МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Г. А. Кучук, Н. Г. Кучук

Теорія ймовірностей

Частина 1

Навчальний посібник

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету НТУ «ХПІ»,
протокол № 2 від 27.06.2024

Харків – 2024

УДК 519.21
К 95

Рецензенти:

Герман ФЕСЕНКО, д-р. техн. наук, професор,
професор кафедри комп'ютерних систем, мереж і кібербезпеки,
Харківський національний аерокосмічний університет «ХАІ»;

Олена Толстолузька, д-р техн. наук, професор,
професорка кафедри теоретичної та прикладної системотехніки,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна.

Автори:

Георгій Кучук, професор, доктор технічних наук;

Ніна Кучук, професор, доктор технічних наук.

К 95 **Кучук Г. А.** Теорія ймовірностей. Частина 1 / Г. А. Кучук, Н. Г. Кучук: навчальний посібник. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – 229 с.

В навчальному посібнику розглядаються основи теорії ймовірностей – одного з курсів загальної підготовки, що продовжує фундаментальну підготовку бакалаврів за освітньою програмою – «Сучасне програмування, мобільні пристрої та комп'ютерні ігри». Вона формує фахівця за освітньою кваліфікацією бакалавра з комп'ютерної інженерії. Навчальний посібник спрямований на забезпечення цілісного уявлення про теорію ймовірностей, її сучасний стан, виникнення, шляхи її розвитку та місце в системі наукових знань, ознайомлення студентів з основами теорії ймовірностей, які будуть необхідні в майбутній діяльності; формування навичок математичного розв'язування та дослідження задач теорії ймовірностей; розвиток логічного та алгоритмічного мислення; підвищення загального рівня математичної культури студентів.

Навчальний посібник призначено для інформаційно-методичного забезпечення лекційних занять та самостійної підготовки у процесі вивчення курсу «Теорія ймовірностей» студентами всіх форм навчання.

Для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія»

Іл. 58. Табл. 23. Бібліогр. 42 назв.

© Кучук Г. А, Кучук Н. Г., 2024

ЗМІСТ

Вступ 5

Тема 1. Класичний підхід в теорії ймовірностей **7**
1.1 Основні визначення за класичним підходом 7
1.2 Класична імовірнісна схема 9
1.3 Статистичний підхід та геометрична ймовірність 10

Тема 2. Теоретико-множинний підхід до понять теорії ймовірностей .. 12
2.1 Випадкові події 12
2.2 Алгебра подій 16
2.3 Частота і ймовірність випадкової події 24
2.4 Властивості частот випадкових подій 26
2.5 Аксіоми теорії ймовірностей 28
2.6 Способи обчислення ймовірностей випадкових подій 35
2.7 Формула повної ймовірності. Формула гіпотез 43
Запитання та завдання для самостійної перевірки знань 47

Тема 3. Випадкові величини 48
3.1 Визначення випадкової величини 48
3.2 Закон розподілу випадкової величини 49
3.3 Функція розподілу випадкової величини 51
3.4 Щільність ймовірностей випадкової величини 56

Тема 4. Числові характеристики випадкових величин 59
4.1 Математичне сподівання 59
4.2 Мода, медіана та квантіль випадкової величини 62
4.3 Дисперсія та середньоквадратичне відхилення ВВ 63
4.4 Моменти випадкової величини 65
4.5 Твірні функції та їх властивості 68

Тема 5. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин 70
5.1 Біноміальний закон розподілу 70
5.2 Закон розподілу Пуассона 77
5.3 Геометричний закон розподілу 82
5.4 Гіпергеометричний закон розподілу 85
5.5 Рівномірний дискретний закон розподілу 88

Тема 6. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин .. 90
6.1 Рівномірний закон розподілу 90
6.2 Експоненціальний закон розподілу 93
6.3 Закон розподілу Вейбулла 96
6.4 Нормальний закон розподілу 98
Запитання та завдання для самостійної перевірки знань 107

Тема 7. Системи випадкових величин 108
7.1 Визначення системи випадкових величин 108
7.2 Залежність випадкових величин 118
7.3 Числові характеристики випадкових величин, які складають систему випадкових величин 125
7.4 Двовимірний нормальний закон розподілу 138
7.5 Закон розподілу Релея 147
Запитання та завдання для самостійної перевірки знань 151

Тема 8. Функції випадкових аргументів 152
8.1 Визначення функції випадкового аргументу 152
8.2 Числові характеристики функції випадкового аргументу 166
8.3 Математичне сподівання як функція випадкової величини 170
8.4 Дисперсія як функція випадкової величини 174
Запитання та завдання для самостійної перевірки знань 179

Тема 9. Характеристичні функції 180
9.1 Поняття характеристичної функції та її властивості 180
9.2 Характеристичні функції одновимірних законів розподілу 184
9.3 Характеристичні функції багатовимірних випадкових величин 190
Запитання та завдання для самостійної перевірки знань 194

Тема 10. Граничні теореми теорії ймовірностей 196
10.1 Закон великих чисел 196
10.2 Нерівність Чебишева 197
10.3 Теорема Чебишева 200
10.4 Узагальнена теорема Чебишева 202
10.5 Теорема Маркова 203
10.6 Теореми Бернуллі та Пуассона 207
10.7 Локальна гранична теорема Муавра –Лапласа 210
10.8 Інтегральна гранична теорема Муавра –Лапласа 213
10.9 Гранична теорема Ляпунова 215
Запитання та завдання для самостійної перевірки знань 224

Список рекомендованої літератури 225

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для інформаційно-методичного забезпечення лекційних занять та самостійної роботи, що проводяться в процесі вивчення теоретичного курсу «Теорія ймовірностей» за освітньою програмою – «Сучасне програмування, мобільні пристрої та комп'ютерні ігри» для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія» всіх форм навчання.

Навчальний посібник спрямований на забезпечення цілісного уявлення про теорію ймовірностей, її сучасний стан, виникнення, шляхи її розвитку та місце в системі наукових знань, ознайомлення студентів з основами теорії ймовірностей, які будуть необхідні в майбутній діяльності; формування навичок математичного розв'язування та дослідження задач теорії ймовірностей; розвиток логічного та алгоритмічного мислення; підвищення загального рівня математичної культури студентів.

У навчальному посібнику наведені теоретичні питання теорії ймовірностей, які розглядаються у першій частині курсу.

Детально розглянуті такі 10 тем:

– тема 1: класичний підхід в теорії ймовірностей (розглядаються випадкові події, ймовірності випадкових подій, статистична ймовірність події, залежні та незалежні події, умовна частота, геометрична ймовірність);

– тема 2: теоретико-множинний підхід до понять теорії ймовірностей (розглядаються імовірність події та правило складання, зв'язок з теорією множин, частота і ймовірність випадкової події, властивості частот випадкових подій, аксіоми теорії ймовірностей, способи обчислення ймовірностей випадкових подій, формула повної ймовірності, формула гіпотез);

– тема 3: випадкові величини (розглядаються поняття випадкової величини, дискретна та неперервна випадкові величини, функція розподілу випадкової величини, закони розподілення випадкових величин);

– тема 4: числові характеристики випадкових величин (розглядаються математичне сподівання, моменти випадкової величини, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт скошеності, ексцес, виробляючі функції дискретних випадкових величин);

– тема 5: закони розподілу дискретних випадкових величин (розглядаються біноміальний закон розподілу, узагальнений біноміальний закон розподілу, розподіл Пуассона та його особливості і характеристики, геометричний закон розподілу, гіпергеометричний закон розподілу, гіпергеометричний закон розподілу, рівномірний дискретний закон розподілу);

– тема 6: Закони розподілення неперервних випадкових величин (розглядаються рівномірний закон розподілу неперервної випадкової

величини, експоненціальний закон розподілу. закон розподілу Вейбулла, нормальний закон розподілу та його особливості, функція Лапласа);

– тема 7: функція розподілу системи двох випадкових величин (розглядаються означення системи випадкових величин та її закону розподілу, числові характеристики випадкових величин, які складають систему випадкових величин, двовимірний нормальний закон розподілу, закон розподілу Релея, використовування програми Excel для вивчення основних законів розподілення дискретних випадкових величин);

– тема 8: функції випадкових величин (розглядаються математичне сподівання та дисперсія функцій випадкових величин, теореми о числових характеристиках функцій випадкових величин, їхні особливості);

– тема 9: характеристичні функції (розглядаються поняття характеристичної функції та її властивості, характеристичні функції основних одновимірних законів розподілу, характеристичні функції багатовимірних випадкових величин);

– тема 10: фундаментальні теореми теорії ймовірностей (розглядаються закон великих чисел, нерівність та теореми Чебишева, теорема Маркова, теорема Бернуллі, теорема Пуассона, локальна та інтегральна граничні теореми Муавра –Лапласа, гранична теорема Ляпунова).

ТЕМА 1
Класичний підхід в теорії ймовірностей

1.1 Основні визначення за класичним підходом

Випадкове явище - це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного й того ж досвіду (експерименту) протікає щоразу трохи інакше.

Приклади.

1) зважування на точних аналітичних терезах;
2) випробування виробу на безвідмовність роботи;
3) ряд пострілів з однієї й тієї ж зброї в однакових умовах;
4) роздача колоди гральних карт;
5) лотерея.

Одне, окреме явище практично непередбачуване.

За дуже великої кількості таких явищ випадковість, непередбачуваність практично зникає.

Мета імовірнісних (статистичних) методів полягає в тому, щоб минаючи надто складне (а часто неможливе) дослідження окремого випадкового явища, звернутися до законів, які керують масами таких явищ.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає загальні закономірності у випадкових явищах.

Мета теорії ймовірностей – здійснення прогнозу випадкового явища.

Предмет теорії ймовірностей – математичні моделі випадкових явищ.

Коротка історична довідка. Подібно до інших математичних наук теорія ймовірності виникла завдяки практичним потребам. Фактори, що сприяли її виникненню у 17 сторіччі: по-перше, це спроба створення загальної теорії страхування в Західній Європі, заснованої на аналізі закономірностей у таких масових явищах, як захворюваність, смертність, статистика нещасних випадків; по-друге, роботи Галілео Галілея щодо дослідження помилок фізичних вимірів, по-третє, розвиток міського господарства та необхідність статистичного аналізу населення.

Однак у розглянутих завданнях занадто багато випадкових факторів, для науки потрібен був простий матеріал, у якості якого застосовувались азартні ігри. За підсумками таких досліджень сформувалися основні поняття науки й прийоми обчислень, сформовані у середині 17 видатними вченими Паскалем, Ферма, Гюйгенсем, наприкінці 17 сторіччя – Бернуллі та Моавром на початку 18 сторіччя. Систематичний виклад основ науки був зроблений Лапласом на початку 19 сторіччя, які Пуассон застосував до теорії стрільби.

У 19 сторіччі це була наймодніша наука, що застосовувалася навіть у судочинстві, історії, богослов'ї. Але невірне застосування її положень призвело до визнання у Західній Європі теорії ймовірностей як лженауки.

У першій половині 20 сторіччя математик Колмогоров сформулював аксіоматичні основи теорії ймовірностей. У другій половині 20 сторіччя Вінер, Феллер, Фішер, Нейман продовжили розвиток теорії ймовірностей, що привело до виділення низки окремих наук, таких, як, наприклад, теорія інформації, теорія ігор.

Основні визначення у класичному підході.

Досвід (експеримент, випробування) – деяка сукупність умов, у яких спостерігається те чи інше явище, фіксується той чи інший результат.

Досвід з випадковим результатом - досвід, результат якого варіюється при його повторенні (буде надалі - досвід).

Випадкова подія чи подія – факт, який у результаті досвіду з випадковим результатом може статися чи не відбутися (позначаємо великими літерами латинського алфавіту – A, B, C...)

Приклад.

Досвід – витягнути картку, подія – витягнути туза з карткової колоди

Протилежна подія – подія $\bar{A}$, що полягає у непояві події A.

Імовірність події – чисельна міра об'єктивної можливості події; для події A позначається як P(A).

Одиниця виміру – ***достовірна подія*** – P(A) = 1 (гральна кістка, випадає не більше 6 очок).

Протилежна йому - ***неможлива подія*** - $P(\bar{A}) = 0$ (гральна кістка, випадає більше 6 очок).

Отже, $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$.

Практично достовірна подія P(A) ≈1 (наприклад, 30 червня у Харкові не випаде сніг)

Практично неможлива подія P(A) ≈0 (наприклад, є 32 літери розрізної абетки, подія – 18 разів витягнути букву С).

Принцип практичної впевненості: якщо ймовірність події A в даному досвіді дуже мала, то при одноразовому виконанні досвіду можна поводитися так, ніби подія A взагалі неможливо, тобто не розраховувати на її появу.

Найважче питання: наскільки має бути мала ймовірність події, щоб її вважати практично неможливим? Відповідь виходить із практичних міркувань та залежить від важливості досвіду.

Приклади – зважування на точних терезах, Чорнобиль, пуск ракети.

Класичний досвід, або досвід, що має симетрію – досвід, в якому різні результати об'єктивно однаково можливі.

1.2 Класична імовірнісна схема

Безпосередній підрахунок можливостей. Розглядатимемо досліди, що володіють симетрією (об'єктивно однаково можливі) і що проводяться кінцеве число разів (*класична схема*).

Сфера практичної дії класичної схеми дуже обмежена, проте вона є зручною при вивченні основних властивостей ймовірностей.

Визначення: **1.** Декілька подій у даному досвіді утворюють **повну групу**, якщо в результаті досвіду неминуче має з'явитися хоча б одна з них.

Властивість: До повної групи подій можна додавати будь-які події – властивість повноти не зникне.

2. Декілька подій у даному досвіді називаються **несумісними**, якщо жодні з них не можуть з'явитися разом.

Властивість: можна із групи викидати будь-які події (до 2-х), властивість несумісності залишається.

3. Декілька подій у досвіді називаються **рівноможливими**, якщо жодна із них об'єктивно не більш можлива, ніж будь-яка інша.

4. **Випадок** – подія із несумісної повної групи рівноможливих подій одного досвіду.

5. Випадок **сприятливий** події А, якщо він спричиняє появу даної події.

Розрахунок ймовірності події А:

$$P(A) = \frac{m_A}{n},$$

де m_A – число випадків, сприятливих для події А;

n – загальна кількість випадків.

Приклади

1. *Чи утворять повну групу події?*
   Досвід: два постріли по мішені.
   Події: A_1 хоча б одне влучення, A_2 хоча б один промах.
   Події: A_1 точно одне влучення, A_2 точно два влучення.
2. *Чи є несумісними такі події?*
   Досвід – кидання двох монет.
   Події: A_1 –герб на першій монеті, A_2 –решка на другій монеті.

3. *Чи є рівноможливими такі події?*
   Досвід - кидання "правильної" монети.
   Події: A_1 – поява герба, A_2 – поява решки.
   Досвід – кидання погнутої монети.
   Події: A_1 – поява герба, A_2 – поява решки.

Досвід – кидання двох монет.

Події: A_1 –два герба; A_2 –дві решки, A_3 –один герб та одна решка.

4. *Чи є випадками такі групи подій:*

Досвід – кидання монети.

Події: A_1 – поява герба, A_2 – поява решки.

Досвід – кидання гральної кістки.

Події: A_1 –не більше 2-х очок; A_2 3-х чи 4-х очка; A_3 –не менше 5 очок

Послідовність розв'язання завдань класичним методом:

1. Визначити групу випадків, зручну на вирішення цієї задачі.
2. Порахувати кількість всіх випадків.
3. Порахувати кількість сприятливих випадків.
4. Порахувати за формулою ймовірність.

Приклад. В урні 3 білих і 2 чорні кулі. Із неї витягли кулю. Знайти ймовірність, що вона біла (подія А).

Рішення: досвід – витягування кулі, нехай кулі мають номери б б б ч ч

1 2 3 4 5

Тоді випадок – це витягування і-ої кулі (маємо 5 різних випадків, отже $n = 5$). З них сприятливими є три таких: 1, 2, 3, тобто $m_A = 3 \Rightarrow$ **P(A) = 3/5**.

1.3 Статистичний підхід та геометрична ймовірність

Отже, ми вміємо рахувати ймовірності при дослідах, що мають симетрію «випадків».

Але переважна більшість подій за класичною формулою не обчислюється, наприклад:

1) гральна кістка зі зміщеним центром ваги;

2) потрапляння в ціль під час пострілу;

3) вихід з ладу технічного пристрою протягом доби роботи.

Припустимо, що кожна з випадкових подій має якусь ймовірність, укладену між значеннями 0 і 1.

Якщо досліди симетричні, то можна застосовувати класичне визначення ймовірності, та класичну формулу для розрахунків. Але для наведених вище прикладів 1–3 розрахунок ймовірності є складнішим: необхідні експерименти та статистика подій.

Визначення*: *Частота події А в серії дослідів – це відношення числа дослідів, у яких з'явилася подія А (M_A) до загальної кількості дослідів n.

Частота розраховується за такою формулою:

$$P^*(A) = \frac{M_A}{n}.$$

Частоту ще називають статистичною ймовірністю.

При невеликому n значення частоти випадково, але при $n \to \infty$ значення частоти стабілізується, наближаючись до стійкої величини:

- зі збільшенням n частота події наближається до ймовірності;
- наближення йде повільно, але явно простежується на статистичному матеріалі;
- коливання частоти біля ймовірності носять довільний, незакономірний характер.

Зауваження. Імовірність не математична границя частоти!!!

Головний недолік статистичної ймовірності: треба надто багато дослідів.

Геометрична ймовірність. У деяких випадках прийом безпосереднього підрахунку ймовірностей допускає поширення на випадок незліченної множини подій. Наприклад, у межах двовимірної області Ω відзначається випадково точка a (всі точки рівноправні, ніяке місце не має переваги). Тоді ймовірність попадання точки a до області A, що є підмножиною Ω, розраховується за такою формулою:

$$\mathrm{p}(\mathrm{A}) = \mathrm{p}\{\mathrm{a} \in \mathrm{A}\} = \frac{\mathrm{S_A}}{\mathrm{S_\Omega}}.$$

Аналогічно, проводиться розрахунок і для об’ємних фігур.

ТЕМА 2
Теоретико-множинний підхід до понять теорії ймовірностей

2.1 Випадкові події

Основні поняття теорії ймовірностей випливають із призначення теорії ймовірностей як науки. Теорія ймовірностей займається виявленням закономірностей в масових випадкових явищах природи. Які ж явища природи слід віднести до випадкових і масових?

Людина в своєму житті повсякчас повинна приймати ті чи інші рішення, які є суб'єктивним узагальненням її спостережень явищ природи. Спостереження – це результат досліду, а взаємодію людини з природою можна розглядати як проведення сукупності дослідів.

Дослід (експеримент) – це практичне чи уявне відтворення деякої сукупності умов S, які характеризуються параметрами $\alpha_i, i = \overline{1,n}$ *та за яких спостерігається те чи інше явище природи і фіксується той чи інший результат*.

Відзначимо, що дослід не обов'язково повинен плануватись і ставитись особою, яка приймає рішення, за результатами обробки дослідних даних, він може протікати в природі незалежно від дій особи, яка приймає рішення, а особа лише веде спостереження, тобто фіксує ті результати досліду, які її цікавлять. Так, наприклад, якщо особі, яка приймає рішення, необхідно зробити прогноз щодо значення середньодобової температури на 1 січня 2030 року в точці геометричного центру міста Харкова, то їй достатньо мати результати спостережень цього параметра в зазначеному місті за декілька попередніх років. Особа лише визначає, що вона буде спостерігати та за яким підходом буде прогнозувати цей параметр, а дослід протікає в природі незалежно від неї.

Усякий результат досліду (кількісний чи якісний) прийнято називати наслідком.

Якщо результат досліду змінюється при його повторенні, то будемо говорити, що *розглядається дослід з випадковим наслідком.*

Явища природи, які особа, що приймає рішення, спостерігає як випадковий наслідок досліду, є випадковими.

Розглянемо деякі досліди та звернемо увагу, змінюються результати цих дослідів чи ні при їх повторенні. Як визначено вище, дослід – це практичне чи мислиме відтворення сукупності умов.

Розглянемо таку сукупність умов: місто *K*; підприємство *Z* у цьому місті *K*; цех *M* підприємства *Z* у місті *K*; автоматизована лінія *N* виготовлення деталі *Q* в цеху *M* підприємства *Z* у місті *K*; значення параметрів, які характеризують температуру, вологість та інше в приміщенні (цеху); момент часу проведення досліду; особа, яка проводить дослід. Визначимо мету проведення досліду: виявлення кількості станків в автоматизованій лінії *N* виготовлення деталі *Q*. Визначимо другу мету проведення досліду: виявлення кількості працездатних станків в автоматизованій лінії *N* виготовлення деталі *Q*. Якщо дослідник повторює дослід як реалізацію зазначених вище умов та має на увазі першу мету, то, що очевидно, результат досліду не буде змінюватись. Це означає, що наслідок цього досліду не є випадковим. А якщо дослідник повторює дослід як реалізацію зазначених вище умов та має на увазі другу мету, то результат досліду буде змінюватись. Це означає, що наслідок досліду є випадковим.

Розглянутий приклад дає право висловити такі дві думки.

Перша думка така: якщо ми бажаємо визначити дослід, то спочатку необхідно висловити мету, для досягнення якої буде розглядатись дослід.

Друга думка така: визначення мети проведення досліду визначає перелік умов, відтворення яких як сукупність визначає сам дослід.

На прикладі видно, що якщо дослідник реалізує першу мету в досліді, то такі умови, як значення параметрів, що характеризують температуру, вологість та інші умови зовнішнього середовища відносно автоматизованої лінії, не впливають на результат досліду та їх можна взагалі не враховувати при описанні досліду.

Теорія ймовірностей як наука займається, як це відзначено вище, виявленням закономірностей масових випадкових явищ. Розглянуті вище досліди є масовими, оскільки принципово вони можуть бути повторені багато разів.

Розглянутий вище дослід, що ставиться з першою метою, має наслідок, який не є випадковим. Тому наслідки, які мають місце при повторенні досліду, який ставиться з першою метою, не можуть бути предметом розглядання, тому що при повторюванні такого досліду їх результатами є стала величина – кількість верстатів, які складають автоматизовану лінію. Говорити про виявлення закономірності при повторенні такого досліду немає сенсу.

Усякий наслідок, який може визначитись в досліді називають подією.

Випадкова подія – це всякий факт (наслідок), який в досліді може статися чи ні та який наперед неможливо передбачити.

Події в теорії ймовірностей прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту.

Достовірна подія – це всякий факт, який в досліді обов'язково відбудеться.

Неможлива подія – це всякий факт, який в досліді не відбудеться.

Достовірну подію позначимо буквою *U*.

Неможливу подію позначимо буквою *V* або символом ∅.

Розглянемо приклади дослідів як відтворення деякої сукупності умов та події, які при цьому можна розглядати.

Сукупність умов: симетрична монета; нескінченна гладка поверхня; зазначення параметрів навколишнього середовища; наявність особи, яка буде ставити дослід; монета підкидається навмання. Мета досліду: виявлення положення монети при падінні.

Можна розглядати події:

A – випадкова подія, яка полягає в тому, що монета випадає орлом;

B – випадкова подія, яка полягає в тому, що монета випадає решкою;

C –неможлива подія, яка полягає в тому, що монета стане на ребро (на теоретичній нескінченно гладкій поверхні це неможливо);

D – достовірна подія, яка полягає в тому, що монета впаде на нескінченну гладку поверхню.

Відзначимо, що якщо одну із зазначених вище умов змінити, наприклад, замість нескінченної гладкої поверхні до переліку умов включити поверхню, яка рівно засипана піском, то відтворення такої сукупності умов визначає другий дослід, за якого подія, яка полягає в тому, що монета стане на ребро, не є неможливою, а є випадковою.

Наступна сукупність умов: розглядається тир в закритому приміщені за відповідних значень параметрів навколишнього середовища; особа, яка буде здійснювати два постріли з власної зброї при відстані тридцяти метрів до мішені. Дослід, який буде відповідати відтворенню такої сукупності умов, проводиться з метою виявлення кількості влучень у мішень. Події, які можуть статися чи не статися при такому досліді:

A – подія, яка полягає в тому, що буде нуль влучень;

B – подія, яка полягає в тому, що буде одне влучення;

C – подія, яка полягає в тому, що буде два влучення.

Події *A, B, C* є випадковими.

Подія *V*, яка полягає в тому, що буде три влучення, є неможливою.

Подія *U*, яка полягає в тому, що буде нуль влучень, або одне влучення, або два влучення, є достовірна подія.

Ще одна сукупність умов полягає в такому: радіоканал зв'язку; інформація, яка передається з пункту *M* до пункту *N* та складається із *n* сигналів; значення параметрів зовнішнього середовища між пунктами *M* і *N*; особа, яка ставить дослід. Мета досліду: установлення достовірності отриманої інформації в пункті *N*.

Подія *A*, яка полягає в тому, що буде отримана достовірна (неспотворена) інформація в пункті *N*, є випадковою.

Відзначена подія *A* відбудеться тоді, коли кількість спотворених сигналів з *n* дорівнює нулю.

Якщо ввести до розгляду випадкову подію B_i, яка полягає в тому, що *i*-й сигнал не буде спотвореним, то подія *A* може бути визначена через події $B_i, i = \overline{1,n}$.

Подія, яка може бути виражена через інші події, є складною, а подія, яка не виражається через інші, є елементарною (простою).

У розглянутому вище досліді події $B_i, i = \overline{1,n}$, які полягають в тому, що *i*-й сигнал не буде спотворений, є елементарними.

Подія *A*, яка полягає в тому, що інформація, яка передається від пункту *M* до пункту *N*, буде неспотворена, є складною.

Розглянемо таку сукупність умов *S*: гральний кубик; гладка нескінченна поверхня; значення параметрів зовнішнього середовища приміщення; особа, яка підкидає кубик навмання. Ставиться дослід з метою виявлення однієї з граней грального кубика.

Події $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, які полягають в тому, що буде висвітлена грань грального кубика з кількістю очок відповідно 1, 2, 3, 4, 5, 6, є випадковими та елементарними.

Сукупність елементарних випадкових подій, одна з яких в досліді обов'язково відбудеться, складає простір (множину) елементарних випадкових подій R_S.

Множина R_S може бути скінченною та нескінченною, але кількість елементарних подій можна перерахувати.

Розглянемо дослід, який ставиться з метою виявлення оцінки при складанні іспиту з будь якої дисципліни.

Реалізується комплекс умов: екзаменаційні білети, їх *n*; екзаменаційні білети викладаються навмання в ряд; наявність екзаменатора та студента, який складає іспит; значення всіх параметрів середовища аудиторії, в якій проводиться іспит.

Студент може отримати за національної шкалою оцінку:

"відмінно",

"добре",

"задовільно",

"незадовільно".

Відповідні події B_1, B_2, B_3, B_4 є випадковими й елементарними, а оскільки одна з них обов'язково може статися в досліді, то вони складають скінченну множину (скінченний простір) елементарних подій.

Подія, яка полягає в тому, що студент отримає оцінку на екзамені, є достовірною (подія *U*); подія, яка полягає в тому, що студент не отримає оцінку на екзамені, є неможливою (подія *V*).

Усяка підмножина елементарних випадкових подій, що має не менше двох елементів, є подією складною.

Так подія *A*, яка буде полягати в тому, що іспит складено з цієї дисципліни, що відповідає отриманню студентом оцінки "відмінно", або "добре", або "задовільно", є складною випадковою подією.

Подія, яка включає в себе всі елементарні випадкові події, є достовірною.

Розглянемо геометричне тлумачення поняття "випадкова подія".

Нехай проводиться дослід з метою визначення точки навмання в квадраті зі стороною *a*. Кожна точка, яка може бути нанесена в квадраті, відповідає елементарній випадковій події. А оскільки складна випадкова подія подається підмножиною елементарних подій, то вона геометрично може бути відображена деякою областю в цьому квадраті.

2.2 Алгебра подій

Розгляд випадкових подій в теорії ймовірностей пов'язаний з необхідністю визначення їх числових мір. З цією метою складні випадкові події подаються через елементарні, використовуючи алгебру подій.

Під алгеброю подій (алгеброю Буля) розуміють множину подій $\{A_i\}$, $i = \overline{1,n}$, *для яких визначені операції "суми", "добутку", визначена операція "риса" та введені до розгляду події "достовірна" та "неможлива".*

Розглянемо основні поняття та позначення алгебри подій.

Події A та B називаються тотожними (рівними), якщо вони складаються з однакових елементарних подій.

Тотожність позначається $A = B$.

Геометричне тлумачення тотожності подій *A* і *B* подано на рис. 2.1.

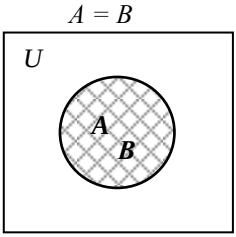


Рис. 2.1. Геометричне тлумачення
тотожності подій *A* і *B*

Подія A є частиною події B (подія A включена в подію B), якщо всі її елементарні події належать події B.

Таке співвідношення між подіями позначають $A \subset B$. Так, подія *B*, яка полягає в тому, що студент отримав на іспиті оцінку "добре", є частиною події *A*, яка полягає в тому, що студент склав іспит.

Співвідношення $A \subset B$ подано на рис. 2.2.

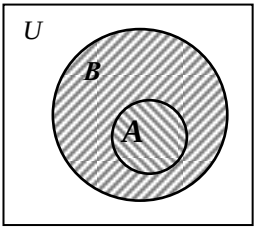


Рис. 2.2. Геометричне тлумачення співвідношення $A \subset B$

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B є така подія C, яка полягає в тому, що відбудеться хоча б одна з подій A і B.

Тобто подія *C* відбудеться тоді, коли відбудеться чи подія *A*, чи подія *B*, чи подія *A* і *B* одночасно. Прийнято позначення $C = A + B$, або $C = A \cup B$. Сума будь-якої кількості подій позначається аналогічно, а саме:

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i \text{ або } C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Геометричне тлумачення суми двох подій подано на рис. 2.3, де закреслена область відповідає події *C*.

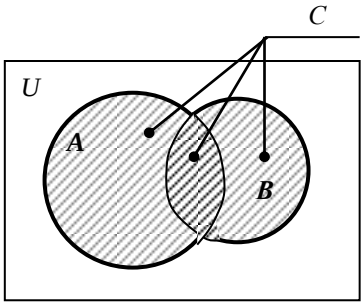


Рис. 2.3. Геометричне тлумачення суми двох подій

Добутком (перетином) випадкових подій A і B є така подія C, яка полягає в тому, що події A і B одночасно можуть статися в одному досліді.

Добуток двох подій позначають $C = AB$ або $C = A \cap B$. Загальний випадок:

$$C = \prod_{i=1}^{n} A_i \text{ або } C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

Геометричне тлумачення добутку двох подій подано на рис. 2.4.

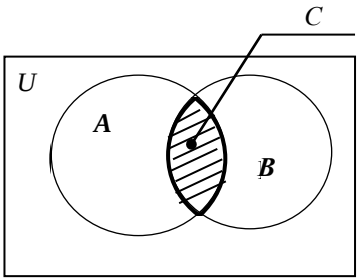


Рис. 2.4. Геометричне тлумачення добутку двох подій

Події A і B називаються сумісними, якщо в досліді вони можуть статися одночасно; події A і B називаються несумісними, якщо в досліді вони не можуть статися одночасно.

Як це випливає з позначення сумісних подій, сумою та добутком двох несумісних подій є $C = A + B$ та $V = AB$.

На рис. 2.5 та 2.6 подані геометричні тлумачення відповідно суми та добутку сумісних подій, де видно, що добутком двох несумісних подій є подія неможлива.

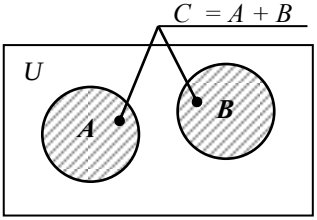


Рис. 2.5. Геометричне тлумачення суми двох несумісних подій

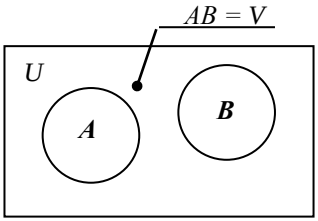


Рис. 2.6. Геометричне тлумачення добутку двох несумісних подій

З метою розуміння змісту суми та добутку сумісних та несумісних подій розглянемо таку задачу.

Задача 2.1. Передбачається дослід, який має за мету визначення працездатності або відмови виробу, який складається з двох елементів нерезервного з'єднання, структурна схема якого подана на рис. 2.7. Визначити випадкову подію відмови виробу через елементарні події.

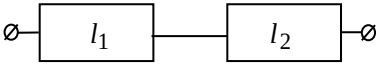


Рис. 2.7. Структурна схема виробу

Розв'язання. Змістом цього досліду є відтворення такої сукупності умов: використання вимірювального інструменту (наприклад омметра); значення параметрів зовнішнього середовища, в умовах якого проводиться дослід; особа, яка проводить визначення працездатності чи відмови цього виробу.

Елементарні події мають такий зміст:

A – подія, яка полягає в тому, що елемент l_1 відмов;

B – подія, яка полягає в тому, що елемент l_2 відмов.

Визначимо:

C – подія, яка полягає в тому, що виріб відмовив.

Аналіз працездатності виробу, структурна схема якого має вигляд, який поданий на рис. 2.7, дозволяє встановити таке. Подія *C* може статися тоді, коли елемент l_1 відмовить, а елемент l_2 є працездатним або тоді, коли елемент l_1 є працездатним, а елемент l_2 відмовить, або тоді, коли елемент l_1 і елемент l_2 одночасно відмовлять. Тобто подія *C* може статися тоді, коли відбудеться хоча б одна з подій *A* чи *B*. Визначене вище позначення суми двох подій збігається з позначенням змісту події *C* в цій задачі. Тому $C = A + B$.

Відзначимо також, що проведений вище аналіз працездатності виробу дозволяє стверджувати, що події *A* та *B* є сумісними, оскільки відмова одночасно двох елементів l_1 і l_2 може статися.

Сукупність випадкових подій $\{A_i\}, i = \overline{1,n}$ *визначає повну групу подій, якщо ці події несумісні та в досліді одна з них станеться, тобто*

$$A_i A_j = V,\ i \neq j;\ i, j = \overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} A_i = U.$$

Нехай розглядається дослід, мета якого – виявлення влучень в мішень при двох пострілах. Можуть бути такі наслідки:

A_1 – подія, яка полягає в тому, що буде нуль влучень;

A_2 – подія, яка полягає в тому, що буде одне влучення;

A_3 – подія, яка полягає в тому, що буде два влучення.

Події A_1, A_2, A_3 складають повну групу подій, оскільки $A_1A_2 = A_1A_3 = A_2A_3 = V$ та $A_1 + A_2 + A_3 = U$.

Дві події, які складають повну групу подій, називаються протилежними.

Якщо визначена подія *A*, то рискою над цим символом події позначають протилежну подію, а саме $\overline{A}$ – подія протилежна. Для протилежних подій маємо $A + \overline{A} = U$; $A\overline{A} = V$.

Зауваження 1. Достовірна подія *U* і неможлива подія *V* є протилежними: $\overline{U} = V; \overline{V} = U$.

Зауваження 2. Під різницею двох подій *A* і *B* розуміють таку подію *C*, яка полягає в тому, що подія *A* відбувається й одночасно з нею подія *B* не відбувається.

Позначення цієї дії є $C = A - B$ або $C = A \setminus B$, а геометричне тлумачення подано на рис. 2.8, де закреслена область є подія $C = A - B$.

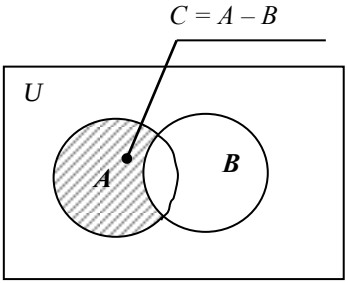


Рис. 2.8. Геометричне тлумачення
різниці подій *A* і *B*

З рис. 2.8 видно, що $C = A - B = A\overline{B}$, тобто різницю подій *A* та *B* можна подати як добуток події *A* та $\overline{B}$.

Для звичайної алгебри справедливі такі закони: комутативний, асоціативний та дистрибутивний.

Закони алгебри подій та їх запис для суми та добутку подані в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Закони алгебри подій

№ з/п	Закон	Сума	Добуток
1	Комутативний (переміщувальний)	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
2	Асоціативний (поєднувальний)	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C = A(BC)$
3	Дистрибутивний (розподільний)	$(A + B)\cdot C = AC + BC$	
4	Другий дистрибутивний	$AB + C = (A + C)(B + C)$	
1	2	3	4
5	Ідемпотентний	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
6	Поглинання	$A + AB = A$	$A\cdot(A + B) = A$
7	Правило де Моргана	$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
8	Принцип двоїстості	$A + V = A$ $A + U = U$	$A \cdot V = V$ $A \cdot U = A$

Примітка. Усі закони, які подані в табл. 2.1, справедливі при їх застосуванні до будь-якої кількості випадкових подій. Так правило де Моргана для загального випадку має такий запис:

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i; \quad \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A}_i .$$

Відзначимо таке. За наявності умови будь-якої задачі, розв’язання якої потребує знань щодо теорії ймовірностей, перш за все формулюється (визначається) та випадкова дія, яка відповідає вимогам задачі. Така подія завжди буде складною. А розв’язання задачі на рівні логічного її подання (алгебро-логічне розв’язання) пов’язане із записом виразу складної події через елементарні. Перетворення такого виразу складної події з метою його спрощення для подальшого числового розрахунку пов’язане з використанням законів алгебри подій. Розглянемо такі задачі.

Задача 2.2. Довести, що рівність $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$ є тотожність та надати її геометричне тлумачення.

Розв'язання. Маємо $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$. У лівій частині під спільною рискою за правилом де Моргана маємо, що $\overline{\overline{AB}}=AB$, а заперечення, що маємо в лівій частині, є істина; тоді рівність доведена, бо $AB\equiv AB$.

Геометричне тлумачення подане на рис. 2.9. На рис. 2.9 $\overline{A}$ та $\overline{B}$ закреслені в різні сторони.

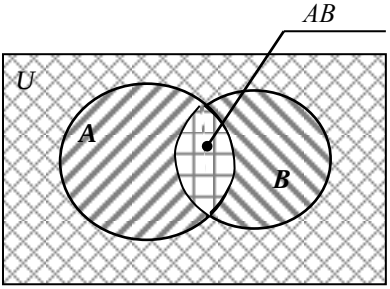


Рис. 1.12. Геометричне тлумачення тотожності $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$

Задача 2.3. Спростити вираз $\overline{A\cdot\overline{B}+AB}+\overline{\overline{A}+B}+\overline{\overline{A}+\overline{B}}$ і надати геометричну інтерпретацію порядку дій.

Розв'язання.

$$\overline{A\cdot\overline{B}+AB}+\overline{\overline{A}+B}+\overline{\overline{A}+\overline{B}}=\overline{\left(A\,\overline{B}+AB\right)\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)}=$$

(за правилом де Моргана)

$$=\overline{\left(A\,\overline{B}+AB\right)\left(B\,\overline{B}+\overline{A}\right)}=\overline{\left(A\,\overline{B}+AB\right)\left(V+\overline{A}\right)}=\overline{\left(A\,\overline{B}+AB\right)\overline{A}}=$$

(за другим дистрибутивним законом) (за принципом двоїстості)

$$=\overline{A\,\overline{A}\,\overline{B}+A\,\overline{A}\,B}=\qquad \overline{V\,\overline{B}+VB}=\qquad \overline{V+V}=\overline{V}=U.$$

(за дистрибутивним законом) (за принципом двоїстості) (ідемпотентний закон)

Геометричне тлумачення подане на рис 2.10.

Вище зазначено, що подання складної події через елементарні можна тлумачити як алгебро-логічне розв'язання задач. Покажемо, що подання складної події через елементарні, виходячи із аналізу змісту задачі, може мати різний запис. Для цього розглянемо задачу 2.4.

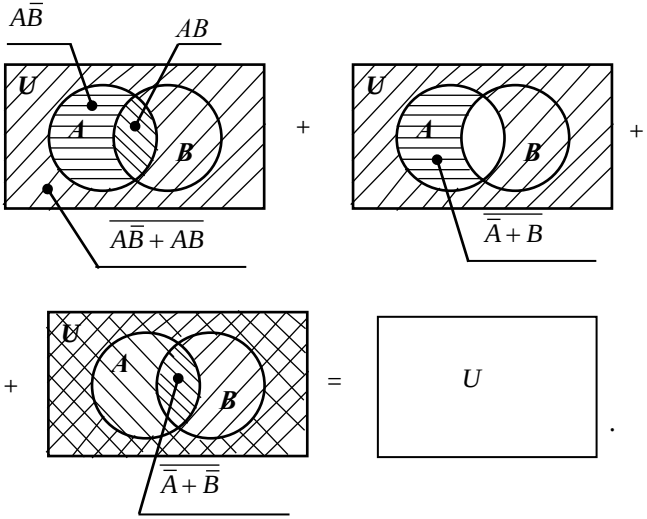


Рис. 1.13. Геометричне тлумачення
спрощення виразу $\overline{\bar{A}+\bar{B}}$

Задача 2.4. Виразити складну подію A, яка полягає в тому, що виріб, принципова структурна схема якого подана на рис. 1.11, є працездатним.

Розв'язання. Як видно з рис. 1.11, виріб складається з трьох елементів резервного з'єднання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що виріб працездатний.

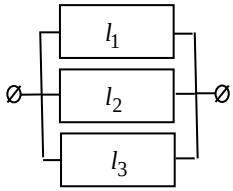


Рис. 1.11. Структурна схема виробу

Елементарні події є такі: B_i – подія, яка полягає в тому, що i-й елемент працездатний, $i=\overline{1,3}$.

Виходячи із змісту резервного з'єднання, маємо, що виріб буде працездатним тоді, коли хоча б один елемент буде працездатним. Такому змісту логіки будуть відповідати такі подання складної події A через елементарні B_i, $i=\overline{1,3}$:

$$A = B_1 + B_2 + B_3;$$

$$A = B_1\bar{B}_2\bar{B}_3 + \bar{B}_1B_2\bar{B}_3 + \bar{B}_1\bar{B}_2B_3 + B_1B_2\bar{B}_3 + B_1\bar{B}_2B_3 + \bar{B}_1B_2B_3 + B_1B_2B_3;$$

$$A = U - \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3.$$

У першому виразі елементарні події $B_i, i=\overline{1,3}$, які виступають як додатки, є сумісними як попарно, так і всі відразу. У другому виразі події справа як додатки є несумісними, тому що не може одноразово відбутися подія $\bar{B}_2$ і B_2, як це, наприклад, зазначено в першому та другому додатку суми виразу справа події A. У третьому виразі записано, що подією, протилежною A, є подія $\bar{A}=\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3$, яка полягає в тому, що елемент l_1 відмовив, і елемент l_2 відмовив, і елемент l_3 відмовив, що відповідає відмові виробу.

Відмітимо, щобільш доцільним буде той алгебро-логічний запис події A, який забезпечує простіше обчислення ймовірності випадкової події A. Це буде показано при подальшому розгляді викладання.

2.3 Частота і ймовірність випадкової події

Випадкова подія як деякий факт, який може статися чи не статися при спотворенні певної сукупності умов, тільки тоді може стати предметом опису з точки зору прогнозування її об'єктивної можливості появи, коли з нею буде пов'язана чисельна міра.

Розглянемо статистичний підхід визначення чисельної міри випадкової події. Нехай розглядається дослід, в якому може статися випадкова подія A. Дослід повторюється n раз, а випадкова подія при цьому відтворюється в m дослідах із n, де $m < n$. Тоді відношення $P^*(A)=\dfrac{m}{n}$ – частота появи події A. Якщо число n мале, то результат кожного досліду суттєво впливає на величину частоти, якщо n зростає, то вплив окремо кожного результату досліду на зміну частоти зменшується.

У табл. 2.2 наведені зміни частоти випадкової події в залежності від збільшення чи зменшення на одиницю кількості m сприятливих наслідків (значення наслідків, в яких подія A відбувається) при зростанні кількості випробувань n.

Таблиця 2.2

Зміна частоти при зміні на одиницю сприятливих наслідків

n	10	100	1 000	10 000
m_1 / m_2	6/7	48/47	504/505	4 991/4 990
$P_1^*(A) / P_2^*(A)$	$\dfrac{6}{10}\Big/\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{48}{100}\Big/\dfrac{47}{100}$	$\dfrac{504}{1\,000}\Big/\dfrac{505}{1\,000}$	$\dfrac{4\,991}{10\,000}\Big/\dfrac{4\,990}{10\,000}$

З табл. 2.2 видно, що частота випадкової події має статистичну стійкість. Границю, до якої прямує частота випадкової події, називають ймовірністю

випадкової події, що схематично за результатами табл. 2.2 зображено на рис. 2.12.

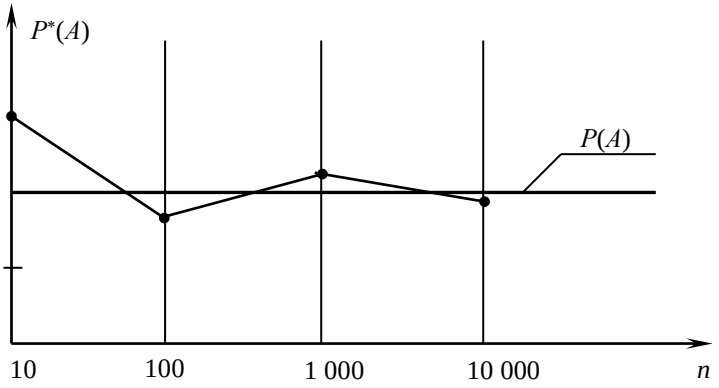


Рис. 2.12. Зміна частоти випадкової події

У поняття статистичної стійкості частоти випадкової події слід вкладати таке: при багатократному повторенні серії дослідів (в кожній серії n достатньо велике) значення частоти випадкової події мало змінюється.

Тобто, якщо при деякому великому n маємо, що $P^*(A) = 0,5$, то в будь-якій іншій серії, в якій $\tilde{n}$ також є достатньо велике, частота $\frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$ буде близька до числа 0,5. Наявність статистичної стійкості частоти випадкової події підтверджується результатами досліджень французького природознавця Бюффона (1707 – 1788) та Пірсона.

У табл. 2.3 наведені результати визначення частоти випадкової події A, яка полягає в тому, що при підкиданні монети випаде орел при різній, достатньо великій, кількості підкидань.

Таблиця 2.3

Визначення статистичної стійкості частоти випадкової події

Дослідник	Кількість незалежних випробувань	Кількість сприятливих наслідків	Частота події $P^*(A)$
Бюффон	4 040	2 048	0,506 9
Пірсон	12 000	6 019	0,501 6

Таким чином, як видно із табл. 2.3, частота випадкової події групується навколо деякого сталого числа, яке, звичайно, є своїм для кожної випадкової події, яка розглядається. Це число виражає чисельну міру об'єктивної можливості випадкової події.

Під ймовірністю випадкової події слід розуміти чисельну міру її об'єктивної можливості.

Таку чисельну міру позначають $P(A)$.

Зауваження. Статистична стійкість частоти випадкової події, яка відзначена в табл. 2.2 та на рис. 2.12, а також дослідні дані, які наведені в табл. 1.3, узагальнені граничною теоремою Бернуллі, яка полягає в тому, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де розглядається границя за ймовірністю, а $\varepsilon > 0$.

2.4 Властивості частот випадкових подій

З метою виявлення властивостей частот випадкових подій розглянемо дослід, за якого можуть статися випадкові події A та B. Цей дослід повторюється n раз, та нехай:

- k є кількість дослідів, за яких сталася подія AB;
- l є кількість дослідів, за яких сталася подія $A\bar{B}$;
- r є кількість дослідів, за яких сталася подія $\bar{A}B$.

Геометричне подання цих наслідків наведене на рис. 2.13.

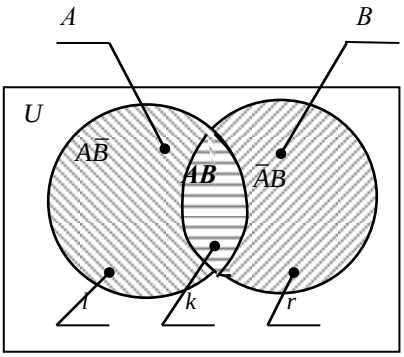


Рис. 2.13. Геометричне тлумачення наслідків при повторенні досліду

З рис. 2.13 видно, що при повторенні досліду n раз подія A може статися $(l+k)$ раз, подія B – $(k+r)$ раз, подія AB – k раз, подія $(A+B)$ – $(l+k+r)$ раз. Виходячи із поняття частоти випадкової події маємо таке.

$$P^*(A)=\frac{l+k}{n};\ P^*(B)=\frac{k+r}{n};\qquad (2.1)$$

$$P^*(AB)=\frac{k}{n};\ P^*(A+B)=\frac{l+k+r}{n}.\qquad (2.1)$$

Оскільки $0\le(l+k)\le n;\quad 0\le(k+r)\le n;\quad 0\le k\le n;\quad 0\le(l+k+r)\le n$, то перша властивість частоти події полягає в тому, що

$$0\le P^*(C)\le 1,(2.1)$$

де C – деяка випадкова подія.

Розглянемо $P^*(A+B)=\frac{l+k+r}{n}$ та маємо

$$P^*(A+B)=\frac{l+k+r}{n}=\frac{l+k}{n}+\frac{k+r}{n}-\frac{k}{n}.\qquad (2.3)$$

Тоді з (2.1) – (2.3) випливає правило обчислення частоти суми двох сумісних випадкових подій, а саме

$$P^*(A+B)=P^*(A)+P^*(B)-P^*(AB).\qquad (2.4)$$

Якщо події A і B є несумісними, то $AB=V$, тоді

$$P^*(A+B)=P^*(A)+P^*(B).\qquad (2.5)$$

Відзначимо, що частота події A $P^*(A)=\frac{l+k}{n}$ зміниться, якщо враховувати тільки ті досліди, за яких сталася подія B. Частота події A, яка визначена за умови, що подія B сталася, називається *умовною частотою* та позначається $P^*\left(A/B\right)$.

Визначимо умовні частоти. З рис. 1.13 видно, що

$$P^*\left(A/B\right)=\frac{k}{k+r};\quad P^*\left(B/A\right)=\frac{k}{l+k}.\qquad (2.6)$$

Маємо

$$\frac{k}{n}=\frac{l+k}{n}\cdot\frac{k}{l+k};\quad \frac{k}{n}=\frac{k+r}{n}\cdot\frac{k}{k+r},$$

тоді з урахуванням (2.1) та (2.6) правило визначення частоти добутку двох випадкових подій має вигляд

$$P^*(AB) = P^*(A)P^*\left(B/A\right) = P^*(B)P^*\left(A/B\right), \tag{2.7}$$

а частота умовних подій відповідно визначається як

$$P^*\left(A/B\right) = \frac{P^*(AB)}{P^*(B)};\ P^*\left(B/A\right) = \frac{P^*(AB)}{P^*(A)}. \tag{2.8}$$

У відповідності до (2.6) ухвалимо таке означення.

Події A та B називаються залежними, якщо частота однієї із них A(B) залежить від того, сталася чи ні друга подія B(A).

Якщо частота події *A(B)* не залежить від того, сталася чи ні друга подія *B*(*A*), то події *A* та *B* є незалежними. У разі, коли події *A* та *B* є незалежними, маємо

$$\begin{aligned} &P^*(A) = P^*\left(A/B\right);\\ &P^*(B) = P^*\left(B/A\right);\\ &P^*(AB) = P^*(A)P^*(B). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Означення та правила (2.4) – (2.9) відображають відповідні властивості частот випадкових подій, які в подальшому використовуються в означенні аксіом теорії ймовірностей та визначення правил розрахунку ймовірностей суми та добутку випадкових подій.

2.5 Аксіоми теорії ймовірностей

Розглянемо простір випадкових подій R_S, який визначається так: якщо випадкові події *A* і *B* належать R_S, то R_S належать і події *AB* та *A*+*B*.

