УДК 539.3

Е.Г.ЯНЮТИН, д-р техн.наук, НТУ «ХПИ»
С.Д.СВЕТЛИЧНАЯ, канд.техн.наук, АПБ Украины
Н.Н.ТОМИЛКА, НТУ «ХПИ»

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

У рамках динамічної теорії пружності досліджується нестаціонарне деформування багатошарових пружних тіл, які мають форму прямокутного паралелепіпеда. Методика, що пропонується, дозволяє точно задовольнити визначальним рівнянням руху і системам початкових, граничних і контактних умов.

The unsteady deformation of multilayered elastic solids in the shape of rectangular parallelepiped is investigated using the dynamic theory of elasticity. Motion equations and systems of primary, boundary and contact conditions are satisfied exactly owing to this method.

Многослойные конструкции находят широкое применение в различных областях техники, поэтому интерес исследователей к изучению нестационарных процессов деформирования в элементах конструкций такого рода вполне закономерен. Переходные деформационные процессы наиболее хорошо изучены в оболочках со слоистой структурой, для таких объектов получены решения значительного количества конкретных задач.

Гораздо меньше результатов, описывающих неустановившиеся процессы деформаций на основе трехмерных уравнений теории упругости.

В данной работе развивается численно-аналитический подход к решению динамических задач теории упругости, предложенный в статье [1]. В основе такого подхода лежит сведение начально-краевых задач к анализу интегральных уравнений Вольтерра во времени. К более поздним работам этого направления можно отнести [2-4].

В настоящей статье приводится решение задачи об анализе нестационарных процессов деформирования в упругих телах, имеющих форму многослойного прямоугольного параллелепипеда.

Пусть параллелепипед состоит из N слоев постоянной толщины. В прямоугольных координатах x, y, z каждый его слой ограничен плоскостями $x = 0$, $x = x_0$; $y = 0$, $y = y_0$; $z = z_0^i$, $z = z_1^i$, где i – номер слоя. Нумерация слоев производится в направлении возрастания координаты z. Плоскости $z = z_0^{i+1} = z_1^i$ $(i = 1,2,\ldots,N-1)$ являются контактирующими. Точки, принадлежащие i-ому слою, имеют координаты, которые удовлетворяют условиям: $z_0^i \le z \le z_1^i$; $0 \le x \le x_0$; $0 \le y \le y_0$. При этом $z_0^{\,1} = 0$. Материал каждого слоя является однородным и изотропным с параметрами упругости Ламе λ_i, μ_i.

Будем предполагать, что на боковых гранях параллелепипеда $x = 0$, $x = x_0$; $y = 0$; $y = y_0$ реализуются граничные условия, отвечающие равенству нулю касательных напряжений и нормальных перемещений или нормальных напряжений и касательных перемещений. На гранях, соответствующих плоскостям $z = 0$, $z = z_1^N$ задаются нестационарные граничные условия в перемещениях или напряжениях.

Движение точек материала каждого слоя описывается векторным уравнением следующего вида [5]:

$$(\lambda_i + \mu_i)\text{graddiv}\overline{u}_i + \mu_i \Delta\overline{u}_i = p_i \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа; ρ_i – плотность материала i-ого слоя; $\overline{u}_1$ – вектор перемещения.

При отсутствии массовых сил уравнения Ламе (1) эквивалентны следующей системе уравнений [5]:

$$\Delta\varphi_i = \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi_i^\alpha = \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2\psi_i^\alpha}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1,2; \tag{2}$$

$$\overline{u}_i = \text{grad}\varphi_i + \text{rot}\,\text{rot}(\psi_i^1\overline{e}_z) + \text{rot}(\psi_i^2\overline{e}_z), \tag{3}$$

где $\varphi_i, \psi_i^1, \psi_i^2$ – скалярные потенциалы перемещений; $\overline{e}_z$ – орт оси Z; a_i, b_i – соответственно скорости распространения продольных и поперечных волн деформаций в упругой среде.

