,-28\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{3;\,-3;\,2\}$, $\vec{b}=\{1;\,1;\,-2\}$, $\vec{c}=\{2;\,2;\,3\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\ \vec{a}\right)=-13$, $\left(\vec{x},\ \vec{b}\right)=9$, $\left(\vec{x},\ \vec{c}\right)=4$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\left(4\vec{u}-\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=-\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{v}=2\vec{a}+4\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,3$.

9. При якому значенні параметра p трапеція $ABCD$ з вершинами A (–2; –1), B (–3; 3), C (1; 4), D (p; 1) прямокутна?

10. При якому значенні α точки A (0; –3; –3), B (–2; –4; –3), C (–4; –5; –1), D (α; 5; –5) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

12. Обчислити роботу сили $\vec{f} = \{2;1;4\}$ при переміщенні матеріальної точки з положення A (2; 1; –2) у положення B (–1; –3; 6).

13. Спростити вираз $2\vec{i} \times (\vec{j} \cdot \vec{k}) + 3\vec{j} \times (\vec{i} \cdot \vec{k}) + 4\vec{k} \times (\vec{i} \cdot \vec{j})$.

14. Дано вектори: $\vec{p}(2,-3)$, $\vec{q}(1,2)$. Обчислити координати вектора $\vec{a}(9,4)$ у базисі векторів $\vec{p}, \vec{q}$.

15. Спростити вираз $\vec{a}^2 + 3\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} + 1$, якщо $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, де $\vec{m}^2 = 4$, $\vec{n}^2 = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{2}$.

16. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, де $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

17. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ утворюють кут $\dfrac{2\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Знайти $\left\|\left[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}\right]\right\|$, $\left\|\left[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}\right]\right\|$.

Варіант 18

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}|$, $(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b})$, $[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}]$, якщо $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\vec{a} = \{3; -2; -2\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 0\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a} = \{-3; -5; 2\}$, $\vec{b} = \{4; \beta; 3\}$, $\vec{c} = \{4; -3; -3\}$?

3. Задано вектори $\vec{a} = \{-2; 1; -3\}$ і $\vec{b} = \{2; -3; -2\}$. $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\angle(\vec{x}, Oy)$ — тупий, $|\vec{x}|^2 = 237$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (–3; –1; 3), B (–1; 3; 2), C (2; –3; –2). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1 D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–3; 3; –3), B (2; –1; –1), C (1; –1; –3), D (1; –1; 3). Обчислити:

а) $\left|3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(3\overrightarrow{AB},\ -4\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[3\overrightarrow{AB},\ -4\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{5;3;-5\}$, $\vec{b}=\{1;0;-3\}$, $\vec{c}=\{-3;3;3\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{28;0;-20\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{3;-4;0\}$, $\vec{b}=\{4;-4;-2\}$, $\vec{c}=\{-3;2;-5\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=31$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=34$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=-28$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-2\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(-\vec{u}+\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=3\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{v}=-4\vec{a}-4\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,2$.

9. Задані вершини чотирикутника A (3; 2), B (1; 5), C (5; 6), D (p; 1). При якому значенні параметра p діагоналі AC і BD перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки A (0; –1; –3), B (0; –1; 0), C (2; –5; –5), D (–2; α; –4) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=3$, $\left|\vec{q}\right|=4$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

12. Обчислити проекцію вектора $\vec{a}=\{-3;1;3\}$ на напрямок вектора $\overrightarrow{AB}$, де A (7; 3; –2), B (8; 2; –2).

13. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $2\vec{a}-\vec{b}$ та $\vec{a}+\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

14. Вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}\left(6;-8;-7,5\right)$, утворює гострий кут з віссю Oz. Знайти його координати, за умови, $\left|\vec{x}\right|=50$.

15. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ зв'язані співвідношеннями $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]=\left[\vec{c}, \vec{d}\right]$, $\left[\vec{a}, \vec{c}\right]=\left[\vec{b}, \vec{d}\right]$. Довести, що вектори $\vec{a}-\vec{d}, \vec{b}-\vec{c}$ колінеарні.

