МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
за темою «Транспортна задача» з дисципліни
«Оптимізаційні методи та моделі»

для студентів усіх форм навчання
спеціальності 076
«Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 17.05.2019 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

Методичні вказівки до практичних занять за темою «Транспортна задача» з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» для студентів усіх форм навчання спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»/ уклад.: О. В. Замула, О. О. Замула. – Харків: НТУ «ХПІ», 2019. – 33 с.

Укладачі: О. В. Замула
О. О. Замула

Рецензент О.Ю. Лінькова

Кафедра міжнародного бізнесу та фінансів

ВСТУП

Транспортні задачі є важливим класом оптимізаційних задач, математична модель яких відповідає моделі задачі лінійного програмування. Це, як правило, задачі пошуку оптимального плану перевезення готової продукції. Однак деякі задачі, які зводяться до моделі транспортної задачі, наприклад, планування виробництва, управління запасами, рух капіталу, тощо насправді не мають нічого спільного з транспортуванням, але до них можна застосовувати ті ж самі методи, що й для транспортної задачі.

Оскільки транспортна задача насправді є задачею лінійного програмування, її розв'язок можна знайти за допомогою симплекс-методу або будь-якого іншого аналітичного методу. Проте спеціальна структура математичної моделі транспортної задачі дозволяє використовувати спеціальний метод для їх розв'язування, в основі яких лежить симплекс-метод, який має назву *транспортний симплекс-метод*.

У даному навчальному виданні транспортна задача розглядається на прикладі, який, хоча є дещо штучним, проте, дозволить розглянути особливості транспортного симплекс-методу.

Постановка транспортної задачі

Розглянемо транспортну задачу на прикладі, який наведено нижче.

Приклад. Транспортна компанія спеціалізується на перевезенні легкових автомобілів різних моделей з трьох автомобілебудівних заводів до чотирьох салонів продажу. Заводи виготовляють 160, 240 і 120 авто щоквартально, а потреби салонів продажу у їхній продукції складають 120, 80, 200, 120 одиниць. Автомобілі перевозяться спеціальними машинами – автомобілевозами (автовозами), які мають однакову місткість. Усі автомобілі приблизно однакового розміру і їх у будь-якій комбінації можна розмістити по 8 одиниць на один автовоз.

Відома вартість рейсу автовоза у кожному напрямку, яка показана в табл. 1 в умовних грошових одиницях (у.г.о.).

Таблиця 1 – Вартість одного рейсу, у.г.о.

		Салони			
		1	**2**	**3**	**4**
Заводи	**1**	6	8	9	3
	2	3	5	6	1
	3	1	6	4	2

Номер рядка основної частини таблиці 1 відповідає номеру заводу, а номер стовпчика – номеру салону.

Необхідно скласти оптимальний план перевезень автомобілів із заводів у салони.

Постановка задачі. Перше, з чого необхідно починати побудову будь-якої моделі – визначитися з невідомими величинами задачі. Для цього згадаємо, що в нас є три пункти, з яких відправляємо товар, і чотири пункти, в які цей товар відправляється, тобто кількість усіх напрямків, за якими відбувається транспортування, дорівнює $3 \cdot 4 = 12$. Для кожного з цих напрямків треба визначити кількість рейсів, які здійснять автовози для транспортування авто. Отже, невідомими задачі є кількість рейсів, які необхідно здійснити в кожному напрямку, і таких невідомих 12, що відповідає кількості напрямків перевезень. Перед тим як перейти до запису математичної моделі, подамо постановку задачі у вигляді таблиці на рис. 1, яку в подальшому називатимемо *транспортною таблицею*.

Заводи \ Автосалони	1	2	3	4	Пропозиція
1	6 x11	8 x12	9 x13	3 x14	20
2	3 x21	5 x22	6 x23	1 x24	30
3	1 x31	6 x32	4 x33	2 x34	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 1

У лівому верхньому куті кожної клітинки показано вартість (у.г.о.) одного перевезення з *i*-го заводу у *j*-й автосалон. Оскільки 1 автовоз – це 8 автомобілей і всі числа є кратними 8, то попит автосалону і пропозиція заводу будуть цілими числами. Вони вимірюються у кількості рейсів, які необхідно виконати автовозу, щоб вивезти продукцію з кожного заводу (в стовпчику праворуч від таблиці) і доставити у кожний з салонів (у рядку під таблицею). Отже, необхідно знайти такі обсяги перевезень x_{ij} між *i*-м заводом і *j*-м автосалоном, при яких загальна вартість перевезення буде мінімальною. Ці значення в транспортній таблиці традиційно розміщують у центрі її відповідних клітинок.

Транспортну таблицю для транспортної задачі загального вигляду показано на рис. 2.

Пункт відправлення \ Пункт призначення	1	2	..	n	Пропозиція
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	.. ..	c_{1n} x_{1n}	s_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	.. ..	c_{2n} x_{2n}	s_2
..	.. ..	.. ..	.. ..	.. ..	..
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	.. ..	c_{mn} x_{mn}	s_m
Попит	d_1	d_2	..	d_n	

Рисунок 2

Тут і далі використовуються такі позначення:

m – кількість пунктів відправлення (заводи);

n – кількість пунктів призначення (салони);

c_{ij} – вартість рейсу з i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення (від *англ.* cost – вартість);

s_i – величина пропозиції у i-му пункті відправлення (від *англ.* supply – пропозиція), вимірюється кількістю рейсів;

d_j – величина попиту у j-му пункті призначення (від *англ.* demand – попит), вимірюється кількістю рейсів.

x_{ij} – кількість рейсів з i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення.

Схему перевезень показано на рис.3, де кружками подано пункти відправлення та доставки продукції.

