УДК 621.391

Е.Г. ЖИЛЯКОВ, д-р техн. наук, БелГУ (г. Белгород, Россия),
И.Г. ПОПОВ,
И.И. ЧИЖОВ

О СУБПОЛОСНОМ КОДИРОВАНИИ СИГНАЛА

У статті запропоновано новий метод субполосного кодування сигналу, який засновано на механізмах фільтрації. Перевагою даного методу є відсутність необхідності застосовувати дискретне перетворювання Фур'є для переходу в спектральну область та більш гнучкий перехід до вибору кількості і розположення у рамках частотного інтервалу спектральних коефіцієнтів.

In the article is offered new method of sub linear coding the signal, based on mechanism of the filtering. The Advantage of given approach is needless to use the discrete transformation Furie for crossing in to a spectral area and more flexible approach to the selection of quantity and locations within the framework of frequency interval spectral factor.

Постановка проблемы. Эмпирическими данными принято называть результаты регистрации значений некоторой характеристики изучаемого объекта. В рамках данной работы предполагается, что регистрация осуществляется в дискретном эквидистантном наборе точек области значений аргумента

$$t_k = k \cdot \Delta,\ k = 1, \ldots, N < \infty\,, \tag{1}$$

причём для простоты f_k означает $f(t_k)$, то есть зарегистрированное значение характеристики, а аргумент именуется временем. Эти данные служат основой для установления свойств генерирующих их объектов с использованием адекватных приёмов анализа. Достаточно часто из исходных значений выделяются составляющие, удовлетворяющие тем или иным требованиям (осуществляется фильтрация).

Например, в задачах обработки аудиосигнала существенное значение имеет их субполосное представление, когда выделяют отдельные составляющие сигналов, наилучшим образом отражающие свойства сигнала в заданной полосе частот.

Анализ литературы. Один из наиболее известных подходов к разделению данных на компоненты основывается на априорном задании одной из них в виде некоторой известной с точностью до параметров функциональной зависимости от времени [1]. Для вычисления параметров чаще всего используется принцип наименьших квадратов. Эта реализация вариационного подхода имеет давнюю историю и обладает несомненными достоинствами, в числе которых совпадение необходимых и достаточных условий существования глобального минимума квадратичного функционала.

Вместе с тем необходимость априорного задания формы функциональной зависимости не гарантирует адекватности. Поэтому разработаны и достаточно широко используются подходы к разделению эмпирических данных, основанные на иных вариационных принципах. Среди них, прежде всего, отметим линейную фильтрацию с использованием свёртки

$$y_k = \sum_{i=-m}^{m} h_i f_{k-i}, \; k = m+1,..,N-m, \tag{2}$$

где h_i – параметры так называемой [2] конечной импульсной характеристики (КИХ) фильтра в данном случае (для удобства) с нечётным количеством значений (апертурой) $2m+1$; y_k – выделяемая компонента (выходные значения).

Импульсная характеристика фильтра определяется на основе априори сформулированных требований. По-видимому, один из первых подходов к решению этой задачи основывается на использовании представления

$$f_k = x_k + u_k, \;\; k = 1,...,N, \tag{3}$$

в правой части которого первое слагаемое (тренд) подлежит выделению из смеси со случайным шумом (второе слагаемое). Если с учётом (3) при осуществлении операции (2) потребовать отсутствия искажений в тренде полиномиального вида (без определения его коэффициентов), то параметры импульсной характеристики будут определяться формулами Спенсера [3] (в зависимости от априорно выбранных степени полинома и апертуры).

Отметим, что и в данном случае нет гарантии адекватности исходных предположений. Очевидно, что выходные значения фильтрации вида (2) определяются только частью исходных данных (локальность), причём увеличение апертуры приводит к уменьшению отсчётов в выделяемой компоненте. Это один из фундаментальных недостатков фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров).

Вместе с тем КИХ-фильтры получили достаточно широкое распространение при цифровой обработке сигналов [2]. В основе вычислений параметров импульсной характеристики при этом используется требование, чтобы частотная характеристика фильтра

$$H(v) = \sum_{i=1}^{2m+1} h_{i-m-1} \exp(jvi) \tag{4}$$

воспроизводила наилучшим в некотором смысле образом частотную характеристику заданного вида $R(v)$, модуль которой, как правило, выбирается прямоугольным. На этой основе с использованием различных мер близости разработаны конкретные алгоритмы расчётов импульсных характеристик [2].