16. M, N — середини ребер B_1B, A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює $2a$. Знайдіть довжину MN.

17. Дано точки: A (–2; 3; –4), B (3; 2; 5), C (1; –1; 2), D (3; 2; –4) . Обчислити $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

Варіант 19

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\vec{a}=\left\{-3;1;-1\right\}$, $\vec{b}=\left\{0;2;-2\right\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\left\{-5;-2;4\right\}$, $\vec{b}=\left\{-2;\beta;2\right\}$, $\vec{c}=\left\{4;-1;-3\right\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\left\{5;3;4\right\}$ і $\vec{b}=\left\{2;-1;-3\right\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}, \vec{x}\perp\vec{b}, \angle\left(\vec{x}, Oy\right)$ — гострий, $\left|\vec{x}\right|^2=675$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (–3; 3; –1), B (–1; –2; –1), C (2; –2; –3). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (2; –3; –1), B (0; –1; 2), C (2; –2; 0), D (2; –2; –3). Обчислити:

а) $\left|2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(2\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[2\overrightarrow{AB},\, 2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\, \left[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника *ABC*;

е) об'єм тетраедра *ABCD*;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини *A*;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини *D* перпендикулярно грані *ABC*;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки *D* усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a} = \{4;\, 3;\, 4\}$, $\vec{b} = \{-4;\, 5;\, 2\}$, $\vec{c} = \{0;\, 5;\, 0\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d} = \{4;\, -16;\, -14\}$ у базисі $\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a} = \{3;\, 0;\, 5\}$, $\vec{b} = \{-1;\, -4;\, 2\}$, $\vec{c} = \{-5;\, -1;\, 2\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що .$\left(\vec{x},\, \vec{a}\right) = -19$, $\left(\vec{x},\, \vec{b}\right) = -12$, $\left(\vec{x},\, \vec{c}\right) = -20$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(3\vec{u} + \vec{v}\right)\left(-4\vec{u} - 4\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\varphi = \angle\left(\vec{a},\, \vec{b}\right)$, $\cos\varphi = 0{,}7$.

9. Задані вершини чотирикутника *A* (–2; 5), *B* (–6; 8), *C* (0; 9), *D* (2; *p*). При якому значенні параметра *p* діагоналі *AC* і *BD* перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки *A* (2; 4; 5), *B* (–1; 5; 2), *C* (4; 5; –4), *D* (–5; 4; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right| = 6$, $\left|\vec{q}\right| = 7$, $\left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

12. Задані точки *A* (–2; 4; 0), *B* (1; 3; –5), *C* (0; –1; 1) і вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}$. Обчислити скалярний добуток векторів $(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA})$ та $(\vec{a} + 2\overrightarrow{AC})$.

13. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} + \vec{b}$ та $2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

14. Дано вектори: $\vec{a}\left(3, -1\right)$, $\vec{b}\left(1, -2\right)$, $\vec{c}\left(-1, 7\right)$. Обчислити координати вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ у базисі $\vec{a},\, \vec{b}$.

15. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний векторам $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(1,-2,3)$ і задовольняє умові $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

16. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{MA_1}$, де M — середина ребра AD.

17. Точка $M\,(2, 6, 3)$ — середина відрізка, кінці якого знаходяться на осі Ox і в площині Oyz. Знайдіть координати кінців і довжину відрізка.

Варіант 20

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\vec{a}=\{-3;\,-1;\,3\}$, $\vec{b}=\{1;\,2;\,3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{-1;\,5;\,1\}$, $\vec{b}=\{4;\,\beta;\,-1\}$, $\vec{c}=\{4;\,-3;\,-5\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{1;\,2;\,2\}$ і $\vec{b}=\{-1;\,-5;\,1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\ Oy\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=162$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (2; –2; –2), B (–1; –3; 1), C (–2; 3; 2). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–2; 3; 1), B (0; 2; 2), C (–2; –1; 3), D (2; –2; 1). Обчислити:

а) $\left|6\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(6\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[6\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об’єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{2;-2;5\}$, $\vec{b}=\{-3;2;-3\}$, $\vec{c}=\{-1;0;5\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{4;0;-14\}$ у базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{3;-1;-5\}$, $\vec{b}=\{3;1;-2\}$, $\vec{c}=\{0;4;-5\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=-3$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=-5$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=-26$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-3\vec{u}+4\vec{v}\right)\left(-3\vec{u}+2\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=-4\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{v}=-2\vec{a}+3\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,7$.