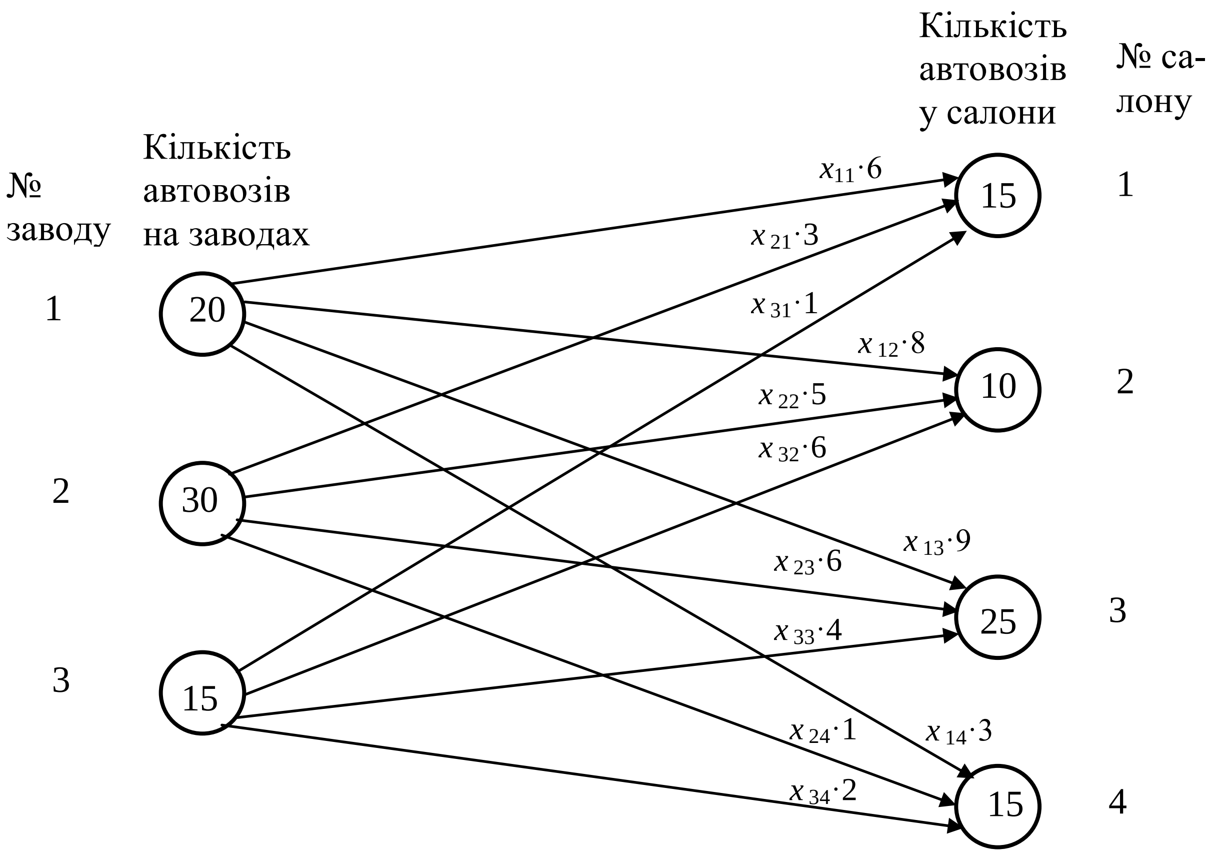

Рисунок 3

Стрілками показано напрямки руху продукції. В кружках вказано кількість рейсів, здійснених з кожного заводу (ліворуч) і кількість рейсів, здійснених до кожного автосалону (праворуч). Над кожною дугою вказана загальна вартість перевезень (у.г.о.) за заданим напрямком як добуток поки що невідомої кількості рейсів з i-го заводу до j-го автосалону на вартість кожного такого рейсу.

На рис.4 показано схему перевезень для транспортної задачі загального вигляду.

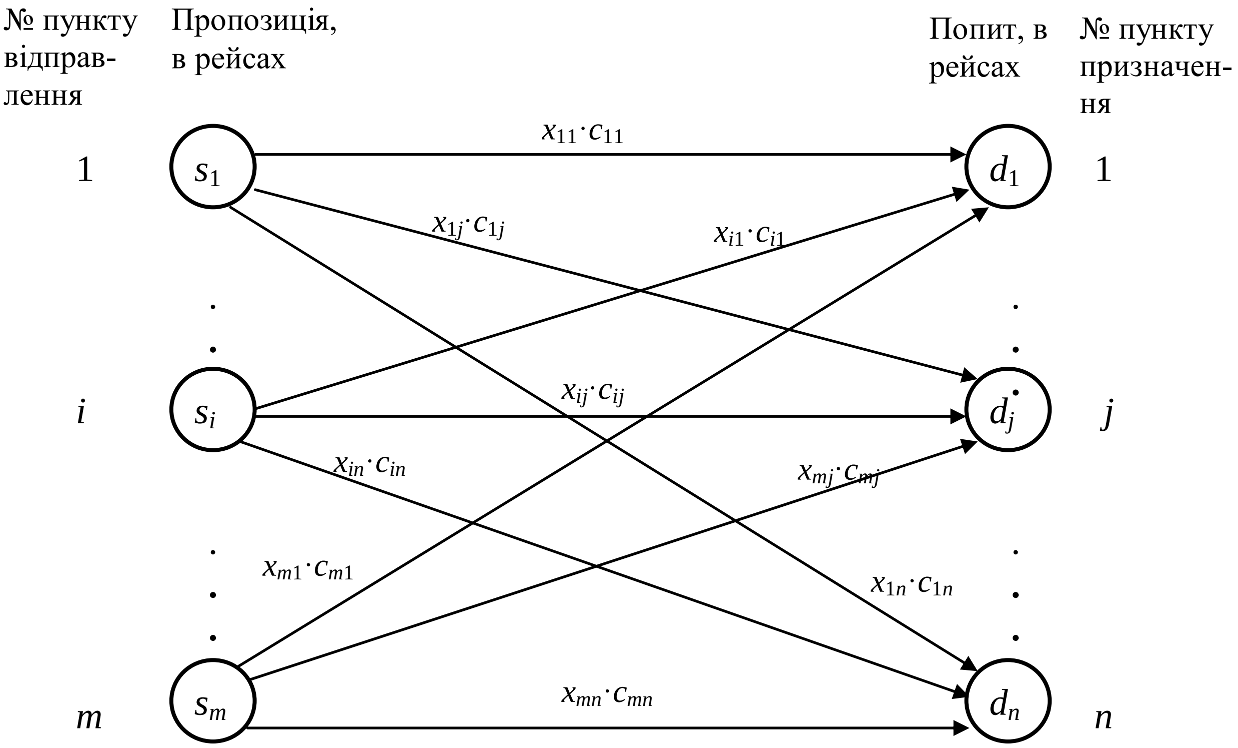

Рисунок 4

Загальна кількість напрямків у задачі з m пунктами відправлення і n пунктами призначення $m \cdot n$. Такою ж є і кількість змінних.

Формулювання математичної моделі задачі

Загальна вартість перевезення товару є сумою вартостей по окремих напрямках, яка має бути мінімальною. Ми вже позначили x_{ij} кількість автовозів, якими перевозять легкові автомобілі з i-го заводу до j-го автосалону. Тоді цільова функція запишеться так:

$$Z = 6x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 3x_{14} + 3x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} + x_{24} + x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min$$

або у загальному випадку:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \tag{1}$$

Необхідно звернути увагу на те, що максимальна сума рейсів з заводів дорівнює максимальній сумі рейсів у автосалони:

20 + 30 + 15 = 15 + 10 + 25 + 15.

Маємо рівновагу між попитом і пропозицією. Оскільки, на кожному заводі є чотири напрямки (за кількістю автосалонів), за якими вивозяться авто, і сума вивезеного товару на кожному заводі має дорівнювати кількості наявного товару, то мають виконуватися наступні три рівності (за кількістю заводів):

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 20; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 30; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 15. \end{aligned}$$

Так само у кожний автосалон з трьох напрямків (за кількістю заводів) постачаються авто, і сума поставленого товару для кожного автосалону має дорівнювати величині попиту. Отже, мають виконуватися наступні чотири рівності (за кількістю автосалонів) :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 15; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 10; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 25; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 15. \end{aligned}$$

Транспортна задача, в якій сума пропозиції дорівнює сумі попиту, називається *закритою*, або *збалансованою*, у протилежному випадку – *відкритою*.

У загальному вигляді збалансована (закрита) транспортна задача відповідає такій умові:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \ , \tag{2}$$

а функціональні обмеження мають такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \ , \quad i = 1..m \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \ , \quad j = 1..n \ .$$

Необхідно пам’ятати, що перевезення здійснюється із заводів до автосалонів, а не навпаки, тому до вказаних обмежень додається умова невід’ємності змінних:

$$x_{ij} \ge 0, \ \ i = 1..m, \ \ j = 1..n \ . \qquad (4)$$

Отже, вирази (1), (3), (4) представляють математичну модель транспортної задачі, яка, таким чином, є нічим іншим, як задачею лінійного програмування.