Оставляя в стороне проблему сложности вычислительных процедур, всё же отметим, что желаемой точности воспроизведения заданной частотной характеристики удаётся достичь только при достаточно большой апертуре, причём заранее неизвестно какой. Ясно, что это служит препятствием для использования КИХ-фильтров при обработке эмпирических данных небольшого объёма. Вместе с тем анализ исходных последовательностей эмпирических данных с точки зрения распределения их энергий в различных частотных диапазонах (базис Фурье) является адекватным для многих задач физики и техники [2]. Отметим однако, что непосредственное использование трансформант Фурье является нежелательным, так как их при этом необходимо вычислять, хотя на самом деле составляющие требуется выделять в области оригиналов.

Цель статьи. Целью данной работы является разработка математических основ вычисления в области оригиналов аддитивных составляющих трансформанты Фурье, которые в заданном частотном интервале в среднеквадратическом смысле наиболее близки к трансформантам исходных последовательностей и имеют в нём большую, чем последние, долю евклидовой нормы (концентрацию энергии).

Основные соотношения. В дальнейшем для некоторого вектора $x = (x_1,..,x_N)'$, где штрих означает транспонирование, а соответствующей большой буквой обозначается трансформанта Фурье (спектр),

$$X(v) = \sum_{k=1}^{N} x_k \exp(jvk), \quad (5)$$

так что имеет место [2]

$$x_i = \int_{-\pi}^{\pi} X(v)\exp(-jvi)dv/2\pi. \quad (6)$$

Пусть далее $V = [-V_2,-V_1] \cup (V_1,V_2]$ означает объединение соответствующих интервалов в области определения спектра (частотной области), причём имеет место $0 \le V_1 < V_2 \le \pi$.

Часть нормы (энергии) рассматриваемого вектора, попадающей в эту частотную область, в соответствии с формулой Парсеваля [2] равна

$$X_V = \int_{v\in V} |X(v)|^2 \, dv/2\pi. \quad (7)$$

Подставляя сюда X(v) из соотношения (5), нетрудно получить квадратичную форму

$$X_V = x'Ax\,, \tag{8}$$

где $A = \{a_{ik}\}$;

$$a_{ik} = \int_{-V_2}^{V_2} \exp(jv(k-i))dv/2\pi - \int_{-V_1}^{V_1} \exp(jv(k-i))dv/2\pi \tag{9}$$

или

$$a_{ik} = (\sin(V_2(k-i)) - \sin(V_1(k-i)))/\pi(k-i)\,. \tag{10}$$

Пусть

$$W_V(x,N) = X_V / ||x||^2\,, \tag{11}$$

где в знаменателе стоит квадрат евклидовой нормы вектора

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |X(v)|^2 dv/2\pi\,. \tag{12}$$

Иными словами, правая часть выражения (11) определяет концентрацию евклидовой нормы (энергии) вектора в заданном частотном интервале.

Очевидно, что матрица в (8) является неотрицательно определённой и симметричной. Поэтому [4] она обладает полным набором собственных векторов (имеет простую структуру), удовлетворяющих равенствам:

$$z_i q_i = Aq_i,\ i = 1,\ldots,N\,; \tag{13}$$

$$||q_i|| = 1\,; \tag{14}$$

$$(q_i, q_k) = \delta_{ik}\,, \tag{15}$$

а собственные числа неотрицательны, причём в дальнейшем предполагается монотонная их упорядоченность по убыванию

$$z_1 \ge z_2 \ge \ldots \ge z_N > 0\,. \tag{16}$$

Символ в правой части (15) является символом Кронекера [4]. Заметим, что согласно (9) (или (10)) собственные значения (числа и векторы) будут зависеть от выбранного частотного диапазона V и размерности N.

