МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 539.3

Б. Э. ИСАЛЫ, Р. Э. МАМЕДЛИ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ СРЕДЕ

В статье исследуется задача устойчивости трехслойных неоднородных прямолинейных стержней на нелинейно упругом основании под действием сжимающих нагрузок. Здесь предполагается, что стержень находится в неравномерном температурном поле и модули упругости материала слоев зависят от температуры. Для упругого основания принимается нелинейный модель и предполагается, что гипотеза плоских сечений справедлива для всей толщины элемента стержня. В общем виде получено уравнение устойчивости рассматриваемого стержня и для конкретного случая найдена формула для определения критической нагрузки.

Ключевые слова: трехслойный неоднородный стержень, температура, устойчивость, критическая нагрузка.

Введение. Однослойные и многослойные стержни часто используются в качестве несущих элементов во многих сложных конструкциях, работающих в различных режимах нагружения. Такие конструкции в некоторых случаях находятся на нелинейно упругом основании и в неравномерном температурном поле.

В работах [1-4] исследованы устойчивость однослойных и многослойных стержней при нормальной температуре и под действием высокой температуры.

В данной работе исследуется задача устойчивости двухслойных неоднородных стержней, которые находятся в неравномерном температурном поле и на нелинейно упругом основании.

Постановка задачи. Рассмотрим устойчивость трехслойного неоднородного стержня на нелинейно упругом основании, имеющей две оси симметрии поперечного сечения, сжимаемого по концам силами P при неравномерном нагреве.

Координатная система выбрана следующим образом: оси OY и OZ находятся в поперечном сечении стержня; ось OX – направлена по оси стержня.

Здесь предполагается, что температура в каждом слое является функцией координаты толщины (т. е. $T_i = T_i(z)$).

Слои стержня изготовлены из различных неоднородных материалов, и модули упругости зависят от координат и температуры следующим образом:

$$E_i = E_i\left(X, Z, T(z)\right) = E_i \times f_i(x) \times \varphi_i(z) \times \frac{T(z)}{T_0},$$

$$(i = 0,1,2)$$

В возмущенном состоянии стержня связь между приращениями напряжений и деформаций будет иметь вид:

$$\Delta\sigma' = E_{10}\ f_1(x)\varphi_1(z)T'(z)\Delta\varepsilon\ ,$$

$$\left(-h_1 - \frac{h}{2} \le z \le -\frac{h}{2}\right),\ \left(-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\right) \qquad (2)$$

$$\Delta\sigma^2 = E_{20}\ f_2(x)\varphi_2(z)T'(z)\Delta\varepsilon\ ,$$

$$\left(\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2} + h_2\right)\ \ (T' = T/T_0)$$

здесь h_1, h, h_2 –толщины соответствующих слоев. Предположим, что гипотеза плоских сечений справедлива для всей толщины стержня т.е.

$$\Delta\varepsilon = e_0 + z æ \qquad (3)$$

Здесь e_0 – дополнительная деформация оси стрежня, æ – кривизна центральной линии.

В этом случае приращение усилий и момента определяются по формулам:

$$\Delta P = \int_{-\frac{h}{2}-h_1}^{-h/2} \Delta\sigma^1 b(z)dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} \Delta\sigma b(z)dz + \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h_2} \Delta\sigma^2 b(z)dz, \qquad (4)$$

$$\Delta M = \int_{-\frac{h}{2}-h_1}^{-h/2} \Delta\sigma^1 z b(z)dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} \Delta\sigma z b(z)dz + $$

$$+ \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h_2} \Delta\sigma^2 z b(z)dz$$

где *b(z)*- ширина поперечного сечения стержня.

С учетом (1)-(3) из (4) находим:

$$\Delta P = E_0 f(x)\left[e\left(e_{10}\gamma_1 S_1^0 + S^0 + e_{20}\gamma_2 S_2^0\right) + æ\left(e_{10}\gamma_1 S_1^1 + S^1 + e_{20}\gamma_2 S_2^1\right)\right], \quad (5)$$

$$\Delta M = E_0 f(x)\left[e\left(e_{10}\gamma_1 S_1^1 + S^1 + e_{20}\gamma_2 S_2^1\right) + æ\left(e_{10}\gamma_1 S_1^2 + S^2 + e_{20}\gamma_2 S_2^2\right)\right] \quad (6)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$S_1^i = \int_{-h/2-h_1}^{-h/2} \varphi_1(z)T'(z)b(z)z^i dz$$

$$S^i = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi(z)T'(z)b(z)z^i dz\ ..$$

$$S_2^i = \int_{h/2}^{h/2+h_2} \varphi_2(z)T'(z)b(z)z^i dz\ . \qquad (7)$$

$$e_{10} = \frac{E_{10}}{E_0}, e_{20} = \frac{E_{20}}{E_0},\ \gamma_1 = \frac{f_1(x)}{f(x)},\ \gamma_2 = \frac{f_2(x)}{f(x)}\ ..$$

Получение уравнения устойчивости.Уравнения равновесия рассматриваемого стержня имеет вид:

$$\Delta P = 0,\ \frac{d^2}{dx^2}(\Delta M) + P\frac{d^2 \mathrm{w}}{dx^2} + C_0 W + C_1 W^3 = 0 \qquad (8)$$

Здесь c,c1 – коэффициенты постели основания, u – прогиб стержня.