Простору R_S належать події $\bar{A}$ і $\bar{B}$, а оскільки $R_S = U$, то і $V \subset R_S$.

Кожній випадковій події $A \subset R_S$ ставиться у відповідність число $P(A)$, яке називається ймовірністю випадкової події *A* та задовольняє наведеним нижче аксіомам.

Аксіома 1. *Ймовірність випадкової події є невід'ємна та менше одиниці, тобто*

$$0 < P(A) < 1. \tag{2.10}$$

Аксіома 2.

$$P(U) = 1;\quad P(V) = 0. \tag{2.11}$$

Аксіома 3. *Ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right). \tag{2.12}$$

Визначені аксіоми були запропоновані О. М. Колмогоровим. Вони в сукупності складають аксіоматику теорії ймовірностей, з якої випливає таке.

1. Якщо події $\{A_i\}$, $i = \overline{1,n}$ складають повну групу подій, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) = 1. \tag{2.13}$$

2. Якщо повна група подій складається з двох подій, то

$$P\left(A\right) + P\left(\bar{A}\right) = 1. \tag{2.14}$$

3. Якщо $A \subset B$, то

$$P\left(A\right) \le P\left(B\right). \tag{2.15}$$

Розглянемо дві сумісні події A і B.
З рис. 2.14 видно, що

$$A + B = A + B\,\bar{A}; \qquad B = AB + B\,\bar{A}. \tag{1.16}$$

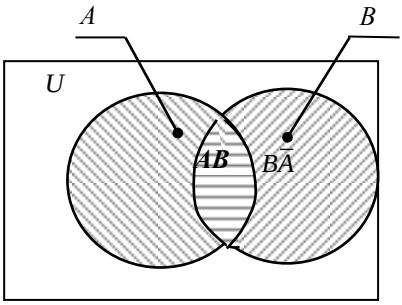


Рис. 2.14. Геометричне тлумачення
визначення подій ($A + B$) та B

У виразах (2.16) праворуч визначені, якщо розглядати доданки, несумісні події, тому за третьою аксіомою маємо

$$P(A+B)=P\left(A+B\,\bar{A}\right)=P(A)+P\left(B\,\bar{A}\right);$$

$$P(B)=P\left(AB+B\,\bar{A}\right)=P(AB)+P\left(B\,\bar{A}\right).$$

Для цих рівнянь виконаємо дію почленного віднімання. Тоді

$$P(A+B)-P(B)=P(A)+P\left(B\,\bar{A}\right)-P(AB)-P\left(B\,\bar{A}\right)$$

або
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.17}$$

Аналогічно можна визначити, що

$$\begin{gathered}P(A+B+C)=\\ =P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{gathered} \tag{2.18}$$

У загальному випадку, коли розглядається n сумісних подій, співвідношення для розрахунку ймовірностей їх суми має вигляд

$$\begin{gathered}P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\\ =\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i,j}P\left(A_iA_j\right)+\sum_{i,j,k}P\left(A_iA_jA_k\right)-\ldots+(-1)^{n-1}P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Як було вище визначено, на основі поняття умовної частоти випадкової події вводиться поняття ***умовної ймовірності випадкової події*** *як ймовірності однієї події за умови, що друга подія сталася*, а саме:

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)};\ P\left(B/A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{2.20}$$

Поняття залежності випадкових подій має таке тлумачення: *випадкові події A і B є залежними, якщо ймовірність однієї з подій залежить від того, сталася чи не сталося інша подія.*

З (2.20) для двох залежних випадкових подій маємо

$$P(AB)=P(A)P\left(B/A\right)=P(B)P\left(A/B\right), \tag{2.21}$$

для трьох залежних випадкових подій маємо

$$P(ABC)=P(A)P\left(B/A\right)P\left(C/AB\right). \tag{2.22}$$

У виразу (2.22) $P(A)$ є безумовна ймовірність випадкової події A; $P\left(B/A\right)$ – умовна ймовірність випадкової події B за умови, що подія A сталася; $P\left(C/AB\right)$ – умовна ймовірність події C за умови, що випадкові події A та B сталися одночасно.

Якщо розглядається n випадкових подій, то

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \\ = P(A_i)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2A_3)\ldots\times P\left(A_n\Big/\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right). \tag{2.23}$$

З поняття залежності випадкових подій випливає, що якщо події є незалежними, то

$$\begin{aligned} &P\left(A/B\right) = P(A); \\ &P\left(B/A\right) = P(B); \\ &P(AB) = P(A)P(B); \\ &P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Розглянемо постановку та розв'язання задач з метою ілюстрації застосування визначених вище співвідношень для розрахунку ймовірностей сум сумісних та несумісних випадкових подій та ймовірностей добутку залежних та незалежних випадкових подій.

Задача 2.5. Технічний виріб за своїм функціонуванням відповідає структурній схемі послідовного з'єднання двох елементів. Ймовірність відмови першого елемента дорівнює 0,2, другого – 0,3. Визначити ймовірність відмови виробу.

Розв'язання. Виходячи з сукупності умов, які визначають дослід, що може ставитися дослідником з метою виявлення відмови та безвідмовної роботи технічного виробу, вводимо до розгляду випадкову подію C, яка полягає в тому, що технічний виріб відмовив. Подія C є складною, вона може бути виражена через такі елементарні події:

– A – подія, яка полягає в тому, що елемент перший (l_1) відмовив;

– B – подія, яка полягає в тому, що елемент другий (l_2) відмовив.

За своїм змістом події A і B є сумісними, тому що в досліді вони можуть статися одночасно. На рис. 2.15 зазначені всі випадкові події, яким відповідає наслідок – відмова виробу.

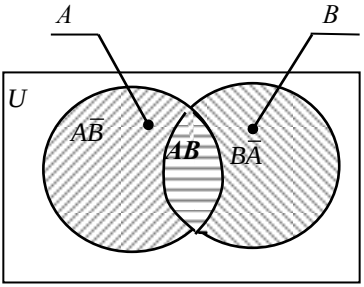


Рис. 2.15. Геометричне тлумачення подій,
яким відповідає відмова виробу

Як видно з рис. 2.15, алгебро-логічне розв'язання задачі, що відповідає поданню події C через елементарні події A та B, може мати різний вигляд, а саме:

$$C = A + B,$$

що випливає з поняття суми випадкових подій;

$$C = A\bar{B} + \bar{A}B + AB,$$

оскільки відмова виробу може статися тоді, коли відмовив елемент l_1, а елемент l_2 працює безвідмовно, або тоді, коли елемент l_1 працює безвідмовно, а елемент l_2 відмовив, або тоді, коли одночасно відмовили елементи l_1 і l_2;

$$C = U - \bar{C} = U - \bar{A}\bar{B},$$

де $\bar{C} = \bar{A}\,\bar{B}$ – подія, яка полягає в тому, що виріб є працездатним.

З умови задачі випливає, що події A і B є незалежними, тому що ймовірність відмови елемента l_1 не залежить від того, відмовив елемент l_2 чи ні.

За співвідношеннями для підрахування ймовірності суми та добутку випадкових величин у разі, коли події сумісні чи несумісні, а також коли події залежні чи незалежні, як це визначено вище, маємо

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$
$$= 0,2 + 0,3 - 0,2 \cdot 0,3 = 0,44;$$

$$P(C) = P\left(A\,\bar{B} + \bar{A}B + AB\right) = P\left(A\,\bar{B}\right) + P\left(\bar{A}B\right) + P\left(AB\right) = P\left(A\right)P\left(\bar{B}\right) +$$
$$+P\left(\bar{A}\right)P\left(B\right) + P\left(A\right)P\left(B\right) = 0,2\cdot 0,7 + 0,8\cdot 0,3 + 0,2\cdot 0,3 = 0,44,$$

де за (2.11) $P\left(\bar{B}\right) = 1 - P\left(B\right) = 1 - 0,3 = 0,7;$

$$P\left(\bar{A}\right) = 1 - P\left(A\right) = 1 - 0,2 = 0,8;$$

$$P(C) = P\left(U - \bar{C}\right) = P\left(U - \bar{A}\bar{B}\right) = P\left(U\right) - P\left(\bar{A}\bar{B}\right) =$$

$$= P\left(U\right) - P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right) = 1 - 0,8\cdot 0,7 = 1 - 0,56 = 0,44.$$

Як уже зазначалося, ймовірність безвідмовної роботи виробу є

$$P\left(\bar{C}\right) = P\left(\bar{A}\bar{B}\right) = P\left(\bar{A}\right) - P\left(\bar{B}\right) = 0,8\cdot 0,7 = 0,56.$$

Розв'язання цієї задачі свідчить про те, що алгебро-логічне подання події C через протилежну подію $\bar{C}$ слід вважати найбільш доцільним. Це тим більш було б переконливо, якби розглядався технічний виріб, визначення функціонування якого було б пов'язане з розглядом не двох елементів нерезервованого з'єднання, а, скажімо, двадцяти чи двохсот.

Задача 2.6. Структурна схема функціонування технічного виробу військового призначення має нерезервоване з'єднання n елементів (рис. 2.16). Виріб поставлений на випробування. Визначити ймовірність того, що виріб витримає випробування на функціонування за зазначений термін, якщо ймовірність безвідмовної роботи i-го елемента P_i.

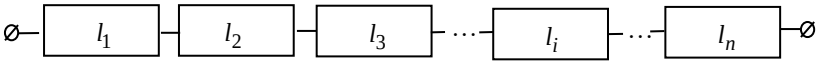


Рис. 2.16. Структурна схема функціонування виробу
при нерезервованому з'єднанні елементів

Розв'язання. Введемо до розгляду подію C, яка полягає в тому, що виріб за заданий термін не відмовить, та подію A_i, яка полягає в тому, що за заданий термін елемент l_i буде працездатним.

Виходячи з того, що події A_i, $i = \overline{1,n}$ є незалежними, маємо

$$C = \prod_{i=1}^{n} A_i; \quad P(C) = P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{i=1}^{n} P_i .$$

Подія $\bar{C}$, яка полягає в тому, що відмова виробу може статися тоді, коли відмовить хоча б один з n елементів, тоді

$$\bar{C} = U - C; \quad P(\bar{C}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i .$$

Задача 2.7. Структурна схема функціонування технічного виробу має резервне з'єднання n елементів. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що виріб витримає випробування за зазначений термін, якщо ймовірність безвідмовної роботи i-го елемента за той же термін становитиме P_i.

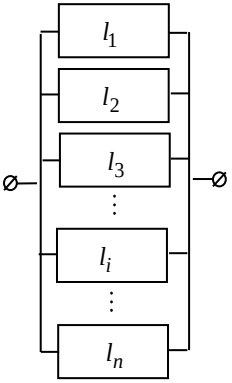


Рис. 2.17. Структурна схема функціонування виробу при резервному з'єднанні елементів

Розв'язання. Структурна схема виробу подана на рис. 2.17.

Розглянемо подію C, яка полягає в тому, що виріб витримає випробування за заданий термін часу, та подію A_i, яка полягає в тому, що і-й елемент витримає випробування за заданий термін часу, $i = \overline{1,n}$.

Тоді

$$C = U - \bar{C} = U - \prod_{i=1}^{n} \bar{A}_i = U - \prod_{i=1}^{n} (U - A_i)$$

та

$$P(C) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i); \quad P(\bar{C}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i).$$

Задача 2.8. Розглянемо технічний виріб військового призначення, структурна схема функціонування якого має загальний вигляд, тобто являє собою m послідовно з'єднаних блоків, у кожному з яких міститься n елементів резервного з'єднання. Нехай P_{ij} – ймовірність безвідмовної роботи елемента α_{ij}. Визначити ймовірність відмови та безвідмовної роботи виробу за заданий термін часу.

Розв'язання. Структурна схема функціонування виробу подана на рис. 2.18.

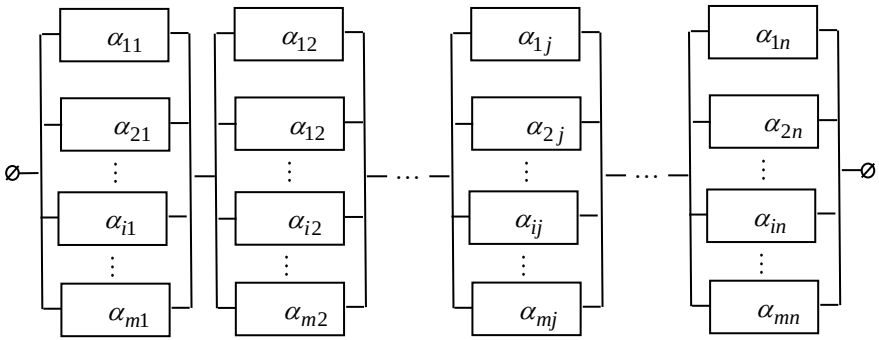


Рис. 2.18. Структурна схема функціонування виробу

Розглянемо подію C, яка полягає в тому, що виріб відмовив, та подію A_{ij}, яка полягає в тому, що відмовив α_{ij} -й елемент.

Тоді $$C = U - \prod_{j=1}^{n}\left(U - \prod_{i=1}^{m} A_{ij}\right);$$

$$P(C) = P\left(U - \prod_{j=1}^{n}\left(U - \prod_{i=1}^{m} A_{ij}\right)\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=1}^{m} P_{ij}\right)$$

та $$P(\bar{C}) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=1}^{m} P_{ij}\right).$$

У подальшому розглянемо різні способи обчислення ймовірностей випадкових подій.

2.6. Способи обчислення ймовірностей випадкових подій

У теорії ймовірностей розглядають такі способи визначення ймовірностей випадкових подій:

– *класичний,*

– *геометричний і*

– *статистичний.*

Класичний спосіб. Розглядається дослід, в якому можуть статися N рівноймовірних і несумісних наслідків.

Нехай з N наслідків M *наслідків є сприятливими* з точки зору дослідника, тобто такими, яким відповідає поява випадкової події A. Тоді ймовірність випадкової події A визначається виразом

$$P(A)=\frac{M}{N}. \tag{2.25}$$

Розраховувати $P(A)$ за (2.25) можна тоді, коли в умові задачі (опису моделі реального явища природи) описана наявність *класичної моделі*, яка характеризується таким:

– послідовність елементарних подій складає скінченну дискретну множину або нескінченну, але зчисленну дискретну множину;

– елементарні події, які можуть статися в досліді, складають повну групу подій, тобто $A_iA_j=V, i\neq j;\ \sum_{i=1}^{n}A_i=U$;

– елементарні події є рівноймовірними.

Класичну модель можна реалізувати таким чином. В урну кладеться N куль, які пронумеровані числами від 1 до N та на дотик є однаковими. Кулі в урні ретельно перемішуються. З урни навмання виймається одна куля. Сприятлива подія – куля зазначеного номера.

Подія A_k полягає в тому, що навмання буде взято кулю за номером k. Рівноймовірність подій A_k забезпечується тим, що кулі в урні перемішуються та одна з куль вибирається навмання.

При класичній моделі розглядається подія B, яка полягає в тому, що номер кулі, яка виймається з урни, належить деякій множині M заданих чисел з набору $\overline{1,N}$. Якщо кулі, які складають множину M, пофарбувати у білий колір, а решту куль $N-M$ – у чорний колір, то подія B буде визначати появу кулі білого кольору. Той факт, що подія B відповідає появі одного з фіксованих наслідків, висловлюють так: "подія B сприяє M наслідків з N можливих". Тому класичну модель називають "схемою урн".

Розглянемо задачі, в яких ймовірність випадкової події обчислюється за класичним способом.

Задача 2.9. Розглядається дослід з метою виявлення грані з парною кількістю очок при підкиданні грального кубика. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що випаде грань з парною кількістю очок.

Розв'язання. Комплекс умов, які визначають відповідний дослід: гральний кубик; нескінченна гладка поверхня; значення характеристик зовнішнього середовища; експериментатор, який підкидає гральний кубик.

Елементарна подія $B_i, i=\overline{1,6}$ полягає в тому, що випаде i-та грань. Множина $\{B_i\}, i=\overline{1,6}$ відповідає опису, що зазначено вище, класичної моделі, бо множина $\{B_i\}, i=\overline{1,6}$ є скінченною, події $B_i, i=\overline{1,6}$ складають повну групу подій і вони є в силу симетрії грального кубика рівноймовірними. Уведемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що

випаде грань з парною кількістю очок. Видно, що $A = B_2 + B_4 + B_6$, де відповідно події B_2, B_4, B_6 – це події, які полягають в тому, що випадуть грані з числом очок 2, 4 та 6. Виходить, маємо три сприятливі наслідки, які відповідають події A, а всіх наслідків шість.

Тому $$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Примітка. При розгляданні наступних задач будемо описувати лише зміст досліду, мету проведення досліду, який передбачається, виходячи з того, що умова будь-якої задачі – це модель на вербальному (словесному) рівні відповідного реального об'єктивного явища природи. Перелік умов, що визначають дослід, є описом тих факторів, які така модель враховує. Особа, яка навчається, при розгляді задачі перш за все повинна усвідомити зміст досліду, а це значить, що вона хоча б уявно повинна визначити множину умов. Тільки тоді можна розраховувати на безпомилкове визначення тих наслідків, які слід розглядати. А в задачах, які в подальшому будуть розглядатись нами з метою ілюстрації працездатності уже викладених положень чи співвідношень, перелік умов, які визначають необхідний дослід, будемо опускати.

Задача 1.10. У підручнику з теорії ймовірностей 560 сторінок. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що при відкритті книги навмання попадеться сторінка за номером, кратним числу сім.

Розв'язання. Елементарною подією B_i є подія, яка полягає в тому, що при відкритті книги навмання попадеться сторінка за номером i, де $i = \overline{1, 560}$. Тоді всі елементарні наслідки, які можуть статися в цьому досліді, дорівнюють $N = 560$. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що при відкритті книги навмання попадеться сторінка за номером, кратним числу сім. Тоді подія $A = B_7 + B_{14} + ... + B_{560}$, тобто число сприятливих наслідків $M = 80$, а значить

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{80}{560} = \frac{1}{7}.$$

Задача 1.11. При підготовці проведення екзамену n екзаменаційних білетів перемішуються навмання та викладаються в ряд. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що білети за номерами один та два будуть лежати поруч.

Розв'язання. Введемо до розгляду елементарну подію B_i, яка полягає в тому, що при розкладанні екзаменаційних білетів навмання в ряд буде визначений i-й варіант розкладання. Кількість елементарних подій відповідає кількості комбінацій, які можна скласти з n елементів (білетів) по n, тобто це є кількість перестановок, оскільки i-та комбінація відрізняється

від *j*-ї комбінації тільки порядком розміщення елементів. Виходить, кількість усіх можливих наслідків $N = n!$. Для того, щоб визначити кількість сприятливих наслідків, будемо мислити, наприклад, так: довільний *i*-й варіант може відповідати тому, що білет за номером один та два будуть викладені поруч тоді, коли відносно білета за номером один білет за номером два буде лежати праворуч чи ліворуч. Тому подія *A*, яка полягає в тому, що білети за номером один та два будуть викладені поруч, буде відповідати $M = 2(n-1)!$ варіантам розкладання екзаменаційних білетів.

Тоді $$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

Задача 2.12. Нав8мання набирається телефонний номер, який складається із п'яти цифр. Визначити ймовірність того, що всі цифри будуть різні.

Розв'язання. Розглянемо елементарну подію B_i, яка полягає в тому, що набраний *i*-й варіант телефонного номера з п'яти цифр. Кількість усіх можливих наслідків, які відповідають подіям B_i, – це кількість розміщень $n = 10$ елементів (кількість цифр, які набираються) по $r = 5$ чарунках, тому $N = 10^5$. Сприятливі наслідки – це такі події B_i, які відповідають наборам, що відрізняються один від одного як цифрами, так і їх порядком запису (набору). А такі комбінації являють собою розміщення із *n* елементів по *r*, тобто $M = A_n^r$.

Тоді $$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{A_n^r}{10^5} = \frac{A_{10}^5}{10^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0{,}3024.$$

Задача 2.13 (Задача про вибірку без повернень). В урні є *N* куль однакових на дотик, *M* із них білі, а $N - M$ – чорні. Кулі в урні перемішуються. З урни виймають навмання *n* куль, які в урну потім не повертаються. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що серед *n* куль, які виймаються з урни, буде рівно *m* білих і *n* – *m* чорних.

Розв'язання. Розглянемо елементарну подію B_i, яка полягає в тому, що з урни буде взято *i*-ту комбінацію *n* куль із *N*, в якій кількість білих куль не перевищує $\min\{n, M\}$, а решта куль чорні. Події B_i складають дискретну множину, вони складають повну групу подій та є рівноймовірними, що забезпечується перемішуванням куль та вибіркою навмання *n* куль з урни. Це забезпечує зміст класичної моделі. Введемо до розгляду подію *A*, яка полягає в тому, що у вибірку із *n* куль потрапить рівно *m* білих. Ймовірність цієї події слід визначати за (1.25). Кількість всіх можливих наслідків – це кількість

комбінацій з N по n, кожна з яких складається з n елементів, а одна комбінація від іншої відрізняється елементами. Тому кількість всіх можливих наслідків є C_N^n. Кількість сприятливих наслідків, що відповідають тим комбінаціям, які будуть складатися рівно із m білих куль та $n-m$ чорних, визначиться як $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, оскільки кожній комбінації із C_M^m слід поставити у відповідність комбінацію із C_{N-M}^{n-m}. Тому

$$P(A) = P_{n,m}(N,M) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad . \tag{2.26}$$

Вираз (2.26) називають формулою вибірки без повернень.

Задача 2.14. Партія із 100 виробів включає в себе 80 виробів стандартних. Робиться вибірка із 3 виробів. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що у вибірку із 3 виробів потрапить рівно один нестандартний виріб.

Розв'язання. Згідно із змістом задачі вибірки без повернень маємо, що $N = 100;\ M = 20;\ \ n = 3; m = 1$.

Тоді $$P_{3,1}(100,20) = \frac{C_{20}^1 \cdot C_{80}^2}{C_{100}^3} = 0,391.$$

Геометричний спосіб. Розглядається область Q та область $q \subset Q$, що відображено на рис. 2.19.

Ставиться дослід, який має за мету виявлення влучення в область q випадкової точки, яка навмання "кидається" в область Q. Кожна точка Q – це можливий наслідок, а кожна точка області q – це сприятливий наслідок. Тому ймовірність події, яка полягає в тому, що точка буде належати області q, визначається як

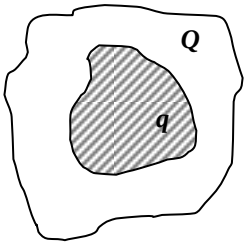


Рис. 2.19. Геометричне подання множин можливих та сприятливих наслідків

$$P(A) = \frac{\text{чисельна міра } q}{\text{чисельна міра } Q}, \tag{2.27}$$

яке і визначає зміст геометричного способу визначення ймовірності випадкової події.

Якщо Q та $q \subset Q$ є одновимірні області, то чисельна міра області q є довжиною відрізка (c,d), тобто $(d-c)$, а чисельна міра області Q є довжиною відрізка (a,b), тобто $(b-a)$, якщо умові $q \in Q$ відповідає $a < c < d < b$. Якщо Q та $q \subset Q$ є двовимірними областями, то чисельною мірою області q є її площа S_q, а чисельною мірою області Q є її площа S_Q, як це і відображено на рис. 2.19. Якщо Q та $q \subset Q$ є тривимірними областями, то чисельною мірою області q є її об'єм V_q, а чисельною мірою області Q є її об'єм V_Q. Аналогічно (1.27) слід тлумачити при розгляді областей Q та $q \subset Q$ будь-якої розмірності.

Все вищевикладене дозволяє висловлювати твердження, що (2.27) є узагальненням виразу (2.25), тобто геометричний спосіб визначення ймовірності випадкової події є узагальненням класичного способу.

Задача 2.15. Інтервалом часу, на протязі якого технічний виріб військового призначення використовується за призначенням, є t_l. Інтервалом часу, на протязі якого виріб перебуває на регламентному обслуговувані, є t_p. Визначити ймовірність події A, яка полягає в тому, що виріб буде працездатним у деякий момент часу експлуатаційного терміну.

Розв'язання. Чисельна міра одновимірної області Q визначається як $(t_l + t_p)$, а чисельна міра одновимірної області q визначається як t_l.

Тоді $P(A) = \dfrac{t_l}{t_l + t_p}$.

Задача 2.16. Дві особи домовились про зустріч у визначеному місті між 12 та 13 годинами. Кожна особа прибуває до місця зустрічі незалежно від іншої та рівноймовірно на протязі однієї години (між 12 та 13 годинами). Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що зустріч відбудеться, якщо особа, яка прибула до місця зустрічі першою, чекає 15 хвилин, а потім залишає місце зустрічі.

Розв'язання. Нехай t є змінною часу прибуття до місця зустрічі першої особи, а τ – другої особи. Умова задачі передбачає, що зустріч відбудеться, якщо $|t-\tau| \le \dfrac{1}{4}$, оскільки особа, яка прибула до місця зустрічі, чекає 15 хвилин, а потім покидає місце зустрічі.

Тоді область Q, зазначена на рис. 2.20, відповідає всім можливим наслідкам, що відповідають елементарним подіям B_i, які полягають в тому, що зустріч відбудеться в i-й момент часу за проміжок часу від 12-ї до 13-ї години.

Область q відповідає сприятливим наслідкам, які відповідають подіям B_i, які полягають в тому, що зустріч відбудеться в i-й момент часу проміжку часу від 12-ї до 13-ї години з урахуванням обмеження $|t-\tau| \le \frac{1}{4}$.

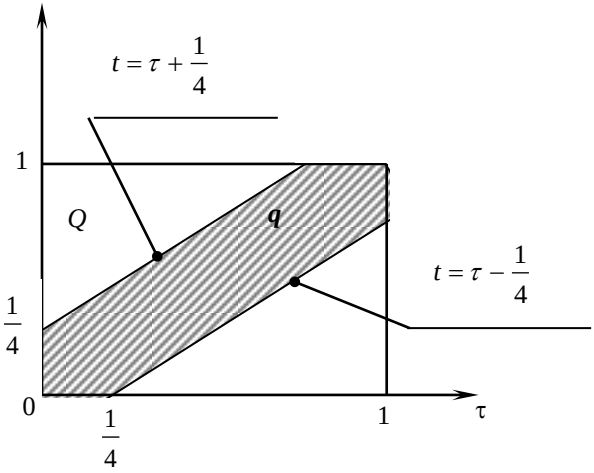


Рис. 2.20. Геометричне зображення можливих та сприятливих наслідків

Тоді за (2.27) маємо

$$P(A) = \frac{S_q}{S_Q} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1} = \frac{7}{16}.$$

Відмітимо, що задача про зустріч вважається класичною, тому що до такої моделі можна звести багато прикладних задач військового й технічного призначення.

Задача 1.17 (задача Бюффона). Голка, довжина якої l, кидається навмання на папір, розкреслений паралельними лініями, на відстані L одна від одної. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що голка перетне одну із паралельних ліній, якщо $L \ge l$.

Розв'язання. На рис. 2.21 подано геометричне зображення змісту досліду, з якого видно, що голка буде перетинати одну з паралельних ліній, якщо $\rho \le l \sin\phi$.

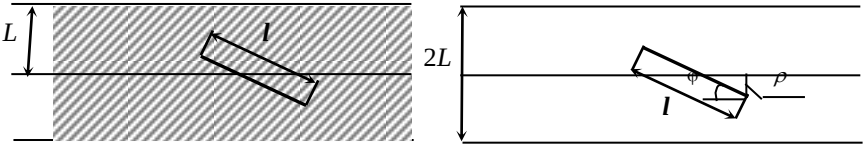


Рис. 2.21. Геометричне зображення змісту досліду

Усі можливі положення голки будуть відповідати точкам області прямокутника, яка описується в координатах $0 \le \rho \le L$ та $0 \le \phi \le \pi$ (рис. 2.22), а положення голки, які відповідають сприятливим наслідкам, є точками області q.

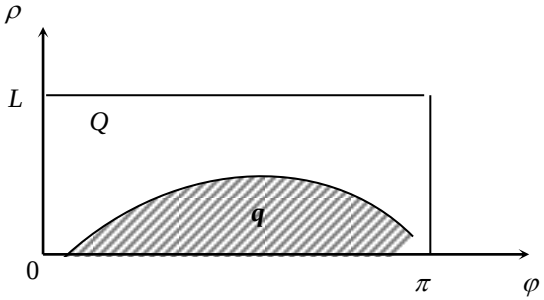


Рис. 2.22. Геометричне зображення можливих та сприятливих наслідків досліду

Тоді $P(A) = \dfrac{S_q}{S_Q} = \int\limits_0^{\pi} l \sin\phi \, d\phi \Big/ (L\pi) = \left(-l\cos\phi \Big|_0^{\pi} \right) \Big/ (L\pi) = \dfrac{-l(-1-1)}{L\pi} = \dfrac{2l}{L\pi}$.

При статистичному способі визначення ймовірності випадкової події виходять із статистичного підходу означення поняття ймовірності випадкової події, що і було розглянуто вище в п.1.3, та приймають, що ймовірність випадкової події визначається частотою випадкової події, тобто

$$P(A) = P^*(A) = \frac{m}{n}, \tag{2.28}$$

де m – кількість сприятливих наслідків при повторенні досліду n разів.

Якщо в попередній задачі прийняти, що $L = l$, то

$$P(A) = \frac{2}{\pi} = P^*(A) = \frac{m}{n},$$

тоді $\pi = 2n/m$, а це означає, що трансцендентне число π може бути визначене на основі статистичного моделювання. Так, при $n = 10^4$ маємо $\pi = 3{,}15$.

2.7. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез

Розглянемо подію A, яка може статися за наявності однієї із гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots, H_n$, які складають повну групу подій, тобто $H_i H_j = V$; $i \neq j$; $i, j = \overline{1,n}$ та $\sum_{i=1}^{n} H_i = U$. На рис. 2.23 наведене геометричне тлумачення можливості появи випадкової події A в досліді за наявності гіпотез H_i, $i = \overline{1,n}$.

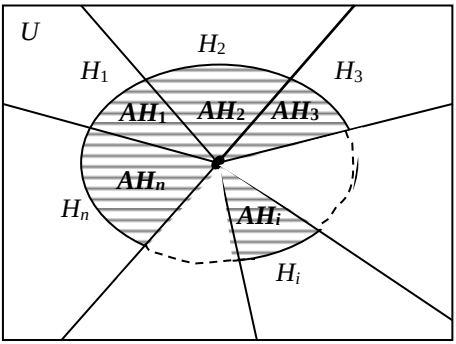


Рис. 2.23. Геометричне тлумачення появи події A в досліді за наявності гіпотез

З рисунка видно, що випадковою подією A є об'єднання (сума) виду

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AHi + \ldots + AH_n .$$

Події AH_i, $i = \overline{1,n}$ є несумісними, тому що несумісні H_i, $i = \overline{1,n}$; а події A та H_i є залежними, оскільки ймовірність події A залежить від того, сталася подія (гіпотеза) H_i чи ні.

Тоді маємо

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AH_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).\,.$$

Вираз $$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i) \qquad (2.29)$$

називають *формулою повної ймовірності*.

Задача 1.18. З урни, в якій містяться 5 білих та 7 чорних куль, навмання вибираються дві кулі й перекладаються в урну, в якій є 5 білих та 3 чорні кулі. Кулі в другій урні перемішують та навмання вибирають одну кулю. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що куля, яку вибрали з другої урни, є білою.

Розв'язання. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що з другої урни вибираємо білу кулю. З умови видно, що подія A може статися за наявності таких гіпотез:

– H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено дві білі кулі;

– H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено одну кулю білу та одну чорну;

– H_3 – гіпотеза, яка полягає в тому, що з першої урни в другу було перекладено дві чорні кулі.

Гіпотези H_1, H_2, H_3 складають повну групу подій, оскільки ніяких інших наслідків у досліді, який полягає у визначені складу куль, що перекладаються із першої урни в другу, бути не може, та один із цих наслідків обов'язково відбудеться.

Тоді $$A = AH_1 + AH_2 + AH_3,$$

а із (2.29) маємо

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3). \qquad (2.30)$$

Розглянемо детальніше визначення ймовірностей випадкових безумовних подій (ймовірність гіпотез) та випадкових умовних подій, які зазначені в правій частині (2.30).

Гіпотези H_1, H_2, H_3 є складними випадковими подіями, які можуть бути виражені через такі елементарні події:

– B_1 – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана перша куля білого кольору;

– B_2 – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана друга куля білого кольору.

Із умови задачі випливає таке:

– $\overline{B}_1$ – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана перша куля чорного кольору;

– $\bar{B}_2$ – подія, яка полягає в тому, що з першої урни буде вибрана друга куля чорного кольору.

Тоді $H_1 = B_1B_2;\ H_2 = B_1\bar{B}_2 + \bar{B}_1B_2;\ H_3 = \bar{B}_1\bar{B}_2.$

Події $B_1\bar{B}_2$ та $\bar{B}_1B_2$ є несумісними, а події B_1, B_2 – залежними.

Тому $$P(H_1) = P(B_1B_2) = P(B_1)P(\bar{B}_2/B_1) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{5}{33};$$

$$P(H_2) = P(B_1\bar{B}_2) + P(\bar{B}_1B_2) =$$

$$= P(B_1)P(\bar{B}_2/B_1) + P(\bar{B}_1)P(B_2/\bar{B}_1) = \frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11} + \frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11} = \frac{35}{66};;$$

$$P(H_3) = P(\bar{B}_1\bar{B}_2) = P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2/\bar{B}_1) = \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{7}{22},$$

а також $$P(A/H_1) = \frac{7}{10};\quad P(A/H_2) = \frac{3}{5};\quad P(A/H_3) = \frac{1}{2}..$$

Виходить, з (2.30) маємо

$$P(A) = \frac{5}{33}\cdot\frac{7}{10} + \frac{35}{66}\cdot\frac{3}{5} + \frac{7}{22}\cdot\frac{1}{2} = \frac{49}{132}.$$

При розгляді прикладних задач виникає потреба визначити ймовірності гіпотез за умови, що подія A відбулась. На основі визначення ймовірності добутку маємо

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A);$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

та з урахуванням (2.29)

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}. \qquad (2.31)$$

Співвідношення (1.31) називають *формулою гіпотез* або *формулою Байєса*.

Задача 1.19. Транзистори виготовляються на трьох підприємствах. На першому підприємстві виготовляється 20 %, а на другому й третьому – 40 % продукції від загальної кількості. Продукція першого підприємства містить 100 % стандартних транзисторів, другого – 90 %, третього – 80 %. Продукція з усіх підприємств надходить на склад. Для виготовлення виробу з складу навмання вибрали нестандартний транзистор. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на другому підприємстві, за умови, що він є нестандартним.

Розв'язання. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що зі складу надійшов нестандартний транзистор, та гіпотези такого змісту:

– H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на першому підприємстві;

– H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на другому підприємстві;

– H_3 – гіпотеза, яка полягає в тому, що транзистор виготовлений на третьому підприємстві.

Тоді

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{0,4\cdot 0,1}{0,2\cdot 0+0,4\cdot 0,1+0,4\cdot 0,2}=\frac{0,04}{0,12}=0,33.$$

Слід відзначити, що якщо $P(A/H_1)=0$, тоді гіпотезу H_1 можна було б не вводити до розгляду, а це означає, що можна висловлювати поняття "повної групи гіпотез", тобто визначити таку сукупність гіпотез, за наявності яких подія A може статися. Тоді поняття "повної групи гіпотез" не збігається з поняттям "повної групи подій". Звичайно, можна рекомендувати визначати гіпотези так, щоб вони складали завжди повну групу подій, оскільки при підрахунках потім відповідні ймовірності умовних подій будуть визначені рівними нулю.

На завершення відмітимо, що формула повної ймовірності дозволяє обчислити ймовірність події A, яка може статися в досліді за наявності гіпотез, тобто дозволяє обчислити *апріорну* (додослідну) ймовірність випадкової події, а формула гіпотез дозволяє обчислити умовну ймовірність $P(H_i/A)$ за умови, що подія A вже відбулася, дослід вже поставлений і його результатом є випадкова подія A. Формула гіпотез дозволяє обчислити *апостеріорну* (післядослідну) ймовірність умовної події.

Якщо на практиці ймовірність події A може бути визначена за результатами випробувань, то результати обчислення ймовірностей умовних випадкових подій $P(H_i/A)$ за формулою гіпотез можуть служити підґрунтям для прийняття рішень щодо вдосконалення технічних виробів.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Дайте означення теорії ймовірностей як науки.
2. Якщо відтворення деякої сукупності умов, за яких спостерігається деяке явище природи, означає дослід, то чи означає зміна хоча б однієї умови з цієї сукупності розуміння деякого іншого досліду?
3. Коли слід стверджувати, що розглядається випадковий наслідок досліду?
4. Дайте означення події, достовірної події, неможливої та випадкової подій.
5. Які випадкові події називають складними, сумісними, залежними?
6. Дайте означення алгебри подій.
7. Дайте визначення повної групи подій.
8. Які дві події називають протилежними?
9. Доведіть тотожності: $AB + \overline{A}B = B$; $\overline{\overline{A} + B} + A\overline{B} = A$.
10. Розкрийте розуміння ймовірності випадкової події.
11. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.
13. Запишіть вираз для визначення ймовірності суми чотирьох сумісних випадкових подій.
14. У чому полягає обґрунтування доцільності застосування класичного способу визначення ймовірності випадкової події?
15. Чи можна геометричний спосіб визначення ймовірності випадкової події розглядати як узагальнення класичного способу?

ТЕМА 3
Випадкові величини

3.1 Визначення випадкової величини

Введення поняття випадкової величини визначило наступний крок розвитку теорії ймовірностей як науки, яка займається виявленням закономірностей масових випадкових явищ природи, тому що опис випадкових явищ природи зручно подавати в термінах випадкових величин, а їх закономірності подавати законами розподілу випадкових величин.

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті досліду може приймати певне можливе значення, причому заздалегідь невідомо, яке саме значення вона прийме.

Прийнято позначати випадкові величини кінцевими великими літерами латинського алфавіту (*X*, *Y*, *Z* та ін.), а їх можливі значення – відповідно малими літерами: $x_i, i=\overline{1,n}$; $y_i, i=\overline{1,n}$; $z_i, i=\overline{1,n}$.

Випадкові величини можуть бути *дискретними* або *неперервними*.

Випадкова величина називається дискретною, якщо її можливі значення складають дискретну скінченну чи нескінченну, але зчисленну множину.

Випадкова величина називається неперервною, якщо її можливі значення складають неперервну скінченну чи нескінченну множину, елементи якої суцільно заповнюють скінченний або нескінченний проміжок.

Приклад 2.1. Розглянемо дослід, який ставиться з метою виявлення працездатності двох виробів. Випадкова величина *X* – кількість працездатних виробів, вона може приймати такі свої можливі значення: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$ Множина можливих значень випадкової величини є дискретною скінченною, тому випадкова величина *X* є дискретною.

Приклад 2.2. Нехай дослід повторюється до появи випадкової події *A*, яка полягає в тому, що при підкиданні грального кубика випаде грань, на якій зазначено два очки. Випадкова величина *X* – кількість підкидань грального кубика до появи події *A,* вона може приймати свої можливі значення $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \ldots$. Множина можливих значень випадкової величини *X* є дискретною нескінченною, але зчисленною, а виходить, випадкова величина *X* є дискретною.

Розглянемо випадкову величину *X*, яка може приймати можливі значення $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. За визначенням випадкової величини *X*

випливає, що яке саме значення може прийняти X при проведені досліду, насамперед визначити неможливо. Тому події A_i, які полягають в тому, що $X = x_i, i = \overline{1,n}$, є випадковими.

У досліді може статися лише одна подія $A_i, i = \overline{1,n}$, та обов'язково одна із $A_i, i = \overline{1,n}$ буде мати місце. Це означає, що сукупність подій $\{A_i\}, i = \overline{1,n}$ складає повну групу подій, оскільки $A_i A_j = V, i \neq j, i, j = \overline{1,n}$ та $\sum_{i=1}^{n} A_i = U$.

Тоді маємо

$$P(U) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} = 1. \qquad (3.1)$$

Із (3.1) видно, що можна говорити щодо повних знань відносно випадкової величини X, якщо будемо мати знання щодо значень $P(A_i) = P(X = x_i), i = \overline{1,n}$.

3.2 Закон розподілу випадкової величини

Законом розподілу випадкової величини X як дискретної, так і неперервної, є всяке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини X та їм відповідних ймовірностей.

Форми подання закону розподілу випадкової величини X існують різні. Якщо випадкова величина X є дискретною, то її закон розподілу може подаватися в таких формах:

ряд розподілу,
багатогранник розподілу,
функція розподілу,
твірна функція розподілу,
характеристична функція розподілу.

При практичному опису закону розподілу дискретної випадкової величини в предметних галузях знань частіше використовують такі форми подання, як ряд розподілу, функція розподілу, твірна функція розподілу; подання закону розподілу у вигляді характеристичної функції розподілу використовується не завжди.

Якщо випадкова величина X є неперервною, то її закон розподілу може подаватися в таких формах:

функція щільностей імовірностей розподілу випадкової величини (функція щільностей імовірностей, функція щільностей, щільність ймовірностей),

функція розподілу,
твірна функція розподілу,
характеристична функція розподілу.

При практичному використанні опису закону розподілу неперервної випадкової величини частіше використовуються такі форми, як щільність ймовірностей та функція розподілу, а такі форми, опису закону розподілу неперервної випадкової величини, як твірна функція та характеристична функція, використовуються не завжди.

Розглянемо визначення та властивості форм опису законів розподілу, які завжди використовуються при запису законів розподілу як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Ряд розподілу дискретної випадкової величини X – це таблиця, в першому рядку якої визначаються можливі значення випадкової величини, а в другому – відповідні їм імовірності подій, які полягають в тому, що випадкова величина X прийме значення x_i, $i = \overline{1,n}$.

Ряд розподілу випадкової дискретної величини X наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Ряд розподілу дискретної випадкової величини X

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P_i = P\left(X = x_i\right)$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Багатогранник розподілу випадкової величини є графічним відображенням ряду розподілу (рис. 3.1).

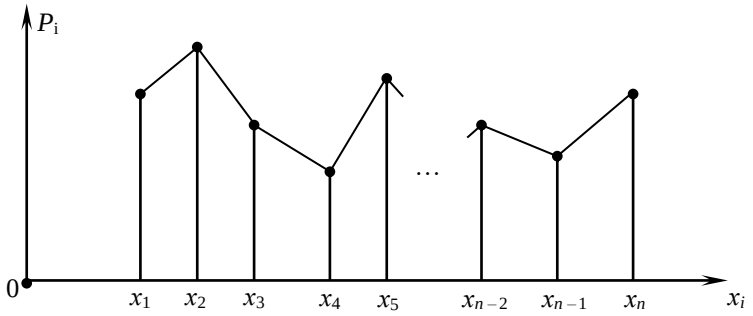


Рис. 3.1. Багатогранник розподілу дискретної випадкової величини

Як відзначалось вище, події $A_i = \left(X = x_i\right)$, $i = \overline{1,n}$ складають повну групу подій, тоді

$$P\left[\sum_{i=1}^{n}\left(A_i=\left\{X=x_i\right\}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}P_i=1.$$

Примітка. Геометричне відображення ряду розподілу як таблиці являє собою точки на площині. З'єднання точок $\left(x_i,P_i\right), i=\overline{1,n}$, що відображене в поданні багатогранника розподілу дискретної випадкової величини на рис. 2.1, є умовним.

3.3 Функція розподілу випадкової величини

Вище було відзначено, що функція розподілу є формою опису закону розподілу як дискретної випадкової величини, так і неперервної.

Функцією розподілу випадкової величини X є така функція дійсної змінної x, яка чисельно дорівнює ймовірності випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме значення, менше за можливе своє значення x.

Тобто

$$F\left(x\right)=P\left(X<x\right). \tag{3.2}$$

Як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини можливе значення є деяким дійсним числом, тому геометричне тлумачення (3.2) є ймовірністю події A, яка полягає в тому, що $X\in\left(-\infty,x\right)$, що й зображено на рис. 3.2.

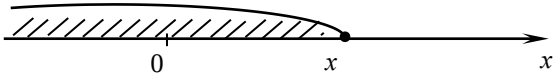


Рис. 3.2. Геометричне тлумачення функції розподілу випадкової величини X

Якщо X – дискретна випадкова величина, то на основі (3.2) та (2.12) маємо

$$F\left(x\right)=\sum_{x_i<x}P\left(X=x_i\right), \tag{3.3}$$

де нерівність $x_i<x$ означає, що сума ймовірностей, яка розглядається, розповсюджується на всі ті можливі значення x_i, які задовольняють умові $x_i<x$, де x – є вибране значення змінної.

Графіки функції розподілу дискретної та неперервної випадкових величин подані на рис. 3.3. та 3.4 відповідно.

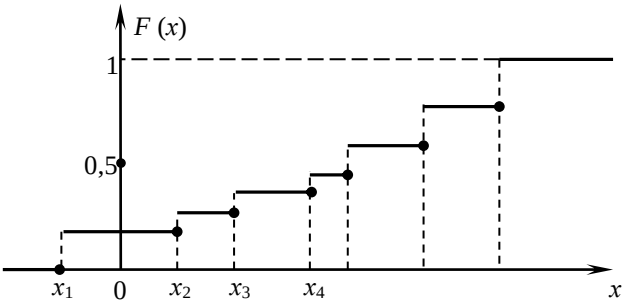


Рис. 3.3. Функція розподілу дискретної випадкової величини.

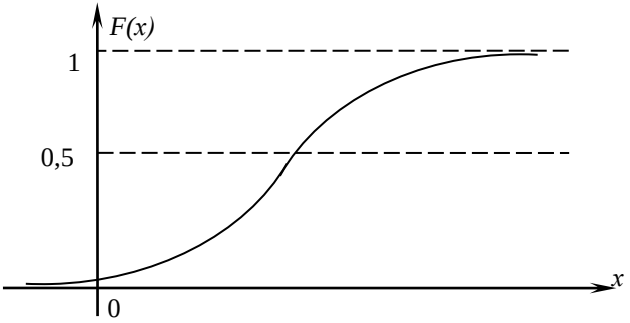


Рис. 3.4. Функція розподілу
неперервної випадкової величини

Відзначимо такі властивості функції розподілу випадкової величини.

1. *Якщо змінна x прямує до –∞, то функція розподілу прямує до 0, тобто* $F\left(x \to -\infty\right) \to 0$.

Дійсно, якщо $x = -\infty$, то, виходячи із (3.2), $F\left(-\infty\right) = 0$, оскільки подія, яка полягає в тому, що $X < -\infty$, є неможливою, а ймовірність неможливої події дорівнює 0, тобто

$$F\left(-\infty\right) = P\left(X < -\infty\right) = P\left(V\right) = 0.$$

2. *Якщо змінна x прямує до +∞, то функція розподілу наближається до одиниці, тобто*

$$F\left(x \to +\infty\right) \to 1.$$

Дійсно, аналогічно попередньому,

$$F\left(+\infty\right) = P\left(X < +\infty\right) = P\left(U\right) = 1.$$

3. *Функція розподілу є зростаючою функцією за змінною x, тобто якщо* $x_2 > x_1$, *то* $F(x_2) > F(x_1)$.

Дійсно, якщо $x_2 > x_1$, то подія $A = \{X < x_2\}$ є сумою двох несумісних подій $A_1 = \{X < x_1\}$ та $A_2 = \{x_1 < X < x_2\}$.

Тоді $$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P\{x_1 < X < x_2\}, \tag{3.4}$$

а згідно з першою аксіомою теорії ймовірностей (2.10) маємо, що $P\{x_1 < X < x_2\} > 0$, тому $F(x_2) > F(x_1)$.

4. *Ймовірність потрапляння випадкової величини в проміжок* (x_1, x_2) *дорівнює різниці функцій розподілу на кінцях цього проміжку, тобто*

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{3.5}$$

Ця властивість функції розподілу безпосередньо випливає з (3.4) та геометричного тлумачення означення функції розподілу (3.2).

5. *Функція розподілу дискретної випадкової величини в точці розриву є неперервною зліва, а величина стрибка функції розподілу в точці розриву дорівнює ймовірності того, що* $X = x_i$, *тобто*

$$\lim_{x \to x_i - 0} F(x) = \lim_{x \to x_i} F(x) \neq \lim_{x \to x_i + 0} F(x); \tag{3.6}$$

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = P(X = x_i). \tag{3.7}$$

Зауваження. Означення таких форм подання закону розподілу, як твірна функція випадкової величини та характеристична функція випадкової величини, будуть наведені в подальшому, оскільки їх визначення потребує викладання додаткових питань.

Розглянемо розв'язання задач, які передбачають визначення закону розподілу дискретної випадкової величини *X*.

Задача 3.1. Проводиться дослід з метою визначення кількості влучень у мішень, якщо стрілець виконує два постріли та ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. Визначити ряд розподілу та функцію розподілу випадкової величини кількості влучень у мішень.

Розв'язання. Розглянемо випадкову величину *X* – кількість влучень в мішень при двох пострілах стрільця. Можливі значення випадкової величини $X: x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$. Множина можливих значень випадкової величини *X* є дискретною та скінченною, а за визначенням дискретної випадкової величини це означає, що випадкова величина *X* – кількість влучень в мішень

при двох пострілах – є дискретною. А тому закон розподілу X слід визначати у вигляді ряду розподілу, багатогранника розподілу та функції розподілу.

Уведемо до розгляду такі випадкові події:

– B_1 – випадкова подія, яка полягає в тому, що стрілець влучить в мішень при першому пострілі;

– B_2 – випадкова подія, яка полягає в тому, що стрілець влучить в мішень при другому пострілі;

– A_0 – випадкова подія, яка полягає в тому, що після проведення досліду буде виявлено рівно нуль влучень у мішень;

– A_1 – випадкова подія, яка полягає в тому, що після проведення досліду буде виявлено рівно одне влучення в мішень;

– A_2 – випадкова подія, яка полягає в тому, що після проведення досліду буде виявлено рівно два влучення в мішень.

Випадкові події A_0, A_1, A_2 є складними, виразимо їх через елементарні випадкові події B_1, B_2.

Маємо: $A_0 = \bar{B}_1\bar{B}_2;\ A_1 = B_1\bar{B}_2 + \bar{B}_1B_2;\ A_2 = B_1B_2$,

де $\bar{B}_1 + B_1 = U;\ \bar{B}_2 + B_2 = U$, тобто $\bar{B}_1$ та $\bar{B}_2$ – протилежні події до B_1 та B_2.

За умовою задачі 3.1: $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}8$.

Тоді $$P(A_0) = P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04;$$

$$P(A_1) = P(B_1\bar{B}_2) + P(\bar{B}_1B_2) = P(B_1)P(\bar{B}_2) +$$

$$+P(\bar{B}_1)P(B_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}32;$$

$$P(A_2) = P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64,$$

де враховано те, що події $B_1\bar{B}_2$ та $\bar{B}_1B_2$ є несумісними, а випадкові події B_1 та B_2 є незалежними.

Ряд розподілу випадкової величини X і кількість влучень в мішень при двох пострілах стрільця наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Ряд розподілу випадкової величини X

x_i	0	1	2
$P_i = P(X = x_i)$	0,04	0,32	0,64

Виходячи з визначення функції розподілу (3.2), маємо

$$F(0) = P(X < 0) = P(V) = 0;$$

$$F(1) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0,04;$$

$$F(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,04 + 0,32 = 0,36;$$

$$F(3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,04 + 0,32 + 0,64 = 1,0.$$

Наведемо другий запис отриманих результатів розрахунків значень функції розподілу випадкової величини X, а саме:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ P(X = 0) = 0,04, & 0 < x \le 1; \\ P(X = 0) + P(X = 1) = 0,36, & 1 < x \le 2; \\ P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1, & x > 2. \end{cases}$$

Для побудови графіка функції розподілу результати розрахунків зручно наводити в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Результати розрахунку функції розподілу

x_i	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	0,04	0,32	0,64	
$F(x_i)$	0	0,04	0,36	1

Графічне подання функції розподілу задачі 3.1. наведено на рис. 3.5.