В рассматриваемой задаче импульсного деформирования многослойного прямоугольного параллелепипеда решение волновых уравнений (2) ищется в виде двойных разложений по переменным x, y:

$$\varphi_i = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} R_{imk}^1(z,t) w_m(x) v_k(y);$$

$$\psi_i^1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} R_{imk}^2(z,t) w_m(x) v_k(y); \tag{4}$$

$$\psi_i^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} R_{imk}^3(z,t) \frac{1}{\eta_m}\frac{dw_m(x)}{dx}\frac{1}{\nu_k}\frac{dv_k(y)}{dy},$$

$$\eta_m = m\pi / x_0, \quad \nu_k = k\pi / y_0.$$

Здесь $R_{imk}^\beta(z,t)$ $(\beta = 1,2,3)$ – функции, подлежащие определению в дальнейшем, а $w_n(x)$, $v_k(y)$ – заданные функции, обеспечивающие удовлетворение граничным условиям в плоскостях $x = 0$, $x = x_0$; $y = 0$; $y = y_0$. Разложения (4) аналогичны приведенным в работе [6].

В дальнейшем в формулах (4) будет приниматься:

$$w_m = \cos\eta_m x, \quad v_k = \cos\nu_k y \quad (\eta_m = \frac{m\pi}{x_0}, \quad \nu_k = \frac{k\pi}{y_0}), \tag{5}$$

что реализует выполнение следующих граничных условий:

$$\sigma_{ixy} = 0, \quad \sigma_{ixz} = 0, \quad u_{ix} = 0 \quad \text{при } x = 0, \ x = x_0;$$

$$\sigma_{ixy}=0,\quad \sigma_{iyz}=0,\quad u_{iy}=0 \quad \text{при } y=0,\ y=y_0. \tag{6}$$

Если принять $w_m=\sin\eta_m x,\quad v_k=\sin\nu_k y$, то тогда должны выполняться такие условия:

$$\sigma_{ixx}=0,\quad u_{i[y}=0,\quad u_{iz}=0 \quad \text{при } x=0,\ x=x_0;$$

$$\sigma_{lyy}=0,\quad u_{ix}=0,\quad u_{iz}=0 \quad \text{при } y=0,\ y=y_0. \tag{7}$$

Условия (6) отвечают равенству нулю касательных напряжений и нормальных компонент вектора перемещения на соответствующих граничных поверхностях. Равенству нулю нормальных компонент тензора напряжений и касательных перемещений отвечают условия (7).

На гранях параллелепипеда $z=0$, $z=z_1^N$ реализуются граничные условия, отвечающие заданию нестационарных перемещений в форме:

$$\begin{gathered}
u_{1x}(x,y,0,t)=f_1(x,y,t);\quad u_{Nx}(x,y,z_1^N,t)=f_4(x,y,t);\\
u_{1y}(x,y,0,1)=f_2(x,y,t);\quad u_{Ny}(x,y,z_1^N,t)=f_5(x,y,1);\\
u_{1z}(x,y,0,t)=f_3(x,y,t);\quad u_{Nz}(x,y,z_1^N,t)=f_6(x,y,t),
\end{gathered} \tag{8}$$

где $f_1(x,y,t)$ – $f_6(x,y,t)$ известные функции.

В случае задания граничных условий в напряжениях на гранях $z=0$ и $z=z_1^N$ должны выполняться аналогичные соотношения.