В подальшому розглядатимемо лише закриті транспортні задачі, що задовольняють умову (2).

Загальний алгоритм транспортного симплекс-методу

Для класу транспортних задач на основі симплекс-методу розроблено спеціальний метод розв’язання, який має назву *«транспортний симплекс-метод»*. Загальний алгоритм є аналогічним алгоритму симплекс-методу, проте виконується на базі транспортної таблиці (див. рис.2). Послідовність розв’язування є такою:

Крок 1. Знаходимо початковий базисний допустимий розв’язок.

Крок 2. Перевіряємо умову оптимальності за допомогою процедури, яка називається *методом потенціалів*. Якщо умова виконується – знайдений розв’язок є оптимальним і розрахунки припиняються. Якщо ні – переходимо до наступного кроку.

Крок 3. Серед небазисних змінних вводимо одну з них до базису, виводячи натомість одну з базису за певним правилом, яке називається *перенесення по циклу*. Повертаємося до кроку 2.

Далі розглянемо кожний крок окремо.

Знаходження початкового розв’язку

Знаходження початкового розв’язку – це Крок 1 транспортного симплекс-методу.

Як ми вже пересвідчилися, типова транспортна задача з m пунктами відправлення і n пунктами призначення має $m + n$ функціональних обмежень (3).

У закритій транспортній задачі загальний попит дорівнює загальній пропозиції і, як наслідок, одна з рівностей буде автоматично виконуватися. Тому транспортна задача має $m + n – 1$ незалежних рівнянь в системі (3). Відповідно, і **кількість базисних змінних має бути такою**:

$$m + n - 1.$$

У даному прикладі задача матиме 3 + 4 – 1 = 6 базисних змінних.

Для знаходження початкового базисного розв’язку використовуються різні методи, найпоширеніші з яких такі:

1. *Метод північно-західного кута.*
2. *Метод найменшої (мінімальної) вартості.*
3. *Метод Фогеля.*

Найкращий початковий розв’язок з точки зору наближеності його до оптимального дає *метод Фогеля*, проте він вимагає найбільшої кількості обчислень. Найгірший початковий розв’язок дає *метод північно-західного кута*, проте він є найпростішим. *Метод найменшої вартості* є простим у виконанні і з прийнятною якістю початкового розв’язку.

Початковий базисний розв’язок. Метод північно-західного кута

Якщо подивитися на географічні мапи, то північ у них знаходиться вгорі, а захід – ліворуч. У процесі знаходження початкового допустимого базисного розв’язку послідовно викреслюємо рядки і стовпчики транспортної таблиці, і значення змінних записуємо у *верхню ліву* клітинку *поточної* таблиці, яка залишається після викреслювань, звідси назва методу.

Крок 1.1. Змінній у клітинці у лівому верхньому куті поточної транспортної таблиці присвоюється максимальне значення, що допускається обмеженнями на попит і пропозицію. Значення записуємо у центральну частину клітинки, навіть якщо воно дорівнює нулю.

Крок 1.2. Викреслюється рядок, якщо повністю реалізовується пропозиція, або стовпчик, якщо повністю реалізовується попит. Це означає, що при подальшій побудові початкового допустимого базисного розв’язку такий рядок (стовпчик) не розглядатиметься. Якщо одночасно задовольняються попит і пропозиція, тоді довільно обираємо, що закреслювати: рядок чи стовпчик.

Крок 1.3. Якщо невикресленим залишається лише один рядок (стовпчик), процес зупиняється – початковий розв’язок знайдено. Інакше повертаємося до кроку 1.1 . Іншими словами, процес побудови початкового розв’язку закінчується у правій нижній клітинці транспортної таблиці.

У нашій задачі у верхню ліву клітинку записуємо значення 15 (крок 1.1). Саме таку максимальну кількість автовозів можна відправити з першого заводу у перший автосалон (рис. 5).

		Автосалони				Пропозиція
		1	2	3	4	
Заводи	1	6 15	8	9	3	20
	2	3	5	6	1	30
	3	1	6	4	2	15
Попит		15	10	25	15	

Рисунок 5

Після цього викреслюємо перший стовпчик (крок 1.2), оскільки пропозицію на першому заводі вичерпано. В подальшому викреслені стовпчики та рядки позначатимемо сірим кольором. Сумарна кількість не викреслених рядків та стовпчиків більша одного, тому, відповідно до кроку 1.3, повертаємося до кроку 1.1 методу північно-західного кута. У лівому верхньому куті незатіненої частини таблиці (без урахування першого стовпчика) записуємо 5 – максимальну кількість рейсів, що залишилося доставити з першого заводу, так, як показано на рис. 6.

Автосалони

Заводи	1	2	3	4	Пропозиція
1	[6] 15	[8] 5	[9]	[3]	20
2	[3]	[5]	[6]	[1]	30
3	[1]	[6]	[4]	[2]	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 6

Тому викреслюємо перший рядок (крок 1.2), оскільки товару на першому заводі вже не залишилося. Повертаємося до кроку 1.1. У лівому верхньому куті незатіненої частини таблиці записуємо 5 – максимальну кількість рейсів, що залишилося доставити в другий автосалон, так, як показано на рис. 7.

Автосалони

Заводи	1	2	3	4	Пропозиція
1	[6] 15	[8] 5	[9]	[3]	20
2	[3]	[5] 5	[6]	[1]	30
3	[1]	[6]	[4]	[2]	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 7

Тому викреслюємо другий стовпчик (крок 1.2), оскільки місця для товару у другому автосалоні вже не залишилося. Повертаємося до кроку 1.1. У лівому верхньому куті незатіненої частини таблиці записуємо 25 – максимальну кількість рейсів, що залишилося доставити з 2-го заводу, так, як показано на рис. 8.

Автосалони

Заводи	1	2	3	4	Пропозиція
1	[6] 15	[8] 5	[9]	[3]	20
2	[3]	[5] 5	[6] 25	[1]	30
3	[1]	[6]	[4]	[2]	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 8

Одночасно з цим повністю задоволено попит третього автосалону. Тому можемо викреслити або другий рядок, або третій стовпчик. Нехай це буде третій стовпчик (крок 1.2). Повертаємося до кроку 1.1. У лівому верхньому куті незатіненої частини таблиці записуємо 0, так, як показано на рис. 9. Це максимальна кількість рейсів, оскільки продукції на другому заводі не залишилося.

Заводи	Автосалони 1	2	3	4	Пропозиція
1	[6] 15	[8] 5	[9]	[3]	20
2	[3]	[5] 5	[6] 25	[1] 0	30
3	[1]	[6]	[4]	[2]	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 9

Залишається викреслити другий рядок (крок 1.2). Повертаємося до кроку 1.1. У лівому верхньому куті незатіненої частини таблиці (права нижня клітинка початкової транспортної таблиці) записуємо 15 – максимальну кількість рейсів, що залишилося доставити з третього заводу в четвертий автосалон, так, як показано на рис. 10.