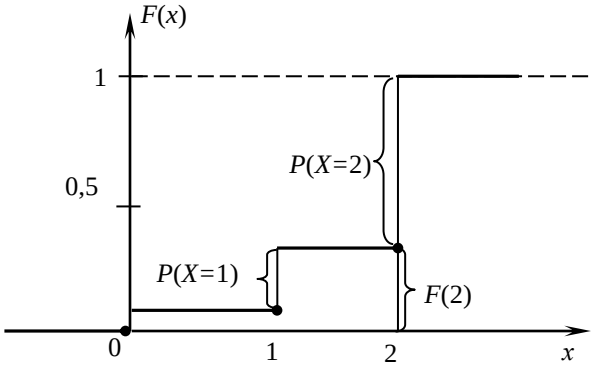


Рис. 3.5. Функція розподілу випадкової величини X

У загальному випадку функція розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1;\\ P(X=x_1), & x_1<x\le x_2;\\ P(X=x_1)+P(X=x_2), & x_2<x\le x_3;\\ \ldots\ldots\ldots\

Дана властивість є прямим наслідком виразу (3.9).

3. Властивість нормування полягає в тому, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{3.12}$$

Ця властивість випливає із (3.11) та з того, що $F(\infty) = 1$.

4. Визначення ймовірності потрапляння випадкової величини X в інтервал відповідає виразу вигляду

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx. \tag{3.13}$$

Дійсно, з виразів (3.5) та (3.11) маємо

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

З метою визначення змісту геометричного тлумачення щільності ймовірностей розглянемо на рис. 3.6 графічне подання закону розподілу випадкової величини у вигляді функції розподілу та відповідної їй щільності ймовірностей.

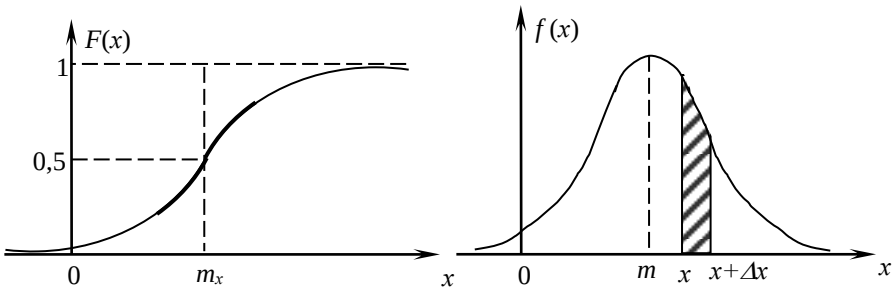


Рис. 3.6. Функція розподілу та щільність ймовірностей випадкової величини X

Примітка. У подальшому буде відзначено, що зображені на рис. 3.6 графічні подання функції розподілу та щільності ймовірностей відповідають випадковій величині X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу.

На рис. 3.6 відмічена елементарна зміна можливого значення випадкової величини X.

З виразу (3.13) маємо

$$P\left(x < X < x+\Delta x\right) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f\left(x\right)dx = f\left(\xi\right)\Delta x, \quad x < \xi < x+\Delta x\,.$$

Це означає, що геометричне тлумачення щільності ймовірностей є значенням імовірності потрапляння випадкової величини X в елементарний інтервал Δx, яке чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, площі прямокутника зі сторонами $f\left(\xi\right)$, де ξ належить Δx, що відзначено на рис. 3.6.

Розглянемо задачу, розв'язання якої пов'язане з використанням властивостей щільності ймовірностей випадкової величини X.

Задача 3.2. Визначити значення величини a, за якого функція $f\left(x\right) = \dfrac{a}{1+x^2}$ є щільністю ймовірностей випадкової величини X. При цьому значенні величини a визначити функцію розподілу випадкової величини X та ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $\left[-1,1\right]$.

Розв'язання. Виходячи з властивості нормування щільності ймовірностей випадкової величини X (3.12), маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = a\cdot \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = a\pi = 1; \quad a = \frac{1}{\pi}\,.$$

Функція $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$ є функцією щільності ймовірностей випадкової величини X, яка підпорядкована закону розподілу Коші.

Далі за виразами (3.11) та (3.13) маємо

$$F\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2};$$

$$P\left(-1 < X < 1\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0{,}5\,.$$

ТЕМА 4
Числові характеристики випадкових величин

Знання закону розподілу випадкової величини дозволяє розв'язати будь-яку задачу, згідно з умовою якої розглядається випадкова величина. У той же час можна сформулювати багато прикладних задач, для розв'язання яких достатньо знання лише числових характеристик випадкової величини.

Характеристики, які висвітлюють та описують основні властивості закону розподілу випадкової величини, називаються числовими характеристиками випадкової величини.

До числових характеристик випадкової величини, які достатньо часто застосовуються, слід віднести:

- математичне сподівання випадкової величини ($M[X]; m_x$);
- моду випадкової величини (M_{o_x});
- медіану випадкової величини (M_{e_x});
- квантиль випадкової величини (x_α).
- дисперсію випадкової величини ($D[X]; D_x; \sigma_x^2$);
- середнє квадратичне відхилення випадкової величини (σ_x);

Розглянемо кожну із зазначених числових характеристик з точки зору визначення, практичного тлумачення та співвідношень для їх розрахунків як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

4.1 Математичне сподівання

Математичним сподіванням випадкової величини називають таке середнє зважене її значення, відносно якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

Сутність математичного сподівання випадкової величини як центра, відносно якого групуються всі можливі значення випадкової величини, визначимо при подальшому розгляді. Нехай розглядається деякий дослід, мета якого полягає у визначенні значень випадкової величини *X*. Дослід повторюється *n* раз. Нехай m_i – кількість результатів спостережень з *n*, за яких випадкова величина *X* набула значення x_i, $i = \overline{1,k}$, $k < n$. Тоді середнє арифметичне спостережень випадкової величини визначиться виразом

$$\sum_{i=1}^{k} x_i m_i \Big/ n = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i P_i^* , \qquad (4.1)$$

де $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$; $P_i^* = \frac{m_i}{n}$ – частота появи спостереження x_i випадкової величини X.

Як було визначено в п. 2.3, частота випадкової події при наближені кількості випробувань до нескінченності прямує до ймовірності випадкової події (рис. 2.15). Це означає, що середнє арифметичне спостережень випадкової величини X (2.14) буде наближатись до $\sum_{i=1}^{k} x_i P_i$. Це число і є математичне сподівання випадкової величини X.

Якщо розглядати дискретну випадкову величину X, для якої закон розподілу поданий у вигляді ряду розподілу (табл. 2.1), то математичне сподівання дискретної випадкової величини X розраховується за виразом

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i . \tag{4.2}$$

Оскільки математичне сподівання є таке значення, відносно якого групуються можливі значення випадкової величини з урахуванням значень їх імовірностей $P(X = x_i), i = \overline{1,n}$, то можливе таке механічне тлумачення $M[X]$. Математичне сподівання випадкової величини можна уявити як центр ваги сукупності матеріальних точок, координата якого визначається як

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} P_i , \tag{4.3}$$

де P_i – маса i-ї матеріальної точки; x_i – координата i-ї матеріальної точки.

Таке тлумачення подане на рис. 4.1.

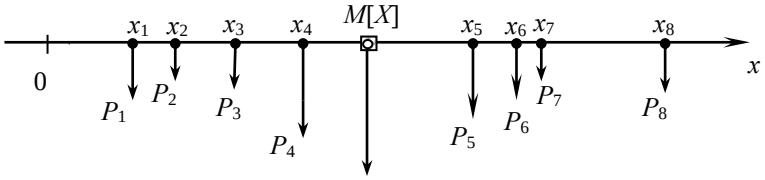


Рис. 4.1. Тлумачення змісту математичного сподівання випадкової величини

Оскільки математичне сподівання є точка на числовій осі, відносно якої групуються можливі значення випадкової величини, то *математичне сподівання випадкової величини X називають характеристикою положення випадкової величини.*

Розглянемо визначення математичного сподівання для неперервної випадкової величини X. Інтервал можливих значень $(-\infty;\infty)$ випадкової неперервної величини X розіб'ємо на n елементарних інтервалів (x_{i-1}, x_i), $i=\overline{1,n}$. Визначимо для кожного елементарного інтервалу $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, тоді, виходячи з геометричного тлумачення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини, маємо

$$P\left(\tilde{X}=\xi_i\right)=P\left(x_{i-1}<X<x_i\right)=f\left(\xi_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\xi_i f\left(\xi_i\right),$$

а математичне сподівання випадкової величини X, виходячи з виразу (4.2), має вигляд

$$M\left[\tilde{X}\right]=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f\left(\xi_i\right).$$

Якщо $n\to\infty$, то $\Delta x_i\to 0,\ \forall\ i=\overline{1,n-1}$, та $x_{i-1}\to x_i$, $\xi_i\to x_i$, то

$$M\left[\tilde{X}\right]=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta x\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}x_i f\left(x_i\right). \tag{4.4}$$

Права частина (2.17) є інтегральна сума, тоді

$$M\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx. \tag{4.5}$$

Виходить, якщо випадкова величина X є дискретною, то математичне сподівання X розраховується за (2.15), а якщо випадкова величина X є неперервною, то математичне сподівання X розраховується за наведеною формулою (4.5).

Основні властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання невипадкової величини є сама величина:

$$M\left[c\right]=c\quad\left(\textit{доведення}: P\left(c\right)=1\Rightarrow M\left[c\right]=c\cdot 1=c\right). \tag{4.6}$$

2. При збільшенні випадкової величини на невипадкову величину математичне сподівання збільшується на ту саму величину:

$$M\left[X+c\right]=M\left[X\right]+c;$$
$$\left(\textit{доведення}: M\left[X+c\right]=\sum\nolimits_i\left(x_i+c\right)p_i=\sum\nolimits_i x_i p_i+c\sum\nolimits_i p_i=m_x+c\right). \tag{4.7}$$

3. При множенні випадкової величини на невипадкову її математичне сподівання також множиться на цю величину:

$$M\left[cX\right]=c\cdot M\left[X\right];$$
$$\left(доведення: M\left[cX\right]=\int_{-\infty}^{\infty}cxf\left(x\right)=c\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)=c\cdot m_X\right). \tag{4.8}$$

4. Математичне сподівання від суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань окремих випадкових величин:

$$M\left[X_1+X_2\right]=M\left[X_1\right]+M\left[X_2\right]; \tag{4.9}$$

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right] \tag{4.10}$$

Властивості 3 та 4 (вирази (4.8) – (4.10)) доводять, що математичне сподівання є лінійною функцією від випадкових величин.

4.2 Мода, медіана та квантіль випадкової величини

Мода випадкової величини X (*Mo[X] або* Mo_X) *– це її найімовірніше значення.*

У табл. 3.2 наведений ряд розподілу випадкової величини, яка розглядається в задачі 3.1. Із ряду розподілу випливає, що $Mo_X=2$, тому що $P\left(X=2\right)=0,64$. Якщо випадкова величина є неперервною, то Mo_X буде визначатись із розв'язання рівняння $f'\left(x\right)=0$, тобто, якщо $x=Mo_X$, то $f'\left(x=Mo_X\right)=0$.

Медіана випадкової величини X (*Me[X] або* Me_X) *– це таке її значення, за якого виконується умова*

$$P\left(X<Me_X\right)=P\left(X>Me_X\right)=\frac{1}{2}. \tag{4.11}$$

Геометричне тлумачення медіани випадкової величини полягає в тому, що пряма $x=Me_X$ ділить площу під кривою щільності ймовірностей неперервної випадкової величини навпіл. Якщо графік щільності неперервної випадкової величини є симетричним то $Me_X=Mo_X=M\left[X\right]$. Як буде відзначено в подальшому випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу. Вищевідзначене означення медіани випадкової величини свідчить про те, що для дискретної випадкової величини X медіана як числова характеристика не завжди існує.

Квантиль випадкової величини X (x_α) *– це таке її значення, якому відповідає* $F^{-1}(\alpha)$, *тобто*

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha), \tag{4.12}$$

де $F^{-1}(\alpha)$ – обернена функція до функції розподілу випадкової величини *X*,

$$\alpha = P(X < x_\alpha) = F(x_\alpha).$$

Як це випливає з означення Mo_x та x_α, дані числові характеристики є також характеристиками положення випадкової величини *X*.

4.3 Дисперсія та середньоквадратичне відхилення випадкової величини

Характеристикою розсіювання можливих значень випадкової величини є дисперсія випадкової величини, чисельне значення якої характеризує тісноту групування можливих значень випадкової величини відносно центру розсіювання.

Дисперсія випадкової величини X є математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто

$$D[X] = M\left[\left|X - m_x\right|^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right], \tag{4.13}$$

де $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ – центрована випадкова величина.

Зміст дисперсії випадкової величини, згідно з її означенням (4.13), поданий на рис. 4.2.

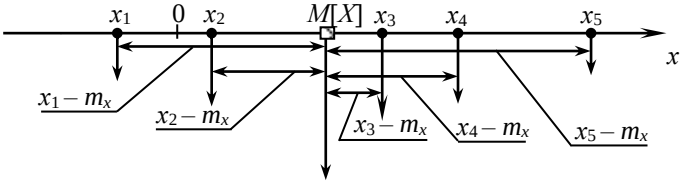


Рис. 4.2. Сутність дисперсії випадкової величини

На рис. 4.12 відзначені можливі значення x_i, $i = \overline{1,5}$ випадкової величини *X* та їх відхилення від математичного сподівання $(x_i - m_x)$, $i = \overline{1,5}$.

Оскільки в (4.13) X – випадкова величина, а $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ як невипадкова функція випадкового аргументу X теж є випадковою величиною, тоді й $Y = \overset{\circ}{X}^2 = \left(X - m_x\right)^2$, за тими ж міркуваннями, теж є випадковою величиною, то, виходячи із виразу (4.2) для визначення математичного сподівання дискретної випадкової величини та виразу (4.5) для визначення математичного сподівання неперервної випадкової величини, можуть бути записані вирази для визначення дисперсії відповідно для дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини у вигляді

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2 P_i ; \tag{4.14}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_i - m_x\right)^2 f\left(x\right) dx . \tag{4.15}$$

З (4.14) та (4.15) видно, що дисперсія випадкової величини має розмірність квадрата розмірності випадкової величини. Природно відхилення випадкової величини від математичного сподівання (рис. 4.2) вимірювати в тих же одиницях, що й можливі значення випадкових величин. Тому на практиці для чисельного значення відхилення можливих значень випадкової величини від її математичного сподівання частіше користуються *середньоквадратичним відхиленням (СКВ)*, яке визначається як

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} . \tag{4.16}$$

Основні властивості дисперсії та середньоквадратичного відхилення

1. Дисперсія невипадкової величини дорівнює 0:

$$D[c] = 0 \quad \left(\textit{доведення}: D[c] = \left(M[c]\right)^2 - M\left[c^2\right] = c^2 - c^2 = 0\right). \tag{4.17}$$

2. У разі збільшення випадкової величини на невипадкову величину дисперсія не змінюється:

$$D[X + c] = D[X];$$

$$\left.\begin{array}{c} \textit{доведення}: D[X + c] = \left(M\left[\left(X + c\right)^2\right] - \left(M\left[\left(X + c\right)\right]\right)^2\right) = \\ = \sum_i \left(x_i + c\right)^2 p_i - \left(m_x + c\right)^2 = \sum_i \left(x_i\right)^2 p_i + 2c\sum_i x_i p_i + c^2 - \\ - \left(m_x\right)^2 - 2c \cdot m_x - c^2 = \sum_i \left(x_i\right)^2 p_i - \left(m_x\right)^2 = D[X] \end{array}\right. . \tag{4.18}$$

3. При множенні випадкової величини на невипадкову дисперсія множиться на квадрат невипадкової величини, а середньоквадратичне відхилення – на її модуль.

$$D[cX] = c^2 D[X];$$
$$\left(\textit{доведення}: D[cX] = M\left[c^2 \overset{\circ}{X}^2\right] = c^2\left(M\left[\overset{\circ}{X}^2\right]\right) = c^2 D[X]\right). \tag{4.19}$$

4.4 Моменти випадкової величини

У загальному випадку під числовими характеристиками розуміють *початкові та центральні моменти всіх порядків випадкової величини X*, які, як це буде видно виходячи з їх означення, описують як вищезазначені числові характеристики випадкової величини, так і такі числові характеристики, як коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу та ін.

Початковими моментами k-го порядку відповідно дискретної та неперервної випадкової величини X називають:

$$\alpha_k = M\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i; \tag{4.20}$$

$$\alpha_k = M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx. \tag{4.21}$$

Центральними моментами k-го порядку відповідно дискретної та неперервної випадкової величини X називають:

$$\mu_k = M\left[\left|X - m_x\right|^k\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k P_i; \tag{4.22}$$

$$\mu_k = M\left[\left|X - m_x\right|^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)\,dx. \tag{4.23}$$

Розглянемо значення початкових та центральних моментів випадкової величини *X* різних порядків.

Нехай $k = 0$, тоді

$$\alpha_0 = M\left[X^0\right] = M[1] = 1;$$

$$\mu_0 = M\left[\left|X - m_x\right|^0\right] = M[1] = 1, \quad \text{тобто} \quad \alpha_0 = \mu_0 = 1.$$

Нехай $k=1$, тоді $\alpha_1 = M[X]$, а визначені вище співвідношення (4.20) та (4.21) для розрахунку початкового моменту першого порядку ($k=1$) збігаються з відомими раніше (4.2) та (4.5) для розрахунку математичного сподівання відповідно дискретної та неперервної випадкової величини.

При $k=1$ маємо

$$\mu_1 = M\left[|X-m_x|^1\right] = M\left[|X-m_x|\right] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0,$$

тобто центральний момент першого порядку $\mu_1 = 0$.

Нехай $k=2$, тоді з (4.22) та (4.23) видно, що $\mu_2 = D[X]$, бо якщо $k=2$, то (4.22) та (4.23) відповідають виразам (4.14) та (4.15).

Центральні моменти випадкової величини при $k \geq 2$ можуть бути виражені через початкові моменти порядків $k \geq 1$. Розглянемо таке:

$$\mu_2 = M\left[\overset{\circ}{X}^2\right] = M\left[|X-m_x|^2\right] = M\left[X^2 - 2m_xX + m_x^2\right] =$$

$$= M\left[X^2\right] - M\left[2m_xX\right] + M\left[m_x^2\right] = M\left[X^2\right] - 2m_xM[X] + m_x^2 =$$

$$= M\left[X^2\right] - m_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$$

$$\mu_3 = M\left[\overset{\circ}{X}^3\right] = M\left[|X-m_x|^3\right] = M\left[X^3 - 3X^2m_x + 3Xm_x^2 - m_x^3\right] =$$

$$= M\left[X^3\right] - M\left[3m_xX^2\right] + M\left[3m_x^2X\right] - M\left[m_x^3\right] = M\left[X^3\right] -$$

$$-3m_xM\left[X^2\right] + 3m_x^2M[X] - m_x^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3.$$

Аналогічно можна провести перетворення для μ_k, $k \geq 4$.

Таким чином, зв'язок між центральними моментами та початковими моментами випадкової величини відповідає таким співвідношенням:

$$\begin{aligned}
&\mu_0 = 1;\\
&\mu_1 = 0;\\
&\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;\\
&\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3;\\
&\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4.
\end{aligned} \qquad (4.24)$$

Аналогічні співвідношення можуть бути отримані для μ_k, $k \geq 5$.

Отриманий вираз для μ_2 дозволяє записати такі співвідношення для визначення дисперсії дискретної та неперервної випадкової величини:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - m_x^2 ; \tag{4.25}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - m_x^2 . \tag{4.26}$$

Примітка. Вирази вигляду (4.24) дозволяють установити, що якщо графік щільності ймовірностей неперервної випадкової величини є симетричним відносно прямої $x = M_{o_x}$, то всі нечіткі центральні моменти μ_{2k+1} (якщо вони існують) дорівнюють 0; тому будь-який нечіткий центральний момент, що не дорівнює нулю, розглядають як характеристику асиметрії закону розподілу неперервної випадкової величини.

Як чисельна міра асиметрії графіка щільності ймовірностей неперервної випадкової величини виступає *коефіцієнт асиметрії*, який визначається виразом

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^k} .$$

Якщо $\beta_1 > 0$, то права гілка графіка щільності ймовірностей неперервної випадкової величини буде більш пологою, а ліва – більш крутою. Якщо $\beta_1 < 0$, то навпаки, ліва гілка буде більш пологою, а права – більш крутою. Вигляд графіка щільності неперервної випадкової величини при $\beta_1 > 0$ та $\beta_1 < 0$ поданий на рис. 4.3 та 4.4.

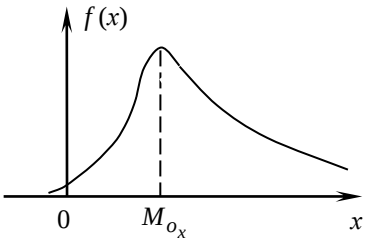


Рис. 4.3. Графік функції щільності ймовірностей випадкової величини при $\beta_1 > 0$

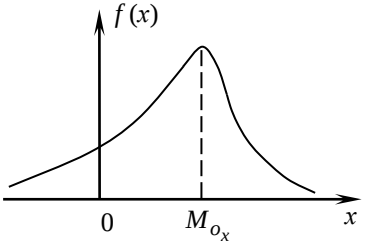


Рис. 4.4. Графік функції щільності ймовірностей випадкової величини при $\beta_1 < 0$

Якщо $\beta_1 = 0$, то графік функції щільності ймовірностей випадкової величини є симетричним відносно прямої $x = M_{o_x}$.

Центральний момент четвертого порядку визначає *коефіцієнт ексцесу (ексцес)* виразом

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3,$$

який характеризує гостроверхість графіка функції щільності ймовірностей неперервної випадкової величини. Графік функції щільностей нормального закону розподілу відповідає $\beta_2 = 0$. Графік функції щільності ймовірностей, який має більш пологу вершину, ніж графік функції ймовірностей нормального закону розподілу, характеризується $\beta_2 < 0$, в протилежному випадку – $\beta_2 > 0$ (рис. 4.5).

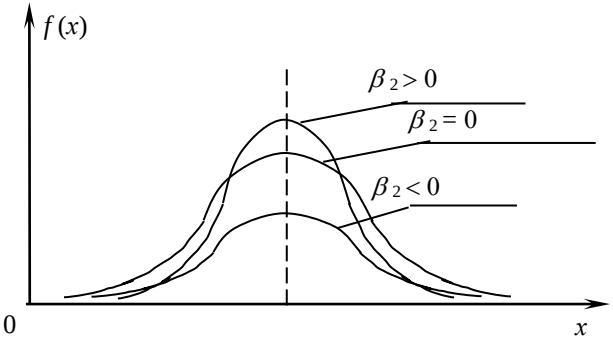


Рис. 4.5. Графіки функції ймовірностей
при різних значеннях коефіцієнта ексцесу

4.5 Твірні функції та їх властивості

Для дослідження законів розподілу цілочисельних випадкових величин використовують імовірнісну твірну функцію. Імовірнісною твірною функцією називають збіжний степеневий ряд виду:

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = p_0 + zp_1 + z^2 p_2 + z^3 p_3 + \ldots + z_m p_m + \ldots . \qquad (4.27)$$

Тут $p_k = P(Z = k)$, тобто є ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Імовірнісній твірний функції притаманні такі властивості.

1. $A(z)$ визначена в кожній точці інтервалу $[-1; 1]$.

2. При $z = 1$ маємо:

$$A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

оскільки це є умовою нормування для дискретної випадкової величини.

3. Використовуючи (4.27) отримаємо:

$$P_k = \frac{1}{k!} A^{(k)}(0),$$

де $A^{(k)}(0)$ — k-та похідна від $A(x)$, розрахована при $z = 0$.

Отже, знаючи аналітичний вираз для $A(z)$, можемо знайти ймовірність будь-якого можливого значення $z = k$.

4. $A'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(z^k p_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} p_k$, тому при $x = 1$ маємо

$$A'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} z_k p_k = M\left[Z\right],$$

тобто

$$M\left[Z\right] = A'(1). \tag{4.28}$$

5. $A''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (k z^{k-1} p_k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} p_k$.

При $z = 1$

$$A''(1) = (\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k.$$

Це можна записати так:

$$A''(1) = M\left[X^2\right] - A'(1) \to M\left[X^2\right] = A''(1) + A'(1).$$

Тоді

$$D\left[Z\right] = M\left[Z^2\right] - M^2\left[Z\right] = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2.$$

Отже, формула для обчислення дисперсії буде така:

$$D\left[Z\right] = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2. \tag{4.29}$$

ТЕМА 5
Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Опис закону розподілу як будь-якого співвідношення, яке містить можливі значення випадкової величини та їм відповідні ймовірності, включає в себе параметри, які за своїм змістом або є числовими характеристиками випадкової величини, або однозначно їх визначають.

5.1 Біноміальний закон розподілу

Розглянемо дослід, в якому може статися випадкова подія *A*, ймовірність появи якої є $P(A) = P(0 < P < 1)$. Імовірність того, що подія *A* не відбудеться, є $P(\bar{A}) = 1 - P = q$. Дослід повторюється *n* раз. Наслідки при повторені такого досліду є незалежними, що означає, що ймовірність появи події *A* в *i*-му за номером досліді, де $i = \overline{1,n}$, не залежить від того, сталася чи ні подія *A* при *k*-му за номером досліді, де $k \neq i; i,k = \overline{1,n}$.

Повторення дослідів з рівноймовірними та незалежними дослідами *називають схемою незалежних випробувань або схемою Бернуллі.* Визначимо ймовірність події B_m, яка полягає в тому, *що в n дослідах випадкова подія A відбудеться рівно m раз*. Це означає, що будемо розглядати випадкову величину *X* – кількість дослідів із *n,* в яких може статися подія *A*. Можливі значення випадкової величини *X* позначимо *m*, та $m = 0, 1, 2, ..., n$. Виходячи з визначення випадкової величини, видно, що випадкова величина *X* є дискретною, тому що множина її можливих значків є кінцевою дискретною множиною. Для опису закону розподілу *X* необхідно визначити $P(B_m) = P(X = m) = P_{n,m}$.

Уведену до розгляду випадкову подію B_m можна подати через елементарні події A_i, $i = \overline{1,n}$, які полягають в тому, що подія *A* відбудеться в *i*-му досліді. Тоді:

$$B_m = A_1 \cdot A_2 \cdots A_m \cdot \bar{A}_{m+1} \cdot \bar{A}_{m+2} \cdots \bar{A}_n +$$

$$+ A_1 \cdot A_2 \cdots A_{m-1} \cdot \bar{A}_m \cdot A_{m+1} \cdot \bar{A}_{m+2} \cdots \bar{A}_n + \ldots +$$

$$+ \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{n-m} \cdot A_{n-m+1} \cdot A_{n-m+2} \cdots A_n .$$

Доданки в правій частині подання події B_m є несумісними випадковими подіями, оскільки якщо, наприклад, розглядати перший та другий доданок, то

не можуть одночасно статися події A_m та $\bar{A}_m$. Події, які визначають зміст кожного доданка, є незалежними, як це було відзначено при описі схеми незалежних випробувань. Кожний доданок містить в своєму запису добуток n випадкових подій, m з яких означає, що подія A відбудеться в m дослідах із n, та $(n - m)$ означає, що подія A не відбудеться (відбудеться подія $\bar{A}$) в $(n - m)$ дослідах з n. Якщо записи доданків розглядати як подання комбінацій з n елементів, то видно, що комбінація від комбінації відрізняється лише порядком, місцем запису i-го, $i = \overline{1,n}$ елемента. Такі комбінації є сполученням з n елементів по m, а кількість таких комбінацій визначається як

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Враховуючи все відзначене і те, що $P(A_i) = p, i = \overline{1,n}$, а $P(\bar{A}_i) = q, i = \overline{1,n}$, будемо мати:

$$P(B_m) = P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_m \cdot \bar{A}_{m+1} \cdot \bar{A}_{m+2} \cdots \bar{A}_n) +$$

$$+P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_{m-1} \cdot \bar{A}_m \cdot A_{m+1} \cdot \bar{A}_{m+2} \cdots \bar{A}_n) +$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$+P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{n-m} \cdot A_{n-m+1} \cdot A_{n-m+2} \cdots A_n) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Отже, ймовірність події, яка полягає в тому, що в m дослідах з n випадкова подія A відбудеться, визначається виразом

$$P_{n,m} = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (5.1)$$

Співвідношення (5.1) називають *формулою Бернуллі*.

Розглянемо біном Ньютона вигляду

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m},$$

де вираз (5.1) збігається з визначенням $(m + 1)$-го члена бінома Ньютона. Тому закон розподілу випадкової величини X – кількості появи випадкової події A в n дослідах з рівноймовірними та незалежними наслідками називають *біноміальним законом розподілу,* а (5.1) є аналітичним поданням цього закону, оскільки ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме своє можливе значення $m = \overline{0,n}$, визначається за формулою (5.1).

Функцію

$$P(z)=(pz+q)^n=\sum_{m=0}^{n} P_{n,m}\, z^m \qquad (5.2)$$

є *твірною функцією біноміального закону розподілу*, тому що вона створює ймовірності $P_{n,m}$ як коефіцієнт при змінній z у відповідному степені m.

Задача 5.1. Визначити закон розподілу випадкової величини X – кількість влучень в мішень, якщо стрілець виконує два постріли та ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,8.

Розв'язання. Із змісту задачі випливає, що дослід, мета якого полягає у виявлені події A – влучення в мішень, повторюється два рази. У кожному досліді $P(A_1)=P(A_2)=P(A)=0,8$. Наслідки є незалежними, оскільки ймовірність того, що подія A настала в другому досліді не залежить від того, настане чи ні подія A при першому досліді. Отже, маємо повторення випробувань з рівноймовірними та незалежними наслідками. Це і відповідає змісту схеми Бернуллі, а тоді для визначення $P_{n,m}$, де $n=2$, а $m=0,1,2$ можна користуватись (2.32). Будемо мати

$$P_{2,0}=C_2^0\cdot 0,8^0\cdot 0,2^2=0,04;$$

$$P_{2,1}=C_2^1\cdot 0,8^1\cdot 0,2^1=2\cdot 0,8\cdot 0,2=0,32;$$

$$P_{2,2}=C_2^2\cdot 0,8^2\cdot 0,2^0=2\cdot 0,64=0,64.$$

Згідно з (5.2) записуємо твірну функцію, а саме

$$\phi(z)=(0,8z+0,2)^2=0,64z^2+2\cdot 0,8z\cdot 0,2+0,2^2=$$

$$=0,04z^0+0,32z^1+0,64z^2,$$

де коефіцієнти при z^0, z^1 та z^2 відповідно є $P_{2,0}; P_{2,1}; P_{2,2}$.

Визначимо, що отримані тут результати можуть бути подані у вигляді ряду розподілу та збігаються з результатами, які наведені в табл. 3.2.

Узагальнений біноміальний закон розподілу

У загальному випадку ймовірність сприятливого наслідку A в кожному досліді є різною, тобто $P(A_i)=P_i,\ i=\overline{1,n}$. Тоді будемо мати схему повторення випробувань з різноймовірними та незалежними наслідками. У цьому випадку ймовірність $P_{n,m}$ події, яка полягає в тому, що рівно в m дослідах із n сприятлива подія A відбудеться, визначається із твірної функції,

$$\phi(z)=\prod_{i=1}^{n}\left(P_i z+q_i\right)=\sum_{m=0}^{n}P_{n,m}\,z^m\,. \tag{5.3}$$

Розглянемо визначення найбільш уживаних числових характеристик випадкових величин, підпорядкованих біноміальному та узагальненому біноміальному законам розподілу.

Для цього введемо до розгляду випадкову величину X_i – кількість появ сприятливої події A в i-му досліді. Раніше була розглянута випадкова величина X – кількість появ сприятливої події A в n дослідах. Тоді маємо $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, а ряд розподілу випадкової величини X_i подано в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	$x_i^{(1)}=0$	$x_i^{(2)}=1$
$P\left(X_i=x_i^{(k)}\right)=P_i^{(k)}$	$q_i^{(1)}=1-P_i^{(2)}=1-P_i=q_i$	$P_i^{(2)}=P_i$

Тоді з (4.2) маємо

$$M\left[X_i\right]=\sum_{k=1}^{2}x_i^{(k)}P_i^{(k)}=0\cdot q_i^{(1)}+1\cdot P_i^{(2)}=P_i\,, \tag{5.4}$$

а з (4.25) маємо

$$D\left[X_i\right]=\sum_{k=1}^{2}\left[x_i^{(k)}\right]^2P_i^{(k)}-m_{x_i}^2=0^2\cdot q_i+1^2\cdot P_i-P_i^2=P_iq_i\,. \tag{5.5}$$

Спираючись на теорему щодо дисперсії суми незалежних випадкових величин вважаємо справедливими співвідношення:

$$M\left[X\right]=M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]; \tag{5.6}$$

$$D\left[X\right]=D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}D\left[X_i\right]. \tag{5.7}$$

Виходячи із (5.6) та (5.7) та враховуючи (5.4) та (5.5), визначаємо, що якщо випадкова величина X підпорядкована узагальненому біноміальному закону розподілу, будуть мати місце такі формули:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} P_i ; \tag{5.8}$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \sum_{i=1}^{n} P_i q_i . \tag{5.9}$$

Оскільки для випадкової величини X, яка підпорядкована біноміальному закону розподілу, $P(A_i) = P(A) = P$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, то

$$M[X] = nP ; \tag{5.10}$$

$$D[X] = nPq . \tag{5.11}$$

Розглянемо співвідношення

$$\frac{P_{n,m+1}}{P_{n,m}} = \frac{C_n^{m+1} P^{m+1} q^{n-(m+1)}}{C_n^m P^m q^{n-m}} = \frac{\dfrac{n!}{(m+1)!\left[n-(m+1)\right]!} P}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!} q} = \frac{(n-m)\,P}{(m+1)\,q}$$

Якщо $\dfrac{(n-m)\,P}{(m+1)\,q} \geq 1$, то $nP - mP \geq m(1-P) + 1 - P$;

$$nP - mP \geq m - mP + 1 - P \,;\; nP \geq m + q \,;\; nP - q \geq m .$$

Отже, якщо $m = nP - q$, то $P_{n,m+1} = P_{n,m}$, якщо $m > nP - q$, то $P_{n,m+1} < P_{n,m}$.

За визначенням мода випадкової величини M_{o_x} є її найімовірнішим значенням. Із зазначеного вище видно, що якщо $(nP - q)$ – ціле число, то $M_{o_x} = m_0$ або $M_{o_x} = m_0 + 1$. Якщо $(nP - q)$ не є цілим числом, то M_{o_x} буде дорівнювати найближчому цілому, більшому $nP - q$. Це означає, що якщо випадкова величина підпорядкована біноміальному закону розподілу, то $nP - q < M_{o_x} < nP + P$.

Для дискретної випадкової величини медіану слід визначати з виразу

$$P\left(X \leq M_{e_x}\right) = P\left(X > M_{e_x}\right) = \frac{1}{2},$$

або

$$P\left(X < M_{e_x}\right) = P\left(X \geq M_{e_x}\right) = \frac{1}{2}.$$

Це означає, що медіана для дискретної випадкової величини існує не завжди.

Задача 5.2. Виріб складається з 8 однакових елементів та виконує своє функціональне призначення за наявності не менше 7 працездатних елементів. За час *t* кожний елемент незалежно один від одного може відмовити з ймовірністю 0,2. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що виріб відмовить за час *t*.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що дослід, який проводиться з метою виявлення працездатності елемента за час *t*, повторюється 8 разів. Наслідки, які складають зміст події A_i, $i=\overline{1,8}$, є незалежними, а A_i – подія, яка полягає в тому, що *i*-й елемент відмовив за час *t*. За умовою задачі $P(A_i)=0,2$, тоді $P(\bar{A}_i)=0,8$.

Введемо до розгляду величину *X* – кількість елементів, які безвідмовно працюють за час *t*. Оскільки розглядається повторення досліду з рівноймовірними та незалежними наслідками, то випадкова величина *X* підпорядкована біноміальному закону розподілу, тому для визначення ймовірності подія B_m, яка полягає в тому, що за час *t* *m* елементів із *n* виявлено працездатними, можна користуватися формулою Бернуллі (2.32). Якщо випадкова подія *A* полягає в тому, що виріб за час *t* відмовив, то

$$P(A)=1-\left[P(B_{m=7})+P(B_{m=8})\right]=1-\left[\ P_{8,7}+P_{8,8}\ \right]=$$

$$=1-\left[C_8^7\cdot 0,8^7\cdot 0,2^1+C_8^8\cdot 0,8^8\cdot 0,2^0\right]=1-\left(8\cdot 0,8^7\cdot 0,2+0,8^8\right)=0,496.$$

Задача 5.3. Три літаки незалежно один від одного кидають з різних висот по одній бомбі на ціль. Імовірність влучення у ціль для першого літака дорівнює 0,3; для другого – 0,6; для третього – 0,7. Визначити найбільш імовірну кількість влучень у ціль, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини кількості влучень в ціль.

Розв'язання. Введемо до розгляду випадкову величину *X* – кількість бомб, які влучили у ціль. Можливі значення випадкової величини: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$. Множина можливих значень є дискретною та скінченною, тому випадкова величина *X* є дискретною випадковою величиною. Із змісту умови випливає, що дослід, який полягає у визначенні влучення в ціль, повторюється три рази. Сприятливими наслідками є випадкові події B_i, $i=\overline{1,3}$, які полягають в тому, що сталося влучення у ціль при киданні бомби *i*-м літаком. Ці наслідки є незалежними та різноймовірними, тому що $P(B_1)=0,3$; $P(B_2)=0,6$; $P(B_3)=0,7$. Тоді можна стверджувати, що випадкова величина *X* підпорядкована узагальненому біноміальному закону розподілу. Твірна функція (5.2) дозволяє визначити ймовірність подій, які полягають в тому, що із *n* дослідів рівно в *m* із них відбудеться сприятливий наслідок.

Тоді $$\phi(z)=\prod_{i=1}^{3}\left(P_i z+q_i\right)=\left(0,3z+0,7\right)\left(0,6z+0,4\right)\left(0,7z+0,3\right)=$$

$$=0,126z^3+0,432z^2+0,358z+0,084,$$

тобто $P_{3,3}=0,126\,;\ P_{3,2}=0,432\,;\ P_{3,1}=0,358\,;\ P_{3,0}=0,084\,.$

Отже, мода випадкової величини X – кількості влучень у ціль $Mo_x=2$.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X визначаються виразами (5.8) та (5.9), тобто

$$M\left[X\right]=\sum_{i=1}^{3}P_i=0,3+0,6+0,7=1,6\,;$$

$$D\left[X\right]=\sum_{i=1}^{3}P_i q_i=0,3\cdot 0,7+0,6\cdot 0,4+0,7\cdot 0,3=0,66\,.$$

Задача 5.4. У партії однотипних деталей стандартні становлять 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Визначити математичне сподівання, дисперсію та СКВ для дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

Розв'язання. Цілочисельна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу ймовірностей та може набувати такі значення:

$$X = k = 0, 1, 2, ..., 400.$$

Імовірності можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі: $P_k=P(X=k)=C_{400}^{k}p^k q^{400-k}$, де p = 0,95 — імовірність появи стандартної деталі, q = 1 – p =1 – 0,95 = 0,05 — імовірність появи нестандартної деталі.

Згідно з формулами розрахунку числових характеристик для біноміального розподілу, маємо:

$$M\left[X\right]=np=400\cdot 0,95=380;$$

$$D\left[X\right]=npq=400\cdot 0,95\cdot 0,05=19;$$

$$\sigma\left[X\right]=\sqrt{npq}=\sqrt{19}\approx 4,36.$$

Задача 5.5. У кожному із 100 контейнерів міститься по 8 виробів першого сорту, а решта 2 — браковані. Із кожного контейнера навмання беруть по одному виробу. Визначити математичне сподівання, дисперсію та СКВ для дискретної випадкової величини X — поява числа виробів першого сорту серед 100 навмання взятих.

Розв'язання. Цілочисельна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу. Із умови задачі маємо:

$n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k = 0, 1, 2, 3, ..., 100$.

За формулами (5), (6), (7) дістаємо:

$M(X) = np = 100 \cdot 0{,}8 = 80;$

$D(X) = npq = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16;$

$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{16} \approx 4.$

Задача 5.6. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання. Імовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює $p = 0{,}8$. Маємо біноміальний закон розподілу, тобто:

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0,1,2,...,n;$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X \geq 3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^5 =$$
$$= 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208.$$

5.2. Закон розподілу Пуассона

Закон розподілу Пуассона є граничним законом розподілу для біноміального закону розподілу та може застосовуватись у випадку, коли кількість дослідів n достатньо велика, а ймовірність сприятливої випадкової події мала, порядку $\frac{1}{n}$, тобто $P(A) = P \cong \frac{1}{n}$. Тому закон розподілу Пуассона називають законом розподілу "рідких подій".

Відомо, що якщо випадкова величина X підпорядкована біноміальному розподілу, то $M[X] = nP$ та ймовірність події B_m, яка полягає в тому, що з n дослідів рівно в m з них відбудеться сприятлива подія A, визначається формулою Бернуллі, а саме

$$P(B_m) = P_{n,m} = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}.$$

Введемо позначення:

$nP = a$; тоді $P = \frac{a}{n}$; $q = 1 - P = 1 - \frac{a}{n}$, а $P_{n,m} = C_n^m \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m}$.

Маємо:

$$\tilde{P}_{n,m} = \lim_{n\to\infty} P_{n,m} = \lim_{n\to\infty}\left\{C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\left[n-(m-1)\right]}{m!}\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}\right\} =$$

$$= \frac{a^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(m-1)}{n}\right]\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}\right\} =$$

$$= \frac{a^m}{m!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{n-(m-1)}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} = \frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

оскільки відомо, що $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-n/a}\right)^{(-n/a)(-a)}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-n/a}\right)^{-n/a}\right\}^{(-a)}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} = e^{-a}.$$

Тобто якщо випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Пуассона, то

$$\tilde{P}_{n,m} = P\left(X = x = m; a\right) = \frac{a^x}{x!}e^{-a}, \qquad (5.12)$$

де $x = m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ – можливі значення випадкової величини X та a – параметр закону її розподілу.

Розглянемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

$$M[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{a^x}{x!}e^{-a} = e^{-a}\left(0\frac{a^0}{0!}+1\frac{a^1}{1!}+2\frac{a^2}{2!}+3\frac{a^3}{3!}+4\frac{a^4}{4!}+\cdots\right) =$$

$$= ae^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots\right) = ae^{-a}\cdot e^a = a, \text{ оскільки } e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$D[X]=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{a^x}{x!}e^{-a}-\{M[X]\}^2=$$

$$=e^{-a}\left(0^2\frac{a^0}{0!}+1^2\frac{a^1}{1!}+2^2\frac{a^2}{2!}+3^2\frac{a^3}{3!}+4^2\frac{a^4}{4!}+5^2\frac{a^5}{5!}+\cdots\right)-a^2=$$

$$=ae^{-a}\left[1+\frac{2a}{1!}+\frac{3a^2}{2!}+\frac{4a^3}{3!}+\frac{5a^4}{4!}+\cdots\right]-a^2=$$

$$=ae^{-a}\left[1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{a}{1!}\right)+\left(\frac{2a^2}{2!}+\frac{a^2}{2!}\right)+\left(\frac{3a^3}{3!}+\frac{a^3}{3!}\right)+\left(\frac{4a^4}{4!}+\frac{a^4}{4!}\right)+\cdots\right]-a^2=$$

$$=ae^{-a}\left[\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\frac{a^4}{4!}+\cdots\right)+\left(\frac{a}{1!}+\frac{2a^2}{2!}+\frac{3a^3}{3!}+\frac{4a^4}{4!}+\cdots\right)\right]-a^2=$$

$$=ae^{-a}\left[e^a+a\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots\right)\right]-a^2=ae^{-a}\left(e^a+ae^a\right)-a^2=a\,.$$

Виходить, якщо випадкова величина X описується (5.12), тобто підпорядкована закону розподілу Пуассона, то

$$M[X]=D[X]=a\,. \qquad (5.13)$$

Задача 5.7. Виріб складається з 1000 елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0,001 і не залежить від стану інших. Визначити ймовірність відмови за час t більше одного елемента.

Розв'язання. В умові задачі визначено, що дослід, який полягає у виявлені наслідку появи випадкової події B_i, яка означає відмову i-го елемента, повторюється n = 1 000 разів. Імовірність появи події B_i має порядок $1/n$, а саме $P(B_i)=0,001$. Наслідки при повторенні досліду є незалежними, оскільки $P(B_i)$ не залежить від стану інших елементів. Тут має місце схема Бернуллі; тому для визначення ймовірності відмови за час t більше одного елемента можна скористатись формулою Бернуллі.

Тоді якщо A – подія, яка полягає в тому, що за час t відмовить більше одного елемента, то

$$P(A)=\sum_{m=2}^{1000}P_{n,m}=1-\left(P_{1000,0}+P_{1000,1}\right)=$$

$$= 1 - \left(C_{1000}^{0} \cdot 0,004^{0} \cdot 0,999^{1000} + C_{1000}^{1} \cdot 0,001^{1} \cdot 0,999^{999} \right).$$

Видно, що при виконанні цього обчислення виникають розрахункові труднощі. Але оскільки n є достатньо велике, а $P(B_i)$ має порядок $1/n$, то можна використати граничне наближення біноміального закону розподілу – закон розподілу Пуассона. Тоді

$$P(A) = \sum_{m=2}^{1000} P_{n,m} = 1 - \left(\frac{(1\ \ 000 \cdot 0,001)^{0}}{0!} e^{-1} + \frac{(1\ \ 000 \cdot 0,001)^{1}}{1!} e^{-1} \right) =$$

$$= 1 - \left(e^{-1} + e^{-1} \right) = 1 - 2/e = 0,264 .$$

Відзначимо, що ця відповідь при $n = 1\ \ 000$ буде відповідати розрахунку, який слід вважати точним, за формулою Бернуллі.

Задача 5.8. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що мікроелемент вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,004. Визначити математичне сподівання, дисперсію та СКВ випадкової величини X – числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисельною, що має пуассонівський закон розподілу — імовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона, котра є асимптотичною щодо формули Бернуллі для великих значень n і малих значень p, так званих малоймовірних випадкових подій.

За умовою задачі маємо:

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0,004 = 4;$$

$$D(X) = M(X) = np = 4;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{4} = 2.$$

Задача 5.9. У деякому населеному пункті маємо 0,1% дальтоніків. Навмання вибирають 5000 мешканців цього населеного пункту. Визначити математичне сподівання, дисперсію та СКВ випадкової величини X — числа дальтоніків, яких буде виявлено серед 5000 навмання вибраних мешканців.

Розв'язання. Цілочисельна випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу. Із умови задачі: $n = 5000$, $p = 0,0001$. Тоді:

$$M(X) = np = 5000 \cdot 0,0001 = 0,5;$$

$$D(X) = M(X) = np = 0,5; \qquad \sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{0,5} \approx 0,71 .$$

Задача 5.10. Визначити ймовірність потрапляння за контрольні межі не менш ніж 2 деталей із проби з 5 деталей, якщо автомат, із продукції якого беруться проби, обробляє 2 деталі за 1 хв. і за зміну у його продукції виявляється 38 деталей, які виходять за контрольні межі. Застосувати для розв'язування задачі закон розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу розподілу Пуассона: $P(X=m)=$ $=\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}$, $m=0,1,\ldots$. Знайдемо λ – середню кількість бракованих деталей, які виготовляються за 1 хв. Якщо тривалість зміни 480 хв, то $\lambda=\dfrac{38}{480}\approx 0,08.$ Пробу з 5 деталей виготовляють за $t=\dfrac{5}{2}=2,5$ хв, $\lambda t=0,08\cdot 2,5=0,2.$ Знайдемо шукану ймовірність: $P(X\geq 2)=\sum\limits_{m=2}^{5}\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}=0,0175.$ Значення ймовірності знайдемо в таблицях при $\lambda t=0,8$ і $m=2.$

Задача 5.11. Постачальник поставляє замовникові партії деталей обсягом 10 000 шт. кожна. Замовник вважає бажаним бракувати партії, в яких 2 % браку з імовірністю не менш як 0,98. Постачальник хотів би, щоб при цьому партії з 0,5 % браку приймались би з ймовірністю не менш ніж 0,93. Визначити обсяг вибірки n і кількість бракованих деталей, за якої партія бракується. Скористатися для розв'язування задачі розподілом Пуассона.

Розв'язання. Нехай для контролю відібрано n деталей. Якщо в партії 2 % бракованих деталей, то параметр $a_1=0,02n,$ якщо у партії 0,5 % бракованих деталей, то $a_2=0,005n.$ При конкретному значенні n маємо значення a_1. Відшукуємо за таблицями значення C, при якому $\sum\limits_{m=c}^{\infty}\left(a_1^m/m!\right)\cdot e^{-a_1}\geq 0,98.$ Перевіряємо, чи буде при знайденому значенні C партія, в якій 0,5 % бракованих деталей, прийматися з імовірністю не менш як 0,93. Для цього шукаємо $P(X\geq C)=\sum\limits_{m=c}^{\infty}\left(a_2{}^m/m!\right)$ – імовірність відхилення партії. Віднявши від одиниці цю ймовірність, дістанемо ймовірність прийняття партії, де 0,5 % бракованих деталей. Якщо вона не менш як 0,93, то значення n та C забезпечують виконання умов задачі. Бажано, щоб n було якомога меншим. Тому послідовно розглядаємо значення n і вибираємо серед них найменше.

Нехай n = 600, тоді $a_1=12,$ $a_2=3.$ Згідно з таблицями при $a_1=12$, $C=6,$ $P(X\geq 6)=0,97966\approx 0,98.$ При $a_2=3$ $P(X\geq 6)=$ $=0,083918,$ тобто

ймовірність прийняття партії, в якій 0,5 % браку, становить 0,916082, що менше за 0,93. Значення n треба збільшити.

Нехай $n = 800$, тоді $a_1 = 16,\ a_2 = 4$. Значення $C = 9$. В тому разі партія з 0,5 % браку приймається з імовірністю 0,978637. Отже, значення обсягу вибірки можна зменшити.

Нехай $n = 700$, тоді $a_1 = 14,\ a_2 = 3,5$. Значення $C = 7$. В такому разі партія з 0,5 % браку приймається з імовірністю 0,93471.

Отже, обсяг вибірки $n = 700$. В такому разі партія відхиляється, якщо серед вибраних деталей буде не менш як 7 бракованих деталей.

5.3 Геометричний закон розподілу

Розглянемо схему повторення випробувань, в якій при появі сприятливої події A випробування припиняються. Це означає, що якщо сприятлива випадкова подія A сталася при k-му випробуванні, то при $(k-1)$ випробуваннях подія A не відбувалась. Імовірність події A є $P(A) = P$, а $P(\bar{A}) = 1 - P = q$. Введемо до розгляду випадкову величину X – кількість дослідів, які необхідно поставити до першої появи випадкової події A. Можливі значення випадкової величини X – це числа натурального ряду, які складають дискретну нескінченну але зчисленну множину. Тому випадкова величина X є дискретною випадковою величиною, а закон її розподілу у вигляді ряду розподілу має вигляд, який наведений в табл. 2.5.

Таблиця 5.2

Ряд розподілу випадкової величини X, підпорядкованої геометричному закону розподілу

$X = x_k$	1	2	3	…	k	…
$P(X = x_k) = P$	P	qP	q^2P	…	$q^{k-1}P$	…

Вираз
$$P(X = x_k) = q^{k-1}P,\ k = 1, 2, \ldots \qquad (5.14)$$
слід вважати аналітичною формою подання геометричного закону розподілу випадкової величини X. Послідовність P_k складає геометричну нескінченну прогресію, тому закон розподілу називають геометричним законом розподілу випадкової величини X.