Тогда для (11) нетрудно получить следующее представление:

$$W_V(x,N) = \sum_{i=1}^{N} z_i b_i^2 / \sum_{i=1}^{N} b_i^2\,, \tag{17}$$

где

$$b_i = (q_i, x) = \sum_{k=1}^{N} q_{ki} x_k\,. \tag{18}$$

Отсюда с учётом (16) и сохранения евклидовой нормы при ортонормальных преобразованиях легко получить неравенство

$$z_N \le W_V(x, N) \le z_1, \tag{19}$$

которое для любого вектора известной размерности указывает верхнюю и нижнюю границы концентрации нормы в заданном частотном диапазоне. При этом нижняя и верхняя границы (равенства концентрации наименьшему или наибольшему собственным числам) достигаются только тогда, когда соответственно справедливы представления:

$$x = aq_N; \tag{20}$$

$$x = bq_1, \tag{21}$$

где коэффициенты пропорциональности – произвольные вещественные числа.

Очевидно, что неравенство (19) (вместе с (20) и (21)) может служить основой для выбора размерности вектора, исходя из желаемого уровня концентрации его евклидовой нормы в заданном частотном интервале.

Собственные значения матрицы в правой части выражения (8) обладают рядом свойств, которые полезны для решения задачи фильтрации. В самом деле, подставляя в определение (13) представление (9), для некоторой пары собственных значений нетрудно получить соотношение

$$z_i q_{ki} = \int\limits_{v \in V} Q_i(v) \exp(-jvk) dv / 2\pi, \tag{22}$$

где $Q_i(v)$ – спектр соответствующего собственного вектора, определяемый согласно (5), а q_{ki} – одна из его компонент.

Отсюда с учётом (14) и (15) нетрудно получить равенства:

$$z_i = \int\limits_{v \in V} | Q_i(v) |^2 \, dv / 2\pi; \tag{23}$$

$$\int\limits_{v \in V} Q_i(v) Q_k^*(v) dv / 2\pi = 0, \; i \ne k. \tag{24}$$

Здесь и в дальнейшем звёздочкой отмечаются комплексно сопряжённые величины и функции.

Таким образом, знание собственных чисел равносильно знанию концентраций норм собственных векторов в выбранном частотном диапазоне. Так как трансформанты Фурье векторов конечной размерности, очевидно, являются аналитическими функциями частоты, то интеграл в правой части (23) не может быть точно равен нулю. Иными словами, матрица с элементами вида (9) является положительно определённой. Вместе с тем из (23) с учётом (14) нетрудно получить соотношение

$$1 - z_i = \int_{v \notin V} | Q_i(v) |^2 \, dv / 2\pi , \tag{25}$$

откуда следуют неравенства

$$z_i \le 1, \; i = 1, \ldots, N . \tag{26}$$

Кроме того, на основе (9) и известных [4] связей следа матрицы с суммой её собственных чисел легко установить соотношение для их среднего значения

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{N} z_i / N = (V_2 - V_1) / \pi . \tag{27}$$

Примечательно, что среднее значение собственных чисел матрицы с элементами вида (10) при любой её размерности определяется только размерами выбранного частотного интервала. Имея в виду неравенство (26) и определение (10), легко понять, что часть собственных чисел матрицы с такими элементами можно сделать сколь угодно близкими к нулю. В этом случае представление (20) при близком к единице максимальном собственном числе определяет вектор, энергия которого практически полностью сосредоточена в выбранном частотном интервале.

Легко понять, что из условия (15) согласно формуле Парсеваля [5] следует равенство

$$\int_{v=-\pi}^{\pi} Q_i(v) Q_k^*(v) dv / 2\pi = 0, \; i \ne k . \tag{28}$$

Это вместе с (24) означает, что трансформанты Фурье собственных векторов матрицы вида (9) обладают свойством двойной ортогональности. Известно [6], что двойная ортогональность относится к числу важных качеств аппроксимирующих функций.

Оптимальное частотное разделение последовательностей эмпирических данных на аддитивные составляющие. Уточним формулировку задачи. Прежде всего отметим, что в качестве основы используется представление вида (3), оба слагаемых в правой части которого могут иметь равноправное прикладное значение, но для определённости термин «оптимальный» ниже относится к вычислению первого из них. В качестве критерия представляется уместным использовать евклидову меру близости трансформанты Фурье получаемого вектора $x = (x_1, .., x_N)'$ к трансформанте вектора $f = (f_1, .., f_N)'$ в некотором заранее выбранном частотном интервале. При этом естественно вычислять такие составляющие, концентрации энергий которых в этом интервале выше чем у исходной последовательности.