Заводи	Автосалони 1	2	3	4	Пропозиція
1	[6] 15	[8] 5	[9]	[3]	20
2	[3]	[5] 5	[6] 25	[1] 0	30
3	[1]	[6]	[4]	[2] 15	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 10

Залишилося виконати формально крок 1.2 і на кроці 1.3 завершити пошук – допустимий початковий базисний розв’язок методом північно-західного кута знайдено.

Значення базисних змінних:

$$x_{11} = 15,\; x_{12} = 5,\; x_{22} = 5,\; x_{23} = 25,\; x_{24} = 0,\; x_{34} = 15.$$

Всі інші змінні небазисні і дорівнюють нулю.

Для перевірки правильності знаходження допустимого базисного розв’язку підставляємо знайдені значення змінних у рівняння (3).

При правильному заповненні таблиці кількість клітинок зі значеннями змінних, в тому числі і нульовими, повинно дорівнювати $m + n - 1$. Для нашої задачі такі значення мають відображатися в шести клітинках ($4 + 3 - 1 = 6$). Ці клітинки називаються базисними. Інші клітинки є небазисними і змінні в них також небазисні, а отже, дорівнюють нулю.

Коротко про те, як відрізнити базисну змінну (клітинку) від небазисної:

1) значення базисних змінних, навіть тих, що дорівнюють нулю, відображаються у центрі базисних клітинок;
2) кількість базисних змінних (клітинок) дорівнює $m + n - 1$;
3) значення небазисних змінних дорівнюють нулю і не відображаються у відповідних клітинках.

Як варіант, можливий інший початковий базисний розв’язок, відмінність якого від попереднього полягає в тому, що замість $x_{24} = 0$ у базис входить $x_{33} = 0$.

Вартість перевезень для такого плану перевезень становить:

$$Z = 15 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 25 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 15 \cdot 2 = 90 + 40 + 25 + 150 + 0 + 30 = 335.$$

Початковий базисний розв’язок. Метод найменшої вартості

Цей метод відповідає своїй назві. В базис послідовно обираються змінні, що відповідають напрямкам з найменшою вартістю. Послідовність знаходження початкового базисного розв’язку така:

Крок 1.1. Знаходиться клітинка з найменшою вартістю. Якщо таких клітинок декілька, то вибирають з них довільну.

Крок 1.2. Змінній у вибраній клітинці присвоюється найбільше значення, яке допускає обмеження на попит (пропозицію), при цьому враховуються значення інших базисних змінних, що знаходяться у тому ж стовпчику та рядку, де і дана змінна. Якщо в базис обрано $m + n - 1$ змінних, тоді початковий допустимий базисний розв’язок знайдено. Якщо ні, тоді переходимо до наступного кроку.

Крок 1.3. Викреслюємо стовпчик (рядок), для якого попит (пропозицію) задоволено (викреслені стовпчики та рядки позначатимемо сірим кольором). Якщо задоволено і попит, і пропозицію одночасно, викреслюємо довільно або рядок, або стовпчик. У викреслених стовпчиках та рядках пошук базисних змінних далі не ведеться. Повертаємося до кроку 1.1.

Застосуємо цей метод до нашої задачі. Координати клітинок показуватимемо у форматі (i, j), де i – номер рядка-завода, j – номер стовпчика-салона.

Крок 1.1 (1). Знайдемо клітинки з найменшою вартістю. Таких клітинок дві (2,4) і (3,1). Тому оберемо одну з них довільно, наприклад, клітинку (3, 1).

Крок 1.2 (2). Змінній у вибраній клітинці присвоюється найбільше значення з можливих ($x_{31} = 15$). Це перша базисна змінна.

Крок 1.3 (3). В клітинці (3, 1) задовольняється одночасно і попит, і пропозиція, тому викреслюємо довільно рядок чи стовпчик. Виберемо для викреслення, наприклад, стовпчик 1, так, як це показано на рис. 11. Повертаємося до першого кроку.

		Автосалони				Пропозиція
		1	2	3	4	
Заводи	1	6	8	9	3	20
	2	3	5	6	1	30
	3	1 15	6	4	2	15
Попит		15	10	25	15	

Рисунок 11

Крок 1.1 (4). Клітинка з найменшою вартістю (2, 4).

Крок 1.2 (5). Змінній у вибраній клітинці присвоюється найбільше значення з можливих ($x_{24} = 15$). Це друга базисна змінна.

Крок 1.3 (6). У 4-му стовпчику повністю задовольняється попит, тому викреслюємо його (рис. 12).

Заводи	Автосалони 1	Автосалони 2	Автосалони 3	Автосалони 4	Пропозиція
1	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{3}$	20
2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$ 15	30
3	$\boxed{1}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 12

Крок 1.1 (7). Клітинка з найменшою вартістю (3, 3)

Крок 1.2 (8). Змінній у вибраній клітинці присвоюється найбільше значення з можливих (0). Це третя базисна змінна.

Крок 1.3 (9). У 3-му рядку повністю задовольняється пропозиція, тому викреслюємо його.

Виконуючи далі кроки 1.1–1.3, отримуємо базисний початковий розв'язок, так, як це показано на рис. 13. Стрілочками вказано послідовність, у якій знаходимо базисні змінні.

Заводи	Автосалони 1	Автосалони 2	Автосалони 3	Автосалони 4	Пропозиція
1	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 20	$\boxed{3}$	20
2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{1}$ 15	30
3	$\boxed{1}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$	15
Попит	15	10	25	15	

Рисунок 13

Отже, базисні змінні мають такі значення:

$$x_{13} = 20,\ x_{22} = 10,\ x_{23} = 5,\ x_{24} = 15,\ x_{31} = 15,\ x_{33} = 0.$$

Небазисні змінні дорівнюють нулю.

Таким чином, крок 1 загального алгоритму знаходження оптимального розв'язку виконано.

Знайдемо загальну вартість перевезень за формулою (1) на підставі отриманих значень змінних:

$$Z = 20·9 + 10·5 + 5·6 + 15·1 + 15·1 + 0·4 = 180 + 50 + 30 + 15 + 15 = 290.$$

Як бачимо, методом найменшої вартості отримано кращий початковий розв'язок, ніж той, що отримано за допомогою методу північно-західного кута, оскільки вартість перевезення у другому випадку менша, ніж у першому (290 < 335).

Початковий базисний розв'язок. Метод Фогеля

Цей метод, як і попередні, дозволяє отримати початковий допустимий базисний розв'язок послідовним заповненням клітинок і викреслюванням стовпчиків або рядків (лише одного за кожний крок), у яких повністю задовольняється попит або пропозиція відповідно.

Відмінність полягає у тому, що на кожному кроці методу Фогеля для кожного i-го рядка обчислюються штрафи, як абсолютне значення різниці між двома найменшими тарифами в цьому рядку:

$$p_i = |c_{ik} – c_{is}|,$$

де c_{ik} , c_{is} – найменші два тарифи в i-му рядку.

Так само обчислюються штрафи для кожного j-го стовпчика

$$p_j = |c_{tj} – c_{rj}|,$$

де c_{tj} , c_{rj} – найменші два тарифи в j-му стовпчику.

Якщо ж у рядку або стовпчику є щонайменше два однакових мінімальних значення, тоді різниця є мінімальною і дорівнює нулю.

Після визначення рядка або стовпчика з найбільшим штрафом $\max\{\max\{p_i\}, \max\{p_j\}\}$, для заповнення у такому рядку або стовпчику обирається клітинка з мінімальним тарифом.