Визначимо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, підпорядкованої геометричному закону розподілу. Маємо

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k = 1P + 2qP + 3q^2P + 4q^3P + \cdots + kq^{k-1}P + \cdots =$$

$$= \left(qP + q^2P + q^3P + \cdots + q^kP + \cdots \right)'_q = P\left(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k + \cdots \right)'_q =$$

$$= P\left(\frac{q}{1-q} \right)'_q = P\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{P}{P^2} = \frac{1}{P};$$

$$D[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 P_k - m_x^2 = \left(1^2 \cdot P + 2^2 qP + 3^2 q^2 P + \cdots + k^2 q^{k-1} P + \cdots \right) -$$

$$-\left(\frac{1}{P} \right)^2 = P\left(q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots + kq^k + \cdots \right)'_q - \frac{1}{P^2} =$$

$$= P\left[q\left(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + kq^{k-1} + \cdots \right) \right]'_q - \frac{1}{P^2} =$$

$$= P\left[q\left(\frac{q}{1-q} \right)^1_q \right]'_q - \frac{1}{P^2} = P\left[q\frac{1-q+q}{(1-q)^2} \right]'_q - \frac{1}{P^2} =$$

$$= P\left(\frac{q}{(1-q)^2} \right)'_q - \frac{1}{P^2} = P\frac{(1-q)^2 + q \cdot 2(1-q)}{(1-q)^4} - \frac{1}{P^2} =$$

$$= P\frac{P^2 + 2Pq}{P^4} - \frac{1}{P^2} = \frac{P+2q}{P^2} - \frac{1}{P^2} = \frac{P+2q-1}{P^2} = \frac{P+2-2P-1}{P^2} = \frac{1-P}{P^2} = \frac{q}{P^2}.$$

Виходить, якщо випадкова величина X підпорядкована геометричному закону розподілу, то

$$M[X] = \frac{1}{P}; \tag{5.15}$$

$$D[X] = \frac{q}{P^2}. \tag{5.16}$$

Оскільки можливі значення випадкової величини $x_k = 1, 2, \ldots$ складають дискретну нескінченну, але зліченну множину, то мода та медіана випадкової величини, яка підпорядкована геометричному закону розподілу, не існують.

Задача 5.12. Гральний кубик підкидається до першої появи цифри 6. Визначити математичне сподівання, дисперсію та СКВ для випадкової величини X числа здійснюваних підкидань.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисельною, що має геометричний закон розподілу ймовірностей. За умовою $p = 1/6$; $q = 5/6$. Тоді:

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/6} = 6;\ D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{5/6}{1/36} = 30;\ \sigma(X) = \sqrt{30} \approx 5,48.$$

Задача 5.13. Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Імовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Визначити математичне сподівання, дисперсію та СКВ випадкової величини X – числа витрачених спортсменом набоїв.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисельною, з геометричним законом розподілу ймовірностей. За умовою $p = 0,8$; $q = 0,2$. Тоді:

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4};\ D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,2}{0,64} = \frac{5}{16};\ \sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Задача 5.14. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p = 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – кількість деталей, виготовлених до заміни цим інструментом. Ця випадкова величина може набувати значень 0, 1, 2, … . Побудуємо закон розподілу X. Вона набуває значення, що дорівнює нулю, якщо при виготовленні 1-го виробу інструмент буде пошкоджено; $P(X=0) = p = 0,2$. Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні 2-го виробу, то $X = 1$; $P(X=1) = p(1-p)$. Аналогічно $P(X=2) = p(1-p)^2$, $P(x=3) = p(1-p)^3$, …, $P(X=k) == p(1-p)^k$, … . Для обчислення математичного сподівання і дисперсії зіставимо отриманий закон розподілу з геометричним законом розподілу $P(Y=m) = p(1-p)^{m-1}$, $m = 1,2,....$. Очевидно, що $X = Y - 1$. Скориставшись властивостями математичного сподівання та дисперсії, дістанемо:

$$MX = M(Y-1) = MY - 1 = \frac{1}{p} - 1 = 5 - 1 = 4;\ DX = D(Y-1) = DY = \frac{1-p}{p^2} = 20.$$

5.4 Гіпергеометричний закон розподілу

Вище при розгляданні класичного способу визначення ймовірностей випадкової події як задачі, для розв'язання якої використовувався класичний спосіб, була поставлена та розв'язана задача про вибірку без повернень. Її формування є N куль, однакових на дотик. Серед цих куль M куль білого, а $N - M$ – чорного кольору. Із урни навмання вибирають n куль. Необхідно визначити ймовірність випадкової події A, яка полягає в тому, що серед n куль, які вибираються з N, буде рівно m куль білих. Було подано розв'язання такої задачі, де шукана ймовірність $P(A)$ визначається формулою

$$P(A) = P_{n,m}(N, M) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{5.17}$$

Введемо до розгляду величину X – кількість білих куль, які можуть потрапити у вибірку n куль із N. Можливі значення випадкової величини $x = m$ не перевищують $0, 1, 2, 3, \ldots, \min\{M, n\}$, тоді вираз (5.17) є виразом закону розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована гіпергеометричному закону розподілу.

Математичне сподівання та дисперсія X визначаються виразами

$$M[X] = n\frac{M}{N}; \tag{5.18}$$

$$D[X] = \frac{M \cdot n(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}. \tag{5.19}$$

Задача 5.15. Головна частина ракети складається із одного бойового елемента та трьох небойових. Засоби протиракетної оборони противника не розпізнають елементи головної частини ракети та спроможні забезпечити протидію одночасно двом повітряним цілям. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що бойовий елемент головної частини ракети досягне цілі, для враження якої він призначений.

Розв'язання. Введемо до розгляду подію A, яка полягає в тому, що бойовий елемент складної головної частини ракети досягає цілі. За умовою задачі маємо, що $N = 4$; $M = 1$; $n = 2$; $m = 0$. Бойовий елемент досягне цілі тоді, коли він подолає протиракетну оборону (не потрапить у вибірку із 4 повітряних цілей по 2 цілі).

Маємо (5.19):

$$P(A) = P_{n=1;m=1}(N = 4, M = 1) = \frac{C_1^1 \cdot C_3^1}{C_4^2} = \frac{1 \cdot 3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Примітка. Якщо n значно менше $N(0{,}1N > n)$, то визначені значення ймовірностей $P(A)$ близькі до відповідних (за $x = m$) значень ймовірностей, визначених за біноміальним законом розподілу.

Задача 5.16. В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть m деталей. Побудувати закони розподілу цілочисельної випадкової величини X – появу числа стандартних деталей серед m навмання взятих і обчислити математичне сподівання, дисперсію та СКВ, якщо: 1) $m = 3$; 2) $m = 4$; 3) $m = 5$; 4) $m = 7$.

Розв'язання. Побудуємо гіпергеометричні закони розподілу:

Пункт 1. m = 3; $n_1 = 7$; $n - n_1 = 3$; k = 0, 1, 2, 3.

У табличній формі гіпергеометричний закон подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	3
$P_k = P(X = k) = C_7^k C_3^{3-k} / C_{10}^3$	$C_7^0 C_3^3 / C_{10}^3$	$C_7^1 C_3^2 / C_{10}^3$	$C_7^2 C_3^1 / C_{10}^3$	$C_7^3 C_3^0 / C_{10}^3$

або

k	0	1	2	3
$P_k = C_7^k C_3^k / 120$	1/120	21/120	63/120	35/120

$$\sum P_k = \frac{1+21+63+35}{120} = \frac{120}{120} = 1.$$

$$M(X) = \sum k p_k = 0\frac{1}{120} + 1\frac{21}{120} + 2\frac{63}{120} + 3\frac{35}{120} = \frac{21+126+105}{120} = \frac{252}{120} = 2{,}1;$$

$$M(X^2) = \sum k^2 p_k = 0\frac{1}{120} + 1\frac{21}{120} + 4\frac{63}{120} + 9\frac{35}{120} = \frac{21+252+315}{120} = \frac{588}{120} = 4{,}9;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 4{,}9 - (2{,}1)^2 = 0{,}49; \quad \sigma(X) = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Пункт 2. m = 4; $n_1 = 7$; $n - n_1 = 3$; k = 1, 2, 3, 4.

У табличній формі закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	1	2	3	4
$P_k = P(X = k) = C_7^k c_3^{4-k} / C_{10}^4$	$C_7^1 C_3^3 / C_{10}^4$	$C_7^2 C_3^2 / C_{10}^4$	$C_7^3 C_3^1 / C_{10}^4$	$C_7^4 C_3^{10} / C_{10}^4$

або

k	1	2	3	4
$P_k = C_7^k C_3^{4-k} / 210$	7/210	63/210	105/210	35/210

$$\sum P_k = \frac{7+63+105+35}{210} = \frac{210}{210} = 1.$$

$$M(X) = \sum kp_k = 1\frac{7}{210} + 2\frac{63}{210} + 3\frac{105}{210} + 4\frac{35}{210} = \frac{7+126+315+140}{210} = \frac{588}{210} = 2{,}8\ ;$$

$$M\left(X^2\right) = \sum k^2 p_k = 1\frac{7}{210} + 4\frac{63}{210} + 9\frac{105}{210} + 16\frac{35}{210} = \frac{7+252+945+560}{210} = 8{,}4;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 8{,}4 - (2{,}8)^2 = 0{,}56; \qquad \sigma(X) = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75\ .$$

Пункт 3. m = 5; n1 = 7; n = 3; k = 2, 3, 4, 5.
У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	2	3	4	5
$P_k = P(X = k) = C_7^k C_3^{5-k} / C_{10}^5$	$C_7^2 C_3^3 / C_{10}^5$	$C_7^3 C_3^2 / C_{10}^5$	$C_7^4 C_3^1 / C_{10}^5$	$C_7^5 C_3^0 / C_{10}^5$

або

k	2	3	4	5
$P_k = C_7^k C_3^{5-k} / 252$	21/252	105/252	105/252	21/252

$$M(X) = \sum kp_k = 2\frac{21}{252} + 3\frac{105}{252} + 4\frac{105}{252} + 5\frac{21}{252} = \frac{42+315+420+105}{252} = 3{,}5$$

$$M(X^2) = \sum k^2 p_k = 4\frac{21}{252} + 9\frac{105}{252} + 16\frac{105}{252} + 25\frac{21}{252} = \frac{3234}{2252} = 12{,}83$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 12{,}83 - (3{,}5)^2 = 0{,}58; \qquad \sigma(X) = \sqrt{0{,}58} \approx 0{,}76\ .$$

Пункт 4. m = 7; $n_1 = 7$; $n - n_1 = 3$; k = 4, 5, 6, 7.
У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	4	5	6	7
$P_k = P(X = k) = C_7^k C_3^{7-k} / C_{10}^7$	$C_7^4 C_3^3 / C_{10}^7$	$C_7^5 C_3^2 / C_{10}^7$	$C_7^6 C_3^1 / C_{10}^7$	$C_7^7 C_3^0 / C_{10}^7$

або

k	4	5	6	7
$P_k = C_7^k C_3^{7-k} / C_{10}^7$	35/120	63/120	21/120	1/120

$$\sum P_k = \frac{21+105+105+21}{252} = \frac{252}{252} = 1.$$

$$M(X) = \sum kp_k = 4\frac{35}{120} + 5\frac{63}{120} + 6\frac{21}{120} + 7\frac{1}{120} = \frac{140+315+126+7}{120} = \frac{588}{120} = 4{,}5\ ;$$

$$M(X^2)=\sum k^2 p_k = 16\frac{35}{12}+25\frac{63}{120}+36\frac{21}{120}+49\frac{1}{120}=\frac{2942}{120}\approx 24,52\ ;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=24,52-(4,5)^2=4,27;\quad \sigma(X)=\sqrt{4,27}\approx 2,1.$$

Задача 5.17. Партія містить 200 виробів, серед яких 25 бракованих. Для перевірки якості з партії відібрали 10 виробів. Якщо при цьому кількість бракованих виробів не перевищує одиниці, то партія приймається. Знайти ймовірність того, що партію буде прийнято. Визначити цю саму ймовірність, якщо апроксимувати гіпергеометричний розподіл біноміальним розподілом і законом розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу гіпергеометричного закону розподілу. Партію буде прийнято, якщо кількість бракованих серед дібраних 10 дорівнюватиме нулю або одиниці.

$$P\left(X\le 1\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=\frac{C_{175}^{10}}{C_{200}^{10}}+\frac{C_{25}^{1}\cdot C_{175}^{9}}{C_{200}^{10}}\approx 0,638.$$

Обчислимо цю саму ймовірність за допомогою формули біноміального закону розподілу:

$$p=\frac{25}{200}=\frac{1}{8};$$

$$P\left(X\le 1\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=\left(\frac{7}{8}\right)^{10}+10\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{9}\approx 0,639.$$

Обчислимо, нарешті, цю саму ймовірність за допомогою закону розподілу Пуассона:

$$a=np=10\cdot\frac{1}{8}=1,25;$$

$$P\left(X\le 1\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=e^{-1,25}+1,25e^{-1,25}\approx 0,644.$$

Як бачимо, похибки обчислення в разі апроксимації гіпергеометричного розподілу порівняно невеликі.

5.5 Рівномірний дискретний закон розподілу

Розглядається випадкова величина X – число, яке вибране навмання із натурального ряду чисел. Можливі значення випадкової величини X $x_i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$, а $P\left(X=x_i\right)=1/n,\quad \forall\, i=\overline{1,n}$, яка визначається класичним способом розрахунку ймовірності випадкової події $A_i=\left\{X=x_i\right\}$, $i=\overline{1,n}$.

Ряд розподілу випадкової величини X наведений в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Ряд розподілу випадкової величини X, що підпорядкована рівномірному закону розподілу

x_i	1	2	3	…	$n-1$	n
$P(X = x_i) = P_i$	$1/n$	$1/n$	$1/n$	…	$1/n$	$1/n$

Визначимо математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини. Маємо

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2};$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - m_x^2 = \left(1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + 3^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1+n}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) - \frac{(1+n)^2}{4} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(1+n)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Отже,
$$M[X] = \frac{n+1}{2};$$

$$D[X] = \frac{n^2-1}{12}.$$

Задача 5.18. Знайти M [X], D [X], σ [X], якщо цілочисельна виадкова величина X має рівномірний закон розподілу і можливі значення її такі: $X_k = k = 1, 2, 3, \ldots, 100$.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: n = 100, P_k = 1/100. Тоді:

$$M(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{100+1}{2} = 50{,}5; \quad D(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{1000-1}{2} = \frac{9999}{12} = 832{,}25.$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{832{,}25} \approx 28{,}87.$$

ТЕМА 6
Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

1.1 Рівномірний закон розподілу

Означення. *Неперервна випадкова величина X підпорядкована рівномірному закону розподілу на відрізку* $[a,b]$, *якщо її щільність ймовірностей на цьому відрізку є сталою величиною, а за його межами дорівнює нулю, тобто:*

$$f(x)=\begin{cases} C, & a \le x \le b; \\ 0, & x < a;\ x > b. \end{cases} \tag{6.1}$$

Визначимо значення сталої C, виходячи з властивості нормування щільності ймовірностей випадкової величини:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{a}^{b} Cdx = C(b-a);$$

$$C=\frac{1}{b-a},$$

отже

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x < a;\ x > b. \end{cases} \tag{6.2}$$

Визначимо функцію розподілу випадкової величини X, яка має рівномірний закон розподілу на відрізку $[a,b]$. Маємо

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a},$$

отже

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{6.3}$$

Графіки щільності ймовірностей та функції розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована рівномірному закону розподілу, наведені на рис. 6.1.

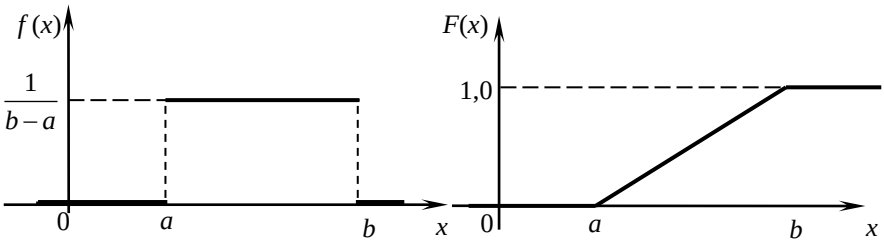


Рис. 6.1. Функція щільності ймовірностей та функція розподілу випадкової величини, підпорядкованої рівномірному закону розподілу на відрізку [*a*, *b*]

Розрахуємо числові характеристики випадкової величини *X*:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2};$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx - m_x^2 = \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Тобто якщо випадкова величина *X* підпорядкована рівномірному закону розподілу, то вона має такі числові характеристики:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}; \tag{6.4}$$

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}; \tag{6.5}$$

$$\sigma[X] = \frac{\sqrt{b-a}}{2\sqrt{3}}; \tag{6.6}$$

Виходячи з означення медіани випадкової величини, яке полягає в тому, що $P\left(X < M_{e_x}\right) = P\left(X > M_{e_x}\right) = \frac{1}{2}$, визначаємл медіану випадкової величини *X*, підпорядкована рівномірному закону розподілу на відрізку $[a,b]$, то

$$Me_x = M[X] = \frac{a+b}{2}. \tag{6.7}$$

Моди випадкової величини *X*, яка підпорядкована рівномірному закону розподілу на $[a,b]$, не існує.

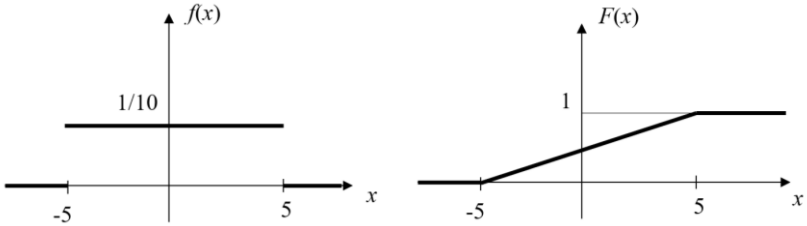
Задача 6.1. Довжина навчального класу вимірюється рулеткою, поділки якої розташовані через 10 см. Округлюємо результат до найближчого поділу. Випадкова величина X – помилка виміру. Знайти і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$; знайти m_x, D_x, σ_x.

Розв'язання. Випадкова величина приймає значення від –5 до 5 см, тобто $X = \{x \mid x \in (-5,5)\}$, розподіл рівномірний.

Виходячи з формул (6.2) – (6.6) розраховуємо:

$$m_x = 0; \quad D_x = \frac{10^2}{1^2} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}; \quad \sigma_x = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,9.$$

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad x \in (-5,5); \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -5; \\ \dfrac{x+5}{10}, & |x| \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$



Задача 6.2. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X \ge 3) = 0,4$, *а* $M[X] = 2$.

Розв'язання. Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$. Отже, потрібно визначити область зміни випадкової величини. Тоді:

$$\begin{cases} \int\limits_3^b \dfrac{1}{b-a}\,dx = 0,4; \\ \int\limits_a^b \dfrac{x}{b-a}\,dx = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{b-3}{b-a} = 0,4; \\ \dfrac{a+b}{2} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6b + 0,4a = 3; \\ b = 4 - a; \end{cases} \qquad b = 7; \quad a = -3; \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -3; \\ 0,1, & \text{якщо } -3 < x \le 7; \\ 0, & \text{якщо } x > 7. \end{cases}$$

6.2 Експоненціальний закон розподілу

Означення. *Випадкова величина X підпорядкована експоненціальному (показниковому) закону розподілу, якщо щільність ймовірностей має вигляд*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases} \tag{6.8}$$

де λ – параметр.

Функція розподілу визначається згідно з властивістю щільності ймовірностей, а саме

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x},$$

та має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{6.9}$$

Графіки щільності ймовірностей та функції розподілу випадкової величини X, підпорядкованої експоненціальному закону розподілу, подані на рис. 6.2.

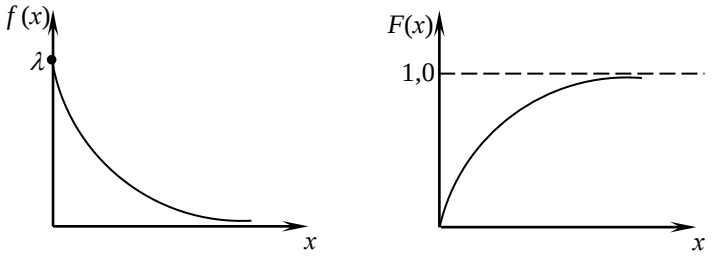


Рис. 6.2. Графіки щільності та функції розподілу випадкової величини *X*, що підпорядкована експоненціальному закону розподілу

Розглянемо числові характеристики випадкової величини *X*.

$$M[X]=\int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{array}{c}\int udv=uv-\int vdu\\ u=x \quad du=dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx \quad v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{array}\right|=$$

$$= \lambda \left[x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}dx \right] = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D[X] = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-\lambda x}dx & v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \lambda \left[x^2\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \right.$$

$$\left. -\left(-\frac{2}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}dx \right] - \frac{1}{\lambda^2} = 2\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x}dx & v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{array} \right| = 2\left[x\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx \right] - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Моду випадкової величини X визначимо із співвідношення $f'(x) = 0$, тоді $\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)'_x \neq 0$; $\lambda e^{-\lambda x}(-\lambda) \neq 0$. Отже, Mo_x не існує.

Медіану випадкової величини X визначимо із співвідношення

$$P(X < Me_x) = P(X > Me_x) = \frac{1}{2}.$$

$$P\left(X < M_{e_x}\right) = \int_0^{Me_x} f(x)dx = \lambda \int_0^{Me_x} e^{-\lambda x}dx = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{Me_x} =$$

$$= -\left(e^{-\lambda Me_x} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda Me_x} = 1/2;$$

$$e^{-\lambda Me_x} = \frac{1}{2};\ -\lambda Me_x = -\ln 2;\ Me_x = \frac{1}{\lambda}\ln 2.$$

Отже, основні числові характеристики випадкової величини X, підпорядкованої експоненціальному закону розподілу, визначаються виразами:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}; \tag{6.10}$$

$$D[X] = \frac{1}{\lambda^2}; \tag{6.11}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda}; \tag{6.12}$$

$$Me_x = \frac{1}{\lambda}\ln 2; \tag{6.13}$$

$$Mo_x - \to \text{не існує}. \tag{6.14}$$

Теорема. Інтервал часу між двома сусідніми подіями в найпростішому потоці має показниковий розподіл з параметром, що дорівнює інтенсивності потоку:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \tag{6.15}$$

Задача 6.3. Задана функція розподілу випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-5x}, & x > 0. \end{cases}$$

Визначити її числові характеристики.

Розв'язання. Використовуючи формули (6.10) – (6.14), одержимо:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}, \text{ оскільки } \lambda = 5;$$

$$D[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{25}; \qquad \sigma[X] = \frac{1}{5}; \qquad Me_x = \frac{\ln 2}{5}.$$

Задача 6.4. Найпростіший потік має інтенсивність 2 заявки на хвилину. Знайти ймовірність того, що інтервал часу між сусідніми заявками буде від 1 до 2 хвилин, параметри випадкової величини розподілу інтервалів часу?

Розвязання. За теоремою інтервал часу між подіями в найпростішому потоці має показовий розподіл з параметром $\lambda = 2$, тому:

$$f(t) = 2e^{-2t}; \; F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \; m_t = 1/\lambda = 1/2; \quad D_t = 1/\lambda^2 = 1/4;$$

$$P(1 < t < 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-4} - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4} = 0{,}35 - 0{,}002 \approx 0{,}13.$$

Задача 6.5. Випадкова величина розподілена показниково з параметром *a*. При якому значенні параметра ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок $[\alpha;\beta]$ буде найбільшою?

Розв'язання. Нехай параметр *a* – неперервна й диференційована величина. Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок і дослідимо здобуту функцію на екстремум:

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} ae^{-ax}dx = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta}; \quad P(a) = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta};$$

$$P'(a) = -\alpha e^{-a\alpha} + \beta e^{-a\beta}; \ -\alpha e^{-a\alpha} + \beta e^{-a\beta} = 0; \ \beta e^{-a\beta} = \alpha e^{-a\alpha};$$

$$ln\beta - a\beta = \ln\alpha - a\alpha; \ a = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Покажемо, що при даному значенні *a* досягається максимум $P(a)$. Знайдемо 2-гу похідну:

$$P''(a) = \alpha^2 e^{-a\alpha} - \beta^2 e^{-a\beta};$$

$$P''\left(\frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}\right) = \alpha^2 e^{-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}} - \beta^2 e^{-\beta\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}} = \alpha^2 e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} - \beta^2 e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} =$$

$$= \alpha^2 (\alpha/\beta)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} - \beta^2 (\alpha/\beta)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} = \alpha\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} - \beta\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} = \frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}(\alpha - \beta) < 0,$$

оскільки $\alpha < \beta$. Друга похідна у критичній точці від'ємна, тому $P(a)$ в ній досягає максимуму, тобто при $a = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}$ ймовірність попадання в інтервал $[\alpha;\beta]$ буде найбільшою.

6.3 Закон розподілу Вейбулла

Узагальненням експоненціального закону розподілу є закон розподілу Вейбулла, функція розподілу та функція щільності якого мають вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^a}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \tag{6.16}$$

$$f(x)=\begin{cases} a\lambda x^{a-1}e^{-\lambda x^a}, & x\geq 0; \\ 0, & x<0, \end{cases} \tag{6.17}$$

де a та λ – параметри закону розподілу Вейбулла.

Графіки щільності ймовірностей при різних значеннях параметра a подані на рис. 6.3.

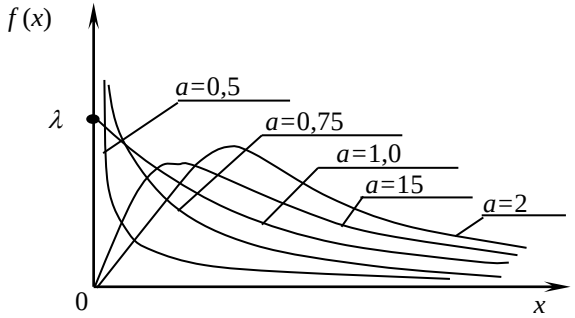


Рис. 6.3. Щільність ймовірностей закону розподілу Вейбулла при різних значеннях параметра

На рис. 6.3 відзначено, що якщо $a<1$, то гілки кривої щільності ймовірностей прямують до нескінченності при $x\to 0$ та при $x\to\infty$; при $a=1$ графік щільності ймовірностей відповідає експоненціальному закону розподілу; при $x = 0$ та при $a>1$ щільність ймовірностей дорівнює нулю, досягає деякого максимального значення та в подальшому при $x\to\infty$ прямує до нескінченності.

З метою визначення основних числових характеристик випадкової величини X, яка підпорядкована закону розподілу Вейбулла, розглянемо для цього закону розподілу момент k-го порядку. Маємо

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx=\int_0^{\infty}x^k a\lambda x^{a-1}e^{-\lambda x^a}dx=$$

$$=\left|t=\lambda x^a,\ x=(t/\lambda)^{1/a},\quad dx=a^{-1}(t/\lambda)^{1/a-1}\lambda^{-1}dt\right|=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k/a}e^{-t}a\lambda\frac{1}{a}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1-1/a}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1/a-1}\frac{1}{\lambda}dt=$$

$$=\lambda^{-k/a}\int_0^{\infty}t^{k/a}e^{-t}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1-1/a}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-1+1/a}dt=\lambda^{-k/a}\int_0^{\infty}t^{k/a}e^{-t}dt=\lambda^{-k/a}\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right),$$

де $\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)=\int_0^{\infty} t^{\frac{k}{a}} e^{-t} dt$ – гамма-функція Ейлера.

Отже,

$$\alpha_k = \lambda^{-\frac{k}{a}} \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right); \tag{6.18}$$

$$M[X] = \alpha_1 = \lambda^{-\frac{1}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right); \tag{6.19}$$

$$D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \lambda^{-\frac{2}{a}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{a}+1\right)\right]. \tag{6.20}$$

6.4 Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу випадкової величини X має широке застосування на практиці, що пов'язано з таким. Значна частина планування та проведення дослідів пов'язана з вимірюванням параметрів, які мають певне фізичне тлумачення при розгляді тих чи інших описів явищ природи. Усяке вимірювання супроводжується помилками. Практично доведено, що випадкова величина, яка пов'язана із значеннями похибок вимірювання, підпорядкована нормальному закону розподілу. Закон розподілу суми випадкових величин, які підпорядковані нормальним законам розподілів, є нормальним законом розподілу. Закон розподілу суми випадкових величин, які підпорядковані довільним законам розподілу, при необмеженому зростанні її доданків за певних умов, які накладаються на числові характеристики цих випадкових величин, необмежено прямує до нормального закону розподілу.

Означення. *Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, якщо щільність ймовірностей має вигляд*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, -\infty \le x \le \infty, \tag{6.21}$$

де σ та m – параметри нормального розподілу.

Для того, щоб з'ясувати зміст параметрів σ та m закону розподілу (6.21), визначимо математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Маємо

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{matrix}z=\dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}};x=\sigma\sqrt{2}z+m;\\ dx=\sigma\sqrt{2}dz\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma\sqrt{2}z+m\right)e^{-z^2}\sigma\sqrt{2}dz=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma\sqrt{2}ze^{-z^2}dz+m\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\right]=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-z^2}d\left(-z^2\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}m\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=-\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{m\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=m,$$

оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ є інтеграл Пуассона, а

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-m_x^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx-m^2=$$

$$=\left|\begin{matrix}z=\dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}};x=\sigma\sqrt{2}z+m;\\ dx=\sigma\sqrt{2}dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma\sqrt{2}z+m\right)^2e^{-z^2}\sigma\sqrt{2}dz-m^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma^2z^2e^{-z^2}dz+\int\limits_{-\infty}^{\infty}2\sigma\sqrt{2}mze^{-z^2}dz+\int\limits_{-\infty}^{\infty}m^2e^{-z^2}dz\right]-m^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2}dz+2\sigma\sqrt{2}\cdot m\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}d\left(-z^2\right)+m^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\right]-m^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2}dz+0+m^2\cdot\sqrt{\pi}\right]-m^2=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2}dz=$$

$$=\left|\begin{matrix}\int udv=uv-\int vdu\\ u=z;\quad dv=ze^{-z^2}dz\\ du=zdz;\,v=-\dfrac{1}{2}e^{-z^2}\end{matrix}\right|=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-z\frac{1}{2}e^{-z^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\right]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]=\sigma^2.$$

Тоді маємо, що в (6.21) параметр m є математичне сподівання, а параметр σ – середньоквадратичне відхилення випадкової величини X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу. Отже,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}=N\left(m_x,\sigma_x\right).. \qquad (6.22)$$

З метою побудови графіка функції щільності ймовірностей (6.22) визначимо таке значення x, за якого $f(x)$ досягає максимуму. Маємо

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\left(-\frac{2(x-m_x)}{2\sigma_x^2}\right)=0 \text{ при } x=m_x;$$

$$f(x=m_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(m_x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}, \text{ та } f''(x=m_x)<0.$$

З (6.22) видно, що $f[x-m_x]=f[-(x-m_x)]$ і $f(-\infty)=f(\infty)=0$, а це означає, що графік функції (6.22) є симетричним відносно прямої $x=m_x$, а вісь абсцис є горизонтальною асимптотою функції (6.22). Графік (6.22) поданий на рис. 6.4, а вплив зростання параметрів m_x та σ_x на зміну графіка функції щільності подано на рис. 6.5 та 6.6.

Розглянемо функцію розподілу випадкової величини X, щільність ймовірності якої відповідає (6.22).

Відзначене вище щодо виду графіка функції (6.22), а також означення моди та медіани випадкової величини X дають право стверджувати, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то

$$m_x=Mo_x=Me_x.$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=\left|\begin{matrix}\left(x-m_x\right)/\sigma_x=z\\ x=\sigma_x z+m_x\\ dx=\sigma_x dz\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}+\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right),$$

де $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ – інтеграл Пуассона;

$$\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ – функція Лапласа.} \qquad (6.23)$$

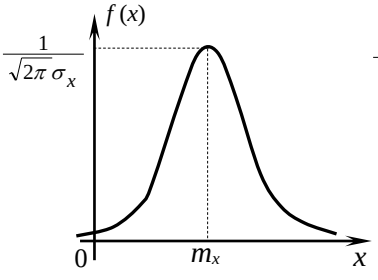


Рис. 6.4. Графік щільності випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу

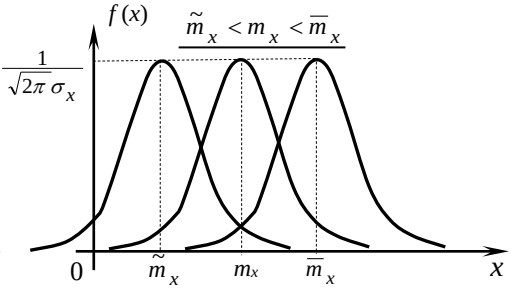


Рис. 6.5. Графіки щільності випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу при різних m_x

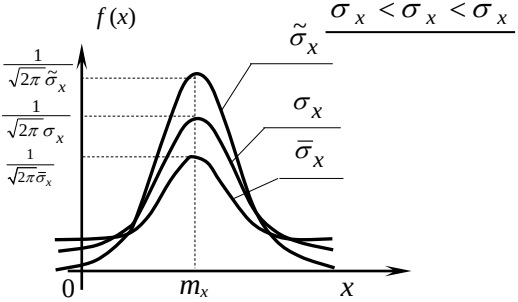
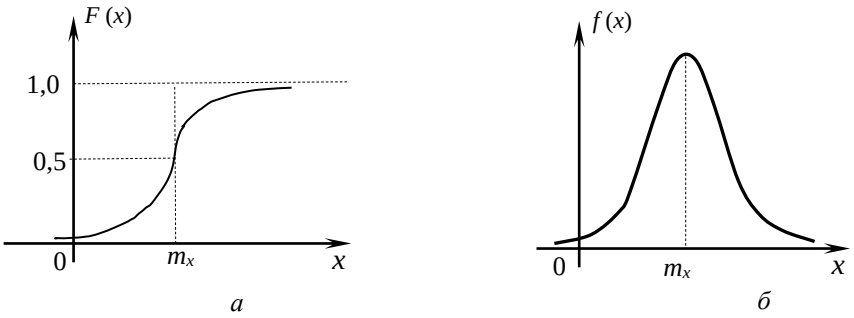


Рис. 6.6. Графіки щільності випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу при різних σ_x

Отжеь, функція розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу, має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right). \qquad (6.24)$$

Графік функції розподілу та відповідна їй функція щільності ймовірностей подана на рис. 6.7.



а *б*

Рис. 6.7. Графіки функції розподілу (*а*) та функції щільності (*б*) випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу

Функція Лапласа затабульована.

Розглянемо властивості функції Лапласа, яку також прийнято називати інтегралом ймовірностей. Маємо

$$\Phi(\infty)=\frac{1}{2};\ \Phi(0)=0;\ \Phi(-z)=-\Phi(z), \tag{6.25}$$

тобто функція Лапласа є нечіткою функцією.

Якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то

$$P\left(x_1<X<x_2\right)=\Phi\left(\frac{x_2-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-m_x}{\sigma_x}\right), \tag{6.26}$$

де було застосовано раніше викладену властивість функції розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована будь-якому закону розподілу, а саме $P\left(x_1<X<x_2\right)=F(x_2)-F(x_1)$.

Якщо розглядається інтервал, симетричний відносно математичного сподівання випадкової величини, то маємо

$$P\left(\left|X-m_x\right|<\varepsilon\right)=P\left(m_x-\varepsilon<X<m_x+\varepsilon\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{m_x+\varepsilon-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-\varepsilon-m_x}{\sigma_x}\right)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \tag{6.27}$$

Для чисельної оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу, відносно

математичного сподівання поруч з середнім квадратичним відхиленням σ_x використовують ймовірне відхилення E_x.

Означення. *Під ймовірним (серединним) відхиленням E_x випадкової величини X розуміють половину інтервалу, симетричного відносно математичного сподівання випадкової величини X, імовірність потрапляння в який дорівнює 0,5 (рис. 6.8), тобто*

$$P\left(\left|X - m_x\right| < E_x\right) = P\left(m_x - E_x < X < m_x + E_x\right) = \frac{1}{2}. \qquad (6.28)$$

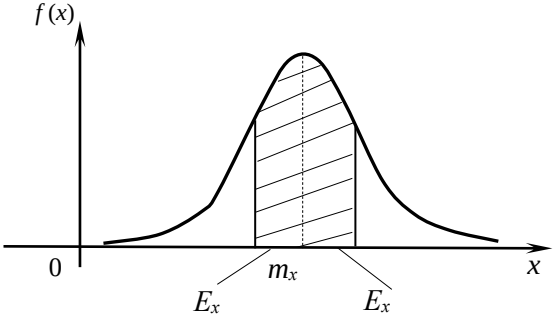


Рис. 6.8. Визначення ймовірного відхилення випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу

Враховуючи (6.27), маємо

$$\Phi\left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right) = 0,25\,;\ \frac{E_x}{\sigma_x} \cong 0,674\,,$$

тобто $$E_x \cong 0,674 \cdot \sigma_x\,. \qquad (6.29)$$

Задача 6.6. Розглянемо задачу визначення ймовірностей потрапляння випадкової величини X, яка підпорядкована нормальному закону розподілу, в інтервали, довжина яких дорівнює σ_x, а саме в інтервали

$$(m_x, m_x + \sigma_x)\,,(m_x + \sigma_x, m_x + 2\sigma_x)\,,(m_x + 2\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)\,.$$

Розв'язання. З (6.25) маємо

$$P\left(m_x < X < m_x + \sigma_x\right) = \Phi\left(\frac{m_x + \sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(1) \cong 0,341\,3\,;$$

$$P\left(m_x + \sigma_x < X < m_x + 2\sigma_x\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m_x + 2\sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x + \sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) \cong 0{,}1359;$$

$$P\left(m_x + 2\sigma_x < X < m_x + 3\sigma_x\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{m_x + 3\sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x + 2\sigma_x - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(3) - \Phi(2) \cong 0{,}0214.$$

тому $$P\left(\left|X - m_x\right| < 3\sigma_x\right) \cong 0{,}997\,2\,. \qquad (6.30)$$

Вираз (6.30) дає змогу дати означення правила трьох сигма:

Подія, яка полягає в тому, що випадкова величина, якщо вона підпорядкована нормальному закону розподілу, відхилиться від свого математичного сподівання на величину, що не перевищує трьох середніх квадратичних відхилень, є практично достовірною, оскільки ймовірність такої події дорівнює майже одиниці.

Задача 6.7. Відомо, що випадкова величина X має закон розподілу $N(-4; 2)$. Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і накреслити їх графіки. Обчислити $P(-6 < x < 3)$, $P(|x+4| < 4)$. Чому дорівнюють Mo, Me?

Розв'язання.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{3}}, \quad -\infty < x < \infty; \quad F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x+4)^2}{3}} dx.$$

Графіки f (x), F(x) наведені на рис. 6.9 і 6.10.

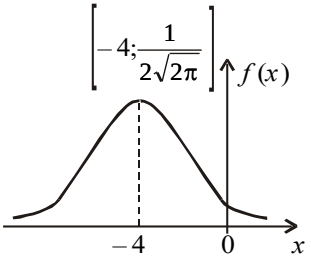


Рис. 6.9. Графік f(x)

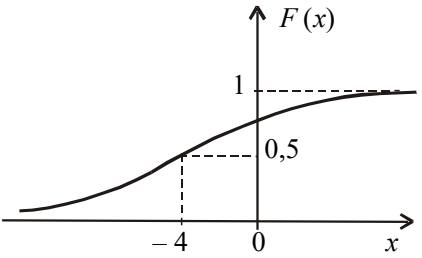


Рис. 6.10. Графік F(x)

$$P(-6 < x < 3) = \Phi\left(\frac{3-(-4)}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-6-(-4)}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3+4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-6+4}{2}\right) =$$

$$= \Phi(3{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(3{,}5) + \Phi(1) = 0{,}49966 + 0{,}3413 = 0{,}84096;$$

$$P\left(|x+4|<4\right)=2\Phi\left(\frac{4}{2}\right)=2\cdot 0,4772=0,9544; \qquad \text{Mo} = \text{Me} = m_x = -4.$$

Задача 6.8. Випадкова величина X має закон розподілу $N(2; 5)$. Знайти $f(y)$, якщо $y = -2x + 1$. Обчислити $P(-2 < y < 5)$.

Розв'язання. Оскільки

$$M[Y] = M[kx + b] = k\,M[x] + b = -2 \cdot 2 + 1 = -3,$$

$$D[Y] = D[kx + b] = k^2 D[x] = 4 \cdot 25 = 100,\ \sigma[y] = 10,$$

то щільність імовірностей випадкової величини Y

$$f(y)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+3)^2}{200}}, \quad -\infty<y<\infty.$$

Імовірність події $-2 < y < 5$ є такою:

$$P(-2<y<5)=$$

$$=\Phi\left(\frac{5-(-3)}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2-(-3)}{2}\right)=\Phi(4)-\Phi(0,5)=0,5-0,1915=0,3085.$$

Задача 6.9. Задано $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1^2)}{2}}$, $-\infty<x<\infty$. Знайти M[y], k_{xy}, якщо $y = 2x^2 - 3x + 5$.

Розв'язання. Оскільки $M[Y] = M[2x^2 - 3x + 5] = 2M[x^2] - 3M[x] + 5$;

$$M[XY] = M[x\,[2x^2 - 3x + 5]] = M[2x^3 - 3x^2 + 5x] = 2M[x^3] - 3M[x^2] + 5M[x]$$

$$M[x] = -1,\ M[x^2] = D[x] + M^2[x] = 1 + (-1)^2 = 2,$$

то необхідно лише знайти $M[x^3]$.

$$M\left[x^3\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^3 f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^3 e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}dx=\left|\begin{matrix}x+1=z\to dx=dz\\ x=z-1\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(z-1)^3 e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(z^3-3z^2+3z-1)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^3 e^{-\frac{z^2}{2}}-3\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz+3\int\limits_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz-\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right]=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-6\int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - \sqrt{2\pi} \right] = \left| \begin{matrix} u = z,\ du = dz \\ ze^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = dv \to v = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-6\left(-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \right) - \sqrt{2\pi} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-6\int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - \sqrt{2\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-6\frac{\sqrt{2\pi}}{2} - \sqrt{2\pi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-4\sqrt{2\pi}) = -4.$$

Отже, $M[x^3] = -4$; $M[Y] = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 = 12$;

$$M[XY] = 2 \cdot [-4] - 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -19;$$

$$K_{xy} = M[XY] - M[X]\ \ M[Y] = -19 - (-1) \cdot 12 = 7.$$

Отже, одержали: $M[Y] = 12$, $K_{xy} = 7$.

Задача 6.10. Відомо, що діаметр кульки підшипника D є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу. Бракування кульок здійснюється за таким алгоритмом: якщо кулька не проходить через отвір із діаметром 5,5 мм, але проходить через отвір із діаметром 5,58 мм, то її розмір відповідає стандарту. Якщо будь-яка із наведених умов не виконується, то кулька бракується. Визначити σ_d, якщо брак становить 10%.

Розв'язання. Середній діаметр кульки

$$m_d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{5{,}5 + 5{,}58}{2} = \frac{11{,}08}{2} = 5{,}54 \text{ мм.}$$

Якщо позначимо d_1 = 5,5 мм, d_2 = 5,58 мм, то ймовірність того, що кулька буде забракована, визначається як:

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - m_d}{\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - m_d}{\sigma_d} \right) \right].$$

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - (d_1 + d_2)/2}{\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - (d_1 + d_2)/2}{\sigma_d} \right) \right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma_d} \right) \right] = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) + \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) \right] =$$

$$= 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right).$$

$$2\Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma_d}\right)=0,9\rightarrow\Phi\left(\frac{d_2-d_1}{2\sigma_d}\right)=0,45\rightarrow\frac{d_2-d_1}{2\sigma_d}=$$

$$=1,65\rightarrow\sigma_d=\frac{d_2-d_1}{3,3}=\frac{5,58-5,5}{3,3}=0,024\ мм;\qquad \sigma_d=0,024\ \text{мм}.$$

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Дайте визначення випадкової величини.
2. Яку множину складають можливі значення дискретної випадкової величини?
3. Дайте визначення неперервної випадкової величини.
4. Як може бути наведений закон розподілу дискретної випадкової величини?
5. Дайте визначення ряду розподілу та багатограннику розподілу випадкової величини.
6. Чи складають повну групу подій події, які полягають в тому, що дискретна випадкова величина приймає те чи інше можливе значення?
7. Дайте визначення функції розподілу та визначте її властивості.
8. Дайте визначення щільності ймовірностей та визначте її властивості.
9. Чи визначають початкові та центральні моменти випадкової величини числові характеристики випадкової величини, які частіше вживаються?
10. Дайте визначення таким числовим характеристикам: математичному сподіванню випадкової величини, дисперсії випадкової величини, моді випадкової величини, медіані випадкової величини та квантилю випадкової величини.
11. Визначте фізичний зміст математичного сподівання та дисперсії випадкової величини.
12. Чи дозволяють значення числових характеристик випадкових величин розв’язати будь-яку задачу щодо опису випадкового та масового природного явища?
13. Який зміст має судження “розглядається схема Бернуллі”?
14. Визначте досліди, наслідки яких дають право стверджувати, що розглядаються випадкові величини, підпорядковані одному з відомих законів розподілу: біноміальному, узагальненому біноміальному, закону Пуассона, геометричному, рівномірному дискретному чи неперервному, експоненціальному, нормальному.
15. Визначте закон розподілу, який є узагальненням експоненціального закону розподілу.
16. Визначте зміст “правила 3σ” при розгляданні нормального закону розподілу випадкової величини.

ТЕМА 7
Система випадкових величин

7.1 Визначення системи випадкових величин

Розв'язання практичних задач може бути пов'язане з тим, що результат досліду описується двома, трьома та більшою кількістю випадкових величин. Тоді розглядають двовимірну, тривимірну чи *n*-вимірну випадкову величину, які складають відповідно систему двох, трьох чи *n* випадкових величин. Кожну випадкову величину, яка входить до *n*-вимірної випадкової величини, слід розглядати як випадкову компоненту випадкового вектору відповідної розмірності. Так випадкова точка вибуху заряду при обстрілі цілі на площині має дві випадкові координати, які визначаються в прямокутній системі координат на площині. А випадкова точка вибуху заряду при обстрілі цілі в просторі має три випадкові координати, які визначаються в прямокутній системі координат в тривимірній області. У першому прикладі слід стверджувати, що розглядається двовимірний випадковий вектор (система двох випадкових величин) $\{X, Y\}$, а в другому – тривимірний випадковий вектор (система трьох випадкових величин) $\{X, Y, Z\}$.

У загальному випадку є таке визначення системи випадкових величин.

Якщо кожній елементарній події l поставлені у відповідність координати точки n-вимірного простору

$$X_1 = f_1(l), X_2 = f_2(l), \ ..., \ X_n = f_n(l)$$

і кожна з функцій $f_i(l), i = \overline{1,n}$ є вимірювальною відносно введених у множині випадкових елементарних подій їх імовірностей, то сукупність $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$ – n-вимірна випадкова величина (n-вимірний випадковий вектор).

Для системи двох випадкових величин $\{X, Y\}$ розглядаються можливі її значення (x_i, y_j), $i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$, а для системи трьох випадкових величин $\{X, Y, Z\} - (x_i, y_j, z_k)$, $i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}; k = \overline{1,r}$.

Усі визначення для системи випадкових величин будь якої розмірності мають однаковий зміст, а формалізовані записи аналогічні. Тому розглянемо повну систему двох випадкових величин.

Система двох випадкових величин може бути дискретною та неперервною. Використовують такі терміни: "система двох дискретних

випадкових величин" чи "дискретна система двох випадкових величин" та "система двох неперервних випадкових величин" чи "неперервна система двох випадкових величин". Означення системи двох дискретних випадкових величин та системи двох неперервних випадкових величин аналогічні означенням дискретної чи неперервної одновимірної випадкової величини.

Система двох випадкових величин $\{X, Y\}$ *є дискретною, якщо множини можливих значень випадкових величин* X *та* Y *(відповідно* $\{x_i\}$, $i = \overline{1,m}$ *та* $\{y_i\}$, $j = \overline{1,n}$*) є скінченними та дискретними.*

Система двох випадкових величин $\{X, Y\}$ *є неперервною, якщо можливі значення випадкових величин* X *та* Y *неперервно заповнюють деякі інтервали.*

Під законом розподілу будь-якої системи випадкових величин розуміють всяке співвідношення між можливими значеннями її випадкових величин та їм відповідними ймовірностями.

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин подається у табл. 7.1, в якій зазначені можливі значення x_i, $i = \overline{1,m}$ випадкової величини X, можливі значення y_j, $j = \overline{1,n}$ випадкової величини Y, та кожному можливому значенню системи (x_i, y_j) поставлені у відповідність ймовірності $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Таблиця 7.1

Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин

x \ y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n
x_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1j}	...	P_{1n}
x_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2j}	...	P_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x_i	P_{i1}	P_{i2}	...	P_{ij}	...	P_{in}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x_m	P_{m1}	P_{m2}	...	P_{mj}	...	P_{mn}

Таку таблицю називають *таблицею розподілу системи двох дискретних випадкових величин зі скінченною кількістю їх можливих значень*.

Сукупність випадкових подій $\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ складає повну групу подій, тому

$$\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\left\{X = x_i, Y = y_j\right\} = U, \tag{7.1}$$

де U – достовірна подія, а

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = 1; \tag{7.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = \sum_{j=1}^{n} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right); \tag{7.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_{ij} = \sum_{i=1}^{m} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(Y = y_j\right). \tag{7.4}$$

Вирази (7.3) та (7.4) дозволяють визначити ряди розподілів випадкових величин X та Y, які складають систему $\left\{X, Y\right\}$.

Ряди розподілів наведені в табл. 7.2 та 7.7.

Таблиця 7.2

Ряд розподілу випадкової величини X

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_m
$P\left(X = x_i\right)$	$P\left(X = x_1\right)$	$P\left(X = x_2\right)$	···	$P\left(X = x_i\right)$	···	$P\left(X = x_m\right)$

Таблиця 7.3

Ряд розподілу випадкової величини Y

y_i	y_1	y_2	...	y_j	...	P_n
$P\left(Y = y_j\right)$	$P\left(Y = y_1\right)$	$P\left(Y = y_2\right)$	...	$P\left(Y = y_j\right)$	...	$P\left(Y = y_n\right)$

Закон розподілу неперервної системи двох випадкових величин задається функцією розподілу або функцією щільності розподілу.

Під функцією розподілу неперервної системи двох випадкових величин розуміють таку функцію двох дійсних змінних, яка чисельно дорівнює ймовірності одночасного виконання двох нерівностей $X < x$ *та* $Y < y$, *тобто.*

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \tag{7.5}$$

З геометричної точки зору функція розподілу системи двох випадкових величин – це ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова точка належить нескінченному квадрату з верхньою правою вершиною в точці з координатами (x, y), тобто $F(x, y) = P(\{X, Y\} \in D)$.

Область D наведена на рис. 7.1.

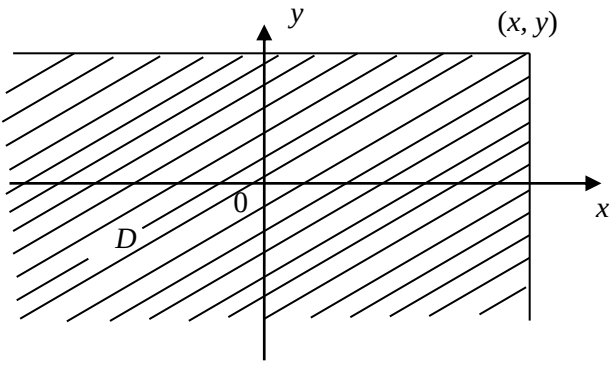


Рис. 7.1. Геометричне тлумачення функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин

Функція розподілу системи двох неперервних випадкових величин має такі властивості.