9. Задані вершини чотирикутника A (2; –4), B (1; 0), C (6; 1), D (12; p). При якому значенні параметра p $ABCD$ трапеція?

10. При якому значенні α точки A (–4; 5; 1), B (4; –2; 3), C (–5; 3; 1), D (α; –3; 1) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=5$, $\left|\vec{q}\right|=4$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

12. Знайти роботу сили $\vec{f}$ при переміщенні $\vec{s}$, якщо $\left|\vec{f}\right|=2$, $\left|\vec{s}\right|=5$, $\left(\widehat{\vec{f},\vec{s}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

13. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо відомо, що він ортогональний векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ та $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ і його скалярний добуток на вектор $\vec{p}=-3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ дорівнює 3.

14. Одиничні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Знайти $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.

15. Дано вектори: $\vec{a}\left(2,-3,1\right)$, $\vec{b}\left(-3,1,2\right)$, $\vec{c}\left(1,2,3\right)$. Обчислити $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$, $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$.

16. Відрізки AB, AC, AD взаємно перпендикулярні. M — середина CD. Знайдіть довжину BM, якщо $AB=\vec{b}$, $AC=\vec{c}$, $AD=\vec{a}$.

17. Дано вектори: $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+5\vec{j},\ \vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Знайти $np_{\vec{c}}\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

Варіант 21

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|,\ \left(\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right),\ \left[\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=-3,\ \beta=-3,\ \vec{a}=\{2;\,-3;\,-1\},\ \vec{b}=\{-2;\,-1;\,-3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{5;\,4;\,-3\},\ \vec{b}=\{-5;\,\beta;\,-2\}$, $\vec{c}=\{-3;\,4;\,2\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{1;\,-3;\,0\}$ і $\vec{b}=\{2;\,1;\,1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a},\ \vec{x}\perp\vec{b},\ \angle\left(\vec{x},\ Oy\right)$— тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=59$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: $A\,(-3;\,2;\,1)$, $B\,(-1;\,-1;\,2)$, $C\,(-3;\,-3;\,1)$. Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: $A\,(3;\,1;\,0)$, $B\,(-1;\,-1;\,-1)$, $C\,(-1;\,-2;\,2)$, $D\,(1;\,0;\,1)$. Обчислити:

а) $\left|3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(3\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[3\overrightarrow{AB},\ -2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{3;\,-5;\,4\}$, $\vec{b}=\{-4;\,5;\,4\}$, $\vec{c}=\{-3;\,-5;\,-1\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-19;\,10;\,-10\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-1;\,-3;\,-3\}$, $\vec{b}=\{-3;\,3;\,1\}$, $\vec{c}=\{4;\,5;\,0\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\,\vec{a}\right)=23$, $\left(\vec{x},\,\vec{b}\right)=-11$, $\left(\vec{x},\,\vec{c}\right)=-33$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(2\vec{u}-\overrightarrow{4v}\right)\left(-3\vec{u}+\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=3\vec{a}-\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,3$.

9. Задані вершини чотирикутника A (3; 5), B (1; 9), C (9; 10), D (19; p). При якому значенні параметра p $ABCD$ трапеція?

10. При якому значенні α точки A (–1; –1; –2), B (–1; 1; –3), C (–3; 5; 3), D (–1; α; –5) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=2$, $\left|\vec{q}\right|=1$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

12. Знайти координати вектора $\vec{p}$, колінеарного вектору $\vec{q}=\{3;-4;0\}$, якщо відомо, що вектор $\vec{p}$ утворює з віссю Ox тупий кут і $\left|\vec{p}\right|=10$.