Якщо існує декілька рядків або стовпчиків з максимальним штрафом, тоді *довільно* береться один з цих рядків або стовпчиків і в ньому обирається одна клітинка з найменшим тарифом на перевезення. Якщо таких клітинок декілька, тоді серед них робиться довільний вибір.

Якщо невикресленим залишився один рядок або один стовпчик, тоді у ньому обираються послідовно клітинки в порядку зростання тарифів.

На рис. 14 показано послідовне знаходження початкового базисного розв’язку. Різниця між двома найменшими тарифами в транспортній таблиці для кожного рядка і стовпчика записана у крайньому правому стовпчику (p_i) і у нижньому рядку (p_j) відповідно.

Заводи \ Автосалони	1	2	3	4	S	pi
1	[6]	[8]	[9]	[3] 15	20	**3**
2	[3]	[5]	[6]	[1]	30	2
3	[1]	[6]	[4]	[2]	15	1
D	15	10	25	15		
pj	2	1	2	1		

Заводи \ Автосалони	1	2	3	4	S	Штраф
1	[6]	[8]	[9]	[3] 15	20	2
2	[3]	[5]	[6]	[1]	30	2
3	[1] 15	[6]	[4]	[2]	15	**3**
D	15	10	25	15		
Штраф	2	1	2			

Заводи \ Автосалони	1	2	3	4	S	Штраф
1	[6]	[8]	[9]	[3] 15	20	2
2	[3] 0	[5]	[6]	[1]	30	2
3	[1] 15	[6]	[4]	[2]	15	
D	15	10	25	15		
Штраф	**3**	3	3			

Заводи \ Автосалони	1	2	3	4	S	Штраф
1	[6]	[8]	[9]	[3] 15	20	1
2	[3] 0	[5] 10	[6]	[1]	30	1
3	[1] 15	[6]	[4]	[2]	15	
D	15	10	25	15		
Штраф		**3**	3			

Заводи \ Автосалони	1	2	3	4	S	Штраф
1	[6]	[8]	[9] 5	[3] 15	20	1
2	[3] 0	[5] 10	[6] 20	[1]	30	1
3	[1] 15	[6]	[4]	[2]	15	
D	15	10	25	15		
Штраф			3			

Рисунок 14

Отже, базисні змінні мають такі значення:

$$x_{13} = 5,\ x_{14} = 15,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 10,\ x_{23} = 20,\ x_{31} = 15.$$

Небазисні змінні дорівнюють нулю.

Як правило, всю послідовність знаходження початкового базисного розв’язку методом Фогеля показують в одній таблиці (рис.15).

Автосалони

Заводи	1	2	3	4	S	pi(1)	pi(2)	pi(3)	pi(5)	pi(6)
1	[6]	[8]	[9] 5	[3] 15	20	**3**	2	2		*
2	[3] 0	[5] 10	[6] 20	[1]	30	2	2	**2**	*	
3	[1] 15	[6]	[4]	[2]	15	1	**3**			
D	15	10	25	15						
pj(1)	2	1	2	1						
pj(4)		**3**	3							

Рисунок 15

Штрафи для рядків записують праворуч від стовпчика S. Штрафи для стовпчиків додаються внизу таблиці. Жирним шрифтом виділяється найбільший штраф. Порядковий номер k в $p_j(k)$ та $p_j(k)$ на рис.15 вказує на послідовність додавання рядків p_j та стовпчиків p_i зі штрафами до транспортної таблиці. Зірочками (*) показано клітинки, в яких відбуваються останні заповнення, коли залишився лише один стовпчик.

Загальна вартість перевезень за формулою (1) при таких значеннях змінних становить Z=275 у.г.о., що менше від вартості, отриманої в попередньому методі (275 < 290).

Отже, метод Фогеля дає кращий початковий розв'язок, ніж попередні методи.

Відразу виникає питання: чи **цей** розв'язок є оптимальним? Відповідь на це питання, а також подальший пошук оптимального розв'язку знайдемо на другому кроці.

Метод потенціалів

Для перевірки умови оптимальності та подальшого знаходження оптимального розв'язку використовується **метод потенціалів – Крок 2 алгоритму транспортного симплекс-методу.**

Алгоритм дій

Кожному рядку i та кожному стовпчику j транспортної таблиці ставляться у відповідність числа (потенціали). Позначимо їх u_i та v_j. Значення u_i та v_j мають бути такими, щоб для базисних змінних виконувалася умова:

$$u_i + v_j = c_{ij} . \qquad (5)$$

Нагадуємо, що c_{ij} – це тариф на перевезення в клітинці (i, j).

Після того як u_i та v_j знайдено, за їхньою допомогою перевіряємо *умову оптимальності* по усіх **небазисних** клітинках:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} . \qquad (6)$$

Якщо для усіх клітинок дана умова виконується, тоді отриманий розв'язок є оптимальним.

Якщо принаймні для однієї клітинки умова (6) не виконується, тоді необхідно продовжити пошук оптимального розв'язку. У цьому випадку, подібно до симплекс-методу, визначаємося зі змінною (і клітинкою), яка має увійти до базису. Така змінна відповідає клітинці, де різниця r між тарифом і потенціалами є найбільшим за модулем від'ємним числом

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j , \qquad r_{\min} = \min\{r_{ij}\}, \text{ для } r_{ij} < 0.$$

Іншими словами, базисною стає клітинка, в якій r_{ij} є найбільшим за модулем від'ємним числом. Якщо таких клітинок декілька, тоді обирається довільно одна з них.

Процес зміни базису буде описано в **кроці 3**, який представлений в розділі «Перенесення по циклу».

Застосуємо метод потенціалів на прикладі початкового базисного розв'язку даної задачі, отриманого за допомогою **методу північно-західного кута** (рис. 10). Як нам вже відомо, цей розв'язок не є оптимальним.

Запишемо умову (5) у вигляді системи з шести рівнянь (за кількістю базисних змінних) з сімома невідомими (u_i та v_j):

$$\begin{aligned}
u_1 + \quad\quad & v_1 = 6 \\
u_1 + \quad\quad & v_2 = 8 \\
u_2 + \quad & v_2 = 5 \\
u_2 \quad & + v_3 = 6 \\
u_2 \quad & + v_4 = 1 \\
u_3 & + v_4 = 2
\end{aligned}$$

У нашій задачі є 7 потенціалів, значення яких необхідно встановити, а рівнянь всього 6, тому будь-якій з невідомих величин можна присвоїти довільне значення (нехай $u_1 = 0$) і потім послідовно знайти значення інших потенціалів, так, як це показано в табл. 2.