1. *Функція розподілу* $F(x, y)$ *є неспадною функцією щодо кожної з своїх змінних, тобто*

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y) \text{ при } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1) \text{ при } y_2 > y_1; \tag{7.6}$$

$$F(x_2, y_2) \geq F(x_1, y_1) \text{ при } x_2 > x_1,\ y_2 > y_1.$$

Ця властивість безпосередньо випливає з визначення $F(x, y)$ та із геометричного її тлумачення.

2. *Якщо одна зі змінних чи обидві одразу наближаються до* $-\infty$, *то функція розподілу* $F(x,y)$ *наближається до* 0, *тобто*

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0. \tag{7.7}$$

Дійсно, з (7.5) маємо

$$F(x,-\infty)=P(X<x,Y<-\infty)=P(A\cdot V)=P(V)=0;$$

$$F(-\infty,y)=P(X<-\infty,Y=y)=P(V\cdot A)=P(V)=0;$$

$$F(-\infty,-\infty)=P(X<-\infty,Y<-\infty)=P(V\cdot V)=P(V)=0,$$

де A – випадкова подія та V – неможлива подія.

3. *Якщо обидві змінні наближаються до* $+\infty$, *то* $F(x,y)$ *наближається до* 1, *тобто*

$$F(+\infty,+\infty)=1. \tag{7.8}$$

Дійсно, з означення $F(x,y)$ (7.5) випливає таке (U – достовірна подія):

$$F(+\infty,+\infty)=P(X<+\infty,Y<+\infty)=P(U\cdot U)=P(U)=1.$$

4. *Якщо одна з змінних* $F(x,y)$ *наближається до* $+\infty$, *то* $F(x,y)$ *наближається до функції розподілу відповідної випадкової координати випадкового двовимірного вектору, тобто*

$$F(x,+\infty)=F_X(x);\quad F(+\infty,y)=F_Y(y). \tag{7.9}$$

Дійсно, згідно з (7.5) маємо

$$F(x,+\infty)=P(X<x,Y<+\infty)=P(A\cdot U)=P(A)=P(X<x)=F_X(x);$$

$$F(+\infty,y)=P(X<+\infty,Y<y)=P(U\cdot B)=P(B)=P(Y<y)=F_Y(y),$$

де $A=\{X<x\}$, $B=\{Y<y\}$ – випадкові події.

Для системи двох неперервних випадкових величин закон розподілу може задаватись функцією щільності ймовірностей, яка має таке означення.

Якщо існує друга змішана похідна функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин, то її називають функцією щільності системи двох неперервних випадкових величин, а саме

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \tag{7.10}$$

Графік функції (7.10) є поверхнею, її прийнято називати поверхнею розподілу. Якщо її розрізати площиною паралельно площині xoy, то в перерізі будемо мати замкнуту лінію, в кожній точці якої щільність ймовірностей має стале значення. Лінії таких перерізів прийнято називати кривими рівної щільності.

Елементом імовірностей для системи двох неперервних випадкових величин є вираз $f(x,y)\Delta x\Delta y$, який визначає об'єм тривимірної області, що обмежена зверху поверхнею $f(x,y)$ та опирається на елементарний прямокутник $\Delta x\Delta y$.

Щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин має такі властивості.

1. *Щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин є невід'ємною функцією, тобто* $f(x,y)\geq 0$.

Ця властивість випливає з першої властивості функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин.

2. *Якщо відома* $f(x,y)$, *то функція розподілу визначається виразом*

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\quad dxdy \tag{7.11}$$

згідно з (7.10).

3. *Властивість нормування полягає в тому, що*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\quad dxdy=1. \tag{7.12}$$

Дійсно, з властивості (7.8) функції розподілу та (7.11) маємо

$$F(\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1.$$

4. *Якщо відомий закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин у вигляді щільності ймовірностей, то можуть бути визначені щільності ймовірностей кожної з випадкових величин, які складають систему* $\{X,Y\}$ *згідно з виразами*

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\;;\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx. \tag{7.13}$$

Дійсно, із (7.11) та (7.9) маємо

$$F(x,\infty)=F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy\ ;$$

$$F(\infty,y)=F_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dxdy\ .$$

Після визначення похідних відповідно за змінними x та y отримаємо:

$$F'_x(x)=\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\right)dx\right)'_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\ ;$$

$$F'_Y(y)=\left(\int\limits_{-\infty}^{y}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\right)dy\right)'_y=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\ .$$

З геометричного тлумачення щільності ймовірностей (7.10) видно, що якщо $f(x,y)dxdy$ є елементом імовірностей, то для довільної області D, яка має аналітичний опис границі та не має внутрішніх вирізів, справедливий вираз

$$P\left(\{X,Y\}\subset D\right)=\iint\limits_{(D)}f(x,y)\,dxdy\ . \qquad (7.14)$$

Співвідношення (7.14) дозволяє визначити запис для ймовірності події, яка полягає в тому, що випадкова точка $\{X,Y\}$ належить області прямокутника, що обмежений прямими $x=a$, $x=b$ та $y=c$, $y=d$, а саме

$$P\left(\{X,Y\}\subset D\}\right)=\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d}f(x,y)\,dydx\ . \qquad (7.15)$$

Цей результат може бути отриманий, якщо виходити із тлумачення геометричного змісту функції розподілу системи двох неперервних випадкових величин і (7.11). На рис. 7.2 зображена зазначена вище прямокутна область *D*.

Маємо $P\left(\{X,Y\}\subset D\right)=$

$$=P\left(a\le X<b,c\le Y<d\right)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)=$$

$$= \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f(x,y)\,dydx - \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{d} f(x,y)\,dydx - \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{c} f(x,y)\,dydx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{c} f(x,y)\,dydx = \int_{a}^{b}\int_{-\infty}^{d} f(x,y)\,dydx - \int_{a}^{b}\int_{-\infty}^{c} f(x,y)\,dydx = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dydx.$$

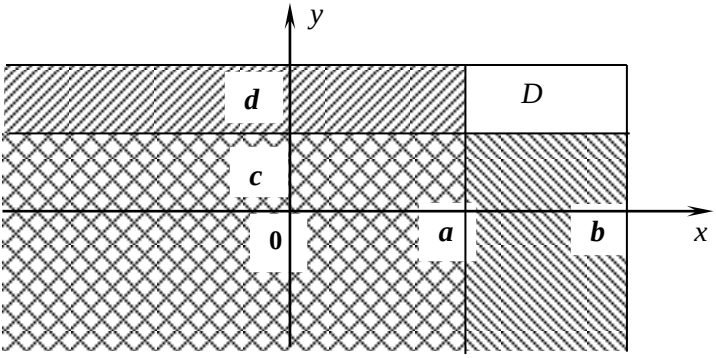


Рис. 7.2. Визначення $P\left(\{X,Y\} \subset D\right)$

Якщо область D має внутрішні вирізи або не має аналітичного виразу її границі, то ймовірність влучення випадкової точки в таку область D може бути визначена наближено. Область D розбивають на області прямокутників так, що

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D^{(i)}, \quad D^{(i)} \cap D^{(j)} = \emptyset,$$

де $\emptyset$ – пуста множина.

Тоді ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область

$$D^{(i)} \in P_i\left(\{X,Y\} \in D^{(i)}\right),$$

а ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область D визначиться як

$$P\left(\{X,Y\} \in D\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i\left(\{X,Y\} \in D^{(i)}\right)$$

Примітка. Для системи n випадкових величин $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ під функцією розподілу розуміють таку функцію n дійсних змінних, яка чисельно дорівнює ймовірності одночасної появи подій $A_i = \{X_i < x_i\}$, $i=\overline{1,n}$, тобто

$$F\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n\right) =$$

$$= P\left(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_i < x_i, ..., X_n < x_n\right).$$

Геометричне тлумачення функції розподілу системи n випадкових величин є ймовірністю випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова n-вимірна точка належить n-вимірному паралелепіпеду, для якого ребра є паралельними осям координат в n-вимірному просторі.

Щодо властивостей функції розподілу системи $\left\{X_i\right\}$, $i = \overline{1,n}$, то слід відзначити таке.

1. Функція розподілу $F\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, ..., x_n\right)$ є функцією розподілу системи $\left(n-1\right)$ випадкових величин, а функція розподілу $F\left(\infty, \infty, ..., x_i, \infty, ..., \infty\right)$ є функцією розподілу випадкової величини X_i, яка входить до системи $\left\{X_i\right\}$, $i = \overline{1,n}$.

2. $F\left(+\infty, +\infty, ..., +\infty\right) = 1$.

3. $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) = 0$; $i, k = \overline{1,n}$; $k \le i$ при довільних значеннях інших змінних.

4. Функція розподілу є неспадною функцією щодо кожної змінної або щодо будь-якої їх сукупності $k \le i$; $i, k = \overline{1,n}$.

Означення функції розподілу та її властивості справедливі як для системи n неперервних випадкових величин, так і для системи n дискретних випадкових величин.

Якщо існує така $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$, за якої

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

то $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ є функцією щільності ймовірностей системи неперервних n випадкових величин, тобто

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) = \frac{\partial^{(n)} F\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_i ... \partial x_n}.$$

Розмірність функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ є оберненою до розмірності добутку $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Щільність ймовірностей має такі властивості.

1. Щільність ймовірностей системи n неперервних випадкових величин є невід'ємною, тобто

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) \geq 0 .$$

2. Функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ може бути функцією щільності неперервної системи n випадкових величин, якщо вона відповідає умові нормування, а саме

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... dx_i ... dx_n = 1 .$$

3. Якщо n-вимірна область G не має вирізів та може бути описана її границя, то

$$P\left(\left\{X_i\right\}_n \subset G\right) = \int\limits_{(G)}\int\cdots\int f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) dx_1 dx_2 ... \ dx_n ,$$

де інтегрування розглядається по області G.

Задача 7.1. Система неперервних випадкових величин $\left\{X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n\right\}$ має рівномірний закон розподілу в n-вимірному паралелепіпеді $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = \overline{1,n}$. Визначити щільність ймовірностей та функцію розподілу системи випадкових величин $\left\{X_i\right\}, i = \overline{1,n}$.

Розв'язання. При означенні неперервного закону рівномірного розподілу маємо

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{V} & \text{при} \quad \left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) \subset G; \\ 0 & \text{при} \quad \left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) \not\subset G, \end{cases}$$

де G – n-вимірний паралелепіпед об'єму

$$V = \prod_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i} dx_i = \prod_{i=1}^{n}\left(b_i - a_i\right).$$

Щільність ймовірностей X_i, $i = \overline{1,n}$ випадкової величини має вигляд

$$f_{X_i}(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{b_i-a_i} & \text{при} \quad x_i\in(a_i,b_i);\\ 0 & \text{при} \quad x_i\notin(a_i,b_i),\end{cases}$$

а тоді

$$f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i),$$

якщо випадкові величини X_i, $i=\overline{1,n}$ є незалежними.

Функція розподілу системи $\{X_i\}, i=\overline{1,n}$ визначається з виразу

$$F(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x_i),$$

де

$$F_{X_i}(x_i)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x_i<a_i;\\ \dfrac{x_i-a_i}{b_i-a_i} & \text{при} \quad a_i\le x_i\le b_i;\ i=\overline{1,n};\\ 1 & \text{при} \quad x_i>b_i.\end{cases}$$

7.2 Залежність випадкових величин

Випадкові величини X та Y, які складають систему двох випадкових величин $\{X,Y\}$, можуть бути залежними або незалежними.

Випадкові величини X та Y є залежними, якщо закон розподілу однієї з них залежить від того, яке можливе значення прийняла друга випадкова величина.

Випадкові величини X та Y є незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке можливе значення прийняла друга випадкова величина.

Залежним випадковим величинам відповідають умовні закони розподілу, а незалежним – безумовні закони розподілу. Так $F\left(x/y\right)$ є умовною функцією розподілу випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y прийняла своє можливе значення y. Аналогічний зміст має $F\left(y/x\right)$ – умовна функція розподілу випадкової величини Y. У відповідності

до означення функції щільності неперервної випадкової величини X, яка входить до системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$, маємо

$$F_x'\left(x/y\right) = f\left(x/y\right),$$

де $f\left(x/y\right)$ – умовна щільність випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y прийняла своє можливе значення y. Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $F_X(x), F_Y(y), f_X(x), f_Y(y)$ – відповідні безумовні функції розподілу та безумовні щільності розподілу випадкових величин X та Y, які складають систему випадкових величин $\{X,Y\}$.

Визначимо співвідношення, які пов'язують закон розподілу системи $\{X,Y\}$ та закон розподілу випадкових координат X та Y.

З цією метою введемо до розгляду подію D, яка полягає в тому, що випадкова точка $\{X,Y\}$ буде належати елементарному прямокутнику $dxdy$, тобто $D = \{\{X,Y\} \in dx\,dy\}$, та події A і B, які полягають в тому, що випадкові величини X та Y будуть належати елементарним відрізкам dx і dy, тобто

$$A = \{x < X < x + d\,x\} \;\; i \;\; B = \{y < Y < y + dy\}.$$

Тоді, враховуючи відзначений вище геометричний зміст щільності системи двох випадкових величин маємо

$$P(D) = f(x,y)\,dxdy = P(AB) = P\left[(x < X < x + dx)(y < Y < y + dy)\right] =$$

$$= P(A)P\left(B/A\right) = P(x < X < x + dx)\,P(y < Y < y + dy / x < X < x + dx) =$$

$$= P(B)P\left(A/B\right) = P(y < Y < y + dy)\,P(x < X < x + dx / y < Y < y + dy) =$$

$$= f_X(x)\;\; dxf\left(y/x\right)dy = f_Y(y)\;\; dyf\left(x/y\right)dx,$$

де використовується відома формула для добутку двох залежних випадкових подій.

Звідси

$$f(x,y) = f_X(x)\,f\left(y/x\right); \qquad (7.16)$$
$$f(x,y) = f_Y(y)\,f\left(x/y\right).$$

Із (7.16) та (7.13) випливає, що

$$f\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy};$$
$$f\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy}. \qquad (7.17)$$

Тобто якщо відомий закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$ у вигляді щільності ймовірностей, то можуть бути визначені умовні закони розподілу складових систем у вигляді умовних їх щільностей.

Виходячи з визначення незалежності випадкових величин, які складають систему, маємо таке:

$$f\left(x/y\right)=f_X(x)\quad,\quad f\left(y/x\right)=f_Y(y);$$

тоді
$$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y). \qquad (7.18)$$

Співвідношення (7.18) доцільно використовувати при розв'язанні задач, які пов'язані з визначенням залежності чи незалежності випадкових величин, що складають систему неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$, а саме: якщо має місце (7.18), то випадкові величини X та Y є незалежними, якщо (7.18) не виконується, то X та Y є залежними.

Задача 7.2. Визначити залежність випадкових величин X та Y, що складають систему $\{X,Y\}$, підпорядковану рівномірному закону розподілу в області D □, яка утворена прямими: $x=a$; $x=b$; $y=c$; $y=d$.

Розв'язання. Область D подана на рис. 7.2.

Для рівномірного закону розподілу системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$ маємо

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{при}\quad \{X,Y\}\in D;\\ 0 & \text{при}\quad \{X,Y\}\notin D.\end{cases}$$

З (7.13) визначимо безумовні закони розподілу випадкових величин X та Y, а саме:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,dy = \frac{1}{b-a};$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,dx = \frac{1}{d-c}.$$

Тоді $$f(x,y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} = f_X(x)\,f_Y(y) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{d-c}.$$

Це дозволяє стверджувати, що випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, що має рівномірний закон розподілу в області зазначеного прямокутника, є незалежними.

Задача 7.7. Визначити залежність випадкових величин X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, підпорядковану рівномірному закону розподілу в області D_0, що описана колом з радіусом r, центр якого розташовується в точці ($x = 0$, $y = 0$).

Розв'язання. Область D_0 зображена на рис. 7.3.

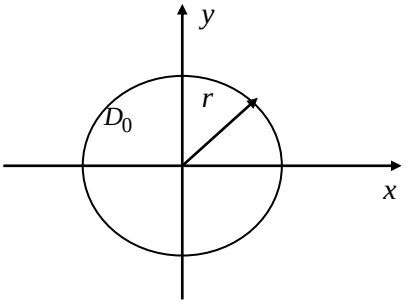


Рис. 7.3. Область $D_0 = \{x^2 + y^2 \le r^2\}$.

За умовою задачі маємо

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} & \text{при} \quad \{X,Y\} \in D_0 = \left\{x^2 + y^2 \le r^2\right\}; \\ 0 & \text{при} \quad \{X,Y\} \notin D_0 = \left\{x^2 + y^2 \le r^2\right\}. \end{cases}$$

Тоді $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}\,dy = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2};$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{\pi r^2}\,dx = \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}.$$

Виходить, у відповідності з (7.18) маємо

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi r^2} \neq f_X(x)\,f_Y(y) = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\cdot\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2},$$

тобто випадкові величини X та Y, які складають систему $\{X,Y\}$, підпорядковану рівномірному закону розподілу в області D_0, є залежними.

Якщо випадкові величини, що складають системи двох дискретних випадкових величин, є незалежними, то

$$P_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right)P\left(Y = y_j\right), \tag{7.19}$$

а якщо випадкові величини є залежними, то

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \\ &= P\left(X = x_i\right)P\left(Y = y_j \,/\, X = x_i\right) = P\left(Y = y_j\right)P\left(X = x_i \,/\, Y = y_j\right). \end{aligned} \tag{7.20}$$

Тоді умовні ймовірності як ймовірності умовних випадкових подій $\left\{X = x_i \,/\, Y = y_j\right\}$ та $\left\{Y = y_j \,/\, X = x_i\right\}$ визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} P\left(X = x_i \,/\, Y = y_j\right) &= \frac{P_{ij}}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)}; \\ P\left(Y = y_j \,/\, X = x_i\right) &= \frac{P_{ij}}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Задача 7.4. Для системи двох дискретних випадкових величин, закон розподілу якої наведений в табл. 7.4, визначити безумовні закони розподілу випадкових величин X та Y. Установити, чи є випадкові величини залежними, а в разі їх залежності визначити їх умовні закони розподілу.

Таблиця 7.4

Закон розподілу $\{X, Y\}$

y_j \ x_i	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Розв'язання. Безумовні закони розподілу визначаються з (7.3) та (7.4), а саме:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \; ; \quad P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} P_{ij} \; .$$

У табл. 7.5 поданий безумовний закон розподілу випадкової величини X, а в табл. 7.6 – безумовний закон розподілу випадкової величини Y.

Таблиця 7.5

Закон розподілу X

x_i	2	5	8
$P(X = x_i)$	0,2	0,42	0,38

Таблиця 7.6

Закон розподілу Y

y_j	0,4	0,8
$P(Y = y_j)$	0,8	0,2

З (7.19) визначимо, чи є незалежними випадкові величини X та Y.

Маємо

$$P(X = 2, Y = 0,4) = 0,15 \neq 0,2 \cdot 0,8 = 0,16 \; ;$$

$$P(X = 2, Y = 0,8) = 0,05 \neq 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \; ;$$

$$P(X = 5, Y = 0,4) = 0,3 \neq 0,42 \cdot 0,8 = 0,336 \; ;$$

$$P(X = 5, Y = 0,8) = 0,12 \neq 0,42 \cdot 0,2 = 0,084 \; ;$$

$$P(X = 8, Y = 0,4) = 0,35 \neq 0,38 \cdot 0,8 = 0,304 \; ;$$

$$P(X = 8, Y = 0,8) = 0,03 \neq 0,38 \cdot 0,2 = 0,074 \; .$$

Отримані відповіді згідно з (7.19) свідчать про те, що випадкові величини X та Y є залежними. Співвідношення (7.21) визначають умовні закони розподілу випадкової величини X за умови, що $Y = 0{,}4$. Цей закон розподілу наведений в табл. 7.7.

Таблиця 7.7

Умовний закон розподілу $X/_{Y=0,4}$

$x_i/_{Y=0,4}$	2	5	8
$P\left(x_i/_{Y=0,4}\right)$	0,1875	0,375	0,475

У табл. 7.8 визначений умовний закон розподілу випадкової величини X за умови, що $Y = 0{,}8$.

Таблиця 7.8

Умовний закон розподілу $X/_{Y=0,8}$

$x_i/_{Y=0,8}$	2	5	8
$P\left(x_i/_{Y=0,8}\right)$	0,25	0,6	0,15

Аналогічно за (7.21) визначаються умовні закони розподілу випадкової величини Y за умови, що $X = 2;\ X = 5;\ X = 8$.

Примітка. Випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$, які складають n-вимірну систему неперервних випадкових величин $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$, називаються залежними, якщо закон розподілу будь-якої з них $X_j, j = 1,n$ залежить від того, які значення приймають інші випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n};\ i \neq j$.

Якщо випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$ є залежними, то

$$f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1)\, f\left(x_2/_{x_1}\right) f\left(x_3/_{x_1x_2}\right) f\left(x_4/_{x_1x_2x_3}\right) \times \\ \times ... \times f\left(x_i/_{x_1x_2...x_{i-1}}\right) \times ... \times f\left(x_n/_{x_1x_2...x_{n-1}}\right), \tag{7.22}$$

а якщо випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$ є незалежними, то

$$f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i). \tag{7.23}$$

7.3 Числові характеристики випадкових величин, які складають систему випадкових величин

Детально розглянемо числові характеристики двовимірного випадкового вектору $\{X, Y\}$.

Під числовими характеристиками двовимірної системи випадкових величин розуміють початкові й центральні моменти всіх порядків, а саме:

$$\alpha_{r,s} = M\left[X^r Y^s\right]; \tag{7.24}$$

$$\mu_{r,s} = M\left[\overset{o}{X}^r \overset{o}{Y}^s\right], \tag{7.25}$$

де $\overset{o}{X} = X - M[X]$, $\overset{o}{Y} = Y - M[Y]$ – центровані випадкові величини та розглядається початковий момент порядку r відносно випадкової величини X та порядку s відносно випадкової величини Y, а також розглядається центрований момент порядку r відносно центрованої випадкової величини $\overset{o}{X}$ та порядку s відносно центрованої випадкової величини $\overset{o}{Y}$.

Безпосередній підрахунок $\alpha_{r,s}$ та $\mu_{r,s}$ для систем двох дискретних і неперервних випадкових величин виконується за формулами вигляду

$$\alpha_{r,s} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i^r y_j^s P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x,y)\,dxdy; \end{cases} \tag{7.26}$$

$$\mu_{r,s} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} (x_i - m_x)^r (y_j - m_y)^s P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^r (y - m_y)^s f(x,y)\,dxdy. \end{cases} \tag{7.27}$$

Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то

$$\alpha_{r,s} = \alpha_r(X)\alpha_s(Y);$$

$$\mu_{r,s} = \mu_r(X)\mu_s(Y),$$

оскільки $\alpha_{r,s} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i^r y_j^s P_i P_j = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^r P_i \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^s P_j = \alpha_r(X)\alpha_s(Y); \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f_X(x) f_Y(y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\,dx \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^s f_Y(y)\,dy = \alpha_r(X)\ \alpha_s(Y). \end{cases}$

Якщо розглядається система двох дискретних незалежних випадкових величин, то центральний момент порядку (r,s) має вигляд

$$\mu_{r,s} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - m_x)^r (y_j - m_y)^s P_i P_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(x_i - m_x)^r P_i \sum_{j=1}^{n}(y_j - m_y)^s P_j = \mu_r(X)\mu_s(Y),$$

а якщо розглядається система двох неперервних випадкових величин, то центральний момент порядку (r,s) має вигляд

$$\mu_{r,s} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^r (y - m_y)^s f_X(x) f_Y(y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^r f_X(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)^s f_Y(y)\,dy = \mu_r(X)\mu_s(Y).$$

Із (7.26) та (7.27) маємо $\alpha_{0,0} = \mu_{0,0} = 1$, оскільки

$$\alpha_{0,0} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i^0 y_j^0 P_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij} = 1; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^0 y^0 f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1; \end{cases}$$

$$\mu_{0,0} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i - m_x)^0 (y_j - m_y)^0 P_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij} = 1; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^0 (y - m_y)^0 f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1, \end{cases}$$

а $\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0$, тому що

$$\mu_{1,0} = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i - m_x)^1 (y_j - m_y)^0 P_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i - m_x) P_{ij} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_y - m_x)(y - m_y)^0 f(x,y)\,dxdy = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x) f(x,y)\,dxdy \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i P_{ij} - m_x \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij} = m_x - m_x = 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,dxdy - m_x \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = m_x - m_x = 0; \end{array} \right.$$

$$\mu_{0,1} = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i - m_x)^0 (y_j - m_y) P_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} y_j P_{ij} - m_y \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij} = \\ = m_y - m_y = 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^0 (y - m_y) f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,dxdy - \\ -m_y \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 0. \end{array} \right.$$

При розв'язанні практичних задач, які пов'язані з розгляданням системи двох випадкових величин, використовуються початкові моменти $\alpha_{1,0}$ та $\alpha_{0,1}$, а також центральні моменти $\mu_{2,0}; \mu_{0,2}; \mu_{11}$.

Розрахунок початкових моментів випливає з їхнього визначення за формулами (7.24) та із (7.26), тобто

$$\alpha_{1,0} = M\left[X^1 Y^0\right] = M[X] = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i P_{ij}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,dxdy; \end{array} \right. \qquad (7.28)$$

$$\alpha_{0,1} = M\left[X^0 Y^1\right] = M\left[Y\right] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j P_{ij}; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf\left(x,y\right)dxdy. \end{cases} \tag{7.29}$$

Тобто початковий момент $\alpha_{1,0}$ є математичним сподіванням випадкової величини X, а початковий момент $\alpha_{0,1}$ є математичним сподіванням випадкової величини Y. Значення $M\left[X\right] = m_x$, $M\left[Y\right] = m_y$ є координатами точки $\left(m_x, m_y\right)$, відносно якої розсіюються можливі значення $\left(x_i, y_j\right), i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ системи випадкових величин $\left\{X, Y\right\}$. Це зображено на рис. 7.4.

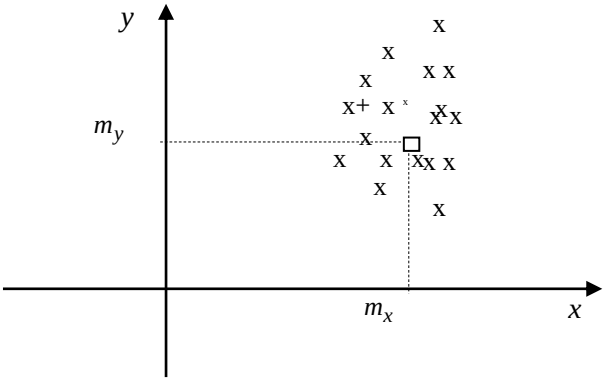


Рис. 7.4. Геометричне тлумачення змісту математичних сподівань випадкових величин X та Y, які складають систему $\left\{X, Y\right\}$

Розглянемо центральні моменти.

Центральні моменти $\mu_{2,0}$ та $\mu_{0,2}$ за визначенням (7.25) є відповідно дисперсіями випадкових величин X та Y і характеризують, як це відомо виходячи з фізичного змісту дисперсії випадкової величини, розсіювання можливих значень системи $\left\{X, Y\right\}$ відносно точки $\left(m_x, m_y\right)$.

Із (7.25) і (7.27) видно, що вирази для визначення дисперсій випадкових величин X та Y, які входять до системи $\left\{X, Y\right\}$ дискретних чи неперервних випадкових величин, мають вигляд

$$\mu_{2,0} = M\left[\overset{\circ}{X}^2 \overset{\circ}{Y}^0\right] = D[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - m_x)^2 P_{ij}; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x,y)\,dxdy; \end{cases} \tag{7.30}$$

$$\mu_{0,2} = M\left[\overset{\circ}{X}^0 \overset{\circ}{Y}^2\right] = D[Y] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_i - m_y)^2 P_{ij}; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)^2 f(x,y)\,dxdy; \end{cases}$$

Центральний момент

$$\mu_{11} = R_{XY} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right]$$

називають кореляційним (автокореляційним) моментом випадкових величин X і Y, які складають систему $\{X, Y\}$.

Він характеризує наявність і тісноту кореляційного зв'язку між випадковими величинами X і Y.

У відповідності до (7.27) кореляційний момент визначається для системи двох дискретних і неперервних випадкових величин такими виразами:

$$\mu_{11} = R_{XY} = R_{YX} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)P_{ij}; \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y) f(x,y)\,dxdy. \end{cases} \tag{7.31}$$

У п. 7.2 визначене поняття залежності випадкових величин X і Y, які складають систему на рівні їх безумовних чи умовних законів розподілу. Поняття корельованості випадкових величин визначається за числовою характеристикою R_{XY}. Тому в загальному випадку, коли розглядається система $\{X, Y\}$, яка підпорядкована будь-якому закону розподілу, з наявності корельованості випадкових величин не можна робити висновки щодо залежності випадкових величин X і Y.

Якщо $R_{XY} = 0$, то випадкові величини X і Y є некорельованими. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то таке твердження є необхідним і достатнім для висновку щодо їх некорельованості, а якщо випадкові

величини є некорельованими, то це не означає, що вони незалежні. Для підтвердження цього розглянемо наступну задачу.

Задача 7.5. Система двох випадкових величин X і Y підпорядкована рівномірному закону розподілу в області кола одиничного радіуса. Установити, чи є залежними ці випадкові величини та яке значення має кореляційний момент.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & \text{при} \quad \{X,Y\}\in D;\\ 0 & \text{при} \quad \{X,Y\}\notin D,\end{cases}$$

де область D зображена на рис. 7.5.

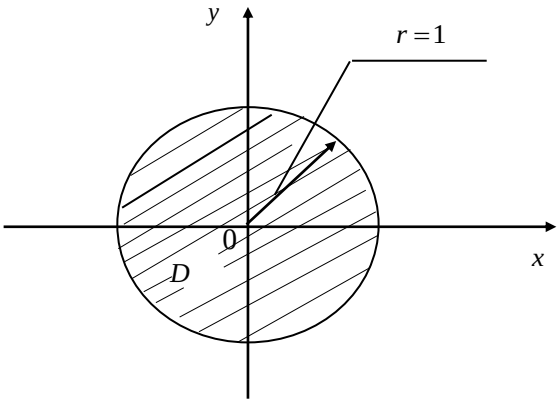


Рис. 7.5. Область кола одиничного радіуса

Рівнянням кола, яке оточує область D, є $x^2+y^2=1$. Відомо, що випадкові величини X і Y, які складають систему, є незалежними, якщо $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$, а також відомо, що

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy;$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

У нашому випадку маємо

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi};$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}.$$

Тоді

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\neq f_X(x)\,f_Y(y)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}.$$

Це означає, що випадкові величини є залежними. Визначимо кореляційний момент. Маємо

$$R_{XY}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\left(x^2+y^2\le 1\right)}xydxdy,$$

оскільки

$$m_x=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\left(x^2+y^2\le 1\right)}xdxdy=\left|\begin{matrix}x=\rho\cos\phi\\ dxdy=\rho d\rho d\phi\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho^2\cos\phi d\rho d\phi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\rho^2 d\rho\int\limits_0^{2\pi}\cos\phi d\phi=\frac{1}{\pi}\frac{\rho^3}{3}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\sin\phi\left|\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix}\right.=0;$$

$$m_y=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\left(x^2+y^2\le 1\right)}ydxdy=\left|\begin{matrix}y=\rho\sin\phi\\ dxdy=\rho d\rho d\phi\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\rho^2 d\rho\int\limits_0^{2\pi}\sin\phi d\phi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\rho^3}{3}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.(-\cos\phi)\left|\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix}\right.=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\left[-(\cos 2\pi-\cos 0)\right]=0.$$

$$R_{XY}=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\left(x^2+y^2\le 1\right)}xydxdy=\left|\begin{matrix}x=\rho\cos\phi\\ y=\rho\sin\phi\\ dxdy=\rho d\rho d\phi\end{matrix}\right|=$$

Тоді $$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin\phi\cos\phi d\phi = \frac{1}{\pi}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 \int_0^0 \sin\phi d\left(\sin\phi\right) = 0 .$$

При розв'язанні цієї задачі ми з'ясували, що випадкові величини є залежними, а їх кореляційний момент дорівнює нулю, тобто з некорельованості не випливає висновок про незалежності випадкових величин.

Розглянемо ще одну задачу.

Задача 7.6. Нехай випадкова величина X має $m_x = 0$ та її закон розподілу є симетричним. Нехай $Y = X^2$. Визначити кореляційний момент $\{X, Y\}$.

Розв'язання. Визначимо математичне сподівання випадкової величини Y, маємо

$$M[Y] = M\left[X^2\right] = \sigma_x^2 .$$

Тоді

$$R_{XY} = M\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right] = M\left[X\left(X^2 - \sigma_x^2\right)\right] =$$

$$= M\left[X^3\right] - M\left[X\sigma_x^2\right] = M\left[X^3\right] - \sigma_x^2 M[X] = M\left[X^3\right] = \mu_3(X) .$$

А оскільки закон розподілу випадкової величини є симетричним, то центральний її момент третього порядку $\mu_3(X) = 0$.

Дійсно, нехай випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0, \sigma_x = 1$, тоді

$$\mu_3(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \int u dv = vu - \int v du \\ u = x^2 \quad du = 2xdx \\ dv = e^{\frac{-x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad v = e^{\frac{-x^2}{2}} \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2\int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{-x^2}{2}} dx \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2} \right) \right) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0 .$$

Розв'язання цієї задачі дає можливість визначити, що некорельовані випадкові величини можуть бути навіть функціонально пов'язані. Значення R_{XY} свідчить про тісноту кореляційного зв'язку. Із (7.30) видно, що кореляційний момент має розмірність, яка визначається добутком розмірностей випадкових величин X і Y. Тому для визначення наявності корельованості та її тісноти використовують коефіцієнт кореляції.

Для визначення виразу для коефіцієнта кореляції розглянемо кореляційний момент нормованих випадкових величин

$$X^* = \frac{X - m_x}{\sigma_x};$$

$$Y^* = \frac{Y - m_y}{\sigma_y}.$$

Для X^* і Y^* визначимо математичні сподівання та дисперсії.

$$M\left[X^* \right] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} \right] = \frac{1}{\sigma_x} M\left[X - m_x \right] = \frac{1}{\sigma_x} \left(m_x - m_x \right) = 0;$$

$$M\left[Y^* \right] = M\left[\frac{Y - m_y}{\sigma_y} \right] = \frac{1}{\sigma_y} M\left[Y - m_y \right] = \frac{1}{\sigma_y} \left(m_y - m_y \right) = 0;$$

$$D\left[X^* \right] = D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} \right] = \frac{1}{\sigma_x^2} D\left[X - m_x \right] = \frac{1}{\sigma_x^2} \left[D[X] - 0 \right] = 1;$$

$$D\left[Y^* \right] = D\left[\frac{Y - m_y}{\sigma_y} \right] = \frac{1}{\sigma_y^2} D\left[Y - m_y \right] = \frac{1}{\sigma_y^2} \left[D[Y] - 0 \right] = 1.$$

Тоді

$$R_{X^*Y^*} = M\left[\left(X^* - m_x * \right) \left(Y^* - m_y * \right) \right] = M\left[X^* Y^* \right] =$$

$$= M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x} \frac{Y - m_y}{\sigma_y} \right] = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} M\left[\left(X - m_x \right) \left(Y - m_y \right) \right] = \frac{R_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Кореляційний момент X^* і Y^* називають коефіцієнтом кореляційного зв'язку випадкових величин X і Y, тобто

$$r_{xy} = \frac{R_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Для визначення значень r_{xy} розглянемо таке.

Нехай для системи випадкових величин $\{X, Y\}$ $Y = \alpha X + \beta$, тоді

$$D[Y] = D[\alpha X + \beta] = \alpha^2 D[X]; \quad \sigma_y = |\alpha| \sigma_x,$$

$$R_{XY} = M\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right] = M\left[\left(X - m_x\right)\left(\alpha X + \beta - \left(\alpha m_x + \beta\right)\right)\right] =$$

$$= M\left[\left(X - m_x\right)\alpha\left(X - m_x\right)\right] = \alpha M\left[\left(X - m_x\right)^2\right] = \alpha \sigma_x^2.$$

Маємо

$$r_{xy} = \frac{R_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\alpha \sigma_x^2}{\sigma_x |\alpha| \sigma_x} = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Звідси, якщо $\alpha > 0$, то $r_{xy} = 1$, якщо $\alpha < 0$, то $r_{xy} = -1$.

Виходить, якщо $r_{xy} = \pm 1$, то коефіцієнт кореляції характеризує лінійну залежність між випадковими величинами, а саме тоді $Y = \alpha X + \beta$, де α і β є невипадковими величинами.

Далі розглянемо випадкову величину

$$Z = \frac{1}{\sigma_x} X \pm \frac{1}{\sigma_y} Y,$$

для якої визначимо дисперсію. Маємо

$$D[Z] = D\left[\frac{1}{\sigma_x} X \pm \frac{1}{\sigma_y} Y\right] = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X] + \frac{1}{\sigma_y^2} D[Y] \pm 2 R_{\hat{X}\hat{Y}},$$

де $$\hat{X} = \frac{1}{\sigma_x} X, \ \hat{Y} = \frac{1}{\sigma_y} Y,$$

$$M\left[\hat{X}\right] = M\left[\frac{1}{\sigma_x} X\right] = \frac{1}{\sigma_x} M[X]; \quad M\left[\hat{Y}\right] = M\left[\frac{1}{\sigma_y} Y\right] = \frac{1}{\sigma_y} M[Y].$$

Тоді

$$D[Z]=1+1\pm 2R_{\hat{X}\hat{Y}}=2\pm 2M\left[\ \left(\hat{X}-m_{\hat{x}}\right)\left(\hat{Y}-m_{\hat{y}}\right)\ \right]=$$

$$=2\pm 2M\left[\left(\frac{1}{\sigma_x}X-\frac{1}{\sigma_x}m_x\right)\left(\frac{1}{\sigma_y}Y-\frac{1}{\sigma_y}m_y\right)\right]=$$

$$=2\pm 2\frac{1}{\sigma_x\sigma_y}M\left[\left(X-m_x\right)\left(Y-m_y\right)\right]=2\pm 2r_{xy}=2\left(1\pm r_{xy}\right).$$

З цього результату видно, що оскільки $D[Z]\geq 0$, то $\left|r_{xy}\right|\leq 1$.

Викладене вище дозволяє стверджувати, що якщо $r_{xy}=0$, то випадкові величини X і Y, які складають систему $\{X,Y\}$, є некорельованими; якщо $r_{xy}=\pm 1$, то між випадковими величинами існує лінійна функціональна залежність; якщо $r_{xy}>0$, то між випадковими величинами існує невід'ємний кореляційний зв'язок, якщо $r_{xy}<0$, то між випадковими величинами існує від'ємний кореляційний зв'язок.

Вище відзначено, що для системи двох неперервних випадкових величин $\{X,Y\}$, коли випадкові величини є залежними, з (7.17) можуть бути визначені умовні закони розподілу $f\left(x/y\right)$ та $f\left(y/x\right)$, а для системи двох дискретних випадкових величин умовні ймовірності $P\left(X=x_i/Y=y_j\right)$ та $P\left(Y=y_j/X=x_i\right)$ можуть бути визначені з (7.21).

Тоді має сенс говорити про умовні математичні сподівання для випадкової величини X за умови, що випадкова величина $Y=y$, та для випадкової величини Y за умови, що випадкова величина $X=x$, які для системи двох дискретних та неперервних випадкових величин визначаються за формулами вигляду

$$M_y[X]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_iP_i\left(X=x_i/Y=y_j\right);\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}xf\left(x/y\right)dx;\end{cases}\qquad(7.32)$$

$$M_x[Y]=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} y_j P_j\left(Y=y_j \middle/ X=x_i\right);\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f(y/x)\,dy.\end{cases} \tag{7.33}$$

Співвідношення для визначення умовних дисперсій мають вигляд

$$\begin{aligned} D_y[X]&=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\left[x_i-M_y[X]\right]^2 P_i\left(X=x_i \middle/ Y=y_j\right);\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x-M_y[X]\right]^2 f(x/y)\,dx;\end{cases}\\ D_x[Y]&=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\left[y_j-M_x[Y]\right]^2 P_j\left(Y=y_j \middle/ X=x_j\right);\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[y-M_x[Y]\right]^2 f(y/x)\,dy.\end{cases}\end{aligned} \tag{7.34}$$

Як видно з (7.32) та (7.33), $M_y[X]=\phi(y)$ і $M_x[Y]=f(x)$. Визначається, що $M_y[X]=\phi(y)$ – лінія регресії X на Y, а $M_x[Y]=f(x)$ – лінія регресії Y на X. Лінія регресії X на Y та Y на X не збігаються.

Примітка. Для систем n випадкових дискретних та неперервних величин $\{X_i\}$, де $i=\overline{1,n}$, початковий момент порядку $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ визначається виразом

$$\alpha_{S_1,S_2,\ ...,\ S_n}=M\left[X_1^{S_1}X_2^{S_2}...X_n^{S_{n1}}\right]=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{k_1=1}^{m_1}\sum\limits_{k_2=1}^{m_2}\cdots\sum\limits_{k_n=1}^{m_n}\left(x_{k_1}^{(1)}\right)^{S_1}\left(x_{k_2}^{(2)}\right)^{S_2}\cdots\left(x_{k_n}^{(n)}\right)^{S_n}P_{k_1k_2\ldots k_n};\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^{S_1}x_2^{S_2}\ldots x_n^{S_n}f(x_1,x_2,\ ...,x_n)\,dx_1dx_2...dx_n,\end{cases}$$

а центральний момент порядку $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ визначається виразом

$$\mu_{S_1,S_2,...,S_n}=M\left[\left(X_1-m_{x_1}\right)^{S_1}\left(X_2-m_{x_2}\right)^{S_2}\ldots\left(X_n-m_{x_n}\right)^{S_n}\right]=$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k_1=1}^{m_1} \sum\limits_{k_2=1}^{m_2} \cdots \sum\limits_{k_n=1}^{m_n} \left(x_{k_1}^{(1)} - m_{x_1} \right)^{S_1} \left(x_{k2}^{(2)} - m_{x_2} \right)^{S_2} \ldots \left(x_{k_n}^{(n)} - m_{x_n} \right)^{S_n} \times \\ \times P_{k_1 k_2 \ldots k_n}; \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 - m_{x_1} \right)^{S_1} \left(x_2 - m_{x_2} \right)^{S_2} \ldots \left(x_n - m_{x_n} \right)^{S_n} \times \\ \times f\left(x_1, x_2, ..., x_n \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \end{cases}$$

До числових характеристик, що використовуються при розгляді системи n випадкових неперервних величин при вирішенні практичних завдань відносять математичні сподівання та дисперсії окремих випадкових величин, що входять до системи та визначаються за виразами вигляду

$$M\left[X_i \right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i f_{x_i}\left(x_i \right) dx_i;$$

$$D\left[X_i \right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x_i - m_{x_i} \right)^2 f_{x_i}\left(x_i \right) dx_i,$$

де $f_{x_i}\left(x_i \right)$ є щільність ймовірностей випадкової величини X_i та

$$f_{x_i}\left(x_i \right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2, ..., x_n \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Також розглядаються кореляційні моменти будь-яких двох випадкових величин X_υ та X_ξ, що визначаються з виразу

$$R_{X_\upsilon X_\xi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x_\upsilon - m_{x_\upsilon} \right) \left(x_\xi - m_{x_\xi} \right) f_{X_\upsilon X_\xi}\left(x_\upsilon, x_\xi \right) dx_\upsilon dx_\xi,$$

де $$f_{X_\upsilon X_\xi}\left(x_\upsilon, x_\xi \right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2, ..., x_n \right) dx_1 dx_2 \ldots\, dx_{\upsilon-1} \times$$

$$\times dx_{\upsilon+1} \ldots dx_{\xi-1} dx_{\xi+1} \cdots\, dx_n.$$

У цілому для системи $\left\{ X_i \right\}$, $i = \overline{1,n}$ кореляційний зв'язок випадкових величин описується кореляційною матрицею, що має вигляд

$$R = \left\| R_{X_\upsilon X_\xi} \right\| = \begin{pmatrix} R_{X_1X_1} & R_{X_1X_2} & \cdots & R_{X_1X_\xi} & \cdots & R_{X_1X_n} \\ R_{X_2X_1} & R_{X_2X_2} & \cdots & R_{X_2X_\xi} & \cdots & R_{X_2X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{X_\upsilon X_1} & R_{X_\upsilon X_2} & \cdots & R_{X_\upsilon X_\xi} & \cdots & R_{X_\upsilon X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{X_nX_1} & R_{X_nX_2} & \cdots & R_{X_nX_\xi} & \cdots & R_{X_nX_n} \end{pmatrix},$$

для якої $R_{X_\xi X_\upsilon} = D\left[X_\upsilon\right]$, $\upsilon = \overline{1,n}$; $R_{X_\upsilon X_\xi} = R_{X_\xi X_\upsilon}$, тобто по діагоналі кореляційної матриці зазначені дисперсії випадкових величин $\left\{X_i\right\}$, $i = \overline{1,n}$. Кореляційна матриця є симетричною.

Якщо випадкові величини $\left\{X_i\right\}$, $i = \overline{1,n}$, що складають систему, є незалежними, а виходить некорельованими, то матриця R має такий вигляд:

$$R = \begin{pmatrix} D\left[X_1\right] & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D\left[X_2\right] & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D\left[X_i\right] & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & D\left[X_n\right] \end{pmatrix}.$$

Використовують також нормовану кореляційну матрицю, що містить коефіцієнти кореляції та має вигляд

$$R = \left\| r_{x_\upsilon x_\xi} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_\xi} & \cdots & r_{x_1x_n} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \cdots & r_{x_2x_\xi} & \cdots & r_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_\upsilon x_1} & r_{x_\upsilon x_2} & \cdots & r_{x_\upsilon x_\xi} & \cdots & r_{x_\upsilon x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_nx_1} & r_{x_nx_2} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

7.4 Двовимірний нормальний закон розподілу

Відомо, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то щільність ймовірностей визначається виразом

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Для системи двох випадкових величин $\{X,Y\}$ якщо X та Y є незалежними випадковими величинами, то $f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$, тому щільність ймовірностей системи двох випадкових величин $\{X,Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу, визначається виразом

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}= \\ =\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}. \tag{7.35}$$

Вираз (7.35) описує поверхню, для якої максимальне значення $f(x,y)$ досягається в точці (m_x,m_y), а при $x\to-\infty$, або $y\to-\infty$, або при $x\to\infty$ та $y\to\infty$ будемо мати $f(x,y)\to 0$.

Визначимо зміст лінії перерізу поверхні $f(x,y)$ площиною, паралельною xoy. Такі лінії називають лініями сталих щільностей, тобто

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}=c.$$

Маємо

$$e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}=c2\pi\sigma_x\sigma_y.$$

Прологарифмуємо цей вираз при основі e та позначимо

$$\ell n\left(c2\pi\sigma_x\sigma_y\right)=-\frac{\lambda^2}{2}.$$

Тоді

$$-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]=\ell n\left(c2\pi\sigma_x\sigma_y\right)=-\frac{\lambda^2}{2}.$$

Скоротимо на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ і почленно поділимо на λ^2. Тоді маємо, що лінія перерізу визначається виразом

$$\frac{(x-m_x)^2}{(\lambda\sigma_x)^2}+\frac{(x-m_y)^2}{(\lambda\sigma_y)^2}=1. \qquad (7.36)$$

Це є еліпс, центр якого міститься в точці (m_x,m_y), а півосі є кратними середнім квадратичним відхиленням, тобто $a=\lambda\sigma_x$, $b=\lambda\sigma_y$. Такий еліпс (7.36) називають еліпсом розсіювання (розсіювання можливих значень системи $\{X,Y\}$ відносно центра розсіювання (m_x,m_y)), а головні осі, які паралельні осям системи координат, називають осями розсіювання. Якщо $\lambda=3$, то еліпс розсіювання називають повним еліпсом розсіювання, для якого, як це раніше визначало "правило 3σ", $P\left(\{X,Y\}\in D_{ел.р}\right)=0{,}997$, тобто подія, яка полягає в тому, що випадкова точка належить області повного еліпса розсіювання $D_{\text{ел.р}}$, є практично достовірною.

Примітка. Для еліпса розсіювання a та b можуть визначатися через імовірні відхилення E_x та E_y. Якщо $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$, тоді визначають круг розсіювання.

Визначимо ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область D □, що обмежена прямокутником: $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$. Маємо

$$P\left(\{X,Y\}\in D\right)=P\left[(a<X<b)(c<Y<d)\right]=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int_a^b f_X(x)\,dx\int_c^d f_Y(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\int_c^d e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dy=$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x} \right) - \Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x} \right) \right] \left[\Phi\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y} \right) - \Phi\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y} \right) \right],$$

де $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Тобто

$$P\left(\{X,Y\} \in \bar{D} \right) = \left[\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x} \right) - \Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x} \right) \right] \times \left[\Phi\left(\frac{d-m_y}{\sigma_y} \right) - \Phi\left(\frac{c-m_y}{\sigma_y} \right) \right]. \quad (7.37)$$

Розглянемо визначення ймовірностей влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область, обмежену еліпсом розсіювання.

Для довільної області D для системи двох випадкових величин $\{X,Y\}$, підпорядкованої довільному закону розподілу, ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область D визначається з виразу (7.14). У нашому випадку, коли розглядається система $\{X,Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу, а область $D_{ел.р}$ обмежена еліпсом розсіювання, маємо

$$P\left(\{X,Y\} \in D_{\text{ел.р}} \right) = \iint\limits_{\left(D_{\text{ел.р}}\right)} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right]} dxdy,$$

де область $D_{ел.р}$ обмежена еліпсом

$$\frac{(x-m_x)^2}{(\lambda\sigma_x)^2} + \frac{(x-m_y)^2}{(\lambda\sigma_y)^2} = 1.$$

Введемо до розгляду узагальнену полярну систему координат, для якої

$$x - m_x = \lambda\sigma_x \rho \cos\phi;$$

$$y - m_y = \lambda\sigma_y \rho \sin\phi,$$

а модуль Якобіана переходу з прямокутної системи координат до узагальненої полярної системи координат має вигляд

$$|I| = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda\sigma_x \cos\phi & -\lambda\sigma_x \rho \sin\phi \\ \lambda\sigma_y \sin\phi & +\lambda\sigma_y \rho \cos\phi \end{Vmatrix} = \left| \lambda^2 \sigma_x \sigma_y \rho \right|.$$

В узагальненій полярній системі координат рівняння еліпса розсіювання має вигляд

$$\frac{\lambda^2 \sigma_x^2 \rho^2 \cos^2\phi}{\lambda^2 \sigma_x^2} + \frac{\lambda^2 \sigma_y^2 \rho^2 \sin^2\phi}{\lambda^2 \sigma_y^2} = 1;$$

$$\rho^2 \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi \right) = 1; \ \rho^2 = 1; \ \rho = 1.$$

Тоді

$$P\left(\{X, Y\} \in D_{\text{ел.р}} \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left[\frac{\lambda^2 \sigma_x^2 \rho^2 \cos^2\phi}{2\sigma_x^2} + \frac{\lambda^2 \sigma_y^2 \rho^2 \sin^2\phi}{2\sigma_y^2} \right]} \times$$

$$\times \lambda^2 \sigma_x \sigma_y \rho \, d\rho \, d\phi = \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho e^{-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}} d\rho = \lambda^2 \int_0^1 \rho e^{-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}} d\rho =$$

$$= \lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) \int_0^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}} d\left(-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2} \right) = -e^{-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}} \Bigg|_0^{-\frac{\lambda^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Отже,
$$P\left(\{X, Y\} \in D_{\text{ел.р}} \right) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \qquad (7.38)$$

Задача 7.7. Система незалежних випадкових величин $\{X, Y\}$ підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 1$, $m_y = 2$, $E_x = 2$, $E_y = 4$. Визначити ймовірність влучення випадкової точки $\{X, Y\}$ в область, обмежену еліпсом

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

Розв'язання. Якщо заданий еліпс є еліпсом розсіювання, то ймовірність того, що випадкова точка $\{X,Y\}$ належить області D, обмеженій заданим еліпсом, слід визначати з (7.38). Якщо заданий еліпс не є еліпсом розсіювання, то ймовірність події, що визначена в умові задачі, слід визначати з (7.14). Необхідно визначити, чи є заданий еліпс еліпсом розсіювання. Еліпс розсіювання – це такий еліпс, в якого центр визначається точкою (m_x, m_y), а півосі є кратними середнім квадратичним відхиленням σ_x та σ_y випадкових величин X та Y. Маємо $m_x = 1$, $m_y = 2$; виходить, заданий еліпс має центр у точці ($m_x = 1$, $m_y = 2$), тобто центр еліпса збігається з центром розсіювання можливих значень системи $\{X,Y\}$, а

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{\sigma_x^2} = \frac{4}{\left(\frac{2}{0,674}\right)^2} \cong 0,453;$$

$$\lambda^2 = \frac{b^2}{\sigma_y^2} = \frac{16}{\left(\frac{4}{0,674}\right)^2} \cong 0,453,$$

тобто півосі еліпса є кратними σ_x і σ_y, оскільки $E_x \cong 0,674\sigma_x$; $E_y \cong 0,674\sigma_y$. Тоді введена в задачі область D є областю $D_{ел.р}$ еліпса розсіювання та

$$P\left(\{X,Y\} \in D_{\text{ел.р}}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{0,453}{2}} \cong 0,2.$$

Якщо $D_{\text{ел.р}}$ – область, обмежена еліпсом з $\lambda = 1$, то таку область називають областю одиничного еліпса розсіювання, для якого

$$P\left(\{X,Y\} \in D_{ел.р}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \cong 0,394.$$

Примітка. Розглянемо *n*-вимірну систему незалежних величин $\{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, що підпорядкована *n*-вимірному нормальному закону розподілу. Тоді щільність ймовірностей має визначення

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,dx_i =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} e^{-\frac{\left(x_i - m_{x_i}\right)^2}{2\sigma_{x_i}^2}} = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - m_{x_i}\right)^2}{\sigma_{x_i}^2}}, \qquad (7.39)$$

а функція розподілу має визначення

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^{-1} \int_{-\infty}^{x_i} e^{-\frac{\left(x - m_{x_i}\right)^2}{2\sigma_{x_i}^2}} dx_i \,. \qquad (7.40)$$

Перейдемо до розгляду системи двох залежних випадкових величин $\{X, Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу.