Таким образом, можно сформулировать и решить следующую вариационную задачу. Найти вектор $x=(x_1,..,x_N)'$, удовлетворяющий условиям:

$$D=\int\limits_{v\in V}|X(v)-F(v)|^2\,dv/2\pi=\min\,; \tag{29}$$

$$W_V(x,N)=w_0\,, \tag{30}$$

где $F(v)$ означает трансформанту Фурье вектора эмпирических данных $f=(f_1,..,f_N)'$, который можно разложить по собственным векторам матрицы с элементами (10):

$$\begin{gathered} f=\sum_{i=1}^{K}c_i q_i\,; \\ c_i=(f,q_i),\ i=1,\ \ldots,K. \end{gathered} \tag{31}$$

Здесь учтено, что, начиная с некоторого наибольшего значения индекса, скалярные произведения, определяемые вторым из соотношений (31), могут быть все равны нулю. В соответствии с этим правая часть в (30), очевидно, должна удовлетворять неравенству

$$W_V(f,N)<w_0\le z_K\,, \tag{32}$$

где левая граница может быть вычислена на основе определения (11).

Очевидно, что коэффициенты разложения в первом из представлений (31) можно вычислить. Тогда, используя результаты предыдущего раздела данной работы, нетрудно показать, что решением задачи (28), (30) будет вектор

$$x=\sum_{i=1}^{K}b_i q_i\,, \tag{33}$$

коэффициенты разложения которого находятся с помощью соотношений (второе из них служит для определения множителя Лагранжа d):

$$b_i=z_i c_i/[z_i+d(z_i-w_0)]\,; \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{K}z_i^3c_i^2/[z_i+d(z_i-w_0)]^2=w_0\sum_{i=1}^{K}z_i^2c_i^2/[z_i+d(z_i-w_0)]^2\,. \tag{35}$$

Таким образом, получены формулы, определяющие оптимальное в смысле целевой функции (29) выделение из исходного набора эмпирических данных аддитивной составляющей, имеющей заданную из допустимых (условие (30) и неравенство (32)) концентрацию энергии в выбранном частотном интервале. Легко показать, что выбору последней, исходя из равенства в правой части (32) (максимально возможной), будет соответствовать единственное слагаемое с наибольшим индексом в (33) (решение уравнения (35) при $d \Rightarrow -\infty$).

Отметим также, что если в первом из представлений (31) будет только одно ненулевое слагаемое, то единственным решением задачи (29), (30) будет сама исходная последовательность.

Представление для минимальной величины квадрата относительной погрешности воспроизведения спектра исходных данных в выбранном частотном интервале имеет вид

$$p_{\min}(w_0) = D_{\min}(w_0) / F_V = d^2 \sum_{i=1}^{K} c_i^2 z_i (z_i - w_0)^2 / [z_i + d(z_i - w_0)]^2 / F_V , \quad (36)$$

где параметр Лагранжа также зависит в соответствии с (35) от величины w_0 ;

$$F_V = \sum_{i=1}^{N} z_i c_i^2 . \quad (37)$$

Заметим, что правая часть здесь получена на основе определения (7) и свойства двойной ортогональности трансформант Фурье собственных векторов.

Используя (25), нетрудно также получить выражение для отношения энергий получаемой компоненты в выбранном диапазоне частот и «просачивания» [2] за его пределы

$$g(w_0) = \sum_{i=1}^{N} b_i^2 z_i / \sum_{i=1}^{N} b_i^2 (1 - z_i) , \quad (38)$$

куда следует подставить представления вида (34).

Вариационный принцип (29), (30) удобен тем, что позволяет в допускаемых неравенством (32) пределах управлять концентрацией энергии вычисляемой последовательности. Это является одним из его основных достоинств.

Вместе с тем для реализации вычислений согласно (34) и (35) необходимо определять собственные значения матрица с элементами вида (10), что достаточно трудоёмко и требует устойчивых процедур, особенно при больших размерностях. При этом разложение по собственным векторам согласно (31) и решение уравнения (35) необходимо осуществлять для каждой последовательности исходных данных. Поэтому целесообразно рассмотреть и иные варианты вариационных условий (критериев).