Таблиця 2

Базисні змінні	Рівняння	Розв'язок
x_{11}	$u_1 + v_1 = 6$	$u_1 = 0 \rightarrow v_1 = 6$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 8$	$u_1 = 0 \rightarrow v_2 = 8$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 5$	$v_2 = 8 \rightarrow u_2 = -3$
x_{23}	$u_2 + v_3 = 6$	$u_2 = -3 \rightarrow v_3 = 9$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 1$	$u_2 = -3 \rightarrow v_4 = 4$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 2$	$v_4 = 4 \rightarrow u_3 = -2$

Після того як потенціали знайдено, для небазисних клітинок знаходимо різницю тарифів і потенціалів:

$c_{13} - u_1 - v_3 = 9 - 0 - 9 = \ \ 0,$

$c_{14} - u_1 - v_4 = 3 - 0 - 4 = -1,$

$c_{21} - u_2 - v_1 = 3 - (-3) - 6 = \ \ 0,$

$c_{31} - u_3 - v_1 = 1 - (-2) - 6 = -3,$

$c_{32} - u_3 - v_2 = 6 - (-2) - 8 = \ \ 0,$

$c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - (-2) - 9 = -3.$

Деякі значення є від'ємними, тому цей розв'язок не є оптимальним, і необхідно продовжувати пошук далі. Для цього **вводимо в базис змінну, для якої r_{ij} є найбільшим за модулем від'ємним числом**. Це або x_{31} або x_{33} – різниця, що відповідає їм, становить –3.

При розв'язуванні транспортних задач потенціали знаходять, як правило, безпосередньо у транспортній таблиці, так, як це показано на рис.16. Їх пошук набагато простіший, ніж може здатися на перший погляд. Правило просте: **для знаходження невідомого потенціалу в базисних клітинках від тарифу віднімають відповідне значення відомого потенціалу**. Послідовність їх знаходження показано римськими цифрами. У правому нижньому куті записується значення r_{ij} для небазисних змінних (для базисних така різниця дорівнює нулю).

		Автосалони				Пропозиція	
		1	2	3	4		ui
Заводи	1	$\boxed{6}$ 15	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{3}$ –1	20	0 (I)
	2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{6}$ 25	$\boxed{1}$ 0	30	–3 (IV)
	3	$\boxed{1}$ –3	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{4}$ –3	$\boxed{2}$ 15	15	–2 (VII)
Попит		15	10	25	15		
vj		6 (II)	8 (III)	9 (V)	4 (VI)		

Рисунок 16

Крок 2 загального алгоритму знаходження оптимального розв’язку виконано. Як зазначено вище, даний розв’язок не є оптимальним. Тому далі необхідно виконувати **крок 3**.

Перенесення по циклу

Для покращення плану перевезень здійснюється **перенесення по циклу – Крок 3 транспортного симплекс-методу.** У транспортній таблиці на рис.16 відразу дві небазисні змінні – у клітинках (3, 1) і (3, 3) – мають найбільше за модулем від’ємне число. Виберемо, наприклад, змінну x_{31} як таку, що вводиться до базису.

Після того як визначилися зі змінною, яку вводимо до базису, необхідно з’ясувати, яку змінну необхідно вивести з базису. Для цього треба встановити, як і у симплекс-методі, яке максимальне значення може набувати змінна, що вводиться до базису.

Спробуємо спочатку підібрати таке значення методом проб та помилок. Припустимо, що ми можемо присвоїти значення $x_{31} = 20$. Тоді, щоб виконувалася, наприклад, умова

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \text{ (перший стовпчик)},$$

значення базисної змінної у клітинці має бути від'ємним

$$x_{11} = 15 - 0 - 20 = -5,$$

але за умовою задачі значення змінних не можуть бути від'ємними.

Розглянемо послідовність, з якою знаходимо значення x_{31}.

1. Присвоїмо змінній x_{31} поки що невідоме значення x_{31}*. Щоб попит для першого стовпчика зберігався у тому самому обсязі, необхідне виконання рівності

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15.$$

Для цього необхідно зменшити на величину x_{31}* значення базисної змінної x_{11}.

2. Для того щоб пропозиція для першого рядка зберігалася у тому самому обсязі, необхідне виконання рівності

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 20.$$

Для цього необхідно збільшити на величину x_{31}* значення базисної змінної x_{12} (бо x_{11} з цього рівняння вже зменшилося на x_{31}*).

3. Для того щоб попит для другого стовпчика зберігався у тому самому обсязі, необхідне виконання рівності

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10.$$

Для цього необхідно зменшити на величину x_{31}* значення змінної x_{22} (бо x_{12} з цього рівняння вже збільшилося на x_{31}*).

4. Для того щоб пропозиція для другого рядка зберігалася у тому самому обсязі, необхідне виконання рівності

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30.$$

Для цього необхідно збільшити на величину x_{31}* значення змінної x_{23} або x_{24} (бо x_{22} з цього рівняння вже зменшилося на x_{31}*). Збільшення x_{23} компенсувати буде неможливо, оскільки вона є єдиною базисною змінною у третьому стовпчику. Тому залишається збільшити значення змінної x_{24} на величину x_{31}*.

5. Для того щоб попит для четвертого стовпчика зберігався у тому самому обсязі, необхідне виконання рівності

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15.$$

Для цього необхідно зменшити на величину x_{31}* значення змінної x_{34} (пам'ятаємо, що x_{24} з цього рівняння вже збільшилося на x_{31}*). При цьому для пропозиції у третьому рядку автоматично виконуватиметься умова (x_{31} збільшується на x_{31}*, тоді як x_{34} зменшується на цю ж величину):

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 15.$$

Тепер питання полягає у тому, як визначити x_{31}*?

Серед усіх базисних змінних, які ми зменшуємо на величину x_{31}* (див. п.п. 1,3,5), найменшою є $x_{22} = 5$, яку і виведемо з базису (інші не можна, оскільки тоді x_{22} матиме від'ємне значення). Тому для виконання умови невід'ємності значення змінної, яку вводимо до базису

$$x_{31}^* = x_{22} = 5.$$

На рис. 17 показано цикл, по якому змінюються значення базисних змінних. Клітинки з цими змінними і тією, що вводиться до базису, є **вершинами циклу**. Кількість вершин циклу завжди є парною у межах від 4 до $m + n - 1$, тобто **необов'язково, щоб усі базисні клітинки були вершинами циклу**. Якщо у цих змінних значення збільшуються, у відповідних клітинках ми ставимо «+», а якщо зменшуються, тоді «–» у відповідних клітинках у правому верхньому куті, так, як це показано на рис. 17. Як бачимо, базисна змінна x_{23} не входить до циклу.

		Автосалони				Пропозиція
		1	2	3	4	
Заводи	1	$\boxed{6}$ 15 –	$\boxed{8}$ 5 +	$\boxed{9}$	$\boxed{3}$	20
	2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$ 5 –	$\boxed{6}$ 25	$\boxed{1}$ 0 +	30
	3	$\boxed{1}$ +	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 15 –	15
Попит		15	10	25	15	

Рисунок 17

При перенесенні по циклу необхідно пам'ятати про такі правила:

1) Кількість базисних змінних не змінюється.

2) Лише одна змінна виводиться з базису за одне перенесення.

3) В межах окремого рядка або стовпчика значення змінних змінюються лише у двох клітинках або не змінюються взагалі.

4) Обмеження моделі, що у формулі (3), не можуть порушуватися.

5) Змінній, яку вводимо до базису, присвоюємо максимально можливе значення, пам'ятаючи про п.4 цих правил.

6) При побудові ланок циклу почергово змінюються рядок зі стовпчиком.

7) Небазисні клітинки, крім тієї, яку вводимо до базису, не можуть бути вершинами циклу.

8) З базису виводимо змінну, значення якої в процесі перенесення по циклу зменшилося до нуля. Якщо таких змінних декілька, тоді обираємо довільно одну з них.