Щільність ймовірностей у цьому випадку має вигляд

$$f\left(x, y\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2\left(1 - r_{xy}^2\right)}\left[\frac{\left(x - m_x\right)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}\left(x - m_x\right)\left(y - m_y\right)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{\left(y - m_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right]}, \qquad (7.41)$$

де r_{xy} – коефіцієнт кореляції.

З (7.41) видно, що якщо $r_{xy} = 0$, то будемо мати відомий вираз щільності ймовірностей (7.35), тобто, при $r_{xy} = 0$ вираз (7.41) буде відповідати щільності ймовірностей для незалежних випадкових величин, що складають систему $\{X, Y\}$, підпорядковану нормальному закону розподілу.

Раніше відзначалося, що в загальному вигляді некорельованість випадкових величин, які складають систему $\{X, Y\}$, не є достатньою умовою для висловлювання твердження, що випадкові величини є незалежними.

Як бачимо, винятком є система випадкових величин $\{X, Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу.

Отже, коли розглядається система випадкових величин, що має нормальний закон розподілу, то з доведення того, що випадкові величини є незалежними, випливає твердження, що вони є некорельованими, а з доведення того, що випадкові величини є некорельованими випливає твердження, що ці випадкові величини є незалежними.

Якщо випадкові величини X та Y є залежними і складають систему $\{X, Y\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу, то

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx};$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}.$$

Щільність $f(x,y)$ визначається з (7.41), тоді умовна щільність випадкової величини X за умови, що $Y = y$, має вигляд

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-r_{xy}^2}}\, e^{-\frac{\left\{x-\left[m_x+r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-m_y\right)\right]\right\}^2}{2\sigma_x^2\left(1-r_{xy}^2\right)}},$$

а умовна щільність випадкової величини Y за умови, що $X = x$, має вигляд

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\, e^{-\frac{\left\{y-\left[m_y+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-m_x\right)\right]\right\}^2}{2\sigma_y^2\left(1-r_{xy}^2\right)}}.$$

Порівняння виразів для $f\left(\frac{x}{y}\right)$ і $f\left(\frac{y}{x}\right)$ з (7.41) або з (7.35) дає право стверджувати, що умовні щільності $f\left(\frac{x}{y}\right)$ і $f\left(\frac{y}{x}\right)$ відповідають нормальному закону розподілу, для якого умовні математичні сподівання та умовні дисперсії визначаються виразами:

$$M_y[X] = m_x + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-m_y\right); \tag{7.42}$$

$$M_x[Y] = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-m_x\right); \tag{7.43}$$

$$D_y[X] = \sigma_x^2\left(1 - r_{xy}^2\right); \tag{7.44}$$

$$D_x[Y] = \sigma_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right). \tag{7.45}$$

Із (7.42) та (7.43) видно, що умовне математичне сподівання $M_y[X]$ випадкової величини X є функцією $\phi(y)$ змінної y, а умовне математичне сподівання $M_x[Y]$ випадкової величини Y є функцією $f(x)$ змінної x. Залежності $f(x)$ та $\phi(y)$ є лінійними виразами від відповідної змінної, а саме:

$$M_y[X] = \phi(y) = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y + \left(m_x - r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}m_y\right); \tag{7.46}$$

$$M_x[Y] = f(x) = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + \left(m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x\right). \tag{7.47}$$

Виходить, якщо система випадкових величин $\{X, Y\}$ підпорядкована нормальному закону розподілу, то лінії регресії X на Y та Y на X є рівняннями прямих. Звідси випливає таке тлумачення змісту коефіцієнта кореляції:

– якщо $r_{xy} > 0$, то це означає, що зі зростанням можливих значень однієї з випадкових величин можливі значення другої випадкової величини зростають за умовним математичним сподіванням (рис. 7.6);

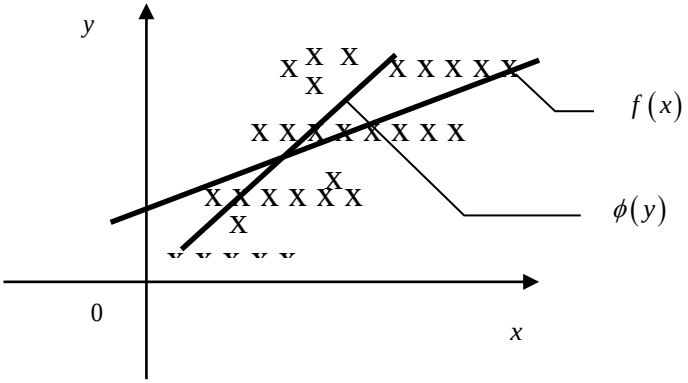


Рис. 7.6. Можливі значення системи, що відповідають невід'ємному значенню коефіцієнта кореляції

– якщо $r_{xy} < 0$, то це означає, що зі зростанням можливих значень однієї з випадкових величин можливі значення другої випадкової величини зменшуються за умовним математичним сподіванням (рис. 7.7).

Тобто, якщо $r_{xy} > 0$, чи $r_{xy} < 0$, то можливі значення системи групуються відносно лінії регресії X на Y та Y на X.

Це зображено на рис. 7.6 та на рис. 7.7. Якщо $r_{xy} = 0$, то можливі значення системи групуються відносно точки $\left(m_x, m_y\right)$, що зображено на рис. 7.8, та видно з (7.46), оскільки тоді $M_y\left[X\right] = m_x$, а також з (7.47), оскільки тоді $M_x\left[Y\right] = m_y$.

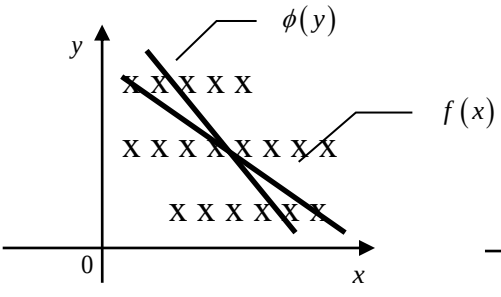


Рис. 7.7. Можливі значення системи, що відповідають від'ємному значенню коефіцієнта кореляції

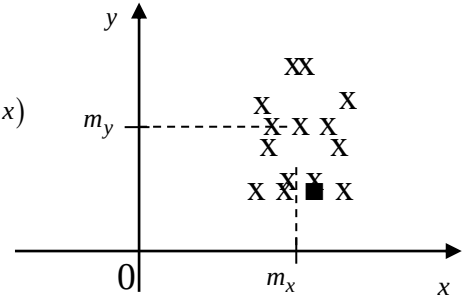


Рис. 7.8. Можливі значення системи, що відповідають $r_{xy} = 0$

7.5 Закон розподілу Релея

Розглянемо двовимірну випадкову величину $\left\{X, Y\right\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Раніше відзначалося, що еліпс розсіювання визначається виразом

$$\frac{\left(x - m_x\right)^2}{\left(\lambda\sigma_x\right)^2} + \frac{\left(x - m_y\right)^2}{\left(\lambda\sigma_y\right)^2} = 1, \qquad (7.48)$$

якщо розглядається система двох випадкових величин, що підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y. Якщо розглядати систему $\left\{X, Y\right\}$, що підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, то рівняння еліпса розсіювання буде мати вигляд

$$\frac{x^2}{(\lambda\sigma)^2}+\frac{y^2}{(\lambda\sigma)^2}=1;$$

$$x^2+y^2=(\lambda\sigma)^2=r^2, \tag{7.49}$$

тобто маємо коло розсіювання. Виходячи з того, що ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$ в область, що обмежена еліпсом розсіювання (7.48), має вигляд

$$P\left(\{X,Y\}\in D_{ел.р}\right)=1-e^{-\frac{\lambda^2}{2}},$$

можна записати, що ймовірність влучення випадкової точки $\{X,Y\}$, підпорядкованої нормальному закону розподілу з параметрами $m_x=m_y=0$, $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$, в область, обмежену колом розсіювання (7.49), має вигляд

$$P\left(\{X,Y\}\in D_o\right)=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \tag{7.50}$$

оскільки $\lambda^2=\frac{r^2}{\sigma^2}$.

Оскільки випадкова точка визначається за виразом

$$R=\sqrt{X^2+Y^2},$$

де R є випадковий радіус вектор, то

$$F(r)=P(R<r)=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \tag{7.51}$$

є функцією розподілу випадкової величини R, а тоді

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r\geq 0\\ 0, & r<0\end{cases} \tag{7.52}$$

є виразом щільності ймовірностей випадкової величини R.

Функція розподілу (7.51) та щільність ймовірностей (7.52) – це вирази закону розподілу Релея випадкової величини R.

Визначимо основні числові характеристики закону розподілу Релея. Маємо

$$M[R]=m_r=\int_0^{\infty} rf(r)\,dr=\int_0^{\infty} r\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=\left(-re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right)\Bigg|_0^{\infty}+$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=0+\sigma\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cong 1,25\sigma\ ;$$

$$D[R]=\int_0^{\infty} r^2 f(r)\,dr-m_r^2=\int_0^{\infty} r^2\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr-\frac{\pi\sigma^2}{2}=\left(-r^2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right)\Bigg|_0^{\infty}+$$

$$+\int_0^{\infty} 2re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr-\frac{\pi\sigma^2}{2}=0-2\sigma^2\int_0^{-\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)-\frac{\pi\sigma^2}{2}=-$$

$$-2\sigma^2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{-\infty}-\frac{\pi\sigma^2}{2}==2\sigma^2-\frac{\pi\sigma^2}{2}=\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f'(r)=\left(\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right)'_r=\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}+\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\left(-\frac{2r}{2\sigma^2}\right)=0;\quad Mo_r=\sigma.$$

$$\int_0^{Me_r}\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=\frac{1}{2};$$

$$-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{Me_r}=\frac{1}{2};\quad -\left(e^{-\frac{Me_r{}^2}{2\sigma^2}}-1\right)=\frac{1}{2};$$

$$e^{-\frac{Me_r{}^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2};\quad -\frac{Me_r{}^2}{2\sigma^2}=-\ell n2\ ;\quad Me_r=\sigma\sqrt{2\ell n2}\ .$$

Отже, для закону розподілу Релея математичне сподівання випадкової величини R, дисперсія випадкової величини R, мода та медіана випадкової величини R визначаються за такими формулами:

$$M[R] = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \tag{7.53}$$

$$D[R] = \sigma^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right); \tag{7.54}$$

$$M_{o_r} = \sigma; \tag{7.55}$$

$$M_{e_r} = \sigma\sqrt{2\ell n2}. \tag{7.56}$$

Графік щільності ймовірностей закону розподілу Релея наведений на рис. 7.9.

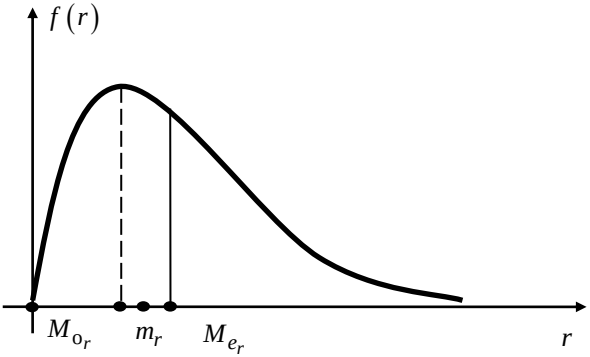


Рис. 7.9. Щільність ймовірностей закону розподілу Релея

Узагальненням закону розподілу Релея є закон розподілу Райса.

Задача 7.8. Радіус кругової зони ураження точкової цілі, який визначений з урахуванням характеристик міцності елементів цілі, дорівнює $r_з = 0{,}1$ км. Імовірне відхилення засобу ураження дорівнює E = 0,05 км. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що ціль будь уражена.

Розв'язання. Ураження цілі відповідає влученню засобу ураження в область круга з радіусом $r_з$, тому ймовірність події, яка полягає в тому, що ціль буде уражена, визначається у відповідності до функції розподілу закону розподілу Релея. Маємо

$$P(A) = P(R < r_3) = 1 - e^{-\frac{r_3^2}{2\sigma^2}},$$

де $$\sigma = \frac{E}{0,674} = \frac{0,05}{0,674} = 0,074.$$

Тоді $$P(A) = 1 - e^{-\frac{0,1^2}{2 \cdot 0,074^2}} \cong 1 - e^{-1} = 1 - 0,37 = 0,63.$$

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. В якому вигляді можуть бути подані закони розподілу системи дискретних та неперервних випадкових величин?
2. Чисельній мірі якої випадкової події відповідає зміст функції розподілу двовимірної випадкової величини?
3. Чи дозволяє значення закону розподілу двовимірної випадкової величини визначити ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова точка буде належати будь-якій двовимірній області?
4. Який фізичний сенс мають математичні сподівання та середні квадратичні відхилення двох випадкових величин, які складають двовимірну систему випадкових величин?
5. Який еліпс називають повним еліпсом розсіювання?
6. Чи можна для будь-якої системи двох випадкових величин стверджувати, що рівність нулю їх кореляційного моменту відповідає незалежності цих випадкових величин?
7. Чому поняття незалежності випадкових величин не відповідає поняттю корельованості цих випадкових величин?
8. Визначте вигляд кореляційної матриці системи n незалежних випадкових величин.
9. Переконайтесь, що кореляційний момент двох нормованих випадкових величин відповідає коефіцієнту кореляції двох випадкових величин, які складають систему.

ТЕМА 8
Функції випадкових аргументів

8.1 Визначення функції випадкового аргументу

При описі випадкових явищ природи, коли розглядається дві або більше випадкові величини (ВВ), які пов'язані між собою деякою функціональною залежністю, мають місце невипадкові функції однієї чи багатьох випадкових величин. На практиці слід розглядати функції випадкових величин (функції випадкових аргументів), коли проводяться непрямі вимірювання. Так, якщо розглядається дослід, мета якого полягає в тому, щоб визначити значення напруги U у деякому електричному ланцюгу, а вимірюється значення сили струму I в цьому ланцюгу, то розглядається невипадкова функція однієї випадкової величини, яка має вигляд $U = RI$, де R – опір ланцюга є невипадковою величиною. З наведеної залежності видно, що кожному значенню випадкової величини сили струму I в ланцюгу відповідає значення випадкової величини U – напруги ланцюга.

Якщо між випадковими величинами X та Y існує функціональний зв'язок, то розглядається невипадкова функція випадкової величини (випадкового аргументу) вигляду $Y = \phi(X)$.

У загальному випадку можуть розглядатись функції однієї випадкової величини $Y = \phi(X)$, функції двох випадкових величин $Y = \phi(X_1, X_2)$, функції n випадкових величин $Y = \phi(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n)$.

Нехай розглядається, наприклад, функція випадкового аргументу $Y = \phi(X)$. Нас будуть цікавити розв'язання таких задач:

– визначення закону розподілу випадкової величини Y (невипадкової функції випадкової величини X), якщо відомий закон розподілу випадкової величини X (випадкового аргументу);

– визначення числових характеристик випадкової величини Y, якщо відомий закон розподілу випадкової величини X;

– визначення числових характеристик випадкової величини Y, якщо відомі числові характеристики випадкової величини X.

Якщо ВВ X є дискретною ВВ, а її закон розподілу поданий рядом розподілу, який наведений у табл. 8.1, то ВВ $Y = \phi(X)$ також є дискретною ВВ, можливі значення якої визначаються з відношень $y_i = \phi(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, а їм відповідні ймовірності задовольняють рівності

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i) = P_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Таблиця 8.1

Ряд розподілу випадкової величини *X*

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P(X = x_i) = P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Тоді ряд розподілу функції випадкового аргументу $Y = \phi(X)$ має вигляд, який подано в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Ряд розподілу випадкової величини *Y*

$y_i = \phi(x_i)$	$y_1 = \phi(x_1)$	$y_2 = \phi(x_2)$	…	$y_i = \phi(x_i)$	…	$y_n = \phi(x_n)$
$P(Y = y_i) = P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Нехай кільком можливим значенням x_i, $i = \overline{1,m}$, де $m < n$, випадкової величини X відповідає одне й те саме значення функції

$$y_1 = y_i = \phi(x_i),\ i = \overline{1,m}.$$

Це означає, що подія $(Y = y_1)$ є рівносильною об'єднанню подій

$$(X = x_i),\ i = \overline{1,m},$$

тобто

$$(Y = y_1) = \bigcup_{i=1}^{m} (X = x_i).$$

Оскільки події $\{X = x_i\}$, $i = \overline{1,m}$ є несумісними, то

$$P(Y = y_1) = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} P_i,$$

а для решти можливих значень x_i, $i = \overline{m+1,n}$, маємо

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i),\quad i = \overline{m+1,n}.$$

Тоді ряд розподілу функції випадкового аргументу $Y = \phi(X)$ має вигляд, який подано в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Ряд розподілу випадкової величини $Y = \phi(X)$

y_i	y_1	y_2	y_3	…	P_{n-m}
$P(Y = y_i) = P_i$	$\sum_{i=1}^{m} P_i$	P_{m+1}	P_{m+2}	…	P_n

Задача 8.1. За право одного кидка грального кубика гравець сплачує 2 гривні, виграш сплачується гравцю у відповідності до виразу $Y = (X-2)^2$, де X – випадкова величина кількості очок, що випали на верхній грані. Скласти ряд розподілу випадкової величини Y.

Розв'язання. За умовою задачі випадкова величина X є дискретною випадковою величиною, яка приймає можливі значення $x_i = i,\ i = \overline{1,6}$. Тоді випадкова величина Y також є дискретною випадковою величиною, а її можливими значеннями є $y_1 = 0;\ y_2 = 1;\ y_3 = 4;\ y_4 = 9;\ y_5 = 16$.

Ряд розподілу випадкової величини Y поданий в табл. 8.4.

Таблиця 8.4

Ряд розподілу випадкової величини Y

y_i	0	1	4	9	16
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Розглянемо визначення закону розподілу функції випадкової величини X у випадку, коли X – неперервна випадкова величина. Нехай функція $\phi(X)$ є монотонною неперервною зростаючою функцією, має обернену $X = \psi(Y)$ та є такою, що має похідну на інтервалі (a,b) усіх можливих значень випадкової величини X. Графік функції поданий на рис. 8.1.

Функція розподілу випадкової величини Y визначається за означенням $G(y) = P(Y < y)$. Якщо функція $y = \phi(x)$ є монотонною та зростаючою на інтервалі (a,b) усіх можливих значень випадкової величини X, то подія $\{Y < y\}$ еквівалентна події $\{X < \psi(y)\}$. Тоді

$$G(y) = P(Y < y) = P(a < X < \psi(y)) = \int_a^{\psi(y)} f(x)\,dx,$$

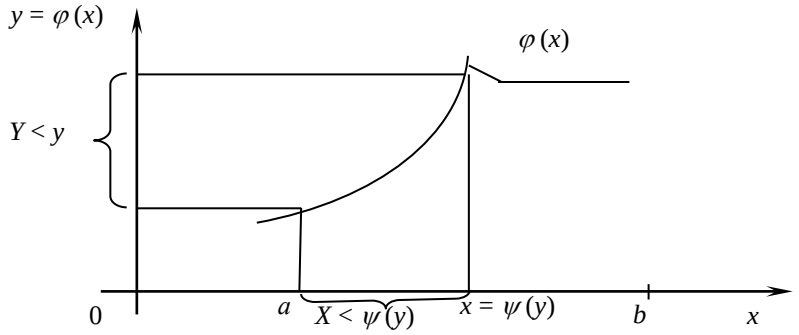


Рис. 8.1. Графік монотонної зростаючої функції $\varphi(x)$

де $f(x)$ – щільність ймовірностей випадкової величини X, а щільність ймовірностей випадкової величини Y визначається як

$$q(y) = G'(y) = \left(\int_a^{\psi(y)} f(x)\,dx \right)'_y = f\left[\psi(y)\right]\psi'(y). \qquad (8.1)$$

Якщо функція $\phi(x)$ є монотонною неперервною спадною функцією, має обернену $X = \psi(Y)$ і на інтервалі (a,b) можливих значень випадкової величини X має похідну, то подія $\{Y < y\}$ може статися тоді, коли виникає подія $\{\psi(y) < X < b\}$, що відзначено на рис. 8.2.

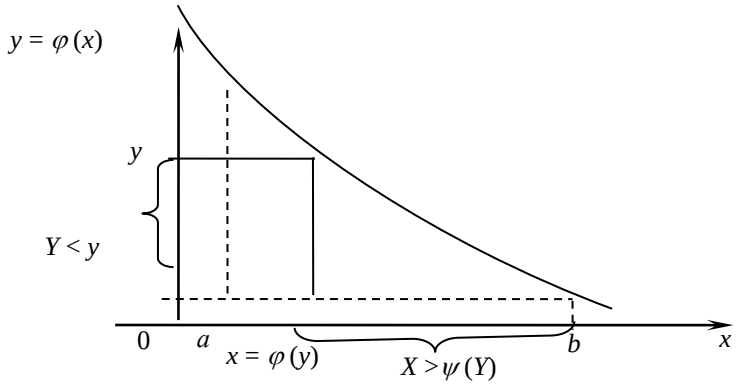


Рис. 8.2. Графік монотонної спадної функції $\varphi(x)$

У цьому випадку функція щільності визначиться як

$$q(y)=G'(y)=\left(\int\limits_{\psi(y)}^{b} f(x)\,dx\right)'_y=-\left(\int\limits_{b}^{\psi(y)} f(x)\,dx\right)'_y= \tag{8.2}$$
$$=-f\left[\psi(y)\right]\psi'(y).$$

Виходячи з властивості функції щільності ймовірностей випадкової величини *Y*, яка полягає в тому, що $q(y)>0$, записи (8.1) та (8.2), якщо функція $Y=\phi(X)$ є монотонною, неперервною, спадною чи зростаючою і такою, яка має похідну на інтервалі (a,b) можливих значень випадкової величини *X*, можна об'єднати та подати як

$$q(y)=f\left[\psi(y)\right]\left|\psi'(y)\right|. \tag{8.3}$$

Примітка. Інтервал можливих значень випадкової величини *X* – $(-\infty,\infty)$.

Задача 8.2. Випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону розподілу, тобто

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

і пов'язана з випадковою величиною *Y* лінійною залежністю вигляду

$$Y=aX+b,$$

де a і b – невипадкові величини. Визначити закон розподілу випадкової величини *Y*.

Розв'язання. Закон розподілу випадкової величини *Y* будемо визначати у вигляді функцій щільності $q(y)$ за формулою (8.3). Розв'язання задачі зручно подавати у такому записі:

$$Y=\phi(X); \quad \Rightarrow \quad Y=aX+b;$$

$$X=\psi(Y); \quad \Rightarrow \quad X=\frac{Y-b}{a};$$

$$\left|\psi'(y)\right|. \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}.$$

З (8.3) маємо

$$q(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x a}e^{-\frac{\left[y-(am_x+b)\right]^2}{2(a\sigma_x)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}},$$

де $m_y=am_x+b,\quad \sigma_y=a\sigma_x$.

Таким чином, як свідчить розв'язання цієї задачі, якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з характеристиками m_x,σ_x та випадкові величини Y і X зв'язані лінійною залежністю, то випадкова величина Y також підпорядкована нормальному закону розподілу з характеристиками $m_y=am_x+b$, $\sigma_y=a\sigma_x$.

Задача 8.3. Випадкова величина X підпорядкована експоненціальному закону розподілу, тобто

$$f(x)=3e^{-3x},\ x\ge 0,$$

та пов'язана з випадковою величиною Y за виразом $Y=2-3X$.

Визначити закон розподілу випадкової величини Y.

Розв'язання. Маємо

$$Y=\phi(X); \qquad \Rightarrow \qquad Y=2-3X;$$

$$X=\psi(Y); \qquad \Rightarrow \qquad X=\frac{2-Y}{3};$$

$$\left|\psi'(y)\right|. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}.$$

Тоді $$q(y)=3e^{-3\frac{2-y}{3}}\cdot\frac{1}{3}=e^{(y-2)},\ y\le 2,$$

оскільки з $x\ge 0$, що зазначено у виразі $f(x)$ випадкової величини X, маємо $\frac{2-y}{3}\ge 0,\ y\le 2$.

Отже, функція щільності ймовірностей має вигляд

$$q(y)=\begin{cases} e^{(y-2)}, & y \le 2; \\ 0, & y > 2, \end{cases}$$

та подана на рис. 8.3.

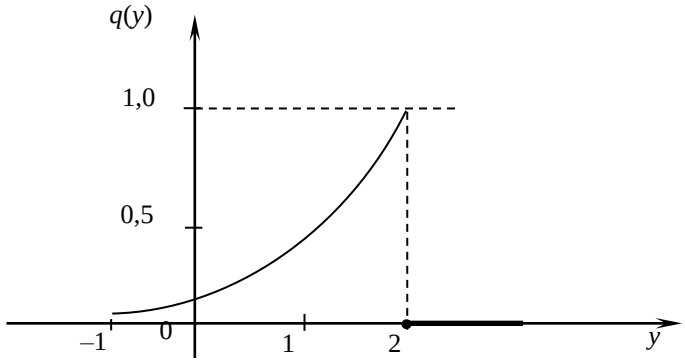


Рис. 8.3. Графік функції щільності випадкової величини *Y*

Задача 8.4. Випадкова величина *X* підпорядкована закону розподілу Коші, а саме:

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}.$$

Випадкова величина *Y* є оберненою до випадкової величини *X*, тобто

$$Y=\frac{1}{X}.$$

Визначити закон розподілу випадкової величини *Y*.

Розв'язання. Функціональна залежність випадкових величин *X* та *Y* подана на рис. 8.4.

З рис. 8.4 видно, що функція $y=\frac{1}{x}$ при $x=0$ має розрив другого роду, але обернена функція $x=\frac{1}{y}$ визначається однозначно, тому закон розподілу випадкової величини *Y* визначимо з формули (8.3).

Маємо такі умови:

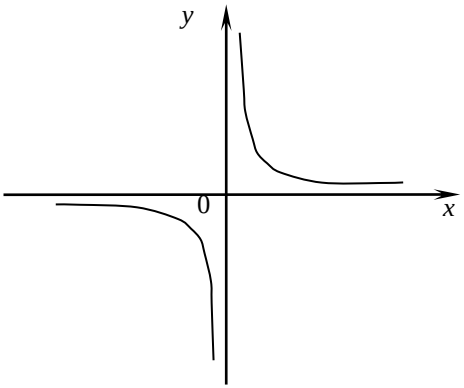


Рис. 8.4. Графік функціональної залежності випадкових величин Y та X

$$Y = \phi(X); \qquad \Rightarrow \qquad Y = \frac{1}{X};$$

$$X = \psi(Y); \qquad \Rightarrow \qquad X = \frac{1}{Y};$$

$$\left|\psi'(y)\right|. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{y^2}.$$

Тоді

$$q(y) = \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \cdot \frac{1}{y^2} = = \frac{y^2}{\pi\left(1+y^2\right)} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}.$$

Тобто закон розподілу оберненої випадкової величини Y до випадкової величини X, якщо випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Коші, також є законом розподілу Коші.

Задача 8.5. Випадкова величина радіуса круга ураження X підпорядкована закону розподілу Релея з параметром σ, тобто

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0.$$

Визначити закон розподілу випадкової величини площі круга ураження Y.

Розв'язання. Випадкова величина Y, яка є монотонною при $X \geq 0$, пов'язана з випадковою величиною X виразом $Y = \pi X^2$.

Маємо

$$Y = \phi(X); \qquad \Rightarrow \qquad Y = \pi X^2;$$

$$X = \psi(Y); \qquad \Rightarrow \qquad X = \sqrt{\frac{Y}{\pi}};$$

$$\left|\psi'(y)\right|. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}.$$

Тоді

$$q(y) = \frac{\sqrt{\frac{y}{\pi}}}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{y}{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{y}{2\pi\sigma^2}}, \quad y \geq 0,$$

тобто випадкова величина площі круга ураження Y, радіус якого є випадкова величина X, що підпорядкована закону розподілу Релея, підпорядкована експоненціальному закону розподілу з параметром $\frac{1}{2\pi\sigma^2}$.

Задача 8.6. Через точку a, яка лежить на осі 0η, проводиться пряма ab під кутом X до осі 0η (рис. 8.5). Випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$. Визначити закон розподілу випадкової величини Y – абсциси точки перетину прямої ab з віссю 0ξ.

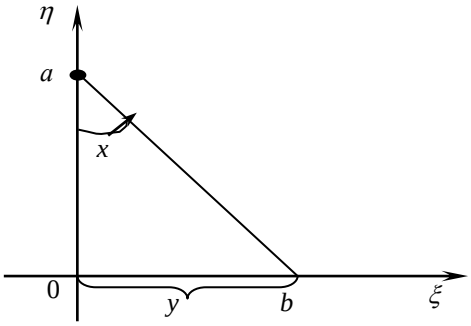


Рис. 8.5. Визначення можливих значень випадкової величини Y

Розв'язання. Якщо випадкова величина X підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$, то її щільність ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right);\\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

З рис. 8.5. видно, що $Y=a\cdot tgX$. Тоді маємо:

$$Y=\phi(X); \qquad \Rightarrow \qquad Y=a\cdot tgX;$$

$$X=\psi(Y); \qquad \Rightarrow \qquad X=arctg\frac{Y}{a};$$

$$\left|\psi'(y)\right|. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{1+y^2/a^2}\cdot\frac{1}{a}.$$

Тоді з (8.3) маємо

$$q(y)=f\left[\psi(y)\right]\left|\psi'(y)\right|=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi a\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)}, \quad -\infty<y<\infty,$$

тобто випадкова величина Y підпорядкована закону розподілу Коші.

Перейдемо до розгляду того випадку, коли функція $Y=\phi(X)$ на інтервалі $(a;b)$ можливих значень випадкової величини X не є монотонною; кажуть що функція $Y=\phi(X)$ є функцією загального вигляду, що й показано на рис. 8.6.

У цьому випадку обернена функція $X=\psi(Y)$ є неоднозначною.

Кількість значень оберненої функції залежить від того, яке можливе значення у випадкової величини Y розглядається.

У випадку, зазначеному на рис. 8.6, подія $\{Y<y\}$ відбудеться тоді, коли відбудеться хоча б одна з несумісних подій:

$$\{a<X<\psi_1(y)\},\ \{\psi_2(y)<X<\psi_3(y)\},$$

$$\{\psi_4(y)<X<\psi_5(y)\}.$$

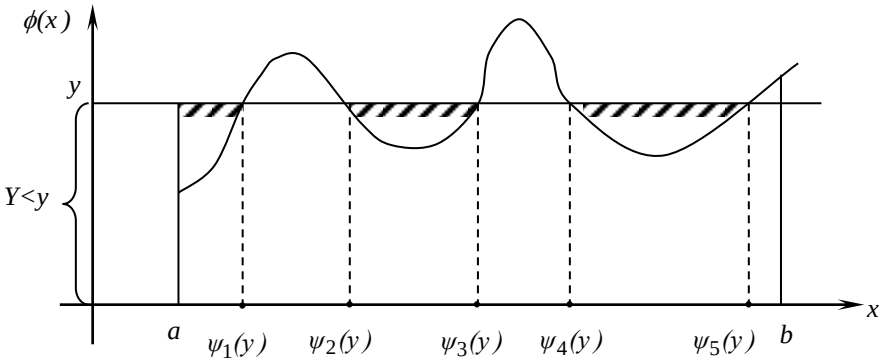


Рис. 8.6. Графік функції загального вигляду

Тоді маємо

$$G(y)=P(Y<y)=P\left(\left\{X\in\left(a;\psi_1(y)\right)\right\}+\left\{X\in\left(\psi_2(y);\psi_3(y)\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{X\in\left(\psi_4(y);\psi_5(y)\right)\right\}\right)=\int_a^{\psi_1(y)}f(x)dx+\int_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)}f(x)dx+\int_{\psi_4(y)}^{\psi_5(y)}f(x)dx;$$

$$q(y)=G'(y)=f\left[\psi_1(y)\right]\psi_1'(y)+\left(\left[\int_a^{\psi_3(y)}f(x)\,dx-\int_a^{\psi_2(y)}f(x)\,dx\right]\right)'_y+$$

$$+\left(\left[\int_a^{\psi_5(y)}f(x)\,dx-\int_a^{\psi_4(y)}f(x)\,dx\right]\right)'_y=f\left[\psi_1(y)\right]\psi_1'(y)+$$

$$+f\left[\psi_3(y)\right]\psi_3'(y)+f\left[\psi_2(y)\right]\psi_2'(y)+f\left[\psi_5(y)\right]\psi_5'(y)+$$

$$+f\left[\psi_4(y)\right]\psi_4'(y),$$

де функції $x=\psi(y)$ значення $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_3(y)$, $x=\psi_5(y)$ відповідають областям зростання функції $y=\phi(x)$ і відповідні похідні $\psi_1'(y)$, $\psi_3'(y)$, $\psi_5'(y)$ є додатними, а функції $x=\psi(y)$ значення

$x=\psi_2(y)$, $x=\psi_4(y)$ відповідають областям спадання функції $y=\phi(x)$ і відповідні похідні $\psi_2'(y)$, $\psi_4'(y)$ є від'ємними.

Виходячи з вищевикладеного видно, що якщо k – кількість значень оберненої функції, яка відповідає визначеному можливому значенню випадкової величини Y, а $\psi_1(y);\psi_2(y);\ldots;\psi_i(y);\ldots;\psi_k(y)$ – значення оберненої функції, які відповідають y, то в загальному випадку маємо

$$q(y)=\sum_{i=1}^{k} f\left[\psi_i(y)\right]\left|\psi_i'(y)\right|. \qquad (8.4)$$

Задача 8.7. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу, щільність ймовірностей якого $f(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Визначити щільність ймовірностей випадкової величини $Y=|X|$.

Розв'язання. На рис. 8.7 наведений графік функціональної залежності $Y=|X|$.

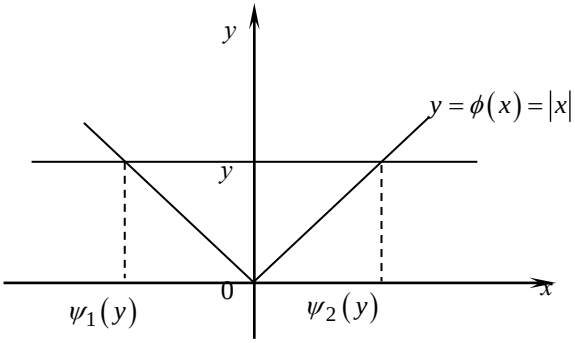


Рис. 8.7. Графік функціональної залежності випадкових величин Y та X

З визначеного вище порядку запису маємо

$$Y=\phi(X); \quad \Rightarrow \quad Y=|X|;$$

$$X=\psi(Y); \quad \Rightarrow \quad X=\begin{cases} Y & \text{при } X>0; \\ -Y & \text{при } X<0; \end{cases}$$

$$\left|\psi'(y)\right|. \quad \Rightarrow \quad 1.$$

Тоді з (8.4) визначимо $q(y)$, а саме ($y > 0$):

$$q(y) = f\left[\psi_1(y)\right]\cdot|-1| + f\left[\psi_2(y)\right]\cdot|1| = f(-y)\cdot 1 + f(y)\cdot 1 = f(-y) + f(y).$$

Примітка. Якщо випадкова величина X підпорядкована закону розподілу, для якого $f(-x) = f(x)$, наприклад, X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $(m_x = 0;\ \sigma_x)$, то щільність розподілу модуля випадкової величини X буде визначатись за виразом $q(y) = 2f\left[\psi(y)\right] = 2f(y),\quad y > 0$.

Задача 8.8. Визначити щільність ймовірностей невипадкової функції випадкового аргументу $Y = \sin X$, якщо випадкова величина X підпорядкована рівномірному закону на інтервалі $[0;\pi]$.

Розв'язання. Функціональна залежність випадкових величин Y та X наведена на рис. 8.8.

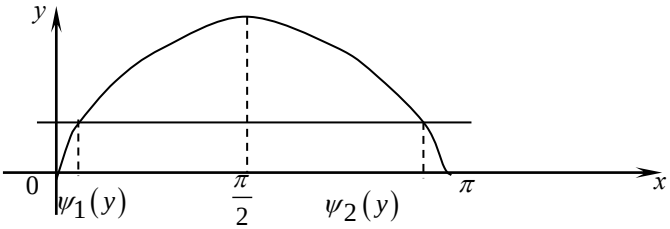


Рис. 8.8. Графік функціональної залежності випадкових величин Y та X

Маємо $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{при } x \in [0,\pi]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0,\pi], \end{cases}$$

а також

$$Y = \phi(X); \quad \Rightarrow \quad Y = \sin X;$$

$$X = \psi(Y); \quad \Rightarrow \quad X = \begin{cases} \arcsin Y & \text{при } x \in [0;\pi/2]; \\ \pi - \arcsin Y & \text{при } X \in (\pi/2;\pi]; \end{cases}$$

$$|\psi'(y)|. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left|1/\sqrt{1-y^2}\right| & \text{при } x \in [0;\pi/2]; \\ \left|-1/\sqrt{1-y^2}\right| & \text{при } x \in (\pi/2;\pi]. \end{cases}$$

Тоді з формули (8.4) визначимо щільність ймовірностей випадкової величини Y, а саме

$$q(y) = f\left[\psi_1(y)\right]\left|\psi_1'(y)\right| + f\left[\psi_2(y)\right]\left|\psi_2'(y)\right| =$$

$$= f\left(\arcsin y\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f\left(\pi - \arcsin y\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

тобто
$$q(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{при} \quad 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{при} \quad y < 0,\ y > 1. \end{cases}$$

Задача 8.9. Визначити щільність ймовірностей випадкової величини $Y = X^2$, якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0$, а $\sigma_x = 1$.

Розв'язання. За умовою задачі маємо

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in (-\infty, +\infty),$$

а функціональна залежність випадкових величин Y та X подана на рис. 8.9.

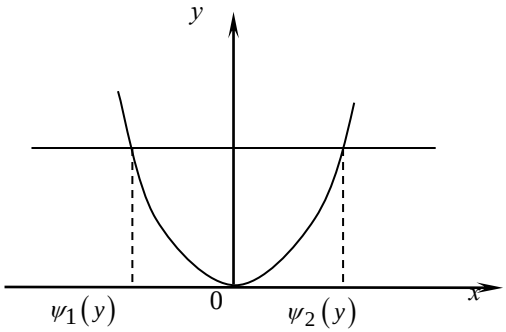


Рис. 8.9. Функціональна залежність випадкових величин Y та X

Зазначимо таке:

$$Y = \phi(X); \qquad \Rightarrow \qquad Y = X^2;$$

$$X = \psi(Y); \qquad \Rightarrow \qquad X = \sqrt{Y};$$

$$\left|\psi'(y)\right|. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Тоді з (8.4) маємо

$$q(y) = f\left[\psi_1(y)\right]\left|\psi_1'(y)\right| + f\left[\psi_2(y)\right]\left|\psi_2'(y)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}},$$

тобто $$q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0.$$

8.2 Числові характеристики функції випадкового аргументу

Розглянемо спочатку числові характеристики функції одного випадкового аргументу $Y = \phi(X)$.

До найбільш уживаних числових характеристик функцій випадкового аргументу відносять математичне сподівання та дисперсію функцій випадкового аргументу.

Нехай при розгляді $Y = \phi(X)$ випадкова величина X є дискретною та закон її розподілу поданий рядом розподілу (табл. 8.5).

Таблиця 8.5

Ряд розподілу випадкової величини X

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P(X = x_i) = P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Тоді випадкова величина $Y = \phi(X)$ також є дискретною, а її закон розподілу буде поданий рядом розподілу, який наведений табл. 8.6, де

$$P\left(Y = y_i\right) = P\left(\phi\left(X\right) = \phi\left(x_i\right)\right) = P\left(X = x_i\right) = P_i\,.$$

Таблиця 8.6

Ряд розподілу випадкової величини $Y = \phi\left(X\right)$

$y_i = \phi\left(x_i\right)$	$\phi\left(x_1\right)$	$\phi\left(x_2\right)$	…	$\phi\left(x_i\right)$	…	$\phi\left(x_n\right)$
$P\left(Y = y_i\right) = P_i$	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

Математичне сподівання випадкової величини $Y = \phi\left(X\right)$ визначиться за відомим відношенням для математичного сподівання для дискретної випадкової величини, а саме

$$M\left[Y\right] = M\left[\phi\left(X\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \phi\left(x_i\right) P_i\,. \tag{8.5}$$

Якщо випадкова величина X є неперервною, то область її можливих значень $\left(-\infty; +\infty\right)$ розіб'ємо на інтервали $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}$ та розглянемо

$$P\left(x_{i-1} < X < x_i\right) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x\right) dx = f\left(\xi_i\right)\Delta x_i, \quad \xi_i \in \left(x_{i-1}, x_i\right).$$

Тоді

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \phi\left(\xi_i\right) f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

визначає інтегральну суму, яка при $n \to \infty$ буде відповідати тому, що $\Delta x_i \to 0$, і дозволяє визначити вираз для математичного сподівання функції випадкового неперервного аргументу $Y = \phi\left(X\right)$, а саме:

$$M\left(Y\right) = M\left[\phi\left(X\right)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi\left(x\right) f\left(x\right) dx\,. \tag{8.6}$$

Виходячи з означення дисперсії випадкової величини, тобто з того, що

$$D\left(Y\right) = D\left[\phi\left(X\right)\right] = M\left\{\left[\phi\left(X\right) - M\left[\phi\left(X\right)\right]\right]^2\right\},$$

та з відомих співвідношень для математичних сподівань (8.5) і (8.6), маємо

$$D\left[\phi(X)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left\{\phi(x_i) - M\left[\phi(X)\right]\right\}^2 P_i = \\ = \sum_{i=1}^{n}\phi^2(x_i)P_i - \left\{M\left[\phi(X)\right]\right\}^2, \tag{8.7}$$

якщо випадкова величина X є дискретною, та

$$D\left[\phi(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\phi(x) - M\left[\phi(X)\right]\right\}^2 f(x)dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\phi^2(x)\,f(x)dx - \left\{M\left[\phi(X)\right]\right\}^2, \tag{8.8}$$

якщо випадкова величина X є неперервною.

Невипадкова функція випадкової величини $Y = \phi(X)$ за своїм означенням є випадковою величиною, тому що, і як відзначалось раніше, в загальному випадку числовими характеристиками $Y = \phi(X)$ є початкові та центральні моменти всіх порядків.

Якщо $Y = \phi(X)$ є дискретною випадковою величиною, то початковий момент s-го порядку визначається з виразу

$$\alpha_s = \sum_{k=1}^{n}\phi^s(x_k)P_k\,, \tag{8.9}$$

де $\phi(x_k)$ – k-те можливе значення дискретної випадкової величини $\phi(X)$;

$$P_k = P\left\{\phi(X) = \phi(x_k)\right\} -$$

імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина $\phi(X)$ прийме своє можливе значення рівним $\phi(x_k)$.

Якщо $\phi(X)$ – неперервна випадкова величина, то

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty}\phi^s(x)\,f(x)\,dx\,, \tag{8.10}$$

де $\phi(x)$ – можливе значення неперервної випадкової величини $\phi(X)$; $f(x)$ – щільність ймовірностей випадкового аргументу X.

Центральний момент s-го порядку відповідно для дискретної та неперервної $Y = \phi(X)$ визначаються з виразів

$$\mu_s = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \phi(x_k) - M\left[\phi(X)\right] \right\}^s P_k \; ; \tag{8.11}$$

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \phi(x) - M\left[\phi(X)\right] \right\}^s f(x)\, dx \, . \tag{8.12}$$

Примітка 1. Якщо за відомим законом розподілу випадкової величини X буде, як це визначено в 8.1, визначений закон розподілу $Y = \phi(X)$ у вигляді ряду розподілу в тому разі, коли функція випадкового аргументу є дискретною випадковою величиною, чи у вигляді щільності ймовірностей в тому разі, коли функція випадкового аргументу є неперервною випадковою величиною, то початкові та центральні моменти визначаються з виразів вигляду

$$\alpha_s = \sum_{k=1}^{n} y_k^s P_k \; ; \qquad \mu_s = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - m_y \right)^s P_k \; , \tag{8.13}$$

коли $Y = \phi(X)$ є дискретною випадковою величиною, та

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} y^s q(y)\, dy; \qquad \mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - m_y \right)^s q(y)\, dy \, , \tag{8.14}$$

коли $Y = \phi(X)$ є неперервною випадковою величиною.

Примітка 2. Якщо розглядається невипадкова функція багатьох випадкових величин, тобто якщо $Y = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$, то

$$M[Y] = M\left[\phi(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \times f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} dx_i ; \tag{8.15}$$

$$D[Y] = D\left[\phi(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)\right] =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - M\left[\phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\right] \right\}^2 \times \tag{8.16}$$
$$\times f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} dx_i ,$$

де $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ – щільність ймовірностей системи випадкових величин $\{X_i\}$, $i = \overline{1, n}$.

8.3 Математичне сподівання як функція випадкової величини

Для математичного сподівання випадкових величин вірні властивості й теореми, деякі з яких були розглянуті у 4 розділі. Розглянемо їх у цьому розділі більш детально.

Властивість 1. *Математичним сподіванням невипадкової величини є сама невипадкова величина, тобто*

$$M\left[C\right]=C\,. \tag{8.17}$$

Доведення. Дійсно, за означенням математичним сподіванням випадкової величини є невипадкова величина, відносно якої групуються всі можливі значення випадкової величини, а можливим значенням невипадкової величини є вона сама, тому й точкою, відносно якої буде групуватись сама випадкова величина є вона сама, тобто невипадкова величина.

Властивість 2. *Математичне сподівання добутку невипадкової величини на випадкову величину дорівнює добутку невипадкової величини на математичне сподівання випадкової величини, тобто*

$$M\left[CX\right]=CM\left[X\right]. \tag{8.18}$$

Доведення. Властивість 2 випливає з того, що невипадкова величина, яка є сталою при даному розгляді та яка входить до кожного доданка, виноситься за дужки при додаванні n доданків. Такий запис маємо при розгляді дискретної випадкової величини. Кажуть, що стала виноситься за символ суми. Якщо маємо запис математичного сподівання неперервної випадкової величини $Y=CX$, то стала C виноситься за символ інтеграла, а саме

$$M\left[Y=\phi\left(X\right)\right]=M\left[Y=CX\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}C\,x\,f\left(x\right)dx=\;C\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,f\left(x\right)dx=CM\left[X\right].$$

Теорема 1. *Математичне сподівання суми випадкових величин* $\left\{X_i\right\}, i=\overline{1,n}$ *дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто*

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]. \tag{8.19}$$

Доведення. Нехай розглядаються дискретні випадкові величини X і Y та відомий закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин $\left\{X,Y\right\}$, який поданий у вигляді матриці розподілу $\left\|P_{ij}\right\|, i=\overline{1,m};\; j=\overline{1,n}$, де

$P_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$. Нас цікавить $M\left[Z\right] = M\left[X + Y\right]$. Таким чином, вводиться до розгляду дискретна двовимірна випадкова величина $\left\{X, Y\right\}$ та невипадкова функція двох випадкових величин.

Маємо

$$M\left[Z\right] = M\left[X + Y\right] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i + y_j\right)P_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i P_{ij} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j P_{ij} = \sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{j=1}^{n}P_{ij} + \sum_{j=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{m}P_{ij} = \sum_{i=1}^{m}x_i P_i + \sum_{j=1}^{n}y_j P_j = M\left[X\right] + M\left[Y\right].$$

Нехай розглядається функція n випадкових величин $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де $X_i, i = \overline{1,n}$ є неперервні випадкові величини, які складають n вимірну систему випадкових величин $\left\{X_i\right\}, i = \overline{1,n}$, щільність ймовірностей якої має вигляд $f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$. Для функції n випадкових величин $Z = \phi\left(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n\right)$ маємо

$$M\left[Z\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\phi\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\times$$

$$\times f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1 + x_2 + ... + x_i + ... + x_n\right)\times$$

$$\times f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1 f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_2 f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i + ... +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_i f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i + ... +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_n f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)\prod_{i=1}^{n}dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} dx_i = \sum_{i=1}^{n} M[X_i].$$

Теорема доведена.

Слід відзначити, що при доведенні теореми обмежень щодо незалежності випадкових величин $X_i, i = \overline{1,n}$, які складають систему $\{X_i\}, i = \overline{1,n}$ випадкових величин, не накладалось.

Тому теорема вірна як для незалежних, так і для залежних випадкових величин $X_i, i = \overline{1,n}$.

Теорема 2. *Математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює* 0*, тобто*

$$M\left[\overset{\circ}{X}\right] = 0. \tag{8.20}$$

Доведення. $M\left[\overset{\circ}{X}\right] = M\left[\left(X - m_x\right)\right] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0,$

де перетворення відповідають змістам теореми 1 та властивості 1.