13. Знайти довжину висоти трикутника ABC, опущеної з вершини B на сторону AC, якщо A (2; 3; 4), B (4; 3; 2), C (1; 1; 1).

14. З'ясувати, яку трійку (ліву або праву) утворюють вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, якщо A (1; 1; –1), B (2; 3; 1), C (3; 2; 1), D (5; 9; 8)?

15. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{q}=5\vec{m}-4\vec{n}$ взаємно перпендикулярні?

16. S —довільна точка простору, $ABCDEF$ — правильний шестикутник, Q — його центр. Виразити вектори $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$.

17. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC_1}\right|=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CC_1}\right|$.

Варіант 22

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=-3$, $\beta=1$, $\vec{a}=\{1;\,-1;\,1\}$, $\vec{b}=\{-3;\,0;\,-1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{0; -2; 1\}$, $\vec{b}=\{-5; \beta; -5\}$, $\vec{c}=\{-1; -1; 1\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{-3; 5; -5\}$ і $\vec{b}=\{2; -5; 2\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}, \vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x}, Oy\right)$ — гострий, $\left|\vec{x}\right|^2=266$. Знайти аплікату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (2; 1; 2), B (–2; 1; –3), C (–1; 1; 2). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (3; –2; 3), B (2; –3; 3), C (3; 3; 2), D (2; 0; 2) . Обчислити:

а) $\left|-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-2\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-2\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{1; -3; -2\}$, $\vec{b}=\{4; -4; 5\}$, $\vec{c}=\{-5; 3; 2\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-4; 16; -20\}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{-1;\,-2;\,3\}$, $\vec{b}=\{-2;\,0;\,-3\}$, $\vec{c}=\{0;\,0;\,3\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $(\vec{x},\,\vec{a})=-4$, $(\vec{x},\,\vec{b})=8$, $(\vec{x},\,\vec{c})=-12$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $(-4\vec{u}+2\vec{v})(-4\vec{u}+\vec{v})$, якщо $\vec{u}=2\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{v}=-\vec{a}-4\vec{b}$ і $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=\angle(\vec{a},\,\vec{b})$, $\cos\varphi=0,8$.

9. При якому значенні параметра p трапеція $ABCD$ з вершинами A (–5; –2), B (–6; 2), C (–2; 3), D (p; 19) прямокутна?

10. При якому значенні α точки A (1; –4; 1), B (1; –2; –5), C (–4; –2; 1), D (–3; –3; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

12. Задані вершини A (1; 1; –1), B (2; 4; –1), C (8; 3; –1), трикутника ABC. Знайдіть зовнішній кут при вершині A.

13. Задані вектори $\vec{a}=\{3;1;-1\}$, $\vec{b}=\{-2;1;4\}$. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}-2\vec{i}$.

14. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть $\left|\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{DB_1}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1}\right|$.

15. Перевірити, що для будь-яких трьох векторів простору $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконується рівність $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2+\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|^2+\left|\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right|^2+\left|\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right|^2=$ $=4\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right)$

16. З’ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}(3,-2,1)$, $\vec{b}(2,1,2)$, $\vec{c}(3,-1,-2)$.

17. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+5\vec{b}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Варіант 23

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$, $(\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b})$, $[\alpha\vec{a},\,\beta\vec{b}]$, якщо $\alpha=-3$, $\beta=2$, $\vec{a}=\{-1;\,1;\,-3\}$, $\vec{b}=\{2;\,-2;\,-3\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{5;\,4;\,-4\}$, $\vec{b}=\{-2;\,\beta;\,4\}$, $\vec{c}=\{-1;\,-5;\,1\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{2;-3;1\}$ і $\vec{b}=\{1;-4;-1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\,Oy\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=83$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (3; 1; 0), B (1; 1; –1), C (–3; 1; 2) . Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (3; –2; –2), B (2; 1; –1), C (–3; –3; 3), D (–3; 0; –1). Обчислити:

а) $\left|2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(2\overrightarrow{AB},\,3\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\,\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об’єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{5;\,2;\,2\}$, $\vec{b}=\{-4;\,-3;\,2\}$, $\vec{c}=\{1;\,-3;\,0\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-18;\,-10;\,0\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{5;\,-1;\,-1\}$, $\vec{b}=\{4;\,-2;\,-2\}$, $\vec{c}=\{4;\,-3;\,-4\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\,\vec{a}\right)=10$, $\left(\vec{x},\,\vec{b}\right)=14$, $\left(\vec{x},\,\vec{c}\right)=24$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-3\vec{v}\right)\left(4\vec{u}+2\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=-\vec{a}+3\vec{b}, \vec{v}=4\vec{a}-\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\cos\varphi=0,1$.

9. При якому значенні параметра *p* трапеція *ABCD* з вершинами *A* (5; 3), *B* (4; 7), *C* (8; 8), *D* (13; *p*) прямокутна?

10. При якому значенні α точки *A* (–1; –1; –4), *B* (4; 3; 1), *C* (–2; 0; –4), *D* (2; 3; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=8$, $\left|\vec{q}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

12. Знайти координати вектора *x* = [*a*, *b*] + [*b*, *c*] у базисі *a*, *b*, *c*, якщо *a* = {1, 1, 1}, *b* = {1, –1, 1}, *c* = {2, –1, –1}.

13. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\left\{2;-1;5\right\}$ та $\vec{b}=\left\{2;3;6\right\}$.

14. Обчислити гострий кут між медіанами рівнобедреного прямокутного трикутника, проведеними з вершин гострих кутів.

15. Дано вектори: $\vec{a}\left(3,1,2\right)$, $\vec{b}\left(2,7,4\right)$, $\vec{c}\left(5,-8,10\right)$. Знайти $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c}$.

16. *A*, *B* — дві протилежні вершини паралелепіпеда. Ребра *AE*, *AF*, *AG* цього паралелепіпеда мають довжину 1 і утворюють між собою однакові кути, які дорівнюють *a*. 1) Визначити довжину діагоналі *AB*. 2) Знайти кут між діагоналлю *AB* і ребром *AE*.

17. Знайти об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах: $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{n}$, $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{n}$, де $\vec{p}, \vec{q}, \vec{n}$ — взаємно перпендикулярні орти.

Варіант 24

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right|$, $\left(\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right)$, $\left[\alpha\vec{a},\beta\vec{b}\right]$, якщо $\alpha=-2$, $\beta=-3$, $\vec{a}=\left\{-1;-2;-2\right\}$, $\vec{b}=\left\{-3;3;-1\right\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\left\{-3;4;-1\right\}$, $\vec{b}=\left\{-2;\beta;1\right\}$, $\vec{c}=\left\{4;3;1\right\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\left\{2;-4;-2\right\}$ і $\vec{b}=\left\{1;2;3\right\}$. $\vec{x}\perp\vec{a}$, $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},Oy\right)$ — тупий, $\left|\vec{x}\right|^2=192$. Знайти ординату вектора $\vec{x}$.

4. Відомі три вершини трикутника: A (3; 1; 3), B (2; –3; –1), C (–1; –3; 2). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1 D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (–3; 3; –1), B (3; 2; –2), C (3; –1; 0), D (2; 1; –1). Обчислити:

а) $\left|2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(2\overrightarrow{AB},\ -4\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-2\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D усі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a} = \{-1;\ -3;\ 5\}$, $\vec{b} = \{-1;\ 4;\ 5\}$, $\vec{c} = \{2;\ 5;\ 1\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d} = \{-4;\ -8;\ -24\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a} = \{2;\ 3;\ -2\}$, $\vec{b} = \{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{c} = \{-3;\ 0;\ 4\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\ \vec{a}\right) = -10$, $\left(\vec{x},\ \vec{b}\right) = 2$, $\left(\vec{x},\ \vec{c}\right) = 8$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(\vec{u} + 3\vec{v}\right)\left(-3\vec{u} - 4\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\varphi = \angle\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$, $\cos\varphi = 0,7$.

