

*И.Ф. ЗАНЕВСКИЙ*, д.т.н., проф. технического университета им. К. Пулаского, г. Радом, Польша

## **КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВНУТРЕННЕЙ БАЛЛИСТИКИ СТРЕЛЫ ЛУКА**

Методом Лагранжа создана математическая модель взаимодействия стрелы с луком в форме системы десяти дифференциальных уравнений и начальных условий. Соответствующая задача Коши решена методом Рунге-Кутты с применением программы NDSolve из пакета Mathematica. Модель показала пригодность для изучения основных параметров внутренней баллистики стрелы лука. Ил.: 4. Библиогр.: 12 назв.

**Ключевые слова:** стрела, лук, математическая модель, задача Коши, метод Рунге-Кутты, пакет Mathematica, баллистика.

**Постановка проблемы.** В стрельбе из лука спортивный результат в равной мере зависит от мастерства стрелка и качества подгонки параметров лука, которая является сложным и трудоёмким процессом [1]. Моделирование выстрела позволяет интенсифицировать этот процесс, сократив усилия на пробы и ошибки [2]. Работа выполнена по теме № 2814/58/P "Исследование процессов взаимодействия тела человека со спортивным инвентарём (на примере стрелковых видов спорта)" согласно плану научных исследований Министерства высшего образования и науки Республики Польша.

**Анализ литературы.** В основу модели лука С.Н. Nickman положил трёхзвенную кинематическую цепь, состоящую из прямых недеформируемых стержней, соединённых между собой двумя идеальными шарнирами с пружиной Архимеда и нерастяжимой нитью [3]. W.C. Marlow [4] развил эту модель, учтя упругость тетивы и моделируя стрелу материальной точкой. В.W. Kooi и J.A. Sparenberg [5] смоделировали плечо лука эластичной полосой, а S. Ohsima и A. Ohtsuki [6] применили эту модель для исследования статики и динамики традиционного японского лука. J.L. Park [7] разработал модель блочного спортивного лука. Нами учтена несимметричность системы стрела – лук в вертикальной плоскости [8], предложена модель трёх-стержневого стабилизатора [9], исследованы колебания в системе стрела – лук – тело стрелка [10, 11]. Однако практически пригодной модели для изучения внутренней баллистики стрелы спортивного лука пока не создано.

**Цель статьи** – обобщить математическую модель взаимодействия стрелы с луком и создать компьютерную модель внутренней баллистики стрелы в вертикальной плоскости.

**Результаты.** Схема модели системы стрела – лук представлена на рис. 1. Исходя из современных принципов выполнения выстрела, принято условие неподвижности точки упора руки стрелка в рукоять лука (т. О). Математическая модель представлена системой десяти уравнений Лангранжа 2-го рода и соответствующими начальными условиями. Решение системы получено методом Рунге-Кутты и реализовано в программе NDSolve из пакета Mathematica.