Предполагается, что составляющие тело слои находятся в условиях жесткого контакта вдоль поверхностей $z=z_0^{i+1}=z_1^i$, что отвечает следующему:

$$\begin{gathered}
\bar{u}_i(x,y,z_1^i,t)=\bar{u}_{i+1}(x,y,z_0^{i+1},t);\quad \sigma_{izz}(x,y,z_1^i,t)=\sigma_{i+1,zz}(x,y,z_0^{i+1},t);\\
\sigma_{izx}(x,y,z_1^i,t)=\sigma_{i+1,zx}(x,y,z_0^{i+1},t);\\
\sigma_{izy}(x,y,z_1^i,t)=\sigma_{i+1,zy}(x,y,z_0^{i+1},t)\ (l=1,2,...,N-1).
\end{gathered} \tag{9}$$

Систему начальных условий примем нулевой:

$$\bar{u}_i([x,y,z,0)=0;\quad \frac{\partial\bar{u}_i(x,y,z,0)}{\partial t}=0\quad (l=1,2,...,N).$$

При выборе функций w_n, v_k в виде (5) разложения (4) превращаются в двойные ряды Фурье по переменным x, y. Для удовлетворения граничным условиям (8) необходимо, чтобы функции $f_j(x,y,t)$ $(j=1,2,...6)$ также были разложимы в аналогичные ряды Фурье.

Для дальнейшего построения решения необходимо определить функции $R^{\beta}_{imk}(z,t)$ $(\beta=1,2,3)$, входящие в формулы (4). Для этого волновые уравнения (2) с учетом данных разложений (4), представлений (5) и нулевых начальных условий запишем в пространстве изображений по Лапласу, пометив изображения верхним индексом L:

$$\frac{d^2R^{\beta L}_{imk}(S)}{dz^2}-\left[\eta_m+\nu_k^2+\frac{S^2}{c_{i\beta}^{\ 2}}\right]R^{\beta L}_{imk}(S)=0, \tag{10}$$

$$\beta = 1,2,3; \;\; c_{i1} = a_i; \;\; c_{i2} = c_{i3} = b_i.$$

Приведенные уравнения являются обыкновенными дифференциальными линейными однородными уравнениями 2-ого порядка. Нх общие решения запишем в виде:

$$R_{imk}^{\beta L} = \frac{1}{S} A_{imk}^{\beta L}(S) \frac{e^{\frac{-z}{c_{i\beta}}\sqrt{c_{imk}^{\beta}{}^{2}+S^{2}}}}{\sqrt{c_{imk}^{\beta}{}^{2}+S^{2}}} + \frac{1}{S} B_{imk}^{\beta L}(S) \frac{e^{\frac{-(z-z_1^N)}{c_{i\beta}}\sqrt{c_{imk}^{\beta}{}^{2}+S^{2}}}}{\sqrt{c_{imk}^{\beta}{}^{2}+S^{2}}}, \tag{11}$$

$$\beta = 1,2,3; \;\; c_{i1} = a_i; \;\; c_{i2} = c_{i3} = b_i; \;\; c_{imk}^{\beta}{}^{2} = c_{i\beta}{}^{2}(\eta_m{}^{2} + \nu_k{}^{2}).$$

Здесь $A_{imk}^{\beta L}(S)$, $B_{imk}^{\beta L}(S)$ – произвольные функции параметра S.

Выражения (11) специально сконструированы таким образом, чтобы на их основе в пространстве оригиналов получить решения в форме «бегущей волны» по переменным z, 1. Основной формулой, которая используется при выполнении операции инверсии выражений (11), является следующая [7]:

$$L\left(\frac{e^{-\alpha\sqrt{S^2+\beta^2}}}{\sqrt{S^2+\beta^2}} \right) = H(1-\alpha) J_0(\beta\sqrt{1^2-\alpha^2}), \tag{12}$$