Нетрудно понять, что содержательной постановке задачи фильтрации отвечает воспроизведение трансформанты исходной последовательности только в интересующем частотном интервале, тогда как вне его в идеальном случае трансформанта искомого вектора должна быть равна нулю. В соответствии с этим введём функционал

$$P = \int\limits_{\nu \in V} | X(\nu) - F(\nu) |^2 \; d\nu / 2\pi + \int\limits_{\nu \notin V} | X(\nu) |^2 \; d\nu / 2\pi , \qquad (39)$$

который, очевидно, может служить мерой отклонения от нуля разности трансформант Фурье исходного и вычисляемого вектора в заданном интервале частот и трансформанты искомого вектора вне этого частотного интервала.

Таким образом, задаче фильтрации отвечает также вариационный принцип

$$P = \min , \qquad (40)$$

который естественно дополнить требованием равенства нормы вычисляемого вектора доле энергии исходной последовательности, попадающей в выбранный частотный интервал

$$|| x ||^2 = F_V . \qquad (41)$$

Используя предыдущие результаты, представлению (39) нетрудно придать иной вид

$$P = \sum_{i=1}^{N} (c_i - b_i)^2 z_i + \sum_{i=1}^{N} b_i^2 (1 - z_i) .$$

Это с учётом (37) позволяет легко получить равенства

$$b_i = s z_i c_i , \; i = 1, \; \ldots, \; N , \qquad (42)$$

определяющие решение задачи (40), (41).

Здесь, согласно условию (41),

$$s^2 = F_V / || x ||^2 . \qquad (43)$$

Имея в виду представления (8), (31) и (33), на основе соотношений (42) и (43) получаем более простые для вычисления искомой составляющей формулы

$$x = sAf , \qquad (44)$$

$$s^2 = (f , x) / || x ||^2 . \qquad (45)$$

Минимальное значение (39) , очевидно, равно

$$P_{\min} = s^2 \{ \sum_{i=1}^{N} c_i^2 (s^{-1} - z_i)^2 z_i + \sum_{i=1}^{N} c_i^2 (1 - z_i) z_i^2 \}, \qquad (46)$$

причём здесь первая и вторая суммы определяют соответственно величины первого и второго слагаемых в правой части определения (39).

Заметим далее, что с учётом определения (9) покомпонентной записи представления (44) нетрудно придать вид

$$x_i = s \int_{v \in V} F(v) \exp(-jvi) dv / 2\pi. \qquad (47)$$

Выводы. Таким образом, вычисления согласно (44) эквивалентны получению сначала трансформанты Фурье исходной последовательности в заданном интервале частот, а затем вычислению на этом интервале интеграла вида (47). Важно, что при этом результаты вычислений оптимальны в смысле минимизации критерия (39). Ясно также, что использование для вычислений представления (44) гораздо удобнее, чем представления (47).

В результате подстановки представления (47) в определение (5) после некоторых преобразований нетрудно получить соотношение между трансформантами Фурье исходной и вычисленной последовательностей

$$X(v_1) = s \int_{v \in V} F(v) \exp(j(N+1)(v_1 - v)/2) \sin(N(v_1 - v)/2) / \sin((v_1 - v)/2) \, d\,\mathrm{v}/2\pi. \qquad (48)$$

Важным, особенно для коротких последовательностей эмпирических данных, является то, что каждая из компонент вычисляемых векторов определяется всеми отсчётами исходных данных. Это, согласно общему «принципу неопределённости» [6] в спектральном анализе, позволяет сформировать наиболее близкие к заданным трансформанты Фурье. Отметим также, что ввиду исходного предположения (16) и свойства (23) представление (33), в котором выполняются равенства (42), определяет составляющую с большей, чем у исходной последовательности, концентрацией энергии в выбранном частотном интервале.

Список литературы: **1**. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Наука, 1961. **2**. *Рабинер Л., Голд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. **3.** *Кендалл М.Дж., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. **4**. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. **5**. *Френкс Л.* Теория сигналов. – М.: Наука, 1974. **6**. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. **7**. *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – К.: Наук. думка, 1992. **8**. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т.4. – Ч.1. **9.** *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. **10**. *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. – М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 14.09.2004