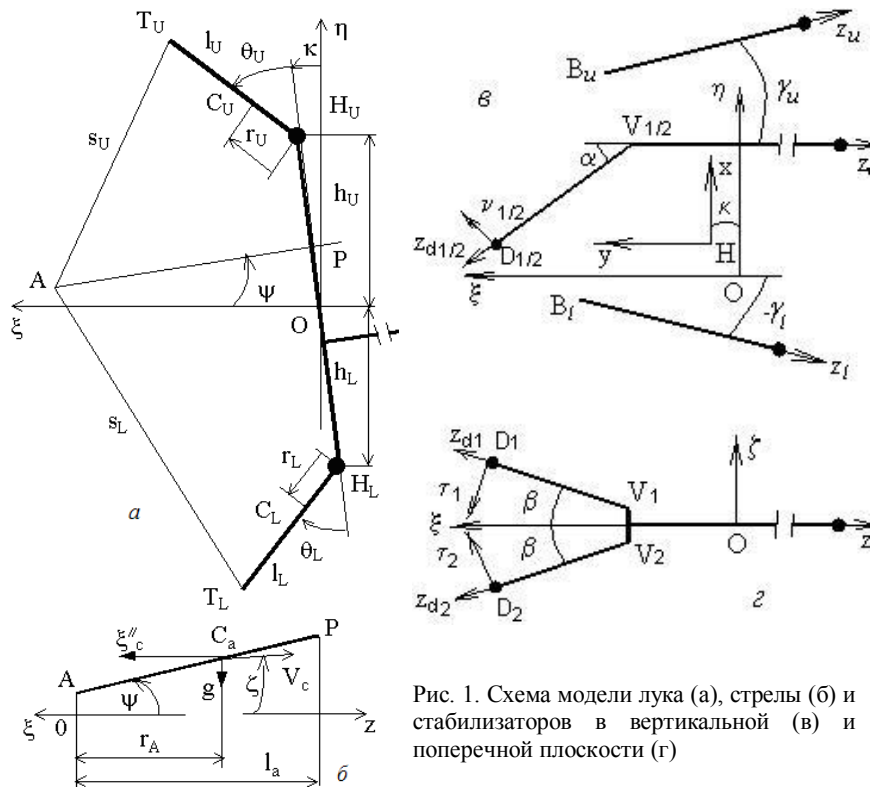


Рис. 1. Схема модели лука (а), стрелы (б) и стабилизаторов в вертикальной (в) и поперечной плоскости (г)

**Условные обозначения:**  $c_U, c_L$  – жёсткость плеч лука;  $c_c$  – жёсткость центрального стабилизатора;  $l_c$  – его длина;  $m_c$  – масса стержня;  $M_c$  – масса наконечника;  $m_V$  и  $I_V$  – масса и момент инерции блока крепления стабилизатора относительно его общего центра масс;  $f$  – жёсткость тетивы;  $h_U, h_L$  – размеры рукояти;  $I_U, I_L$  – моменты

инерции плеч лука;  $I_H$  – момент инерции рукояти;  $l_U, l_L$  – длина плеч;  $l_a$  – длина стрелы;  $m_U, m_L$  – масса плеч;  $m_A$  – масса хвостовика стрелы;  $m_s$  – масса тетивы;  $m_a$  – масса стрелы;  $m_V$  – масса блока крепления стабилизатора;  $r_U, r_L$  – расстояние до центра массы плеча;  $s_U, s_L$  – длина ветвей растянутой тетивы;  $S_U, S_L$  – длина ветвей нерастянутой тетивы;  $g$  – ускорение свободного падения;  $t$  – время. Индексы “U” and “L” использованы для обозначения параметров соответственно верхнего и нижнего плеч.

Уравнения движения системы:

$$\begin{aligned}
 I_U(\ddot{\theta}_U + \ddot{\kappa}) + m_U r_U h_U b_1 \ddot{\kappa} + c_U(\theta_U + \varphi_U) + e_U l_U (S_{U\xi} b_1 - S_{U\eta} b_2) &= 0; \\
 I_L(\ddot{\theta}_L - \ddot{\kappa}) - m_L r_L h_L b_3 \ddot{\kappa} + c_L(\theta_L + \varphi_L) + e_L l_L (S_{L\xi} b_3 + S_{L\eta} b_4) &= 0; \\
 \left( \frac{33}{140} m_c + M_c \right) \ddot{q}_c + (m_c Q_{cm} + M_c Q_{cM}) \ddot{\kappa} + c_c q_c &= 0; \\
 \left( \frac{33}{140} m_d + M_d \right) \ddot{q}_v + (m_d Q_{vm} + M_d Q_{vM}) \ddot{\kappa} + c_d q_v &= 0; \\
 \left( \frac{33}{140} m_d + M_d \right) \ddot{q}_\tau + (m_d Q_{\tau m} + M_d Q_{\tau M}) \ddot{\kappa} + c_d q_\tau &= 0; \\
 \left( \frac{33}{140} m_b + M_b \right) \ddot{q}_b + (m_b Q_{bm} + M_b Q_{bM}) \ddot{\kappa} + c_b q_b &= 0; \tag{1} \\
 \left\{ I_H + I_U + I_L + m_U h_U^2 + m_L h_L^2 + I_V + m_V (x_V^2 + y_V^2) + \right. & \\
 \left. + I_{cm} + I_{dm} + I_{bm} + I_{cM} + I_{dM} + I_{bM} \right\} \ddot{\kappa} + & \\
 + m_U r_U h_U \left[ b_1 (\ddot{\theta}_U + 2\ddot{\kappa}) - b_2 (\ddot{\theta}_U + \ddot{\kappa})^2 \right] - m_L r_L h_L \left[ b_3 (\ddot{\theta}_L - 2\ddot{\kappa}) - b_4 (\ddot{\theta}_L - \ddot{\kappa})^2 \right] + & \\
 + I_U \ddot{\theta}_U - I_L \ddot{\theta}_L + 2m_d (Q_{vm} \ddot{q}_v + Q_{\tau m} \ddot{q}_\tau) + 2M_d (Q_{vM} \ddot{q}_v + Q_{\tau M} \ddot{q}_\tau) + & \\
 + (m_c Q_{cm} + M_c Q_{cM}) \ddot{q}_c + (m_b Q_{bm} + M_b Q_{bM}) \ddot{q}_b + & \\
 + e_U [S_2 (b_1 l_U + h_U) - S_1 b_2 l_U] - e_L [S_4 (b_3 l_L + h_L) + S_3 b_4 l_L] &= 0; \\
 (m_A + m_a) \ddot{\eta}_A + m_a r_A \ddot{\psi} + m_a g - e_U S_{U\eta} - e_L S_{L\eta} &= 0; \\
 (m_A + m_a) \ddot{\xi}_A - e_U S_{U\xi} - e_L S_{L\xi} &= 0; I_A \ddot{\psi} + m_a r_A (\ddot{\eta}_A + \ddot{\xi}_A \psi + g) &= 0, \\
 \text{где } I_{cm} = m_c \left( \frac{l_c^2}{3} + x_V^2 + y_V^2 - y_V l_c \right); Q_{cm} = \frac{11}{40} l_c - \frac{3}{4} y_V; Q_{bM} = r_b + l_b; &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{cM} &= M_c \left[ x_V^2 + (l_c - y_V)^2 \right]; \quad Q_{cM} = l_c - y_V; \\
I_{bm} &= m_b \left( x_b^2 + y_b^2 + l_b r_b + \frac{1}{3} l_b^2 \right); \quad Q_{bm} = \frac{3}{8} r_b + \frac{11}{40} l_b; \quad r_b = x_b \sin \gamma - y_b \cos \gamma; \\
I_{bM} &= M_b \left( x_b^2 + y_b^2 + 2l_b r_b + l_b^2 \right); \\
I_{dm} &= 2m_d \left[ x_V^2 + y_V^2 + l_d (y_V \cos \alpha \cos \beta - x_V \sin \alpha) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l_d^2}{3} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta) \right]; \\
I_{dM} &= 2M_d \left[ (x_V - l_d \sin \alpha)^2 + (y_V + l_d \cos \alpha \cos \beta)^2 \right]; \\
Q_{vm} &= \frac{3}{8} (x_V \sin \alpha \cos \beta - y_V \cos \alpha) - \frac{11}{40} l_d \cos \beta; \\
Q_{\tau m} &= \left( \frac{3}{8} x_V - \frac{11}{40} l_d \sin \alpha \right) \sin \beta; \\
Q_{vM} &= x_V \sin \alpha \cos \beta - y_V \cos \alpha - l_d \cos \beta; \quad Q_{\tau M} = (x_V - l_d \sin \alpha) \sin \beta; \\
e_U &= \frac{f(s_U - S_U)}{s_U S_U}; \quad e_L = \frac{f(s_L - S_L)}{s_L S_L}; \quad s_U = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}; \quad s_L = \sqrt{S_3^2 + S_4^2}; \\
S_1 &= h_U + l_U b_1 - \eta_A; \quad S_2 = h_U \kappa + l_U b_2 - \xi_A; \\
b_1 &= \cos(\theta_U + \kappa); \quad b_2 = \sin(\theta_U + \kappa); \quad S_3 = h_L + l_L b_3 + \eta_A; \\
S_4 &= h_L \kappa - l_L b_4 + \xi_A; \quad b_3 = \cos(\theta_L - \kappa); \quad b_4 = \sin(\theta_L - \kappa),
\end{aligned}$$

где  $m_V$  и  $I_V$  – масса и момент инерции блока крепления стабилизатора относительно его общего центра масс, имеющего координаты  $x_V, y_V$ ;  $x_b, y_b$  – координаты крепления верхнего стержня стабилизатора;  $l_b$  – его длина;  $m_b$  – масса стержня;  $M_b$  – масса наконечника;  $c_b$  – жёсткость верхнего стабилизатора;  $m_d$  – масса каждого из боковых стержней стабилизатора;  $M_d$  – масса каждого из наконечников;  $l_d$  – длина боковых стержней;  $c_d$  – жёсткость бокового стабилизатора относительно силы, приложенной на свободном конце нормально продольной оси стержня;  $\gamma$  – угол между осями центрального и верхнего стержней.