9) Якщо значення базисної змінної, що входить до циклу, дорівнює нулю (0), тоді при перенесенні по циклу не зміниться значення жодної змінної, проте ця змінна залишить базис.

При дотриманні цих правил побудова циклу, яким би він складним не був, гарантована.

Отже, маємо новий розв'язок:

$x_{11} = 15 - 5 = 10$ – базисна змінна, значення змінилося;

$x_{12} = 5 + 5 = 10$ – базисна змінна, значення змінилося;

$x_{13} = 0$ – небазисна змінна;

$x_{14} = 0$ – небазисна змінна;

$x_{21} = 0$ – небазисна змінна;

$x_{22} = 5 - 5 = 0$ – змінна, що залишила базис;

$x_{23} = 25$ – базисна змінна поза циклом, значення не змінилося;

$x_{24} = 0 + 5 = 5$ – базисна змінна, значення змінилося;

$x_{31} = 0 + 5 = 5$ – змінна, яку введено до базису;

$x_{32} = 0$ – небазисна змінна;

$x_{33} = 0$ – небазисна змінна;

$x_{11} = 15 - 5 = 10$ – базисна змінна, значення змінилося.

Цей розв'язок показано в транспортній таблиці на рис. 18. Знайшовши потенціали u_i, v_j , з'ясували, що розв'язок не є оптимальним. На підставі нових знайдених значень r_{ij} вводимо до базису змінну x_{14} (r_{14} = $r_{\min}$ = –4). Будуємо цикл з вершинами в клітинках (1, 1), (1, 4), (3, 1), (3, 4), так як це показано на рис. 18. Найбільше число, яке можна перенести по циклу – це 10. Тоді відразу дві базисні змінні x_{11} і x_{34}, що входять до циклу, будуть нульовими. Визначаємо довільно, яку з них виводити з базису. Наприклад, нехай це буде x_{11}.

Заводи	Автосалони 1	2	3	4	Пропозиція	ui
1	$\boxed{6}$ 10 –	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{9}$ –3	$\boxed{3}$ + –4	20	0 (I)
2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{5}$ 3	$\boxed{6}$ 25	$\boxed{1}$ 5	30	–6 (VI)
3	$\boxed{1}$ 5 +	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{4}$ –3	$\boxed{2}$ 10 –	15	–5 (IV)
Попит	15	10	25	15		
vj	6 (II)	8 (III)	12 (V)	7 (V)		

Рисунок 18

Тоді, переносячи по циклу x_{14}* = 10, знайдемо новий базисний розв'язок, який показано на рис.19. Приймемо, наприклад, v_1 = 1. Знайшовши послідовно інші потенціали, встановлюємо, що розв'язок не є оптимальним. На підставі нових знайдених значень r_{ij} вводимо до базису змінну x_{33}. Будуємо цикл з вершинами в клітинках (3, 3), (3, 4), (2, 4), (2, 3), так, як це показано на рис. 19. Найбільше число, яке можна перенести по циклу, це нуль.

Заводи	Автосалони 1	2	3	4	Пропозиція	ui
1	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{3}$ 10	20	1 (V)
2	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{5}$ –1	$\boxed{6}$ 25 –	$\boxed{1}$ 5 +	30	–1 (IV)
3	$\boxed{1}$ 15	$\boxed{6}$ –1	$\boxed{4}$ + –3	$\boxed{2}$ 0 –	15	0 (II)
Попит	15	10	25	15		
vj	1 (I)	7 (VII)	7 (VI)	2 (III)		

Рисунок 19

Отже, розв’язок не зміниться, проте замість змінної x_{34} до базису увійде змінна x_{33}, так як це показано на рис.20. Знайшовши послідовно потенціали, встановлюємо, що розв’язок не є оптимальним. На підставі нових знайдених значень r_{ij} вводимо до базису змінну x_{22}. Будуємо цикл з вершинами в клітинках (2, 2), (2, 4), (1, 4), (1, 2), так як це показано на рис. 20. Найбільше число, яке можна перенести по циклу, це $x_{22}^* = 5$. Зверніть увагу на те, що відразу дві базисні змінні x_{24} і x_{33} будуть нульовими. Проте треба пам’ятати, що **з базису завжди виводиться та змінна, яка входить до циклу**.

		Автосалони				Пропозиція	
		1	2	3	4		ui
Заводи	1	[6] 1	[8] 10 –	[9] 1	[3] 10 +	20	0 (I)
	2	[3] 0	[5] + –1	[6] 25	[1] 5 –	30	–2 (IV)
	3	[1] 15	[6] 2	[4] 0	[2] 3	15	–4 (VI)
Попит		15	10	25	15		
vj		5 (VII)	8 (II)	8 (V)	3 (III)		

Рисунок 20

На рис. 21 показано новий базисний розв’язок. Знайшовши послідовно потенціали, встановлюємо, що $c_{ij} - u_i - v_j >= 0$ для будь-яких i та j, тому розв’язок є оптимальним

		Автосалони				Пропозиція	
		1	2	3	4		ui
Заводи	1	[6] 0	[8] 5	[9] 0	[3] 15	20	0 (I)
	2	[3] 0	[5] 5	[6] 25	[1] 1	30	–3 (IV)
	3	[1] 15	[6] 3	[4] 0	[2] 4	15	–5 (VI)
Попит		15	10	25	15		
vj		6 (VII)	8 (II)	9 (V)	3 (III)		

Рисунок 21

Таким чином, при початковому базисному розв'язку, знайденому методом північно-західного кута, ми знайшли оптимальний розв'язок лише з п'ятої спроби. Значення змінних при цьому є такими:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 5,\ x_{13} = 0,\ x_{14} = 15,$$

$$x_{21} = 0,\ x_{22} = 5,\ x_{23} = 25,\ x_{24} = 0,$$

$$x_{31} = 15,\ x_{32} = 0,\ x_{33} = 0,\ x_{34} = 0.$$

При такому плані перевезень вартість транспортування буде мінімальною.

Z = 5·8 + 15·3 + 5·5 + 25·6 + 15·1 + 0·4 = 40 + 45 + 25 + 150 + 15 = 275 у.г.о.

Як ми бачимо тепер, найкращий початковий базисний розв'язок, який отримано методом Фогеля, виявився оптимальним. Проте не завжди з першого разу вдається отримати оптимальний розв'язок. Тому необхідно завжди перевіряти умову оптимальності.

Початковий базисний розв'язок, знайдений методом найменшої вартості, не є оптимальним, оскільки вартість перевезення (Z = 290) виявилася на 15 у.г.о. більшою від мінімальної вартості, проте є досить близьким до нього.

З'ясуємо, як швидко знайдеться оптимальний розв'язок нашої задачі, якщо початковий розв'язок отримано за допомогою ***методу мінімальної вартості*** (рис. 22). Для цього знайдемо потенціали. Як бачимо, на рис. 22 умова оптимальності не виконується ($c_{14} - u_1 - v_4 = -1$).

		Автосалони				Пропозиція	
		1	2	3	4		ui
Заводи	1	[6] 0	[8] 0	[9] 20 –	[3] + –1	20	0 (I)
	2	[3] 0	[5] 10	[6] 5 +	[1] 15 –	30	–3 (III)
	3	[1] 15	[6] 3	[4] 0	[2] 3	15	–5 (V)
Попит		15	10	25	15		
vj		6 (VII)	8 (VI)	9 (II)	4 (IV)		

Рисунок 22

Переносячи по циклу x_{14}* = 15 знаходимо новий базисний розв'язок, який буде оптимальним, оскільки при знайдених потенціалах виконується нерівність $c_{ij} - u_i - v_j >= 0$ для будь-яких i та j (рис. 23).