где $1_0(1)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

С применением формулы (12), а также основных правил операционного исчисления, в пространстве оригиналов получим такие выражения для функций, входящих в разложения (4):

$$R_{imk}^{\beta}(z,t) = H\left(1 - \frac{z}{c_{i\beta}}\right) \int_0^{t-z/c_{i\beta}} A_{imk}^{\beta}(\tau) G\left(c_{imk}^{\beta} \sqrt{(1-\tau)^2 - \frac{z^2}{c_{1\beta}{}^{2}}} \right) d\tau +$$

$$+ H\left(t - \frac{z_1^N - z}{c_{1\beta}}\right) \int_0^{t-(z_1{}^N - z)/c_{i\beta}} B_{imk}^{\beta}(\tau) G\left(c_{imk}^{\beta} \sqrt{(1-\tau)^2 - \frac{(z_1{}^N - z)^2}{c_{i\beta}{}^{2}}} \right) d\tau, \tag{13}$$

где H(1) –функция Хевисайда, а $G(t) = \int_0^t 1_0(\tau) d\tau.$

Подставляем формулы (13) с учетом разложений (4) в соотношения (3) для вектора перемещения i-ого слоя параллелепипеда. Подчиняя полученные выражения граничным условиям (8) и условиям контакта (9), приходим к системе 6N интегральных уравнений Вольтерра во времени для набора неизвестных функций $A_{imk}^{\beta}(1)$, $B_{imk}^{\beta}(1)$ (β = 1,2,3). Для их решения применяется численный подход, который заключается в замене неизвестных функций аппроксимирующими функциями времени:

$$A_{imk}^{\beta}(t) = \sum_{p=1}^{n} A_{imk}^{\beta p} \Delta_p H; \;\; B_{imk}^{\beta}(t) = \sum_{p=1}^{n} B_{imk}^{\beta p} \Delta_p H; \tag{14}$$

$$\Delta_p H = H(t - t_{p-1}) - H(t - t_p); \quad A_{imk}^{\beta p} = const; \; B_{imk}^{\beta p} = const; \quad t_p = p\Delta t,$$

где Δt – «шаг» по времени; $t < n\Delta t$, $n = 1,2,\ldots$

Подставляя выражения (14) в упомянутые интегральные уравнения, приходим к рекуррентной по индексу n системе 6N алгебраических уравнений для определения величин $\Delta_{imk}^{\beta n}$, $B_{imk}^{\beta n}$ ($\beta = 0,1,2$; $n = 1,2,\ldots$). Преобразовывая с учетом аппроксимаций (14) формулы, найденные для коэффициентов разложений перемещений и напряжений, получаем соотношения, удобные для численной реализации.

Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом. Получена математическая модель нестационарного деформирования упругого тела в форме многослойного параллелепипеда на основе трехмерных уравнений динамической теории упругости. Предложена методика решения соответствующей начально-краевой задачи теории упругости, обеспечивающая точное удовлетворение системам определяющих уравнений, граничных, контактных и начальных условий.

Список литературы: **1.** *Смирнов В.И.* Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы. //Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 14, № 2. – С. 69-72. **2.** *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э.* Гидроупругость систем оболочек. – К.: Вища школа, 1984. – 208 с. **3.** *Янютин Е.Г.* Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1993. – 147 с. **4.** *Янютин Е.Г., Янчевский И.В.* Импульсные воздействия на упруго деформируемые элементы конструкций. – Харьков: ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с. **5.** *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с. **6.** *Фридман Л.И.* Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы. // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 102-108. **7.** *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 467 с.

Поступила в редколлегию 27.03.2003.

УДК 539.5

Л.В.АВТОНОМОВА, канд.техн.наук; ***С.В.БОНДАРЬ,*** канд.техн.наук; ***В.І.ЛАВІНСЬКИЙ,*** докт.техн.наук

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТРУКТУРНО ЗВ'ЯЗАНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Надана математична постановка мішаної контактної задачі для структурно зв'язаних механічних систем з урахуванням фізично-нелінійного та конструктивно нелінійного деформування елементів при контактному, тепловому й електромагнітному навантаженнях.

In article given a mathematical raising of mixed contact task for structurally connected mechanical systems with calculation of physically-unlinear and constructively unlinear deforming of elements attached to contact, thermal and electromagnetic loadings.