ОЦЕНИВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Захаров И. П., Боцюра О. А.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, кафедра метрологии и измерительной техники, тел. (057) 7512584, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, e-mail: newzip@ukr.net

В общем случае модель измеряемой величины Y как функции нескольких входных величин $X_1, X_2, ..., X_N$, можно представить в виде [1]:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N). \tag{1}$$

Обычно значение измеряемой величины y и ее стандартную неопределенность $u(y)$ в [1] находят по формулам:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N), \tag{2}$$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} c_j^2 u_j^2 + 2\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=j+1}^{N} c_j c_i \operatorname{cov}(x_j, x_i)}, \tag{3}$$

где u_j^2 – стандартная неопределенность j-й входной величины; $\operatorname{cov}(x_j, x_i)$ – ковариация i-й и j-й входных величин; $c_j = \frac{\partial y}{\partial x_j}$ – коэффициент чувствительности для j-й входной величины,

При нелинейном уравнении (1) оценки y и $u(y)$ имеют смещение [2], величина которого зависит от вида модельного уравнения и значений относительных неопределенностей входных величин.

Компенсация смещения в [1] не проводится, а компенсация смещения $u(y)$ возможна путем учета членов второго порядка разложения (1) в ряд Тейлора. При этом необходимо иметь значения частных производных функции (1) второго порядка по входным величинам. Выражение для несмещенной оценки стандартной неопределенности измеряемой величины приведено в [1] для нормального закона распределения входных величин.

Целью данного доклада является получение выражений, обеспечивающих оценку значения и стандартной неопределенности измеряемой величины при нелинейных модельных уравнениях для любых законов распределения входных величин.

Для этого выражение (1) представим в виде разложения в ряд Тейлора:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_N) + \sum_{j=1}^{N} c_j (X_j - x_j) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{N} c_{ji}(X_j - x_j)(X_i - x_i) + R_0, \tag{4}$$

в котором c_{ji} – смешанная частная производная (1) по X_j и X_i; R_0 – остаточный член ряда.

Математическое ожидание выражения (4) для R_0=0 будет иметь следующий вид:

$$E(Y) = E[f(x_1, x_2, ..., x_N)] + \sum_{j=1}^{N} c_j E(X_j - x_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{N} c_{ji} E[(X_j - x_j)(X_i - x_i)]. \quad (5)$$

С учетом того, что $E(X_j - x_j) = 0$ для некоррелированных входных величин мы получим следующее выражение:

$$E(Y) = y = f(x_1, x_2, ..., x_N) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} c_{jj} u_j^2, \quad (6)$$

где u_j – стандартная неопределенность j-й входной величины; c_{jj} – частная производная второго порядка измеряемой величины по j-й входной величине.

Таким образом, для уменьшения смещения оценки измеряемой величины необходимо при нелинейном модельном уравнении необходимо учитывать неопределенности измерения этих величин.

Запишем выражение для математического ожидания от квадрата смещения измеряемой величины относительно математического ожидания:

$$E[Y - E(Y)]^2 = u^2(Y) = \sum_{j=1}^{N} c_j^2 u_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N} c_{jj}^2 (\mu_j - 1) u_j^4 + \sum_{j=2}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} c_{ji}^2 u_j^2 u_i^2 \quad (7)$$

где $\mu_j = E[(X_j - x_j)^4] / u_j^4$ – нормированный центральный момент четвертого порядка j-й входной величины.

Таким образом, значение дисперсии измеряемой величины будет зависеть от законов распределения входных величин.

Так, например, для нормальных законов распределения всех входных величин μ_j=3, поэтому выражение (8) принимает известный из литературы [3] вид:

$$u^2(Y) = \sum_{j=1}^{N} c_j^2 u_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} c_{jj}^2 u_j^4 + \sum_{j=2}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} c_{ji}^2 u_j^2 u_i^2 . \quad (8)$$

Из выражений (7)-(8) видно, что для получения несмещенной оценки дисперсии измеряемой величины необходимо знать вторые частные производные измеряемой величины по соответствующим входным величинам, т.е. модель измеряемой величины должна быть не только полностью известна, но и дважды дифференцируема.

Список литературы

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.

2. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» − Propagation of distributions using a Monte Carlo method. − JCGM, 2008. − 88 p.

3. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат, 1990, 288 с.