Теорема 3. *Математичне сподівання лінійної функції n випадкових величин* $Z = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i X_i + b_i\right)$ *дорівнює тій же лінійній функції від їх математичних сподівань, а саме*

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_i X_i + b_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i M[X_i] + b_i\right). \tag{8.21}$$

Доведення. Використовуючи твердження теореми 1 та властивостей 1 і 2, маємо

$$M[Z] = M\left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_i X_i + b_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} M[a_i X_i + b_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{M[a_i X_i] + M[b_i]\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i M[X_i] + b_i\right).$$

Теорема 8. *Математичне сподівання добутку двох залежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань плюс кореляційний момент, тобто*

$$M\left[XY\right] = M\left[X\right]M\left[Y\right] + R_{XY}\,. \tag{8.22}$$

Доведення. Для системи двох випадкових величин $\{X, Y\}$ справедливо, що якщо випадкові величини X та Y, які складають систему, є залежними, то вони є і корельованими. Виходячи з цього, розглянемо кореляційний момент випадкових величин X та Y. За означенням кореляційного моменту та користуючись визначеними вище теоремами та властивостями математичного сподівання випадкових величин, маємо

$$R_{XY} = M\left[\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right] = M\left[XY - m_y X - m_x Y + m_x m_y\right] =$$

$$= M\left[XY\right] - M\left[m_y X\right] - M\left[m_x Y\right] + M\left[m_x m_y\right] = M\left[XY\right] - m_x m_y,$$

звідки $$M\left[XY\right] = M\left[X\right]M\left[Y\right] + R_{XY}\,,$$

що й необхідно було довести.

Відомо: якщо випадкова величина X та Y, які складають систему $\{X, Y\}$, є незалежними, то $R_{XY} = 0$.

Виходить, якщо випадкові величини незалежні, то

$$M\left[XY\right] = M\left[X\right]M\left[Y\right]. \tag{8.23}$$

Співвідношення (8.23) справедливе в загальному випадку, коли розглядається добуток n незалежних випадкових величин. Тобто якщо $Z = \prod_{i=1}^{n} X_i$, то

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]. \tag{8.24}$$

Доведення (8.24) полягає в такому. Нехай випадкові величини X_i, $i = \overline{1,n}$ є незалежними неперервними величинами. Тоді щільність ймовірностей системи відповідає співвідношенню вигляду

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i\right),$$

а $$M(Z)=M\left[\prod_{i=1}^{n}X_i\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}x_i\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i)\prod_{i=1}^{n}dx_i=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_i f_{X_i}(x_i)dx_i=\prod_{i=1}^{n}M[X_i],$$

де підінтегральна функція $\prod_{i=1}^{n}x_i\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i)=\prod_{i=1}^{n}x_i f_{X_i}(x_i)$, а отже, n-кратний невизначений інтеграл дорівнює добутку n співмножників, кожен з яких – математичне сподівання випадкових величин X_i, $i=\overline{1,n}$.

Для загального випадку, коли випадкові величини X_i, $i=\overline{1,n}$ є незалежними, теорема 4 доведена, тобто математичне сподівання їх добутку визначається співвідношення (8.24).

8.4 Дисперсія як функція випадкової величини

Для дисперсії випадкових величин справедливі властивості й теореми, деякі з яких були розглянуті у 4 розділі. Розглянемо їх у цьому розділі більш детально.

Властивість 1. *Дисперсія невипадкової величини дорівнює нулю, тобто*

$$D[C]=0. \tag{8.25}$$

Доведення. За означенням дисперсії маємо

$$D[C]=M\left[\left(\overset{\circ}{C}\right)^2\right]=M\left[\left(C-M[C]\right)^2\right]=0.$$

За своїм фізичним змістом дисперсія – це чисельна міра розсіювання можливих значень випадкової величини відносно її математичного сподівання. Оскільки невипадкова величина має одне можливе значення, яке збігається із самою невипадковою величиною, та математичне сподівання невипадкової величини також збігається з самою невипадковою величиною, то і чисельна міра розсіювання можливих значень невипадкової величини відносно її математичного сподівання дорівнює нулю. Зміст цього розуміння поданий вище у вигляді формалізованого запису.

Властивість 2. *Дисперсія невипадкової функції* $Y=CX$ *визначається як*

$$D[Y]=D[CX]=C^2D[X]. \tag{8.26}$$

Доведення. За означенням дисперсії випадкової величини маємо

$$D[Y] = D[CX] = M\left[\left(CX - M[CX]\right)^2\right] = M\left[\left(CX - CM[X]\right)^2\right] =$$

$$= M\left[C^2\left(X - M[X]\right)^2\right] = C^2 M\left[\left(X - M[X]\right)^2\right] = C^2 D[X].$$

Теорема 1. *Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій плюс два їх кореляційні моменти, тобто*

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2R_{XY}\,. \tag{8.27}$$

Доведення. За означенням дисперсії невипадкової функції $Z = X + Y$ маємо

$$D[Z] = D[X+Y] = M\left[\left((X+Y) - M[X+Y]\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\left(\left(X - M[X]\right) + \left(Y - M[Y]\right)\right)^2\right] = M\left[\left(\overset{o}{X} + \overset{o}{Y}\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\overset{o}{X}^2 + 2\overset{o}{X}\overset{o}{Y} + \overset{o}{Y}^2\right] = M\left[\overset{o}{X}^2\right] + M\left[\overset{o}{Y}^2\right] + 2M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y}\right] = D[X] + D(Y) + 2R_{XY}\,.$$

Розглянемо невипадкову функцію $Z = X - Y$. Визначимо дисперсію різниці двох випадкових величин:

$$D[Z] = D[X-Y] = M\left[\left((X-Y) - M[X-Y]\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\left(\left(X - M[X]\right) - \left(Y - M[Y]\right)\right)^2\right] = M\left[\overset{o}{X}^2 - 2\overset{o}{X}\overset{o}{Y} + \overset{o}{Y}^2\right] =$$

$$= M\left[\overset{o}{X}^2\right] + M\left[\overset{o}{Y}^2\right] - 2M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y}\right] == D[X] + D(Y) - 2R_{XY}\,.$$

Тобто, якщо розглядаються невипадкові функції $Z = X \pm Y$, то

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2R_{XY}\,. \tag{8.28}$$

Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $R_{XY} = 0$, тобто

$$D\left[X+Y\right]=D\left[X-Y\right]=D\left[X\right]+D\left[Y\right]. \tag{8.29}$$

Розглянемо загальний випадок, коли маємо X_i, $i=\overline{1,n}$ залежних випадкових величин, які складають систему $\left\{X_i\right\}, i=\overline{1,n}$. Числовими характеристиками системи $\left\{X_i\right\}, i=\overline{1,n}$, які вважаються найбільш уживаними, є математичні сподівання випадкових величин $M\left[X_i\right], i=\overline{1,n}$ та кореляційна матриця $\left\|R_{X_iX_j}\right\|$, $i, j=\overline{1,n}$. Нас цікавить визначення дисперсії невипадкової функції n випадкових величин $Y=\phi\left(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n\right)$ вигляду $Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$. За змістом кореляційна матриця $\left\|R_{X_iX_j}\right\|$, $i, j=\overline{1,n}$ є симетричною відносно головної діагоналі, тобто $R_{X_iX_j}=R_{X_jX_i}$, $i, j=\overline{1,n}$; а значення елементів головної діагоналі відповідають дисперсіям випадкових величин $X_i, i=\overline{1,n}$, тому що

$$R_{X_iX_i}=M\left[\overset{\circ}{X}_i\,\overset{\circ}{X}_i\right]=M\left[\left(\overset{\circ}{X}_i\right)^2\right]=D\left[X_i\right],\ i=\overline{1,n}.$$

Зазначене вище відношення для дисперсії суми двох випадкових величин (8.27) відповідає сумі елементів кореляційної матриці системи двох випадкових величин $\left\{X,Y\right\}$. Виходячи з цього, для невипадкової функції $Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$ будемо мати

$$D\left(Z\right)=D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{X_iX_j} \tag{8.30}$$

або

$$D\left(Z\right)=D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right]+2\sum_{i<j} R_{X_iX_j}\ , \tag{8.31}$$

де символ $i<j$ означає, що розглядається сума кореляційних моментів для всіх попарних комбінацій випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

З (8.31) видно, якщо випадкові величини X_i, $i=\overline{1,n}$ є незалежними, то

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right]. \tag{8.32}$$

Теорема 2. *Дисперсія лінійної комбінації залежних випадкових величин* $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$, *де* $a_i, i = \overline{1,n}$ *та* b *є невипадковими величинами, визначається виразом*

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j R_{X_i X_j} . \qquad (8.33)$$

Доведення. Виходячи із змісту властивостей 1, 2 та теореми 1 щодо дисперсії суми випадкових величин X_i, $i = \overline{1,n}$, маємо

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] + D[b] = \sum_{i=1}^{n} D\left[a_i X_i\right] +$$

$$+2\sum_{i<j} R_{\hat{X}_i \hat{X}_j} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j R_{X_i X_j} ,$$

де $\hat{X}_i = a_i X_i$, $\hat{X}_j = a_j X_j$, а тоді

$$R_{\hat{X}_i \hat{X}_j} = M\left[\left(a_i X_i - M[a_i X_i]\right)\left(a_j X_j - M\left[a_j X_j\right]\right)\right] =$$

$$= M\left[a_i a_j \left(X_i - M[X_i]\right)\left(X_j - M\left[X_j\right]\right)\right] =$$

$$= a_i a_j M\left[\mathring{X}_i \mathring{X}_j\right] = a_i a_j R_{X_i X_j} .$$

З (8.33) випливає, що якщо випадкові величини X_i, $i = \overline{1,n}$ є незалежними, то

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]. \qquad (8.34)$$

Теорема 3. *Якщо випадкові величини* X *та* Y *є незалежними то дисперсія їх добутку визначається з виразу*

$$D[XY] = D[X]D[Y] + m_x^2 D[Y] + m_y^2 D[X]. \qquad (8.35)$$

Доведення. Розглянемо невипадкову функцію двох випадкових величин $Z = XY$. За означенням дисперсії маємо

$$D[Z] = D[XY] = M\left[\left(YX - M[XY]\right)^2\right] = M\left[\left(XY - m_x m_y\right)^2\right] =$$

$$= M\left[X^2Y^2 - 2XYm_x m_y + m_x^2 m_y^2\right] = M\left[X^2\right]M\left[Y^2\right] -$$

$$-2m_x m_y M[X]M[Y] + M\left[m_x^2 m_y^2\right] = \left[D[X] + m_x^2\right]\left[D[Y] + m_y^2\right] -$$

$$-m_x^2 m_y^2 = D[X]D[Y] + D[X]m_y^2 + D[Y]m_x^2 + m_x^2 m_y^2 - m_x^2 m_y^2 =$$

$$= D[X]D[Y] + m_x^2 D[Y] + m_y^2 D[X],$$

де $M[X^2] = D[X] + m_x^2$ та $M[Y^2] = D[Y] + m_y^2$, оскільки другий центральний момент випадкової величини, наприклад *X*, – це дисперсія випадкової величини, тобто $\mu_2 = D[X]$, а також відомо, що $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$, де $\alpha_2 = M[X^2]$, $\alpha_1 = M[X]$ – початкові моменти випадкової величини *X* другого та першого порядку.

Теорему 3 доведено.

Теорема 8. *Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то дисперсія добутку центрованих випадкових величин* $\overset{\circ}{X}$ *та* $\overset{\circ}{Y}$ *є добутком їх дисперсій, тобто*

$$D\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = D\left[\overset{\circ}{X}\right]D\left[\overset{\circ}{Y}\right]. \qquad (8.36)$$

Доведення. Для величин *X* та *Y* випадок їх залежності є спільним по відношенню до випадку, коли випадкові величини *X* та *Y* розглядаються незалежними. Відомо, що $\overset{\circ}{X} = X - M[X]$, $\overset{\circ}{Y} = Y - M[Y]$. Оскільки центровані випадкові величини $\overset{\circ}{X}$ та $\overset{\circ}{Y}$ означаються як невипадкові лінійні функції відповідно випадкових величин *X* та *Y*, то залежним випадковим величинам *X* та *Y* будуть відповідати залежні випадкові величини $\overset{\circ}{X}$ та $\overset{\circ}{Y}$, а незалежним випадковим величинам *X* та *Y* – незалежні $\overset{\circ}{X}$ та $\overset{\circ}{Y}$. Тому для доведення зазначеної теореми 4 будемо виходити зі змісту теореми 3, тобто співвідношення (8.35). Тоді маємо

$$D\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = D\left[\overset{\circ}{X}\right]D\left[\overset{\circ}{Y}\right] + D\left[\overset{\circ}{X}\right]\left\{M\left[\overset{\circ}{Y}\right]\right\}^2 + D\left[\overset{\circ}{Y}\right]\left\{M\left[\overset{\circ}{X}\right]\right\}^2 = D\left[\overset{\circ}{X}\right]D\left[\overset{\circ}{Y}\right].$$

Задача 8.10. Випадкові величини X та Y відповідають за змістом елементарним похибкам, які виникають на вході технічного приладу військового призначення. Випадкові величини мають числові характеристики $m_x = -2$; $m_y = 4$; $\sigma_x = 2$; $\sigma_y = 3$; $r_{xy} = -\frac{1}{2}$. Похибка на виході технічного приладу є невипадковою функцією двох випадкових величин і визначається з виразу $Z = 3X^2 - 2XY + Y^2 - 3$. Визначити математичне сподівання похибки на виході технічного приладу.

Розв'язання.

$$M[Z] = M\left[3X^2 - 2XY + Y^2 - 3\right] = M\left[3X^2\right] - M[2XY] +$$
$$+M\left[Y^2\right] - M[3] = 3M\left[X^2\right] - 2M[XY] + M\left[Y^2\right] - 3 =$$
$$= 3\left[D[X] + m_x^2\right] - 2\left[m_x m_y + R_{XY}\right] + \left[D[Y] + m_y^2\right] - 3 =$$
$$= 3\left[2^2 + (-2)^2\right] - 2\left[(-2)\cdot 4 + r_{xy}\sigma_x\sigma_y\right] + \left[3^2 + 4^2\right] - 3 =$$
$$= 3(4+4) - 2\left(-8 + (-0{,}5)\cdot 2\cdot 3\right) + 9 + 16 - 3 = 68.$$

Математичне сподівання випадкової величини Z – похибки на виході технічного приладу – становить $M[Z] = 68$.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Які задачі можуть бути поставлені та розв'язані при описі масових і випадкових явищ природи за наявності невипадкової функції випадкових аргументів і закону розподілу випадкових аргументів?
2. Чи може бути визначений закон розподілу невипадкової функції випадкових аргументів за наявності невипадкової функції випадкових аргументів та числових характеристик випадкових аргументів?
3. Якого змісту задачі при описі масових і випадкових явищ природи можуть бути поставлені та розв'язані за наявності невипадкової функції випадкових аргументів і числових характеристик випадкових аргументів?
4. Доведіть, що закон розподілу невипадкової функції випадкового аргументу буде нормальним, якщо закон розподілу аргументу є нормальним, а функціональна залежність $Y = \phi(X)$ є лінійною.
5. Доведіть, що дисперсія суми та різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.
6. Визначте теореми й властивості математичного сподівання та дисперсії випадкових величин.

ТЕМА 9
Характеристичні функції

9.1 Поняття характеристичної функції та її властивості

Характеристичною функцією випадкової величини X *називається математичне сподівання комплексної випадкової величини* $U = e^{itX}$ *, тобто*

$$g_X(t) = M[U] = M\left[e^{itX}\right], \tag{9.1}$$

де X – дійсна випадкова величина, t – параметр, а $i = \sqrt{-1}$.

Характеристична функція $g_X(t)$ розмірності не має, параметр t має розмірність, зворотну розмірності випадкової величини X, тому що комплексна випадкова величина U являє собою одиничний радіус-вектор з випадковим кутом tX на комплексній площині. Математичним сподіванням $M[U]$ також є одиничний радіус-вектором, але з невипадковим кутом на комплексній площині.

Якщо X – дискретна випадкова величина, що приймає свої можливі значення x_k при $k = \overline{1,n}$, а $P(X = x_k) = P_k$ при $k = \overline{1,n}$ – відповідні їм ймовірності, то характеристична функція визначається із співвідношення

$$g_X(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} P_k, \tag{9.2}$$

де e^{itx_k} –можливі значення комплексної випадкової величини e^{itX}.

Якщо X – неперервна випадкова величина та її закон розподілу заданий щільністю ймовірностей $f(x)$, то характеристична функція визначається співвідношенням вигляду

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx. \tag{9.3}$$

Як видно з (9.3) характеристична функція є перетворенням Фур'є функції щільності ймовірностей неперервної випадкової величини і однозначно визначається цією щільністю ймовірностей. А це означає, що щільність ймовірностей однозначно визначається через характеристичну функцію $g_X(t)$ зворотним перетворенням Фур'є, а саме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}g_X(t)dt\,. \tag{9.4}$$

Зауваження. Характеристичні функції були запропоновані О. М. Ляпуновим (1857 – 1918) при доведенні ним сформульованої граничної теореми, яка на теперішній час носить назву центральної граничної теореми теорії ймовірностей. Як видно з (9.4), характеристична функція, як і функція розподілу та щільність ймовірностей, також є формою вираження закону розподілу випадкової величини, тому вона може використовуватись при вирішенні будь-яких завдань стохастичної природи. Тому характеристичні функції визначають як математичний апарат.

Доведемо основні властивості характеристичної функції.

1. Характеристичною функцією невипадкової величини a *є комплексне число* e^{ita}.

Маємо, що математичне сподівання сталої є стала, тобто

$$g_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ita}f(x)dx=e^{ita}\,. \tag{9.5}$$

2. Якщо параметр $t=0$*, то*

$$g(t=0)=1\,. \tag{9.6}$$

Дійсно, $$g_X(t=0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx\Big|_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1,$$

що випливає з властивості нормування щільності ймовірностей випадкової величини X.

3. Для всіх значень параметра t *характеристична функція за модулем не перевищує одиницю, тобто*

$$|g_X(t)|\le 1\,. \tag{9.7}$$

Маємо, $$|g_X(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{itx}f(x)\right|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{itx}\right|\,|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot f(x)dx=1,$$

оскільки $\left|e^{itx}\right| = 1$ та функція щільності ймовірностей $f(x)$ за властивістю є невід'ємною.

Ця властивість дозволяє стверджувати, що характеристична функція визначена для всякої випадкової величини.

4. Якщо між випадковими величинами X і Y має місце лінійна залежність, тобто $Y = aX + b$, де a і b є невипадкові величини, то

$$g_y(t) = e^{itb} g_x(at). \tag{9.8}$$

Дійсно, маємо

$$g_y(t) = M\left[e^{itY}\right] = M\left[e^{it(aX+b)}\right] = M\left[e^{itb}e^{i(at)X}\right] = e^{itb} g_x(at).$$

9. Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_k, ..., X_n є незалежними, то характеристична функція їх суми дорівнює добутку їх характеристичних функцій, тобто якщо

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

то

$$g_y(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t). \tag{9.9}$$

Дійсно,

$$g_y(t) = M\left[e^{itY}\right] = M\left[e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] =$$

$$= M\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} M\left[e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t).$$

6. Якщо s-й початковий момент випадкової величини X існує, тобто якщо $|\alpha_s| = M\left[|X|^s\right] < \infty$, $s \geq 1$, то є визначеною неперервна s-та похідна по t характеристичної функції випадкової величини X та

$$g_x^{(s)}(t=0) = i^s \alpha_s. \tag{9.10}$$

Оскільки $\left|\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} f(x)\,dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|ixe^{itx} f(x)\right| dx =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |i||x| \left| e^{itx} \right| |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = |\alpha_s| < \infty,$$

то $\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} f(x) dx$ рівномірно збігається відносно t і тому можливе диференціювання під знаком інтегралу.

Маємо $$g'_X(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} f(x) dx,$$

якщо $\lambda < s$, то $$g_X^{(\lambda)}(t) = i^\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^\lambda e^{itx} f(x) dx,$$

а оскільки інтеграл у цьому виразі рівномірно збігається, то

$$g_X^{(\lambda+1)}(t) = i^{\lambda+1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\lambda+1} e^{itx} f(x) dx$$

на $$g_X^{(\lambda+1)}(t=0) = i^{\lambda+1} \alpha_{\lambda+1},$$

що і визначає справедливість (9.10).

7. Комплексно сполучена характеристична функція випадкової величини X є характеристичною функцією комплексно сполученої випадкової величини, тобто

$$\overline{g_X(t)} = g_X(-t). \tag{9.11}$$

Дійсно, $$\overline{g_X(t)} = \overline{M[e^{itX}]} = M\left[e^{-itX}\right] = M\left[e^{i(-t)X}\right] = g_X(-t).$$

Співвідношення (9.10) дозволяє визначити основні числові характеристики випадкової величини X, а саме математичне сподівання та дисперсію X.

Із (9.10) маємо, що початковий момент випадкової величини X s-го порядку визначається як

$$\alpha_s = \frac{g_X^{(s)}(t=0)}{i^s} = \frac{(-i)^s g_X^{(s)}(t=0)}{(-i)^s i^s} = (-i)^s g_X^{(s)}(t=0).$$

Тоді $$M[x] = \alpha_1 = -ig'_X(t=0), \tag{9.12}$$

а $$D[x]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \ ;$$

$$D[x]=(-i)^2 g_x''(t=0)-\left[-ig_x'(t=0)\right]^2 =$$

$$=-g_x''(t=0)+\left[g_x'(t=0)\right]^2 ;$$

$$D[x]=\left[g'(t=0)\right]^2 - g_x''(t=0). \qquad (9.13)$$

9.2 Характеристичні функції одновимірних законів розподілу

Розглянемо характеристичну функцію випадкової величини, яка підпорядкована біноміальному закону розподілу. Відомо, що випадкова величина X підпорядкована біноміальному закону розподілу, якщо в кожному з n незалежних випробувань $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p=q$. Тоді у відповідності до (9.2) маємо

$$g_x(t)=e^{it\cdot 1}\cdot p + e^{it\cdot 0}q = e^{it}p+1-p=1+p\left(e^{it}-1\right),$$

тобто $$g_x(t)=1+p\left(e^{it}-1\right). \qquad (9.14)$$

Задача 9.1. Визначити характеристичну функцію випадкової величини X – кількості появи події A в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події A дорівнює p.

Розв'язання. Введемо до розгляду випадкову величину X_k – кількість появи події A в k-му випробуванні. Можливі значення випадкової величини X_k є $x_{k_1}=1$, $x_{k_2}=0$. Характеристична функція випадкової величини X_k згідно з (9.14) має вигляд

$$g_{x_k}(t)=1+p\left(e^{it}-1\right).$$

Якщо X – випадкова величина кількості появи події A в n незалежних випробуваннях, то

$$X=\sum_{k=1}^{n} X_k \ ,$$

а згідно з (9.9) маємо

$$g_X(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(t) = \left[1 + p\left(e^{it} - 1\right) \right]^n .$$

Отже, $$g_X(t) = \left[1 + p\left(e^{it} - 1\right) \right]^n .$$

Розглянемо визначення характеристичної функції закону розподілу Пуассона. Відомо, що випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Пуассона, якщо

$$P(X = x; a) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \quad x = 0, 1, 2 \ldots .$$

Тоді

$$g_X(t) = M\left[e^{itX} \right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{a^x}{x!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(ae^{it}\right)^x}{x!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{a\left(e^{it} - 1\right)},$$

оскільки $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Отже, для випадкової величини X, яка підпорядкована закону розподілу Пуассона,

$$g_X(t) = e^{a\left(e^{it} - 1\right)} . \tag{9.15}$$

Задача 9.2. Довести, що якщо випадкові величини X_1, X_2, …, X_k, …, X_n є незалежними та підпорядкованими закону Пуассона з параметрами a_k, де $k = \overline{1, n}$, то випадкова величина $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ також підпорядкована закону Пуассона з параметром $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Розв'язання. Згідно з (9.9) та (9.15) маємо

$$g_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{a_k\left(e^{it} - 1\right)} = e^{\left(e^{it} - 1\right)\sum_{k=1}^{n} a_k} .$$

Отриманий результат має вигляд (9.15), тому доведено, що випадкова величина Y також підпорядкована закону розподілу Пуассона.

Нехай випадкова величина X підпорядкована рівномірному неперервному закону розподілу на інтервалі (a,b), її щільність ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in(a,b);\\ 0 & \text{при } x\notin(a,b).\end{cases}$$

Тоді характеристична функція випадкової величини X визначається як

$$g_X(t)=M\left[e^{itX}\right]=\int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{it}\int_{ita}^{itb}e^{itx}d(itx)=$$

$$=\frac{1}{it(b-a)}\left(e^{itb}-e^{ita}\right),$$

тобто
$$g_X(t)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}. \tag{9.16}$$

Якщо випадкова величина X підпорядкована рівномірному неперервному закону розподілу на інтервалі $(-a,a)$, то

$$g_X(t)=\frac{1}{at}\cdot\frac{e^{ita}-e^{-ita}}{2i}=\frac{\sin at}{at}, \tag{9.17}$$

оскільки $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ є відомою формулою Ейлера.

Розглянемо визначення характеристичної функції для випадкової величини X, яка підпорядкована експоненціальному (показниковому) закону розподілу. Випадкова величина X підпорядкована експоненціальному закону розподілу, якщо щільність ймовірностей визначається з виразу

$$f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}, t\ge 0.$$

За визначенням характеристичної функції (9.3) маємо

$$g_X(t)=\int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{-x(\lambda-it)}dx=-\frac{\lambda}{\lambda-it}e^{-x(\lambda-it)}\Big|_0^\infty=\frac{\lambda}{\lambda-it}=\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2},,$$

оскільки добуток комплексно сполучених чисел дорівнює квадрату модуля комплексного числа $\lambda-it$.

Отже, якщо випадкова величина X підпорядкована експоненціальному закону розподілу, то її характеристична функція має вигляд

$$g_X(t)=\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}\ . \tag{9.18}$$

Задача 9.3. Відома характеристична функція у вигляді (9.18). Необхідно визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Розв'язання. Згідно з (9.12) маємо

$$M[X]=-ig_X'(t=0)=-i\left(\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}\right)_t'\Bigg|_{t=0}=$$

$$=-i\lambda\frac{i\left(\lambda^2+t^2\right)-(\lambda+it)\cdot 2t}{\left(\lambda^2+t^2\right)^2}\Bigg|_{t=0}=-\frac{i\lambda\cdot\lambda^2}{\lambda^4}=\frac{1}{\lambda};\quad M[X]=\frac{1}{\lambda},$$

а згідно з (9.13) маємо

$$D[X]=\left[g'(t=0)\right]^2-g_X''(t=0)=\left[\left(\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}\right)_t'\Bigg|_{t=0}\right]^2-\left(\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}\right)_t''\Bigg|_{t=0}$$

$$=\left(\frac{i}{\lambda}\right)^2-\left(\lambda\frac{i\left(\lambda^2+t^2\right)-(\lambda+it)\cdot 2t}{\left(\lambda^2+t^2\right)^2}\right)_t'\Bigg|_{t=0}=-\frac{1}{\lambda^2}-\lambda\left(-\frac{2}{\lambda^3}\right)=\frac{1}{\lambda^2}\ .$$

Отже, $$D[X]=\frac{1}{\lambda^2}\ .$$

Таким чином, ми отримали відомі нам раніше результати щодо математичного сподівання та дисперсії випадкової величини X, яка підпорядкована експоненціальному закону розподілу. Це на прикладі розв'язання задачі 9.3 підтверджує те, що характеристичну функцію випадкової величини слід розглядати як форму запису закону розподілу випадкової величини.

Якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, тобто

$$f(x;m_X,\sigma_X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}\ ,$$

то щодо визначення її характеристичної функції маємо таке:

$$g_X(t) = M\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx .$$

Проведемо заміну змінної, а саме введемо

$$z = \frac{x-m_x}{\sigma_x} - it\sigma_x, \; x = z\sigma_x + it\sigma_x^2 + m_x, \; dx = \sigma_x dz .$$

Тоді

$$g_X(t) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma_x z - t^2\sigma_x^2 + im_x t - \frac{z^2}{2} - it\sigma_x z - \frac{i^2 t^2 \sigma_x^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_x t - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{im_x t - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}},$$

оскільки інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$ є інтегралом Пуассона, тобто

$$g_X(t) = e^{im_x t - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}} . \qquad (9.19)$$

З (9.19) видно, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$, то

$$g_X(t) = e^{-t^2/2} . \qquad (9.20)$$

У відповідності до (9.8) випадкова величина

$$Y = aX + b ,$$

де X – випадкова величина, яка підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$, a та b – невипадкові величини, має таку характеристичну функцію:

$$g_Y(t) = e^{itb} g_X(at) = e^{itb} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} = e^{itb - \frac{a^2t^2}{2}},$$

тобто

$$g_Y(t) = e^{itb - \frac{a^2t^2}{2}} . \qquad (9.21)$$

Задача 9.4. Довести, що якщо випадкові величини X_1 та X_2 є незалежними та мають нормальні закони розподілу з параметрами m_{x_1}, σ_{x_1}, m_{x_2}, σ_{x_2}, то випадкова величина $Y = X_1 + X_2$ також має нормальний закон розподілу з $m_y = m_{x_1} + m_{x_2}$, $\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$.

Розв'язання. Згідно з (9.19) випадкові величини X_1 та X_2 мають характеристичні функції

$$g_{x_1}(t) = e^{im_{x_1}t - \frac{\sigma_{x_1}^2 t^2}{2}} \quad \text{та} \quad g_{x_2}(t) = e^{im_{x_2}t - \frac{\sigma_{x_2}^2 t^2}{2}},$$

а у відповідності з (9.9) маємо

$$g_y(t) = g_{x_1}(t) \cdot g_{x_2}(t) = e^{im_{x_1}t - \frac{\sigma_{x_1}^2 t^2}{2}} \cdot e^{im_{x_2}t - \frac{\sigma_{x_2}^2 t^2}{2}} = e^{i\left(m_{x_1}+m_{x_2}\right)t - \frac{\left(\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2\right)t^2}{2}}.$$

Якщо порівняти цей результат з (9.19), то можна стверджувати, що випадкова величина $Y = X_1 + X_2$ також підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $m_y = m_{x_1} + m_{x_2}$, $\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$.

Задача 9.9. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Пуассона з параметром λ. Необхідно довести, що граничним законом розподілу при $\lambda \to \infty$ для випадкової величини

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

є нормальний закон розподілу з параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$.

Розв'язання. Для випадкової величини X характеристична функція має вигляд

$$g_x(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$$

Випадкова величина Z лінійно виражена через X, а саме

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X - \sqrt{\lambda}.$$

Виходячи з властивості характеристичної функції, а саме, якщо

$$Z = aX + b \text{, то } g_z(t) = e^{itb} g_x(at),$$

будемо мати

$$g_z(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)} = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\frac{it\lambda}{\sqrt{\lambda}}-\frac{t^2\lambda}{2\lambda}-\frac{it\lambda}{6\lambda^{3/2}}+\frac{t^4\lambda}{24\lambda^3}+\ldots} =$$

$$= e^{-it\sqrt{\lambda}+it\sqrt{\lambda}-\frac{t^2}{2}-\frac{it}{6\sqrt{\lambda}}+\frac{t^4}{24\lambda^2}+\ldots} = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{it}{6\sqrt{\lambda}}+\frac{t^4}{24\lambda^2}+\ldots}.$$

Тоді $$\lim_{\lambda\to\infty} g_z(t) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{it}{6\sqrt{\lambda}}+\frac{t^4}{24\lambda^2}+\ldots} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Цей результат відповідає (9.20), що свідчить про те, що зазначена в умові задачі випадкова величина Z при $\lambda \to \infty$ має нормальний закон розподілу з параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$. При практичному використанні це означає, що якщо випадкова величина X підпорядкована закону Пуассона з достатньо великим значенням параметра λ, то щодо випадкової величини Z при вирішенні завдань можна користуватися нормальним законом розподілу з параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$.

9.3 Характеристичні функції багатовимірних випадкових величин

Якщо розглядається система двох випадкових величини $\{X, Y\}$, то під характеристичною функцією розуміють

$$g(t_1, t_2) = M\left[e^{it_1X + it_2Y}\right]. \tag{9.22}$$

Для системи дискретних випадкових величин маємо

$$g(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} e^{it_1x_k + it_2y_j} \cdot P_{kj}, \tag{9.23}$$

а для системи неперервних випадкових величин маємо

$$g(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1x + it_2y} f(x, y)\,dxdy. \tag{9.24}$$

Характеристична функція n-вимірної системи випадкових величин $\{X_k\}$, де $k=\overline{1,n}$, визначається як

$$g(t_1,t_2,...,t_n)=M\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}\right]= \\ =\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kx_k}f(x_1,x_2,\ ...,\ x_n)dx_1...\ dx_n. \tag{9.25}$$

Якщо відома характеристична функція системи (9.25), то може бути визначена щільність ймовірностей системи за виразом

$$f(x_1,x_2,\ ...,\quad x_n)\ = \\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sum_{k=1}^{n}t_kx_k}g(t_1,\ ...,\ t_n)dt_1...\quad dt_n. \tag{9.26}$$

Основними властивостями характеристичної функції системи випадкових величин $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$ є такі.

1. Характеристична функція системи при всіх $t_k=0$, $k=\overline{1,n}$ *дорівнює одиниці, тобто*

$$g(t_1=\ 0,\ t_2=\ 0,\ ...,\ t_n=\ 0)\ =\ 1.$$

2. Модуль характеристичної функції системи не перевищує одиниці, тобто

$$\left|g(t_1,t_2,\ ...,\ t_n)\right|\ \le\ 1.$$

3. Якщо відома характеристична функція $g(t_1,t_2,...,t_n)$ *системи* $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$, *то може бути визначена характеристична функція будь-якої підсистеми* $s\le n$ *випадкових величин. Для цього необхідно в характеристичній функції* $g(t_1,t_2,...,t_n)$ *прийняти* $t_k=0$ *для всіх* $k=\overline{1,n}$, *за винятком* $k=s$. *Так, наприклад,*

$$g(t_1)=g(t_1,t_2=0,t_3=0,\ ...,\ t_n=0);$$

$$g(t_3,t_5)=g(t_1=0,t_2=0,t_3,t_4=0,t_5,t_6=0,\ ...,\ t_n=0).$$

4. Якщо випадкові величини X_k, *де* $k=\overline{1,n}$, *які складають систему* $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$, *є незалежними, то*

$$g(t_1,t_2,\ ...,\ t_n)=g(t_1)\cdot g(t_2)\cdot ...\cdot g(t_n).$$

5. За наявності характеристичної функції $g(t_1,t_2,...,t_n)$ *системи випадкових величин* $\{X_k\}$, $k=\overline{1,n}$ *можуть бути визначені початкові моменти довільних порядків, а саме*

$$M\left[X_1^{k_1},X_2^{k_2},...,X_n^{k_n}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}\,f(x_1,x_2,\ ...,\ x_n)dx_1dx_2...\ dx_n=$$

$$=(-i)^{\sum_{j=1}^{n}k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...k_n}g(t_1,t_2,\ ...,\ t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}....\partial t_n^{k_n}}\right]\Bigg|_{t_1=t_2=...t_n=0}.$$

6. Якщо $g(t_1,t_2,\ ...,\ t_n)$ *є характеристичною функцією n-вимірної системи випадкових величин* $\{X_k\}$ *при* $k=\overline{1,n}$, *то характеристична функція n-вимірної системи випадкових величин* $Z=\{a_kX_k+b_k\}$, *де* $k=\overline{1,n}$, a_k *та* b_k *є невипадковими величинами, визначається таким виразом:*

$$g_z(t_1,t_2,\ ...,\ t_n)=e^{i\sum_{k=1}^{n}b_kt_k}\,g(a_1t_1,a_2t_2,\ ...,\ a_nt_n).$$

Дійсно, маємо

$$M\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}t_k(a_kX_k+b_k)}\right]=M\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kb_k}\,e^{i\sum_{k=1}^{n}t_k(a_kX_k)}\right]=$$

$$=e^{i\sum_{k=1}^{n}b_kt_k}\,M\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}(t_ka_k)X_k}\right]=e^{i\sum_{k=1}^{n}b_kt_k}\,g(a_1t_1,a_2t_2,\ ...,\ a_nt_n).$$

Задача 9.6. Довести, що характеристична функція системи двох незалежних випадкових величин, яка підпорядкована нормальному двовимірному закону розподілу з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, є добутком характеристичних функцій випадкових величин X та Y.

Розв'язання. Якщо система випадкових величин $\{X,Y\}$ підпорядкована нормальному закону розподілу та складається з незалежних випадкових величин, які мають параметри m_x, m_y, σ_x, σ_y, то щільність розподілу системи $\{X,Y\}$ визначається виразом вигляду

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\cdot e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}.$$

Тоді за визначенням характеристичної функції для системи двох випадкових величин (9.24) маємо

$$g(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_1x+it_2y}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\cdot e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_1x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot e^{it_2y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dxdy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_1x}\cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_2y}\cdot e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dy=$$

$$=e^{im_xt_1-\frac{\sigma_x^2t_1^2}{2}}\cdot e^{im_yt_2-\frac{\sigma_y^2t_2^2}{2}}=g_x(t_1)\cdot g_y(t_2)=$$

$$=e^{i\left(m_xt_1+m_yt_2\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_x^2t_1^2+\sigma_y^2t_2^2\right)},$$

де використані перетворення, які були викладені вище при розгляді характеристичної функції випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу.

Тобто якщо система двох незалежних випадкових величин підпорядкована двовимірному нормальному закону розподілу з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, то характеристична функція має вигляд

$$g(t_1,t_2) = g_x(t_1)\cdot g_y(t_2) = e^{i\left(m_x t_1 + m_y t_2\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 t_1^2 + \sigma_y^2 t_2^2\right)}.$$

Зауваження 1. Розв'язання цієї задачі могло бути основане на використанні властивості 4, визначеної в цьому підрозділі.

Зауваження 2. Якщо система $\{X,Y\}$ підпорядкована нормальному двовимірному закону розподілу, а випадкові величини X та Y є залежними з параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, то характеристична функція має вигляд

$$g(t_1,t_2) = e^{im_x t_1 + im_y t_2 - \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 t_1^2 + 2\sigma_x\sigma_y r_{xy} t_1 t_2 + \sigma_y^2 t_2^2\right)},$$

де r_{xy} – кореляційний коефіцієнт системи *A*.

Якщо $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$, то

$$g(t_1,t_2) = e^{-\frac{1}{2}\left(t_1^2 + 2r_{xy} t_1 t_2 + t_2^2\right)}.$$

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Дайте визначення характеристичної функції випадкової величини.
2. Сформулюйте властивості характеристичної функції випадкової величини.
3. Запишіть співвідношення, що пов'язує характеристичну функцію випадкової величини та її початковий момент s-го порядку.
4. Запишіть вирази для характеристичної функції основних законів розподілу одновимірних випадкових величин.
5. Дайте визначення характеристичної функції системи двох та n випадкових величин.
6. Чи дозволяє характеристична функція системи n випадкових величин визначити характеристичну функцію підсистеми випадкових величин, що становить $s < n$ випадкових величин?
7. У чому полягають підстави, які дають право стверджувати, що характеристична функція випадкової величини чи системи випадкових величин є формою запису їх законів розподілу?

8. Визначте характеристичну функцію випадкової величини

$$Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b ,$$

якщо випадкові величини X_k є незалежними та підпорядковані нормальним законам розподілу з параметрами m_{x_k}, σ_{x_k}.

9. Визначте характеристичну функцію нормованої випадкової величини

$$Y = \frac{X - m_x}{\sigma_x} ,$$

якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами m_x, σ_x.

10. Розглядається серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова подія A може відбутися з імовірністю

$$P = \frac{\lambda}{n} ,$$

де λ – деяке невід'ємне число.

Нехай X є випадкова величина, що визначає кількість появ події A. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X = m\right) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} ,$$

тобто доведіть, що граничним законом розподілу для закону розподілу Бернуллі є закон розподілу Пуассона.

ТЕМА 10
Граничні теореми теорії ймовірностей

10.1 Закон великих чисел

Раніше відзначалось, що теорія ймовірностей – це розділ математики, в якому виявляються закономірності великої кількості випадкових подій. Ця закономірність проявляється в тому, що при спостереженні великої кількості випадкових подій має місце незмінність результату. Так, при спостереженні великої кількості результатів незалежних випробувань виявляється незмінність частоти випадкових подій $\tilde{P}^*(A)$. Оскільки при повторенні незалежних і рівноймовірних випробувань випадкова величина X_i – кількість появи події A при i-му випробуванні – може приймати тільки два значення (один – коли подія A настала, та нуль – коли подія A не настала), то частота події $\tilde{P}^*(A)$ збігається з середнім значенням випадкових величин X_i при n випробуваннях. Тоді при великій кількості випробувань спостерігається незмінність середнього значення випадкових величин X_i. Виходить, при великій кількості випробувань n, які є незалежними та рівноймовірними, частота $\tilde{P}^*(A)$ та середнє значення випадкових величин мають властивість стійкості. Ця стійкість $\tilde{P}^*(A)$, яку трактують як статистичну стійкість, і виправдовує статистичне означення ймовірності випадкової події $\tilde{P}^*(A)$. Статистична стійкість $\tilde{P}^*(A)$ чи середнього значення випадкових величин X_i становить в широкому розумінні фізичний зміст закону великих чисел, який слід тлумачити так: за достатньо великої кількості випробувань результат окремого випробування практично не впливає на середній результат. А це означає, що за достатньо великої кількості випробувань, в яких спостерігаються можливі значення випадкової величини X, їх середнє значення практично стає невипадковою величиною, оскільки результат кожного окремого досліду на нього практично не впливає.

Виходячи з такого змісту закону великих чисел, Чебишевим у1845 році був сформульований принцип “практичної переконливості”, який полягає в тому, що якщо ймовірність деякої події достатньо мала, то слід вважати, що в окремому досліді ця подія практично не відбувається. Формально закон великих чисел реалізовується переліком граничних теорем, кожна з яких виявляє за певних умов та за достатньо великої кількості дослідів наближення середніх результатів можливих значень випадкової величини, яка розглядається в досліді, до деякої невипадкової величини, яка є сталою.

Відоме поняття границі: змінна X_n при зростанні n наближається до сталої границі a, якщо різниця за модулем $|X_n - a|$ стає меншою за будь-яке

невід'ємне ε для всіх значень n, починаючи з деякого достатньо великого числа. Якщо виходити із статистичного означення ймовірності випадкової події, то для частоти випадкової події $\tilde{P}^*(A)$ та її ймовірності $P(A)$ визначення такого твердження границі слід визнати некоректними. Фізично немає нічого неможливого в тому, наприклад, що за достатньо великої кількості дослідів, які полягають у виявлені появи тієї чи іншої грані при підкидані монети, що частота появи орла відхилиться від ймовірності цієї події на великому $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Так, якщо монета підкидається 1 000 разів, то можливо, що всі 1 000 разів випаде решка, але така подія, яка полягає в тому, що при підкидані монети 1 000 разів випаде решка, є тільки практично неможливою. Тому при розгляді послідовності випадкових величин $\hat{X}_n$ розглядають границю за ймовірністю.

Визначення. *Послідовність випадкових величин* $\hat{X}_n$ *наближається за ймовірністю до невипадкової величини a, якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *ймовірність нерівності* $\left|\hat{X}_n - a\right| \le \varepsilon$ *при* $n \to \infty$ *дорівнює одиниці, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{X}_n - a\right| \le \varepsilon\right) = 1$.

Це означення свідчить про те, що якими б не були довільно малими наперед задані $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$, завжди можна знайти таке велике число N, за якого для всіх $n > N$ виконується нерівність $P\left(\left|\hat{X}_n - a\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \delta$.

Доказ сукупності граничних теорем теорії ймовірностей, які за своїм формулюванням описують закон великих чисел, оснований на нерівності Чебишева.

10.2 Нерівність Чебишева

Нерівність П. Л. Чебишева має таке формулювання.

Для будь-якої випадкової величини, яка має кінцеву дисперсію, при довільному $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$P\left(\left|X - m_x\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D[X]}{\varepsilon^2}, \qquad (10.1)$$

тобто нерівність П. Л. Чебишева стверджує, що ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує будь-яке невід'ємне число ε, *обмежена зверху величиною* D_x / ε^2.

Для доведення цієї нерівності розглянемо на числовій прямій інтервал, зображений на рис. 10.1.

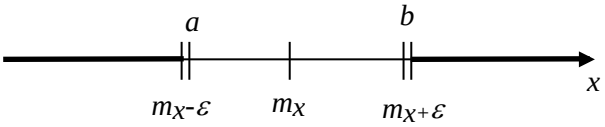


Рис. 10.1. Інтервали відхилення $|X - m_X| \geq \varepsilon$

$$P\left(|X - m_x| \geq \varepsilon\right) = P\left(X \notin (a,b)\right) =$$

Маємо

$$= \int\limits_{\left(|x-m_x| \geq \varepsilon\right)} f(x)dx \leq \int\limits_{\left(|x-m_x| \geq \varepsilon\right)} \frac{(x-m_x)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx,$$

оскільки

$$\frac{(x-m_x)^2}{\varepsilon^2} > 1.$$

Тоді

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\left(|x-m_x| \geq \varepsilon\right)} (x-m_x)^2 f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x)dx = \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Виходить,

$$P\left(|X - m_x| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки

$$P\left(|X - m_x| \geq \varepsilon\right) + P\left(|X - m_x| < \varepsilon\right) = 1,$$

то

$$P\left(|X - m_x| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (10.2)$$

Вирази (10.1) та (10.2) дають змогу отримати відповідно верхню та нижню границю: $P\left(|X - m_x| \geq \varepsilon\right)$; $P\left(|X - m_x| < \varepsilon\right)$.

Аналогічно проводиться доведення нерівності Чебишева у випадку, коли розглядається дискретна випадкова величина X, яка приймає свої можливі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з імовірностями $P_1, P_2, \ldots, P_n$, але тільки замість інтегралів розглядаються суми для тих значень x_i, для яких $|x_i - m_x| \geq \varepsilon$. Для неперервної випадкової величини X $P\left(X = m_x - \varepsilon\right) = P\left(X = m_x + \varepsilon\right) = 0$, але в (10.1) залишимо символ рівності, маючи на увазі, що (10.1) справедливе й для дискретної випадкової величини.

Задача 10.1. Для неперервної величини X, яка має математичне сподівання m_x та середнє квадратичне відхилення σ_x, оцінити ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує $3\sigma_x$, та порівняти цю оцінку з імовірністю цієї ж події в разі, коли випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу.

Розв'язання. Оцінку ймовірності визначеної події проведемо з (10.1). Тоді

$$P\left(\left|X-m_x\right|\geq\varepsilon\right)=P\left(\left|X-m_x\right|\geq 3\sigma_x\right)\leq\frac{D[X]}{(3\sigma_x)^2}=\frac{\sigma_x^2}{9\sigma_x^2}=\frac{1}{9}. \qquad (10.3)$$

Визначимо точне значення ймовірності цієї події за умови, що випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу.

Маємо

$$P\left(\left|X-m_x\right|\geq\varepsilon\right)=1-P\left(\left|X-m_x\right|<\varepsilon\right)==1-P\left(m_x-\varepsilon<X<m_x+\varepsilon\right)$$

$$=1-P\left(m_x-3\sigma_x<X<m_x+3\sigma_x\right)=$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{m_x+3\sigma_x-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-3\sigma_x-m_x}{\sigma_x}\right)\right]=$$

$$=1-\left[\Phi(3)+\Phi(3)\right]=1-2\Phi(3)=1-2\cdot 0,498\ \ 6=0,002\ \ 8.$$

Як видно, оцінка ймовірності події, яка полягає в тому, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання на величину, яка перевищує $3\sigma_x$, дорівнює 0,111 1, а значення ймовірності цієї події за умови, що випадкова величини X підпорядкована нормальному закону, дорівнює 0,002 8. Тобто нерівність Чебишева дає досить грубу оцінку ймовірності події, яка розглядається, у порівнянні з точним значенням імовірності цієї події в тому разі, коли закон розподілу випадкової величини є нормальним, оскільки 0,111 1 значно більше, ніж 0,002 8.

Зауваження 1. При розв'язанні цієї задачі можна було скористатися відомим "правилом $3\sigma_x$", яке має місце в тому разі, коли випадкова величина підпорядкована нормальному закону розподілу, та яке визначає, що $P\left(\left|X-m_x\right|<3\sigma_x\right)\cong 0,997$.

Зауваження 2. Розв'язання цієї задачі також свідчить про те, що для будь-якої випадкової величини ймовірність події, яка полягає в тому, що "правило $3\sigma_x$" не виконується, не перевищує $1/9$.

Розв'язання цієї задачі дозволяє визначити таке: оцінка за (10.1) є достатньо грубою верхньою границею, а оцінка за (10.2) є достатньо грубою

нижньою границею. Цей факт можна визначити як недолік при практичному використанні (10.1) та (10.2).

Але те, що ці оцінки за (10.1) та (10.2) при практичному використанні можуть бути отримані без знання закону розподілу випадкової величини *X,* є суттєвою перевагою нерівності Чебишева.

10.3 Теорема Чебишева

Розглядається випадкова величина X з відомим математичним сподіванням m_x та σ_x^2. Це означає, що відомий закон розподілу X. Нехай $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ – генеральна сукупність можливих значень випадкової величини X, з якої проводиться $n < k$ серій незалежних випадкових вибірок $\left\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\right\}, i = \overline{1,n}$, де n_i – кількість випробувань в i-й серії, кожна з яких розглядається як можливі значення випадкової величини X_i, $i = \overline{1,n}$. У такому разі кажуть: над випадковою величиною X проводиться n незалежних дослідів, в яких вона приймає значення X_i, $i = \overline{1,n}$.

Введено до розгляду випадкову величину

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i . \tag{10.4}$$

Теорема Чебишева стверджує таке.

При наближенні кількості незалежних випробувань до нескінченності $(n \to \infty)$ *середнє арифметичне значення випадкових величин, які спостерігаються при n незалежних випробуваннях над випадковою величиною X, прямує за ймовірністю до її математичного сподівання, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n - m_x \right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{10.5}$$

Доведення. Оскільки X_i, $i = \overline{1,n}$ – значення випадкової величини X при n незалежних випробуваннях, які відповідають випадковим вибіркам, зазначеним вище, то $m_{x_i} = m_x$ та $\sigma_{x_i}^2 = \sigma_x^2 \quad \forall \quad i = \overline{1,n}$.

Розглянемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Y_n. Маємо:

$$M\left[Y_n\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{n \cdot m_x}{n} = m_x ;$$

$$D[Y_n] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}.$$

Тобто
$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n\right] = m_x; \qquad D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n\right] = \frac{\sigma_x^2}{n}. \tag{10.6}$$

Отже, математичне сподівання середнього арифметичного випадкових величин X_i, $i = \overline{1,n}$, які спостерігаються при незалежних випробуваннях над випадковою величиною X, збігається з математичним сподіванням випадкової величини X, а дисперсія середнього арифметичного випадкових величин X_i, $i = \overline{1,n}$ при зростанні кількості випробувань зменшується.

Для випадкової величини Y_n напишемо нерівність Чебишева (10.2).

Тоді
$$P\left(\left|Y_n - m_{y_n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2},$$

а з урахуванням (10.6) будемо мати

$$P\left(\left|M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n\right] - m_x\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{n\varepsilon^2},$$

де видно, що якщо $n \to \infty$, то рівність (10.5) виконується. Теорема доведена.

Слід відзначити, що якщо всі можливі значення випадкової величини X складають генеральну сукупність, то випадковим вибіркам з генеральної сукупності $\{x_i\}$, $i = \overline{1,n}$, буде відповідати $\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n$ —середнє арифметичне результатів спостережень як можливе значення випадкової величини $\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n$. Тоді (10.5) має таке тлумачення: при необмеженому зростанні кількості спостережень $n \to \infty$ середнє арифметичне результатів спостережень за ймовірністю прямує до математичного сподівання випадкової величини X.

Задача 10.2. Помилка при округленні результату вимірювання як випадкова величина підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі (–0,5; 0,5). Оцінити ймовірність того, що сумарна помилка за

абсолютною величиною буде не менше 15 при округленні 100 результатів незалежних вимірювань.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина помилки округлення при i-му вимірюванні. Оскільки випадкова величина X_i підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі (– 0,5; 0,5), то

$$M\left[X_i\right]=\frac{-0,5+0,5}{2}=0\,;\quad D\left[X_i\right]=\frac{\left[0,5-(-0,5)\right]^2}{12}=\frac{1}{12}\,.$$

Якщо Y – випадкова величина сумарної помилки при округленні 100 результатів незалежних вимірювань, тоді $Y=\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$, а за граничною теоремою П. Л. Чебишева (10.5) маємо

$$P\left(\left|\ Y=\sum_{i=1}^{100} X_i\ \right|\ge 0,15\right)\le\frac{\sigma_{x_i}^2}{n\cdot 0,15^2}=\frac{1}{12\cdot 100\cdot 0,15^2}=\frac{1}{27}=0,04\,.$$

Тобто ймовірність події, яка полягає в тому, що сумарна помилка за абсолютною величиною при округленні 100 результатів незалежних вимірювань буде не менше 15, не перевищує 0,04.