С учетом (5) из первого уравнения системы (7) получим:

$$e = \frac{\left(e_{10}\gamma_1 S_1^1 + S^1 + e_{20}\gamma_2 S_2^1\right)^2}{\left(e_{10}\gamma_1 S_1^0 + S^0 + e_{20}\gamma_2 S_2^0\right)}. \qquad (9)$$

С учетом (8) из (5) для приращения момента получим следующее выражение:

$$\Delta M = \dot{I}\dot{d}K\, E \cdot f_0 x(\ )\ . \qquad (10)$$

где обозначено:

$$K\dot{I} = \left(e_{10}\gamma_1 S_1^2 + S^2 + e_{20}\gamma_2 S_2^2\right) - \frac{\left(e_{10}\gamma_1 S_1^1 + S^1 + e_{20}\gamma_2 S_2^1\right)^2}{\left(e_{10}\gamma_1 S_1^0 + S^0 + e_{20}\gamma_2 S_2^0\right)} = 0.$$

Учитывая, что $æ = \dfrac{d^2 u}{dx^2}$, из второго уравнения системы (8) с учетом (10) получим:

$$\mathrm{KI}\frac{d^2u}{dx^2}\left[f(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] + P\frac{d^2u}{dx^2} + c0u + c1u3 = 0 \qquad (12)$$

Таким образом, уравнение устойчивости рассматриваемого стержня получено в виде (12).

Решение задачи. Для решения конкретных задач необходимо задавать вид зависимости модулей упругости от координат.Рассмотрим случай когда модули упругости не зависят от координаты длины (т. е. $\mathrm{f}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}_2(\mathrm{x}) = 1$ В этом случае уравнение устойчивости (12) получается в виде:

$$\mathrm{KI}\frac{d^4u}{dx^4} + P\frac{d^2u}{dx^2} + cu + cu3 = 0 \qquad (13)$$

Рассмотрим шарнирное закрепление концов стержня. В этом случае для прогиба можем принять выражение:

$$u = u_0 \sin\frac{\pi x}{e} \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и выполняя процедуру Бубнова-Галеркина для определения критической нагрузки получим формулу:

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 KI + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2\left(C_0 + \frac{3}{4}C_1 \mathrm{W}_0^2\right) \qquad (15)$$

Здесь KI – определяется на основе формулы (11).

Для получения качественных результатов для функций неодноности и температуры примем следующие выражения:

$$\varphi_1(z) = 1 + \mu_1\frac{z}{h_1},\ \varphi(z) = 1 + \mu\frac{z}{h},\ \varphi_2(z) = 1 + \mu_2\frac{z}{h_2},\ \ .$$

Подставляя выражения (16) в (7) определяется обобщенная жесткость стержня и критическая нагрузка на основе (11) и (15).

При различных значениях параметров произведены численные расчеты и результаты представлены на рис. 1. Здесь пунктирной линией отмечено решение аналогичной задачи при постоянной температуре.

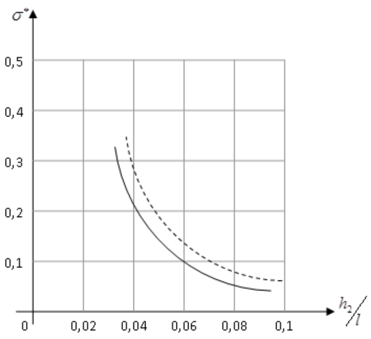

Рис. 1. Зависимость критического напряжения от гибкости стержня

Выводы. Дана постановка и получено решения задачи об устойчивости неоднородного трехслойного стержня в нелинейно упругой среде.Найдена формула для определения критической нагрузки. Анализ численных расчетов показывает что,не учеть неоднородности материала слоев стержня, можеть привести к существенным погрешностям при определении критических параметров стержня(в некоторых случаях может уменьшить 8-12 %).