		Автосалони				Пропозиція	
		1	2	3	4		ui
Заводи	1	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{9}$ 5	$\boxed{3}$ 15	20	0 (I)
	2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{1}$ 1	30	–3 (III)
	3	$\boxed{1}$ 15	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 4	15	–5 (V)
Попит		15	10	25	15		
vj		6 (VII)	8 (VI)	9 (II)	3 (IV)		

Рисунок 23

Отже, оптимальний розв’язок є таким:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 5,\ x_{14} = 15,$$
$$x_{21} = 0,\ x_{22} = 10,\ x_{23} = 20,\ x_{24} = 0,$$
$$x_{31} = 15,\ x_{32} = 0,\ x_{33} = 0,\ x_{34} = 0.$$

і від $m \cdot n$ дуг на загальній схемі перевезення (рис. 3) залишиться лише п’ять, так, як це показано на рис. 24.

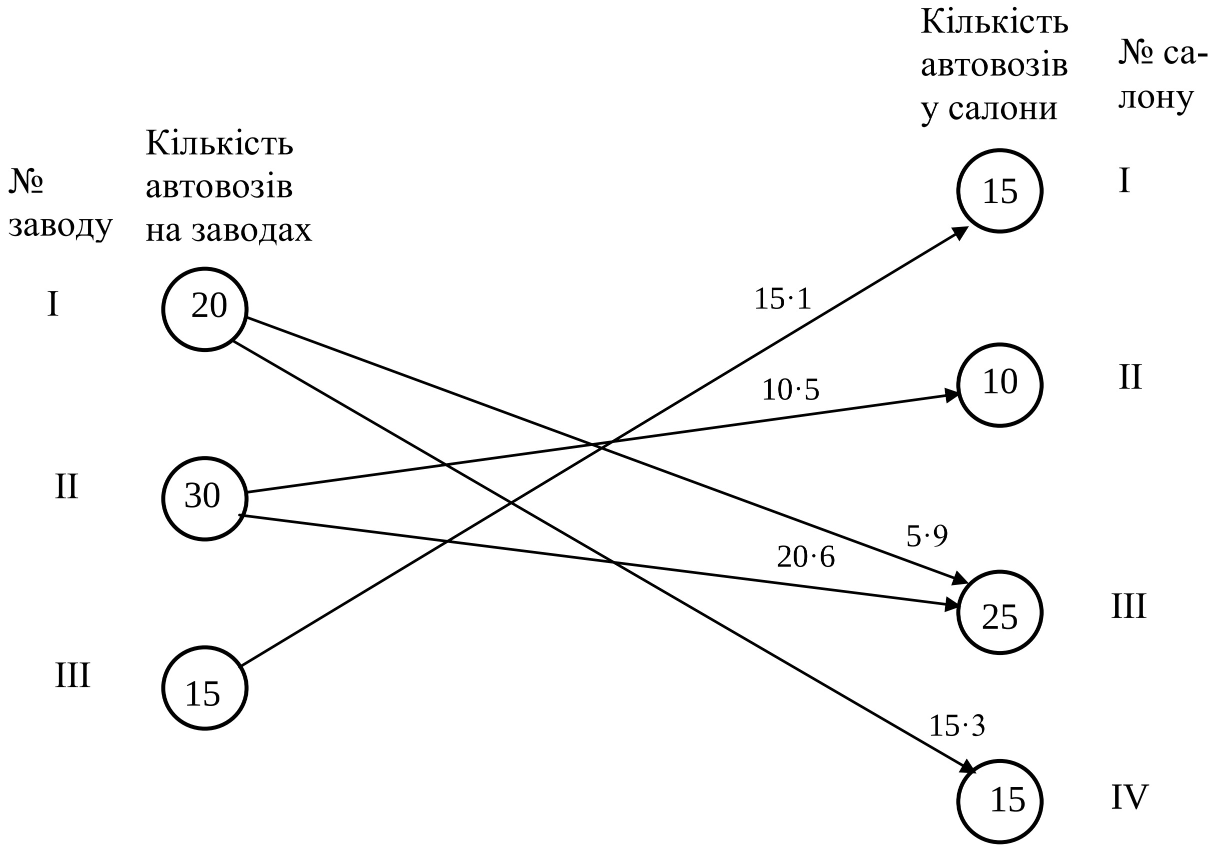

Рисунок 24

Цей розв’язок відрізняється від попереднього (порівняйте оптимальний план на рис. 21 і 23), і свідчить про наявність у даній задачі множини оптимальних розв’язків.

Проте, якщо мова йде про цілочислові оптимальні розв’язки, як у нашому випадку, то їхня кількість завжди є обмеженою. Взагалі, у збалансованих (закритих) транспортних задачах з цілими значеннями попиту і пропозиції (праві частини обмежень) **завжди існує принаймні один цілочисловий оптимальний розв’язок**.

Завдання для самостійної роботи

Компанія має три заводи з виробництва меблів, які мають відправлятися до чотирьох розподільних центрів. Заводи 1, 2, 3 і випускають 12, 17, і 11 партій на місяць відповідно. Кожен розподільний центр має отримати 10 партій на місяць. Відстань від кожного заводу до відповідних розподільних центрів наводиться нижче:

		Розподільний центр			
		1	**2**	**3**	**4**
Заводи	**1**	400	650	200	350
	2	550	700	300	500
	3	300	600	400	450

Ціна перевезення для кожної партії становить 200 у.г.о. плюс 1,5 у.г.о за кілометр. Скільки партій має бути перевезено з кожного заводу до кожного розподільного центру, щоб мінімізувати загальну вартість доставки?

а) Сформулюйте цю задачу як транспортну шляхом побудови відповідної таблиці параметрів.

б) Нарисуйте цю задачу у вигляді мережі.

в) Знайдіть початковий базисний розв’язок методом північно-західного кута.

г) Знайдіть початковий базисний розв’язок методом найменшої вартості.

д) Знайдіть початковий базисний розв’язок методом Фогеля.

е) Отримайте оптимальний розв’язок на основі початкового базисного розв’язку, знайденого методом північно-західного кута.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Економіко-математичне моделювання: текст лекцій / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва, О. О. Замула. – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – 108 с.

2. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці: навч. посіб. / О.В. Боровик. – Київ: Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.

3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій : підручник / Ю.П. Зайченко. – Київ: ВІПОЛ, 2000.

4. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: підручник для студентів вузів / Харк. нац. аграр. університет ім. В. Докучаєва. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.

5. Hillier F.S., Lieberman G.J., Introduction to operations research, 7-th edition. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2001. – 1237 P.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять за темою «Транспортна задача»
з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі»
для студентів усіх форм навчання
спеціальності 076
«Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Укладачі: ЗАМУЛА Олена Василівна
ЗАМУЛА Олексій Олександрович

Роботу до видання рекомендував проф. Міщенко В.А.

Редактор М.П. Єфремова

План 2019 р., поз. _194_
Підп. до друку 02.07.2019. Гарнітура Таймс. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. – 1,5.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
61002.Х м. Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Самостійне електронне видання