9. Задані вершини чотирикутника A (–1; –4), B (–5; 0), C (1; 0), D (13; p). При якому значенні параметра p діагоналі AC і BD перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки A (1; 2; 4), B (1; 4; 5), C (0; 0; –1), D (–2; –3; α) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q},\ \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q};\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=2,\ \left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

12. Довести, що точки A (1; –1; 1), B (1; 3; 1), C (4; 3; 1), D (4; –1; 1) є вершинами прямокутника. Обчислити довжину його діагоналей.

13. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ та $\vec{b}=(1;-2;3)$ і його скалярний добуток на вектор на вектор $\vec{p}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ дорівнює – 6.

14. При якому значенні m вектори $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k},\vec{b}=-j+m\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ компланарні?

15. Знайти скалярний добуток колінеарних векторів і протилежно напрямлених векторів $\vec{a},\ \vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1$.

16. У прямокутному трикутнику ABC кути при вершинах A і C дорівнюють 60° і 90° відповідно, а довжина гіпотенузи дорівнює 2. Обчислити скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

17. Відомо, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Довести, що $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{-3}{2}$.

Варіант 25

1. Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислити $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|,\ (\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}),\ [\alpha\vec{a},\ \beta\vec{b}]$, якщо $\alpha=2,\ \beta=1,\ \vec{a}=\{1;1;3\},\ \vec{b}=\{0;1;-1\}$.

2. При якому значенні β:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні;

б) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a}=\{1;2;0\},\ \vec{b}=\{-5\ \beta;-5\}$, $\vec{c}=\{4;-4;-1\}$?

3. Задано вектори $\vec{a}=\{1;4;-2\}$ і $\vec{b}=\{2;-1;-1\}$. $\vec{x}\perp\vec{a},\ \vec{x}\perp\vec{b}$, $\angle\left(\vec{x},\ Oy\right)$— гострий, $|\vec{x}|^2=126$. Знайти абсцису вектора x.

4. Відомі три вершини трикутника: A (3; 3; –3), B (–2; –3; –3), C (–3; 2; –2). Обчислити:

а) довжину вектора $\overrightarrow{D_1D_2}$, добудувавши трикутник до паралелограмів $ABCD_1$ і $ABCD_2$;

б) координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD_1$;

в) координати точок перетину медіан трикутника ABC;

г) координати вектора з початком в точці C, рівного вектору $\overrightarrow{BA}$;

д) роботу сили $\overrightarrow{AD_1}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж ламаної $ABCD_2$.

5. Відомі точки: A (2; –1; 2), B (–1; –3; –2), C (–2; 3; –1), D (1; –2; –1). Обчислити:

а) $\left|-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}\right|$;

б) $\left(-2\overrightarrow{AB},\ -3\overrightarrow{CD}\right)$;

в) $\left[-2\overrightarrow{AB},\ -3\overrightarrow{CD}\right]$;

г) $\left[\overrightarrow{AD},\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right]$;

д) площу трикутника ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

є) добудувати тетраедр до паралелепіпеду і знайти квадрат довжини його діагоналі, проведеної з вершини A;

ж) координати вектора з одиничною абсцисою, проведеної з вершини D перпендикулярно грані ABC;

з) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AD}$;

и) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$;

і) при якому значенні аплікати точки D всі чотири точки лежать в одній площині.

6. Довести, що вектори $\vec{a}=\{-1;-2;4\}$, $\vec{b}=\{2;3;-2\}$, $\vec{c}=\{-3;5;4\}$ утворюють базис в E^3. Знайти координати вектора $\vec{d}=\{-1;-20;-4\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

7. Задані вектори $\vec{a}=\{5;-3;2\}$, $\vec{b}=\{3;3;0\}$, $\vec{c}=\{2;-4;-5\}$. Обчислити координати вектора $\vec{x}$, коли відомо, що $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=3$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=15$, $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=-13$.