Список литературы: 1. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем [Текст] / *А. С. Вольмир*. – М.: Наука, 1967. – 984 с.**2.** *Ломакин, В. А.* Теория упругости неоднородных тел [Текст] / *В. А. Ломакин*. – М.: Изд-во МГУ,1976. – 320 с.**3.** *Шаповалов, Л. А.* Влияние неравномерного нагрева на устойчивость сжатого стержня [Текст] / *Л. А. Шаповалов*. – ПММ, 1957. – Т. XXII, Вып. 1. – С. 119–123.**4.** *Зубчанинов, В. Г.* Об упругопластической устойчивости слоистых стрежней [Текст] / *В. Г. Зубчанинов* // Прикладная Механика. – 1970. – Вып. 6, No 2. – С. 127–129.**5.** *Yang, Y. B.* Thermal effect on the Postbuckling Behaviorof an elastic or elasto-plastic truss [Text] / *Y. B. Yang, T. J. Lin, L. I. Len* // Journal of Mechanics. – 2008. – Vol. 134, No 4. – P. 330–338. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(2008)134:4(330) **6.** *Amin Heydarpour*. Nonlinear Analysis ofComposite Beams with Partial Interaction in steel Frame Structures at Elevated Temperature [Text] / *Heydarpour Amin, Mark Andrew Bradford* // Journal of Structural Engineering. – 2010. – Vol. 136. – P. 968–978. doi: 10.1061/(asce)st.1943-541x.0000189 **7.** *Voshoughi, A. R.* Thermal postbuckling of laminated composite skev plates with temperature-dependent properties [Text] / *A. R. Voshoughi, P. Malekzadeh, Mo. R. Banan* // J. Thin Walledstructuresv. – 2011. – Vol. 47, No 7. – P. 804–811. **8.** *Thuç, P. Vo.* Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory [Text] / *P. Vo. Thuç, Thai Huu-Tai* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2012. – Vol. 62, No 1. – P. 67–76. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2012.06.001 **9.** *Asadi, H.* Large amplitude vibration and post-buckling analysis of variable cross-section composite beams on nonlinear elastic foundation [Text] / *H. Asadi, M. M. Aghdam* // Intern. Journal of Mechanical Sciences. – 2014. – Vol. 79. – P. 47–55. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.11.017 **10.** *Isayev, F. Q.* Vibration of non-homogeneous three-layered rods against the effect of thermo-mechanical stress in anisotropic foundation [Text] / *F. Q. Isayev, R. E. Memmedli* // Journal of QafqazUniversity Mechanical and Industrial Engineering. – 2014. – Vol. 2, No 2. – P. 112–117.

Bibliography (transliterated): 1. *Vol'mir, A. S.* (1967). Ustojchivost' deformiruemyh sistem. M.: Nauka, 984.**2.** *Lomakin, V. A.* (1976). Teorija uprugosti neodnorodnyh tel. M.: Izd-vo MGU, 320. **3.** *Shapovalov, L. A.* (1957). Vlijanie neravnomernogo nagreva na ustojchivost' szhatogo sterzhnja, T. XXII, Vyp. 1. PMM, 119–123. **4.** *Zubchaninov, V. G.* (1970). Ob uprugoplasticheskoj ustojchivosti sloistyh strezhnej. Prikladnaja Mehanika, Vyp. 6, No 2, 127–129. **5.** *Yang, Y. B., Lin, T. J., Len, L. I.* (2008). Thermal effect on the Postbuckling Behaviorof an elastic or elasto-plastic truss. Journal of Mechanics, Vol. 134, No 4, 330–338. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(2008)134:4(330) **6.** *Amin Heydarpour, Mark Andrew Bradford.* (2010). Nonlinear Analysis ofComposite Beams with Partial Interaction in steel Frame Structures at Elevated Temperature. Journal of Structural Engineering, Vol. 136, 968–978.

doi: 10.1061/(asce)st.1943-541x.0000189 **7.** *Voshoughi, A. R., Malekzadeh, P., Banan, Mo. R.* (2011). Thermal postbuckling of laminated composite skev plates with temperature-dependent properties. J. Thin Walledstructuresv, Vol. 47, No 7, 804–811. **8.** *Thuç, P. Vo., Thai Huu-Tai.* (2012). Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 62, No 1, 67–76. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2012.06.001 **9.** *Asadi, H., Aghdam, M. M.* (2014). Large amplitude vibration and post-buckling analysis of variable cross-section composite beams on nonlinear elastic foundation. Intern. Journal of Mechanical Sciences, Vol. 79, 47–55. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.11.017 **10.** *Isayev, F. Q., Memmedli, R. E.* (2014). Vibration of nonhomogeneous three-layered rods against the effect of thermo-mechanical stress in anisotropic foundation. Journal of QafqazUniversity Mechanical and Industrial Engineering, Vol. 2, No 2, 112–117.