10.4 Узагальнена теорема Чебишева

Нехай над випадковою величиною X проводиться n незалежних різних дослідів і кожному i-му досліду відповідає X_i – випадкова величина. У цьому разі закони розподілу випадкових величин будуть різними (можуть збігатися лише види законів розподілу), а тому будуть різними їх математичні сподівання m_{x_i}, $i=\overline{1,n}$ та дисперсія $\sigma_{x_i}^2$, $i=\overline{1,n}$.

Узагальнена теорема П. Л. Чебишева стверджує таке.

Якщо розглядається послідовність незалежних випадкових величин X_1, X_2, …, X_n, …, які мають різні математичні сподівання m_{x_i}, i = 1, 2, … та різні дисперсії $\sigma_{x_i}^2$, i = 1, 2, …, які обмежені зверху одним і тим же числом L, то різниця між середнім арифметичним випадкових величин X_i, які спостерігаються, та середнім арифметичним їх математичних сподівань при наближені кількості випробувань до нескінченості ($n\to\infty$) прямує за ймовірністю до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]\ \right|\ge\varepsilon\right)=0\,. \qquad (10.7)$$

Доведення. Виходячи з того, що $\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \Big/ n$ залежить від n, та маючи на увазі зазначене вище означення наближення послідовності випадкових величин до невипадкової величини за ймовірністю, маємо таке судження.

Розглядаємо

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n \quad \text{та} \quad M\left[Y_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i};$$

$$D\left[Y_n\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right] \le \frac{nL}{n^2} = \frac{L}{n}.$$

Згідно з нерівністю Чебишева маємо, що

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{L}{n\varepsilon^2}.$$

Яким би малим не було довільне ε, завжди можна вибрати n таким великим, щоб права частина зазначеного виразу була б менше від довільно визначеного δ, тому

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| \ge \varepsilon\right) \le \delta,$$

а якщо $n \to \infty$, то маємо (10.7).

Якщо перейти до протилежної події, то будемо мати

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta,$$

а якщо $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon\right) = 1.$

10.5 Теорема Маркова

Розглядається послідовність залежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, які мають математичні сподівання $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}, \ldots$ та кореляційну матрицю $\left\| R_{x_i,x_j} \right\| = \left\| M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j \right] \right\|$, розміри якої залежать від n.

Як і раніше, $M\left[Y_n\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$, а також відомо, що для залежних випадкових величин

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right] + 2\sum_{i<j} R_{x_i,x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j},$$

тобто дисперсія суми залежних випадкових величин дорівнює сумі елементів кореляційної матриці.

Тоді

$$D\left[Y_n\right] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j}.$$

Якщо на елементи кореляційної матриці накласти вимоги, які полягають в тому, щоб $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i,x_j}$ при $n\to\infty$ зростала б повільніше ніж n^2, то тоді $\lim_{n\to\infty} D\left[Y_n\right] = 0$.

Формулювання теореми А. А. Маркова є таким.

Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n, ...є залежними з математичними сподівання m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}, ... та

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} X_i\right] = 0, \tag{10.8}$$

то різниця між середнім арифметичним цих випадкових величин та середнім арифметичним їх математичних сподівань при $n\to\infty$ прямує за ймовірністю до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \ge \varepsilon\right) = 0. \tag{10.9}$$

Доведення. До випадкової величини Y_n застосуємо нерівність Чебишева, тоді маємо

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D\left[Y_n\right]}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки за (10.8) при $n \to \infty$ $D[Y_n] \to 0$, то при довільно малому ε можна вибрати n таким великим, що $\dfrac{D[Y_n]}{\varepsilon^2} < \delta$ для будь-якого $\delta > 0$, тоді

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \delta,$$

а ймовірність протилежної події

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta,$$

що й стверджує (10.9). Для протилежної події, яка зазначена в (10.9), маємо

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Задача 10.3. Залежні випадкові величини X_1, X_2, ... мають одинакові математичні сподівання та обмежені дисперсії. Чи можна до послідовності X_1, X_2, ... застосовувати закон великих чисел, якщо всі кореляційні моменти $R_{X_i X_j}$, $i \neq j$; $i, j = 1,2,$ .... є від'ємними?

Розв'язання. Нехай $\sigma^2_{\max}$ є найбільшою з дисперсій випадкових величин $X_1, X_2, \ldots$. Тоді

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} R_{X_i X_j} \leq \sum_{i=1}^{n} D[X_i] \leq n\sigma^2_{\max}.$$

Згідно з граничною теоремою Маркова (10.9) маємо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

якщо

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = 0.$$

Розглянемо випадок, зазначений в умові задачі, коли дисперсія середнього арифметичного випадкових величин прямує до нуля ($n \to \infty$).

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sigma_{\max}^2}{n^2} = 0 .$$

Тобто умови граничної теореми А. А. Маркова виконуються, а виходить, до послідовності випадкових величин X_1, X_2, ... можна застосувати закон великих чисел.

Задача 10.4. Кожна з незалежних випадкових величин X_k з однаковою ймовірністю може приймати два значення: $-k^S$ та k^S; $k = 1, 2$ .... За якого S для послідовності X_1, X_2, ... виконуються умови граничної теореми Маркова?

Розв'язання. Для випадкової величини X_k маємо

$$M[X_k] = -k^S \cdot \frac{1}{2} + k^S \cdot \frac{1}{2} = 0 ;$$

$$D[X_k] = (-k^S - 0)^2 \frac{1}{2} + \left(k^S - 0\right)^2 \frac{1}{2} = k^{2S} .$$

Тоді $$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_k] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{2S} .$$

Якщо $S = \frac{1}{2}$, то маємо

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2S} = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

як суму арифметичної прогресії, тоді

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} .$$

Тобто якщо $S = \frac{1}{2}$, а виходить, і при $S > \frac{1}{2}$ умова граничної теореми Маркова не виконується. До послідовності випадкових величин X_1, X_2, ... X_k, ... закон великих чисел не можна застосовувати.

Якщо $S < \frac{1}{2}$, то $2S < 1 - \nu$, де $\nu > 0$, тоді

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{1-\nu} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1^{1-\nu} + 2^{1-\nu} + ... + n^{1-\nu}\right) \le \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot n^{1-\nu} = \frac{1}{n^{\nu}};$$

$$\lim_{n\to\infty} D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\nu}} = 0 \quad \text{при } 0 < \nu < 1.$$

Виходить, до послідовності випадкових величин X_1, X_2, ... може бути застосована гранична теорема Маркова, тобто може бути застосований закон великих чисел.

10.6 Теореми Бернуллі та Пуассона

Теорема Я. Бернуллі встановлює зв'язок між частотою появи подія *A* та її ймовірністю. Теорема стверджує таке.

При необмеженому зростанні кількості дослідів з незалежними наслідками частота події A прямує за ймовірністю до її ймовірності, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|P^*(A) - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (10.10)$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n,$$

де X_i – випадкова величина кількості появи події A в i-му досліді. Ця випадкова величина може приймати два можливі значення: один з ймовірністю $P(A) = P$ та нуль з ймовірністю $1 - P(A) = 1 - P$. Закон розподілу у вигляді ряду розподілу наведений в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	$x_i^{(k=1)} = 1$	$x_i^{(k=2)} = 0$
$P\left(X_i = x_i^{(k)}\right)$	$p^{(k=1)} = P$	$p^{(k=2)} = 1 - P$

Тоді $$M\left[X_i\right]=\sum_{k=1}^{m} x_i^{(k)} p^{(k)} = 1\cdot P + 0(1-P) = P;$$

$$D\left[X_i\right]=\sum_{k=1}^{m} \left(x_i^{(k)} - m_{x_i}\right) p^{(k)} = \left(1-P\right)^2 P + \left(0-P\right)^2 \left(1-P\right) =$$

$$= \left(1-P\right)\left(P - P^2 + P^2\right) = P\left(1-P\right),$$

тобто,
$$\begin{aligned} M\left[X_i\right] &= P(A); \\ D\left[X_i\right] &= P(A)(1-P(A)). \end{aligned} \quad ; \qquad (10.11)$$

Випадкова величина $\sum_{i=1}^{n} X_i$ є кількістю подій A в n дослідах з незалежними наслідками, $P^*(A) = Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n$;

$$M\left[P^*(A)\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\cdot nP = P;$$

$$D\left[P^*(A)\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left[X_i\right] = \frac{n\cdot P(1-P)}{n^2} = \frac{Pq}{n},$$

де $q = 1 - P$.

Тобто маємо
$$\begin{aligned} M\left[P^*(A)\right] &= P; \\ D\left[P^*(A)\right] &= \frac{Pq}{n}. \end{aligned}$$

Використаємо нерівність Чебишева

$$P\left(\left|Y - M\left[Y\right]\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left[Y\right]}{\varepsilon^2};$$

$$P\left(\left|P^*(A) - M\left[P^*(A)\right]\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left[P^*(A)\right]}{\varepsilon^2};$$

$$P\left(\left|P^*(A) - P(A)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

де видно, що якщо $n \to \infty$, то (10.10) виконується. Теорема доведена.

При практичному використанні теореми Бернуллі користуються виразами

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{Pq}{n\varepsilon^2} \qquad (10.13)$$

або

$$P\left(|m-nP|\le n\varepsilon\right)\ge 1-\frac{Pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (10.14)$$

де m – кількість наслідків при n незалежних випробуваннях, за яких відбувається подія A.

Задача 10.5. Виготовлено 100 000 виробів. Імовірність події A, яка полягає в тому, що виріб відповідає вимогам стандарту, $P(A)$=0,95. Оцінити ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість виробів, які відповідають вимогам стандарту, буде не менше 94 000 та не більше 96 000.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що проведено n = 100 000 дослідів, які характеризуються незалежними та рівноймовірними наслідками, тому випадкова величина $X = m$ – кількість наслідків, за яких відбувається подія A, підпорядкована біноміальному закону розподілу. Тоді $M[X] = nP$. Використовуючи (10.14), маємо

$$P(94\ 000\le X=m\le 96\ 000)=P\left(|m-100\ 000\cdot 0,95|\le 1\ 000\right)\ge$$

$$\ge 1-\frac{0,95\cdot 0,05}{100\ 000\cdot 0,01^2}\cong 0,995.$$

Виходить, з імовірністю не менше 0,995 можна стверджувати, що кількість виробів, які відповідають стандарту, буде перебувати в межах (94 000 – 96 000).

Задача 10.6. При кожному випробуванні сприятливий наслідок (випадкова подія A) відбувається з імовірністю P = 0,8. Оцінити ймовірність того, що при 300 незалежних випробуваннях подія A настане від 230 до 250 разів.

Розв'язання. Введемо до розгляду випадкову величину X – кількість появ події A при n = 300 випробуваннях.

Використаємо граничну теорему Я. Бернуллі; маємо

$$m_x = nP = 300\cdot 0,8 = 240;\ P\left(|m-nP|\le n\varepsilon\right)\ge 1-\frac{Pq}{n\varepsilon^2},$$

тоді $P(230\le X\le 250)=P\left(|X-m_x|\le 10\right)=P\left(|X-240|\le 10\right)\ge 1-\frac{Pq}{n\varepsilon^2}$,

а оскільки $n\varepsilon = 10$, то $\varepsilon = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$, тоді

$$P\left(\left|X - 240\right| \le 10\right) \ge 1 - \frac{0,8 \cdot 0,2}{300\left(1/30\right)^2} = 0,52.$$

Теорема Пуассона має відношення до випадку, коли розглядається повторення незалежних дослідів з різноймовірними наслідками. При *i*-му досліді подія *A* може відбутися з імовірністю P_i, i = 1, 2 ... . Теорема Пуассона стверджує таке.

При наближенні кількості незалежних випробувань до нескінченності ($n \to \infty$) різниця між частотою події A та середнім арифметичним її ймовірностей прямує за ймовірністю до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|P_n^*(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i\right| \ge \varepsilon\right) = 0. \qquad (10.15)$$

Доведення. Доведення теореми Пуассона випливає з узагальненої теореми Чебишева. Дійсно, оскільки

$$P_n^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

де X_i – випадкова величина кількості наслідків, в яких відбувається подія *A* при *i*-му досліді, та $M[X_i]=P_i$, $D[X_i]=P_i(1-P_i)$, i=1, 2, ... Дисперсія X_i при будь-якому i є обмеженою величиною L = 0,25, оскільки максимальне значення P_i $(1 - P_i)$ досягається при P_i = 0,5. Застосовуючи узагальнену теорему П. Л. Чебишева, переконаємось у вірності (10.15).

10.7 Локальна гранична теорема Муавра – Лапласа

Розглянемо закономірність, яка спостерігається для схеми послідовних незалежних випробувань. Це означає, що для послідовності повних груп подій $A_1^{(s)}$, $A_2^{(s)}$, …, $A_k^{(s)}$, $s = \overline{1,n}$ імовірність появи події $P\left(A_i^{(s)}\right)$, $i = \overline{1,k}$ в групі з індексом *s* не залежить ні від значення цього індексу, ні від того, які події відбудуться в інших групах, та $\sum_{i=1}^{k} P\left(A_i^{(s)}\right) = 1$. Така схема вперше була розглянута Я. Бернуллі при k = 2. Ця схема отримала назву схема Бернуллі, для якої справедлива формула Бернуллі

$$P_{n,m} = C_n^m P^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - P$, а $P_{n,m}$ – ймовірність події, яка полягає в тому, що з n випробувань рівно в m із них відбудеться наслідок, який нас цікавить (розглядається подія A) та рівно $(n–m)$ разів відбудеться подія $\bar{A}$. Очевидно, що $\sum_{m=0}^{n} P_{n,m} = 1$. Якщо X – випадкова величина – кількість подій A при n дослідах, то $P(X = m) = P_{n,m}$.

Ці ймовірності є коефіцієнтами при z^m бінома

$$(q + Pz)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m q^{n-m} z^m = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} z^m .$$

Тому вважають, що випадкова величина X підпорядкована біноміальному закону розподілу. Відомо, що коефіцієнти бінома $(q + Pz)^n$ спочатку зростають до певного значення, а потім спадають. Щоб визначити умови, за яких коефіцієнти зростають та спадають, розглянемо $P_{n,m}$ як функцію від n. Тоді будемо мати:

$$\frac{P_{n,m+1}}{P_{n,m}} = \frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} P^{m+1} q^{n-m-1}}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!} P^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1}\frac{P}{q},$$

якщо $\dfrac{n-m}{m+1}\dfrac{P}{q} \geq 1$, то $nP - mP \geq (m+1)(1-P)$; $m \leq nP - q$ і $P_{n,m+1} \geq P_{n,m}$;

якщо $m > nP - q$, то $P_{n,m+1} < P_{n,m}$.

Тоді, якщо m приймає малі значення відносно $nP – q$, то $P_{n,m}$ зростає, а потім, зі зростанням m, $P_{n,m}$ спадає. Найбільше значення $P_{n,m}$ визначає моду M_{o_x} випадкової величини X. Для біноміального закону розподілу маємо $nP - q \leq M_{o_x} \leq nP + P$.

Зазначене вище дозволяє встановити таке:

якщо $nP - q < 0$, то $P_{n,o} > P_{n,1} > .... > P_{n,m}$,

якщо $nP - q = 0$, то $P_{n,o} = P_{n,1} > P_{n,2} > \ ... \ > P_{n,m}$.

Повернемося до змісту задачі 10.5. При її розв’язанні відзначалося, що випадкова величина $X = m$ підпорядкована біноміальному закону розподілу, тому ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість виробів, які відповідають вимогам стандарту, буде не менше 94 000 та не більше 96 000, може бути визначена точно за формулою Бернуллі, а саме

$$P\left(94\ \ 000 \le X = m \le 96\ \ 000\right) = \sum_{m=94\ \ 000}^{96\ \ 000} C_{10^5}^{m} \cdot 0,95^{m} \cdot 0,05^{10^5-m}.$$

Видно, що цей підрахунок пов'язаний з розрахунковими труднощами, які виникають при підрахунку кількості сполучень C_n^m із $n=10^5$ елементів по m елементів, яка змінюється від 94 000 до 96 000 елементів.

Відзначена вище закономірність зміни $P_{n,m}$ при зміні m та належність розрахункових труднощів при розрахунку сполучень при великих n та m привели до визначення граничних виразів, які б дозволили з достатньою точністю розрахувати ймовірності випадкових подій зазначеного вище змісту. Таке граничне співвідношення вперше було запропоноване у 1730 р. Муавром для випадку, коли ймовірність сприятливого наслідку в досліді дорівнює $1/2$. Цей результат був узагальнений Лапласом на випадок, коли $0 < P(A) < 1$ та отримав назву локальної теореми Муавра – Лапласа.

Теорема. *Якщо ймовірність появи сприятливого наслідку A при n незалежних дослідах є сталою величиною $0 < P < 1$, то ймовірність $P_{n,m}$ того, що в цих дослідах подія A настане рівно m разів, задовольняє співвідношенню*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,m}}{\left(\sqrt{2\pi nPq}\right)^{-1} \cdot e^{-(m-nP)^2/(2nPq)}} = 1 \qquad (10.16)$$

рівномірно для всіх m, для яких $\dfrac{m-nP}{\sqrt{2nPq}}$ перебуває у будь-якому скінченному інтервалі.

Задача 10.7. Імовірність виготовлення бракованого виробу дорівнює $0,005$. Визначити ймовірність події, яка полягає в тому, що з 10 000 виробів, взятих навмання, рівно 40 будуть бракованими.

Розв'язання. Використовуючи (10.16), маємо

$$P_{n,m} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10\ \ 000 \cdot 0,005 \cdot 0,995}} e^{-\frac{(40-100\ \ 00\ \cdot\ 0,005)^2}{2\cdot 10\ \ 000\ \cdot 0,005\ \cdot\ 0,995}} \approx 0,002\ \ 06.$$

Точне значення зазначеної ймовірності, розраховане за формулою Бернуллі, дає $P_{n=10\ \ 000,\, m=40} = 0,001\ \ 97$.

Розв'язання цієї задачі свідчить про те, що співвідношення (10.16) дає задовільний результат при практичному його використанні.

10.8 Інтегральна гранична теорема Муавра – Лапласа

Інтегральна гранична теорема Муавра – Лапласа має таке формулювання.

Теорема. *Якщо* m *– кількість появ випадкової події* A *(сприятливих наслідків) при* n *незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність цієї події дорівнює* $P(0<P<1)$, *то рівномірно по відношенню* a *та* b $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ *при зростанні кількості випробувань до нескінченості* $(n \to \infty)$ *виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{m-nP}{\sqrt{nPq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\,. \qquad (10.17)$$

Гранична теорема Я. Бернуллі була опублікована у 1713 р. Її практичне використання пов'язане із записом (10.13) та дає оцінку ймовірності події, яка полягає в тому, що при n незалежних випробуваннях, у кожному з яких сприятливий наслідок (випадкова подія A) може статися з ймовірністю $P(0<P<1)$, частота події A $P^*(A)$ відхилиться від імовірності цієї події $P(A)$ на величину, не більшу, ніж деяке невід'ємне ε. Інтегральна гранична теорема (10.17) в окремому випадку була доведена Муавром у 1730 році, а узагальнена на випадок $0<P<1$ у 1812 році Лапласом. Одним з практичних використань (10.17) є визначення (на відміну від теореми Я. Бернуллі, яка дозволяє лише оцінити її) імовірності зазначеної вище випадкової події. З цією метою розглянемо таке:

$$P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon < \frac{m-nP}{n} < \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(-\varepsilon\frac{n}{\sqrt{nPq}} < \frac{n(m-nP)}{\sqrt{nPq}\cdot n} < \varepsilon\frac{n}{\sqrt{nPq}}\right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}} < \frac{m-nP}{\sqrt{nPq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right) \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right),$$

де $P^*(A) = m/n$ – випадкова величина, оскільки m (кількість спостережень, які відповідають появі події A у вибірці), – є випадковою величиною; $P(A) = P$; $n/\sqrt{nPq} > 0$, тому в двосторонній нерівності знак нерівності не

змінюється, а $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-z^2/2}dz$ – є функцією Лапласа, тобто

$$P\left(\left|P^*-P\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{Pq}}\right). \qquad (10.18)$$

Примітка. Слід відзначити, що якщо $n\to\infty$, то $P\left(\left|P^*-P\right|<\varepsilon\right)\to 1$, оскільки $\Phi(\infty)=1/2$. Це означає, що отримується вже відомий результат, який зазначений вище як гранична теорема Бернуллі.

Практичне використання (10.18) дозволяє розв'язувати такі задачі.

1. Визначати ймовірність того, що частота появи події A відхилиться від імовірності цієї події не більш, ніж на ε.

2. Визначати кількість випробувань, яку необхідно провести для того, щоб з імовірністю не менше β можна було б стверджувати, що частота сприятливого наслідку (подія A) відхилилась від імовірності цієї події не більш, ніж на ε.

3. Визначати границі, в яких буде перебувати випадкова величина $\frac{m-nP}{\sqrt{nPq}}$, при n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність випадкової події A дорівнює P, де $0<P<1$, та ймовірність того, що частота випадкової події A відхилиться від імовірності цієї події, дорівнює β.

Задача 10.8. Скільки разів треба підкинути монету, щоб імовірність отримати відхилення частоти появи орла від імовірності його появи на величину, яка не перевищує $\varepsilon=0,05$, була б не менше $0,99$?

Розв'язання. Із (10.18) випливає, що

$$P\left(\left|P^*-P\right|<0,05\right)=2\Phi\left(0,05\sqrt{\frac{n}{0,5\cdot 0,5}}\right)=\beta\ge 0,99;$$

$$\Phi\left(0,05\sqrt{\frac{n}{0,25}}\right)\ge 0,495;\ 0,05\sqrt{\frac{n}{0,25}}\ge 2,58;$$

$$\frac{n}{0,25}\ge 2\quad 662,56;\ n\ge 665,6;\ \ n=666.$$

Тобто щоб з імовірністю $\beta=0,99$ бути впевненим у тому, що частота появи орла відхилиться від імовірності появи орла на величину, яка не перевищує $\varepsilon=0,05$, необхідно провести 666 випробувань.

Зауваження. Із змісту задачі 10.8 можна зробити висновок, що якщо прийняти $\beta_1 < \beta$ та $\varepsilon_1 > \varepsilon$, то необхідна кількість випробувань буде значно меншою. Так, при $\beta_1 = 0,75$ та $\varepsilon_1 = 0,1$ $n = 34$.

Задача 10.9. Визначити ймовірність того, що частота появи орла відхиляється від імовірності цієї події не більш, ніж на при кількості випробувань $n = 10000$.

Розв'язання. З (10.18) маємо

$$P\left(|P^* - P| < 0,005\right) = 2\Phi\left(0,005\sqrt{\frac{10000}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 2 \cdot 0,3413 \cong 0,683.$$

Задача 10.10. Визначити границі, в яких буде перебувати відхилення частоти появи орла від ймовірності тієї ж події з імовірністю не менш, ніж 0,9 при 1 000 випробувань.

Розв'язання. Використаємо (10.18). Маємо

$$P\left(|P^* - P| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{1\ \ 000}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = \beta \geq 0,9,$$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{1\ \ 000}{0,25}} \geq 1,65; \quad \varepsilon \geq 0,026; \quad \varepsilon = 0,027.$$

10.9 Гранична теорема Ляпунова

Гранична теорема О. М. Ляпунова пов'язана з визначенням закону розподілу суми випадкових величин, коли кількість доданків прямує до нескінченності. На практиці ця теорема О. М. Ляпунова має важливе значення, тому її називають центральною граничною теоремою теорії ймовірностей.

Розглянемо теорему О. М. Ляпунова в такому формулюванні.

Теорема. *Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_k, ... є незалежними та підпорядкованими одному й тому ж закону розподілу з математичним сподіванням m_x та дисперсією σ_x^2, то закон розподілу випадкової величини* $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *при необмеженому зростанні кількості доданків* $(n \to \infty)$ *наближається до нормального закону розподілу.*

Доведення. Розглянемо доведення для випадку, коли випадкові величини є неперервними.

Оскільки випадкові величини X_k підпорядковані одному й тому ж закону розподілу, то X_k, $k=\overline{1,n}$ відповідають одні й ті ж характеристичні функції, тобто $q_{x_1}(t)=q_{x_2}(t)=...=q_x(t)$. Якщо X_k, $k=\overline{1,n}$ є незалежними, то характеристична функція випадкової величини Y_n має вигляд

$$q_{y_n}(t)=\left[q_x(t)\right]^n. \tag{10.19}$$

Подамо $q_x(t)$ у вигляді ряду Маклорена поблизу точки $t=0$ та обмежимось трьома членами ряду. Тоді

$$q_x(t)=q_x(t=0)+q_x'(t=0)t+\left[\frac{q_x''(t=0)}{2!}+\alpha(t)\right]\cdot t^2,$$

де при $t=0$ маємо $\alpha(t)\to 0$.

Визначимо $q_x(t=0)$; $q_x'(t=0)$; $q_x''(t=0)$. З (5.6) $q_x(t=0)=1$, з (5.10) $q_x'(t=0)=i\alpha_1=im_x$; $q_x''(t=0)=i^2\alpha_2=-\left(\mu_2+\alpha_1^2\right)$, де α_1 – початковий момент першого порядку, а μ_2 – центральний момент другого порядку.

Приймемо $m_x=0$, що відповідає перенесенню початку прямокутної системи координат в точку m_x та не обмежує узагальнення доведення теореми. Тоді $q_x'(t=0)=0$, а $q_x''(t=0)=-\mu_2=-\sigma_x^2$.

Вираз (10.19) буде мати вигляд

$$q_{y_n}(t)=\left[1-\left[\frac{\sigma_x^2}{2}-\alpha(t)\right]\cdot t^2\right]^n. \tag{10.20}$$

Від випадкової величини Y_n перейдемо до нормованої випадкової величини

$$Z_n=\frac{Y_n}{\sigma_x\sqrt{n}}, \tag{10.21}$$

для якої маємо

$$D[Z_n]=D\left[\frac{Y_n}{\sigma_x\sqrt{n}}\right]=D\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\Big/\left(\sigma_x\sqrt{n}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}D[X_k]\Big/\left(\sigma_x^2\cdot n\right)=\frac{n\cdot\sigma_x^2}{\sigma_x^2\cdot n}=1,$$

тобто дисперсія Z_n не залежить від n.

Якщо довести, що закон розподілу Z_n при $n \to \infty$ наближається до нормального закону розподілу, то тим самим буде доведено, що при $n \to \infty$ закон розподілу випадкової величини Y_n також наближається до нормального закону розподілу, оскільки Y_n лінійно залежить від випадкової величини Z_n, як про це свідчить (10.21).

Розглянемо характеристичну функцію випадкової величини Z_n та покажемо, що при $n \to \infty$ вона прямує до виразу характеристичної функції нормального закону розподілу.

Згідно з властивістю характеристичної функції (5.8) маємо

$$q_{z_n}(t) = \left[1 - \left[\frac{\sigma_x^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2}\right]^n;$$

$$ln\, q_{z_n}(t) = n \cdot \ln\left\{1 - \left[\frac{\sigma_x^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2}\right\}.$$

Нехай $\left[\frac{\sigma_x^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma_x^2} = \chi$, тоді $ln\, q_{z_n}(t) = n\ln(1-\chi)$,

якщо n прямує до нескінченності, то χ пряму до нуля, а при достатньо великому n величину χ слід вважати малою. Якщо $\ln(1-\chi)$ подати рядом Маклорена, який має вигляд

$$\ln(1-\chi) = -\chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3} - \ldots - \frac{\chi^n}{n} - \ldots,$$

і утримати лише перший член ряду, то тоді $\ln q_{z_n}(t) = -n\chi$;

$$\lim_{n\to\infty} \ln q_{zn}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[n(-\chi)\right] = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{t^2}{2} + \alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma_x^2}\right\} =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma_x^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2},$$

тому що $$\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma_x^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right) = 0,$$

оскільки при поданні $q_x(t)$ у вигляді ряду Маклорена при $t \to 0$ $a(t) \to 0$, але

$$\alpha\left(\frac{t}{\sigma_x\sqrt{n}}\right)\to 0.$$

Отже, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\ln\cdot q_{z_n}(t)=-\frac{t^2}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty}q_{z_n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (10.22)$$

Випадкова величина Z_n за виразом (10.21) має $M[Z_n]=0$, $D[Z_n]=1$, а (10.22) відповідає (5.20), тобто відповідає виразу характеристичної функції нормального закону розподілу випадкової величини, для якої $m_x=0$, а $\sigma_x^2=1$. Виходить сформульована теорема доведена.

Існують інші формулювання центральної граничної теореми теорії ймовірності в залежності від того, що приймають як міру однорідності доданків X_k.

Ляпуновим у 1900 році була доведена теорема у такому формулюванні.

Теорема. *Якщо* $X_1, X_2, ..., X_n$ *є незалежними випадковими величинами з математичними сподіваннями* $m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}$ *та дисперсіями* $\sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2, ..., \sigma_{x_n}^2$, *то випадкова величина*

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-m_{x_k}\right)\Bigg/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2} \qquad (10.23)$$

при $n\to\infty$ *має нормальне розподілення, якщо можна підібрати таке* $\delta>0$, *за якого*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}M\left[\left(X_k-m_{x_k}\right)^{2+\delta}\right]\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2\right)^{1+\delta/2}=0. \qquad (10.24)$$

Якщо в (10.24) прийняти $\delta=1$, то будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}M\left[\left(X_k-m_{x_k}\right)^{3}\right]\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2\right)^{3/2}=0, \qquad (10.25)$$

тобто тоді (10.25) визначає умови, які накладаються на треті центральні моменти випадкової величини Y_n.

Оскільки $M\left[Y_n\right]=0$ та $D\left[Y_n\right]=1$, то граничне рівняння має вигляд

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha<\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-m_{x_k}\right)\Big/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}<\beta\right)=\Phi\left(\beta\right)-\Phi\left(\alpha\right), \qquad (10.26)$$

де $\Phi\left(\beta\right)$ та $\Phi\left(\alpha\right)$ – функції Лапласа аргументів β та α відповідно.

Зміст умов (10.24) чи (10.25) полягає в тому, щоб в (10.23) не було таких доданків, вплив яких на розсіювання $\sum_{k=1}^{n} X_k$ був би занадто великим у порівнянні з впливом усіх останніх, а також не повинно бути великої кількості випадкових величин, вплив яких на розсіювання зазначеної суми був би непомірно малий у порівнянні із сумарним впливом решти доданків випадкових величин.

Зауваження 1. Узагальненою умовою в порівнянні з (10.24), при виконанні якої справедлива центральна гранична теорема теорії ймовірностей, є умова Ліндерберга, сформульована в 1922 році, яка має такий зміст:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\left|x_k-m_{x_k}\right|>\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}}\left(x_k-m_{x_k}\right)^2 f_{x_k}(x)dx=0, \qquad (10.27)$$

де τ – будь-яке невід'ємне число, а $f_{x_k}(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X_k.

Фізичний зміст (10.27) полягає в такому. Уводиться до розгляду подія A_k – випадкова подія, яка полягає в тому, що буде виконуватись нерівність

$$\left|X_k-m_{x_k}\right|>\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\,,\ k=\overline{1,n}\,. \qquad (10.28)$$

Тоді ймовірність того, що хоча б для однієї з n випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ буде виконуватись нерівність (10.28), має вигляд

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)\le\sum_{k=1}^{n}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\left|x_k-m_{x_k}\right|>\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}} f_{x_k}(x)dx=0\le$$

$$\le \frac{1}{\left(\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x_k-m_{x_k}|>\tau\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}}\left(x_k-m_{x_k}\right)^2 f_{x_k}(x)dx\,..$$

Ця нерівність за умови (10.27) прямує до 0. Тому умова Ліндерберга (10.27) еквівалентна вимозі щодо рівномірної малості доданків $\left(X_k-m_{x_k}\right)\Big/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}$ у загальній сумі. При виконанні (10.27) імовірність того, що хоча б один з доданків $\left(X_k-m_{x_k}\right)\Big/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}^2}$ перебільшить величину τ, прямує до 0 при зростанні кількості доданків до нескінченності.

Зауваження. Узагальненням нерівності Чебишева є нерівність Колмогорова, яка має таке означення.

Якщо незалежні випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n,... *мають скінченні дисперсії, то*

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k-M\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\right]\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-D\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\right]\Big/\varepsilon^2\,. \qquad (10.29)$$

Нерівність Колмогорова (10.29) відносять до посиленого закону великих чисел, який має таке означення.

Послідовність випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n,... *підпорядковується посиленому закону великих чисел, якщо*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\left[X_k\right]\right)\to 0\right)=1.$$

Розглянемо практичні використання доведеної в цьому підрозділі граничної теореми О. М. Ляпунова.

Відомо, що якщо випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу, то ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що випадкова величина X належить інтервалу $(a; b)$, розраховується згідно з таким виразом:

$$P\left(a<X<b\right)=\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right).$$

Якщо за теоремою Ляпунова закон розподілу випадкової величини $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i, $i=\overline{1,k}$ є незалежними випадковими величинами, наближається до нормального закону розподілу, то справедливе таке визначення:

$$P\left(a<Y=\sum_{i=1}^{n} X_i<b\right)=\Phi\left(\frac{b-M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2}}\right). \quad (10.30)$$

Оскільки теорема Ляпунова гранична, а *n* розглядається скінченим, то (10.30) дає наближений результат, який відрізняється від точного в третьому чи четвертому знаці після коми у виразі десяткового дробу.

Задача 10.11. П'ятдесят бомбардувальників незалежно один від одного здійснюють серійне бомбардування полоси укріплення противника. Кожен бомбардувальник кидає одну серію бомб. Для однієї серії математичне сподівання кількості бомб, які влучили в полосу укріплення, дорівнює 2, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 1. Знайти ймовірність того, що в полосу укріплення противника влучить від 90 до110 бомб.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина кількості бомб, які влучать у полосу укріплення противника при здійсненні *i*-ї серії бомбардування. Тоді $Y=\sum_{i=1}^{50} X_i$ є випадковою величиною кількості влучень у полосу укріплення противника при здійсненні 50 серій бомбардування. Згідно з теоремою Ляпунова випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону розподілу, а отже,

$$P\left(90<Y=\sum_{i=1}^{50} X_i<110\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{110-M\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{50} D[X_i]}}\right)-\Phi\left(\frac{90-M\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{50} D[X_i]}}\right)=\Phi\left(\frac{110-2\cdot 50}{\sqrt{50\cdot 1}}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{90-2\cdot 50}{\sqrt{50\cdot 1}}\right)=\Phi(1,414)+\Phi(1,414)=2\cdot 0,4213=0,843.$$

Задача 10.12. Визначити ймовірність того, що після 900 кидань монети виграш гравця буде від 600 до 1200 гривень, якщо при появі орла гравець виграє 4 гривні, а при появі решки програє 2 гривні.

Розв'язання. Нехай X_i – випадкова величина значення виграшу гравця при i-му киданні монети. Випадкова величини X_i має ряд розподілу, наведений у табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Ряд розподілу випадкової величини X_i

$x_i^{(k)}$	4	–2
$P\left(X_i = x_i^{(k)}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Тоді $$M\left[X_i\right] = \sum_{k=1}^{2} x_i^{(k)} P\left(X_i = x_i^{(k)}\right) = 4\cdot\frac{1}{2} + (-2)\cdot\frac{1}{2} = 1;$$

$$D\left[X_i\right] = \sum_{k=1}^{2} \left(x_i^{(k)}\right)^2 P\left(X_i = x_i^{(k)}\right) - \left(M\left[X_i\right]\right)^2 = 4^2\cdot\frac{1}{2} + (-2)^2\cdot\frac{1}{2} - 1^2 = 9.$$

Якщо X – випадкова величина виграшу гравця при 900 киданнях монети, то

$$X = \sum_{i=1}^{900} X_i .$$

З центральної теореми теорії ймовірностей маємо

$$P\left(600 < X = \sum_{i=1}^{900} X_i < 1200\right) = \Phi\left(\frac{1200 - M\left[\sum_{i=1}^{900} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{900} D\left[X_i\right]}}\right) - \Phi\left(\frac{600 - M\left[\sum_{i=1}^{900} X_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{900} D\left[X_i\right]}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1200 - 900\cdot 1}{\sqrt{900\cdot 9}}\right) - \Phi\left(\frac{600 - 900\cdot 1}{\sqrt{900\cdot 9}}\right) = \Phi(3{,}33) + \Phi(3{,}33) \equiv 2\cdot 0{,}49957 \cong 1{,}0 .$$

Задача 10.13. Відбувається груповий повітряний бій, в якому беруть участь 30 бомбардувальників з одного та 30 винищувачів з іншого боку. Кожен винищувач атакує один бомбардувальник і збиває його з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що у повітряному бою буде збито не менше 10 та не більше 30 бомбардувальників.

Розв'язання. Розглянемо X_i – випадкову величину кількості збитих бомбардувальників у i-му повітряному бою.

Якщо Y – випадкова величина кількості збитих бомбардувальників у повітряному бою, то тоді $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$. За теоремою О. М. Ляпунова будемо мати

$$P(10 < Y < 30) = P\left(10 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 30\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30 - M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right]}}\right).$$

Уведені до розгляду випадкові величини X_i є незалежними, тому можна стверджувати, що, виходячи з умови задачі, дослід, в якому подія A, що полягає в тому, що в i-му повітряному бою буде збитий бомбардувальник, може статися з ймовірністю $P(A) = 0{,}2$, повторюється 30 разів. Адже слід стверджувати, що розглядається повторення дослідів з незалежними та рівноймовірними наслідками.

Отже, випадкова величина Y (кількість бомбардувальників у повітряному бою) підпорядкована біноміальному закону розподілу, для якого $M[Y] = nP$, а $D[Y] = nPq$.

Тоді $$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = 30 \cdot 0{,}2 = 6;$$

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = 30 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 4{,}8,$$

а отже, $$P\left(10 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 30\right) = \Phi\left(\frac{30 - nP}{\sqrt{nPq}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - nP}{\sqrt{nPq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30-6}{\sqrt{4{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{10-6}{\sqrt{4{,}8}}\right) = \Phi(10{,}96) - \Phi(1{,}83) = 0{,}5 - 0{,}46 = 0{,}034.$$

Розглянемо ймовірність події, яка полягає в тому, що в повітряному бою буде збито не більше 10 бомбардувальників. Маємо

$$P\left(0 < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < 10\right) = \Phi\left(\frac{10-6}{\sqrt{4,8}}\right) - \Phi\left(\frac{0-6}{\sqrt{4,8}}\right) =$$

$$= \Phi(1,83) + \Phi(2,74) = 0,466 + 0,497 = 0,963.$$

Відзначимо, що співвідношення

$$P\left(a < Y = \sum_{i=1}^{30} X_i < b\right) = \Phi\left(\frac{b-nP}{\sqrt{nPq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-nP}{\sqrt{nPq}}\right) \qquad (10.31)$$

називають інтегральним наближенням біноміального закону розподілу.

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. У чому полягає фізичний зміст закону великих чисел?
2. Назвіть граничні теореми теорії ймовірностей, які слід розглядати як формальне тлумачення закону великих чисел.
3. Визначте практичну значущість та обмеженість використання нерівності Чебишева.
4. За виконанням яких умов для визначення досліду локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа є справедливими?
5. Визначте практичну значущість локальної граничної теореми Муавра – Лапласа.
6. Визначте зміст задач, які випливають із змісту інтегральної граничної теореми Муавра – Лапласа та які є суттєвими при плануванні експерименту.
7. Скільки разів слід підкинути монету, щоб імовірність отримання відхилення частоти появи орла від імовірності його появи на величину, яка б не перевищувала за абсолютною величиною 0, 01, була не менше 0,99?
8. На скільки треба збільшити кількість незалежних випробувань, щоб з імовірністю не менше 0,95 можна було б стверджувати, що частота події A відхилиться від її ймовірності $\rho = 0,5$ на величину α, яка змінюється від 0,01 до 0,001?
9. Гравець кидає 4 монети і в залежності від того чи буде кількість монет, які випали орлом, парною або непарною, одержує або сплачує стільки гривень, скільки випало орлів. Чи вигідна ця гра для гравця?

Список рекомендованої літератури

1. Барабаш О. В., Мусієнко А. П., Свинчук О. В. Теорія ймовірностей: навч. посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42046/1/Navch_Posib_Teor_Ymovirn_BarabashO_MusienkoA_SvynchukO.pdf

2. Павлов О. А., Гавриленко О. В., Рибачук Л. В. Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика: навчальний. Частина 1. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41672/3/Posibnyk_Pavlov-Havrylenko-Rybachuk_KonspLek-1.pdf

3. Огірко О. І., Галайко Н. В. О-36 Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник. Львів: ЛьвівДУВС, 2017. 292 с. URL: https://dspace.lvduvs.edu.ua/handle/1234567890/629

4. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Част. 1. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с. URL: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/04/Vasyl-kiv-I.M.-TIMS_CHASTYNA_1.pdf

5. Найко Д. А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с. URL: http://repository.vsau.org/getfile.php/24513.pdf

6. Ясній О. П., Валяшек В. Б., Крива Н. Р. Теорія ймовірностей та математична статистика. Метод. вказівки до практичних занять. Тернопіль : ТНТУ, 2020. 76 с. URL: https://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/31094?locale=et

7. Бакуніна О. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : методичні вказівки до практ. занять для підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології». Одеса : НУ "ОЮА", 2020. 31 с. URL: https://dspace.onua.edu.ua/items/4010a757-4ad6-482d-9af7-de07aff87068

8. Michael J. Evans, Jeffrey S. Rosenthal. Probability and Statistics: The Science of Uncertainty. Toronto: University of Toronto, 2023. 760 p. URL: https://www.utstat.toronto.edu/mikevans/jeffrosenthal/book.pdf

9. Charles M. Grinstead, J. Laurie Snell. Introduction to Probability: Second Revised Edition, Swarthmore College, Swarthmore, PA, Dartmouth College, Hanover, NH, 2016. 181 p. URL: https://math.dartmouth.edu/~prob/prob/prob.pdf

10. Bruno de Finetti. Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment. John Wiley & Sons Ltd, 2017. Book Series:Wiley Series in Probability and Statistics. 582 p. DOI:10.1002/9781119286387; URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781119286387

11. Jean Walrand. Probability in Electrical Engineering and Computer Science: An Application-Driven Course. Berkeley, CA, USA: Department of EECS University of California, 2021. URL: https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/50016

12. Hald Anders. A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750. Hoboken, NJ: Wiley, 2003. 592 p. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/0471725161

13. Кучук Г.А., Можаєв О.О., Порошин С.М. Теорія ймовірностей, математична статистика та планування експерименту. Частина І. Теорія ймовірностей. Основні закони розподілу: Навчально-методичний посібник. Х.: НТУ „ХПІ”, 2008. 104 с. URL: http://library.kpi.kharkov.ua/NTU.html

14. Коваленко А. А., Кучук Г. А. Методи синтезу інформаційної та технічної структур системи управління об’єктом критичного застосування. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. Т. 2, № 1. С. 22–27. DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.1.04

15. Свиридов А. С., Коваленко А. А., Кучук Г. А. Метод перерозподілу пропускної здатності критичної ділянки мережі на основі удосконалення ON/OFF-моделі трафіку. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. Т. 2, № 2. С. 139–144. DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.2.24

16. Yaloveha V., Podorozhniak A., Kuchuk H. Convolutional neural network hyperparameter optimization applied to land cover classification. *Radioelectronic and computer systems*. 2022. No. 1. С. 115–128. DOI: https://doi.org/10.32620/reks.2022.1.09

17. Kuchuk, H., Kovalenko, A., Ibrahim, B.F., Ruban, I. Adaptive compression method for video information. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*/ 2019. Vol. 8(1). P. 66–69, doi: http://dx.doi.org/10.30534/ijatcse/2019/1181.22019

18. Kovalenko, A., Kuchuk, H., Kuchuk, N., Kostolny, J. Horizontal scaling method for a hyperconverged network. *2021 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT)*, Zilina, Slovakia, 2021. doi: https://doi.org/10.1109/IDT52577.2021.9497534

19. Худов В.Г., Кучук, Г.А., Маковейчук, О.М., Крижний А.В. Аналіз відомих методів сегментування зображень, що отримані з бортових систем оптикоелектронного спостереження. *Системи обробки інформації*. 2016. Вип. 9 (146). С. 77-80. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/soi_2016_9_18

20. Кучук Г.А., Коваленко, А.А., Лукова-Чуйко Н.В. Метод мінімізації середньої затримки пакетів у віртуальних з’єднаннях мережі підтримки хмарного сервісу. *Системи управління, навігації та зв’язку*. Полтава: ПНТУ, 2017. Вип. 2(42). С. 117-120. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/suntz_2017_2_32

21. Kuchuk, G., Nechausov, S., Kharchenko, V. (Two-stage optimization of resource allocation for hybrid cloud data store. International Conference on Information and Digital Technologies, Zilina. 2015. P. 266-271. DOI: http://dx.doi.org/10.1109/DT.2015.7222982

22. Kuchuk G., Kovalenko A., Komari I.E., Svyrydov A., Kharchenko V. Improving Big Data Centers Energy Efficiency: Traffic Based Model and Method. In: Kharchenko V., Kondratenko Y., Kacprzyk J. eds) Green IT Engineering: Social, Business and Industrial Applications. *Studies in Systems,*

Decision and Control. 2019. Vol. 171. Springer, Cham., DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-00253-4_8

23. Yaloveha, V., Hlavcheva, D., Podorozhniak, A., Kuchuk, H. Fire hazard research of forest areas based on the use of convolutional and capsule neural networks. *2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering, UKRCON 2019 – Proceedings*. 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1109/UKRCON.2019.8879867

24. Svyrydov, A., Kuchuk, H. and Tsiapa, O. Improving efficienty of image recognition process: Approach and case study. Proc. of 2018 IEEE 9th Int. Conf. on Dependable Systems, Services and Technologies, DESSERT 2018. P. 593–597, DOI: https://doi.org/10.1109/DESSERT.2018.8409201

25. Mukhin, V., Kuchuk, N., Kosenko, N., Artiukh, R., Yelizyeva, A., Maleyeva, O., Kuchuk, H., Kosenko, V. Decomposition Method for Synthesizing the Computer System Architecture. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 938. P. 289–300. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-16621-2_27

26. Hlavcheva, D., Yaloveha, V., Podorozhniak, A., Kuchuk, H. Comparison of CNNs for Lung Biopsy Images Classification. 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering, UKRCON 2021 – Proceedings. P. 1–5, doi: https://doi.org/10.1109/UKRCON53503.2021.9575305

27. Kovalenko, A., Kuchuk, H. Methods to Manage Data in Self-healing Systems. *Studies in Systems, Decision and Control*, 2022. Vol. 425. P. 113–171. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-96546-4_3

28. Dotsenko, N., Chumachenko, I., Galkin, A., Kuchuk, H., Chumachenko, D. Modeling the Transformation of Configuration Management Processes in a Multi-Project Environment. *Sustainability (Switzerland)*. 2023. Vol. 15(19). 14308, DOI: https://doi.org/10.3390/su151914308

29. Petrovska, I., Kuchuk, H. Adaptive resource allocation method for data processing and security in cloud environment. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7(3). P. 67–73, DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.3.10

30. Hunko, M., Tkachov, V., Kuchuk, H., Kovalenko, A. Advantages of Fog Computing: A Comparative Analysis with Cloud Computing for Enhanced Edge Computing Capabilities, *2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology*, KhPI Week 2023 - Conference Proceedings, 02-06 October 2023. Code 194480. DOI: https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312948

31. Kuchuk, N., Mozhaiev, O., Semenov, S., Haichenko, A., Kuchuk, H., Tiulieniev, S., Mozhaiev, M., Davydov, V., Brusakova, O., Gnusov, Y. Devising a method for balancing the load on a territorially distributed foggy environment. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. Vol. 1(4 (121). P. 48–55, DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.274177

32. Petrovska, I., Kuchuk, H., Mozhaiev, M. Features of the distribution of computing resources in cloud systems. *2022 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology*. KhPI Week 2022 - Conference Proceedings, 03-07 October 2022, Code 183771, DOI: https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916459

33. Petrovska, I., Kuchuk, H., Kuchuk, N., Mozhaiev, O., Pochebut, M., Onishchenko, Yu. Sequential Series-Based Prediction Model in Adaptive Cloud Resource Allocation for Data Processing and Security. *2023 13th Int. Conf. on Dependable Systems, Services and Technologies* (DESSERT 2023). Athens, Greece. DOI: https://doi.org/10.1109/DESSERT61349.2023.10416496

34. Kuchuk, H., Malokhvii, E. Integration of IOT with Cloud, Fog, and Edge Computing: A Review. Advanced Information Systems. 2024. Vol. 8(2). P. 65–78, DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2024.2.08

35. Hlavcheva, D., Yaloveha, V., Podorozhniak, A., Kuchuk, H. Tumor nuclei detection in histopathology images using R – CNN. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020. 2740. P. 63–74. URL: https://ceur-ws.org/Vol-2740/20200063.pdf

36. Kuchuk, H., Mozhaiev, O., Kuchuk, N., Tiulieniev, S., Mozhaiev, M., Gnusov, Y., Tsuranov, M., Bykova, T., Klivets, S., Kuleshov, A. Devising a method for the virtual clustering of the Internet of Things edge environment. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2024. Vol. 1, no. 9 (127). P. 60–71, DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.298431

37. Kuchuk, N., Mohammed, A. S., Shyshatskyi, A., Nalapko, O. The method of improving the efficiency of routes selection in networks of connection with the possibility of self-organization. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*, 2019. Vol. 8(1). P. 1–6. DOI: https://doi.org/10.30534/ijatcse/2019/0181.22019

38. Attar, H., Khosravi, M.R., Igorovich, S.S., Georgievan, K.N., Alhihi, M. Review and performance evaluation of FIFO, PQ, CQ, FQ, and WFQ algorithms in multimedia wireless sensor networks. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 16(6). 2020. DOI: https://doi.org/10.1177/1550147720913233

39. Dun B., Zakovorotnyi, O.,Kuchuk, N. Generating currency exchange rate data based on Quant-Gan model. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7, no. 2. P. 68–74. DOI: http://dx.doi.org/10.20998/2522-9052.2023.2.10

40. Gomathi, B., Saravana Balaji, B., Krishna Kumar, V., Abouhawwash, M., Aljahdali, S., Masud, M., Kuchuk, N. Multi-Objective Optimization of Energy Aware Virtual Machine Placement in Cloud Data Center. *Intelligent Automation and Soft Computing*. 2022. Vol. 33(3). P. 1771–1785. DOI: http://dx.doi.org/10.32604/iasc.2022.024052

41. Kuchuk, N., Kovalenko, A., Ruban, I., Shyshatskyi, A., Zakovorotnyi, O., Sheviakov, I. Traffic Modeling for the Industrial Internet of NanoThings. 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2023 – Conf. Proc. doi: http://dx.doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312856

42. Shmatko, O., Kolomiitsev, O., Rekova, N., Kuchuk, N., Matvieiev, O. Designing and evaluating dl-model for vulnerability detection in smart contracts. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7(4)/ P. 41–51, doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.4.05

Навчальне видання

КУЧУК Георгій Анатолійович
КУЧУК Ніна Георгіївна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Частина 1

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *О. Ю. Заковоротний*
Роботу до видання рекомендував *М. Й. Заполовський*

План 2024 р., п. 82

Підп. до друку 27.06. 2024.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронне видання