8. Обчислити величину скалярного добутку $\left(-3\vec{u}-4\vec{v}\right)\left(\vec{u}+4\vec{v}\right)$, якщо $\vec{u}=4\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-3\vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\varphi=\angle\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$, $cos\,\varphi=0{,}3$.

9. Задані вершини чотирикутника A (–4; –3), B (–5; 1), C (–2; –2), D (–1; p). При якому значенні параметра p діагоналі AC і BD перпендикулярні?

10. При якому значенні α точки A (1; 0; –1), B (–2; –2; 1), C (–1; 2; –1), D (5; α; 0) лежать в одній площині?

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$; $\left|\vec{p}\right|=2$, $\left|\vec{q}\right|=1$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

12. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ та $\vec{q} = 2\vec{b} + \vec{a}$, якщо $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

13. Представити вектор $x = (a,b)i + (b,c)j + (c,a)k$ у вигляді лінійної комбінації векторів a, b, c, якщо $a = \{1, 1, 1\}$, $b = \{0, 1, 1\}$, $c = \{1, 0, 1\}$.

14. При якому значенні t вектори $\vec{a} = (6; 0; 12)$ і $\vec{b} = (-8; 13; t)$ будуть взаємно перпендикулярними?

15. Відомо дві сторони трикутника $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$. Обчислити довжину його висоту $\overrightarrow{CD}$ при умові, що $\vec{p}$, $\vec{q}$ — взаємно перпендикулярні орти.

16. Дано тетраедр $ABCD$, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, K — внутрішня точка ребра CB. Розкласти вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

17. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний вектору $\vec{a} = (0; -1; 2)$ та вектору $\vec{b} = (1; 3; 3)$, задовольняє умові $(\vec{c}, \vec{p}) = 8$, $\vec{p} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Знайти координати вектора $\vec{c}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аналітична геометрія. Частина 1: Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі : Навчальний посібник / О. А. Кадубовський, О. Л. Кадубовька, Л. Г. Плесканьова. — Слов'янськ, 2010. — 84 с.
2. Векторна алгебра : Підручник для вищих навчальних закладів / Ю. І. Горобець, Б. В. Гринев, І. К. Кириченко. — Харків : Гімназія, 2015. — 164 с.
3. Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія : навч. посіб. / О. А. Геляровська, О. А. Галуза, С. М. Решетнікова, І. В. Сердюк; за ред. проф. Л. М. Любчика. — Харків: НТУ «ХПІ», 2016. — 169 с.
4. Вища метематика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. / Є. П. Зайцев. — Київ : Алерта, 2017. — 574 с.
5. Вища математика у прикладах і задачах : у 2 т. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.]; за ред. Л. В. Курпи. — Харків: НТУ «ХПІ», 2009. — 532 с.
6. Власенко К. В., Степанов А. І., Москаленко Л. П. Вища математика. Векторна алгебра й аналітична геометрія. Навчальний посібник до практичних занять та самостійної роботи. — Краматорськ : ДДМА, 2009. — 80 с.
7. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособие: в 2 т. / Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян [и др.]; под ред. Ю. Л. Геворкяна. — Харьков : Вид-во «Підручник» НТУ «ХПІ», 2011. — 408 с.
8. Гуран І. Математика для економістів : Підручник / І. Гуран, О. Гутік. — Львів, 2006. — 382 с.
9. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М. : Наука, 1971. — 220 с.
10. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М. : Наука, 1984. — 302 с.
11. Кузнецов Л. А. Сборник задач по высшей математике. — М. : Высш. шк., 1983. — 175 с.
12. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М. : Наука, 1968. — 431 с.
13. Практикум з векторної математики : навч. посіб. / Н. П. Уланова, В. В. Приходько; М-во освіти і науки України, Нац. Техн. Ун-т «Дніпровська політехніка», Дніпро : НТУ «ДП», 2019. — 69 с.
14. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — М. : Наука, 1975. — 319 с.
15. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. — Мн. : Высш. шк., 1990. — 270 с.
16. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. — Мн. : Высш. шк., 1991. — 352 с.

ЗМІСТ