Поступила (received) 20.11.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Исалы Биллура Элман кызы – докторант кафедры "Инженерная механика", Университет Кавказ; ул. Гасан Алиева, 120, г. Хырдалан, Баку, Абшерон, Азербайджан, AZ0101; e-mail: fisayev@qu.edu.az.

Ісали Біллура Елман кизи - докторант кафедри "Інженерна механіка", Університет Кавказ; вул. Гасан Алієва, 120, м. Хирдалан, Баку, Абшерон, Азербайджан, AZ0101; e-mail: fisayev@qu.edu.az.

Isali Billura Elman kizi – doctorant departament of Engineering Mechanics Qafqaz University, Qasan Aliyev str.120, Khirdalan, Baku, Absheron, Azerbaijan, AZ0101; tel.: (+99412) 448-28-62; e-mail: fisayev@qu.edu.az.

Мамедли Рамил Элман оглы – докторант кафедры "Инженерная механика" Университет Кавказ; ул. Гасан Алиева, 120, г. Хырдалан, Баку, Абшерон, Азербайджан, AZ0101, e-mail: fisayev@qu.edu.az.

Мамедлі Каміл Елман огли – докторант кафедри "Інженерна механіка" Університет Кавказ; вул. Гасан Алієва, 120, м Хирдалан, Баку, Абшерон, Азербайджан, AZ0101, e-mail: fisayev@qu.edu.az.

Mamedli Ramil Elman oqli – doctorant departament of Engineering Mechanics, Qafqaz University, Qasan Aliyev str.120, Khirdalan, Baku, Absheron, Azerbaijan, AZ0101; e-mail: fisayev@qu.edu.az.

УДК 539.3

Ф. К. ИСАЕВ, В. Г. РАДЖАБОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ НАНО-МИКРО ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В представленной статье исследуется устойчивость неоднородных нано-микро элементов на основе не локальной теории упругости. Здесь как элемент конструкции принять прямолинейный стержень и для него принята теория стержней Эйлера-Бернулли. Предполагается, что модуль упругости материала стержня является непрерывной функцией координаты толщины. При получении уравнений устойчивости на основе теории стержня Эйлера-Бернулли был использован уравнения состояния нелокальной теории упругости предложенные Эрингеном. Для различных случаев граничных условий получены уравнения устойчивости рассмотренных стержней. После решения полученных уравнений найдены аналитические формулы для определения критической нагрузки и проведены различные анализы.

Ключевые слова: нано-микро элемент, неоднородный, теория стержней Эйлера-Бернулли, устойчивость, критическая нагрузка, нелокальная теория упругости

Введение. Различные вопросы устойчивости и прочности одно и многослойных стержневых элементов конструкций из однородных материалов в научной литературе исследованы достаточно. В этих работах в основном использованы классические соотношения теории упругости [1–3].

В последние годы в технике интенсивно используются новые композитно- искусственные материалы. Поэтому эти процессы ставить перед конструкторами-исследователями повышенные требования к оценке прочности ,устойчивости и колебании, так как при различных условиях работы и режимах нагружения возникает ряд вопросов, которое требует решения новых задач напряженно-деформированного состояния и определения критических параметров. Во многих случаях слоистые элементы конструкции изготавливаются из различных неоднородно упругих материалов. Причиной появления неоднородности могут быть технология изготовления конструкций, термическая обработка материалов, неоднородность составов и т.д. Учет этих факторов при решении задач устойчивости и колебании конструкций является очень существенным. Поэтому при решении многих задач устойчивости и колебании элементов конструкций из неоднородных композиционных материалов требуется использовать более уточненные гипотезы или теории. Одной из таких теорий является теория нелокальной теории упругости предложенной А. К. Эрингеном [5, 6].

В работе [4] были рассмотрены некоторые задачи изгиба и прочности неоднородных нано-микро элементов. В данной работе исследуется задача устойчивости неоднородных стержней на основе нелокальной теории Эрингена [5]

Постановка задачи. Известно, что уравнения движения Коши однородно упругих тел на основе нелокальной теории упругости сочтоит из следующих уравнений [5]:

$$\tau_{kl,l} + \rho\left(f_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = 0\,, \qquad (1)$$

здесь физические соотношения имеют следующий вид:

$$\tau_{kl}\left(x\right) = \int\limits_{v} \varepsilon_{klmn}\left(x - x'\right)\varepsilon_{mn}\,dv\left(x'\right) \quad , \qquad (2)$$

где τ_{kl} -компоненты тензора напряжений, ρ – плотность массы тела, f - плотность массового сила, u -компоненты вектора перемещения, v – обьем