Начальные условия задачи:

$$\begin{aligned}
t = 0, \quad \xi_A &= \xi_{A0}; \quad \eta_A = \eta_{A0}; \quad \theta_U = \theta_{U0}; \\
\theta_L &= \theta_{L0}; \quad \kappa = 0; \quad \psi = \psi_0; \quad q_c = 0; \quad q_v = 0;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
q_\tau = 0; \dot{\xi}_A = 0; \dot{\eta}_A = 0; \dot{\theta}_U = 0; \dot{\theta}_L = 0; \\
\dot{\kappa} = 0; \dot{\psi} = 0; \dot{q}_c = 0; \dot{q}_v = 0; \dot{q}_\tau = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где константы  $\eta_{A0}$ ,  $\theta_{U0}$ ,  $\theta_{L0}$  являются решением задачи статики (3).

Нулевые значения производных отражают особенности техники прицеливания: дыхание приостановлено, поза не изменяется.

$$\begin{aligned}
\xi_A = l_U \sin \theta_U + s_U \sin \gamma_U; \quad \xi_A = l_L \sin \theta_L + s_L \sin \gamma_L; \\
\eta_A = h_U + l_U \cos \theta_U - s_U \cos \gamma_U; \quad \eta_A = s_L \cos \gamma_L - l_L \cos \theta_L - h_L; \\
c_U(\theta_U + \varphi_U) = F_U l_U \sin(\theta_U + \gamma_U); \quad c_L(\theta_L + \varphi_L) = F_L l_L \sin(\theta_L + \gamma_L); \tag{3} \\
F_\xi = -F_U \sin \gamma_U - F_L \sin \gamma_L; \quad F_\eta = F_U \cos \gamma_U - F_L \cos \gamma_L; \\
F_U = f \frac{s_U - S_U}{S_U}; \quad F_L = f \frac{s_L - S_L}{S_L}; \quad tg\phi = \frac{F_\eta}{F_\xi}; \quad tg\phi = \frac{\eta_A}{\xi_A},
\end{aligned}$$

где  $F_U, F_L$  – это силы натяжения ветвей тягивы;  $F_\xi, F_\eta$  – проекции силы натяжения лука, приложенной в т.  $A$ .

### Программа NDSolve (Mathematica)

```

ξA0 = 0.7576; ηA0 = 0.0426237; eU0 = 0.765512; eL0 = 0.794188; mA = 0.0023;
mU = 0.107; mL = 0.107; rU = 0.228; rL = 0.228; IL = 0.00682; IH = 0.213;
lU = 0.531; lL = 0.531; hU = 0.342; hL = 0.342; SU = 0.780; ηP0 = 0.0426237;
SL = 0.840; f = 25515; IU = 0.00682; xV = -0.107; yV = -0.142; ξH0 = 0.009366;
cU = 69.1; cL = 69.1; φU = 0.604672; φL = 0.607552; xb = 0.221; yb = -0.018;
IA = 0.00736; ma = 0.0224; rA = 0.5103; la = 0.783; ηH0 = 0.001062; g = 9.81;
md = 0.193; cd = 485; lc = .76; mb = 0.088; cb = 833; lb = .42; QbM = lc + rb;
md = 0.065; cd = 1170; ld = .25; α = .297; β = .617; χ = .157; QcM = lc - yV;
Mc = .043; Mb = .037; Md = .028; Mv = .119; Iv = .0021;
Icm = mc * (lc^2 / 3 + xv^2 + yv^2 - lc * yv); Qbm = .5 * (.55 * lc + .75 * rb);
IcM = Mc * (lc^2 + xv^2 + yv^2 - 2 * lc * yv);
Qcm = .5 * (.55 * lc - .75 * yv); IbM = Mb * (lb^2 + xb^2 + yb^2 + 2 * lb * rb);
rb = xb * Sin[χ] - yb * Cos[χ]; IbM = mb * (lb^2 / 3 + xb^2 + yb^2 + lb * rb);
Idm = 2 * md * (xv^2 + yv^2 + (yv * Cos[α] * Cos[β] - xv * Sin[α]) * ld *
*((Sin[α])^2 + (Cos[α])^2 * (Cos[β])^2) * ld^2 / 3);
IdM = 2 * Md * ((xv - ld * Sin[α])^2 + (yv + ld * Cos[α] * Cos[β])^2);
Qvm = .5 * ((.75 * xv * Sin[α] * Cos[β] - yv * Cos[α]) - .55 * ld * Cos[β]);
Qrm = .5 * ((.75 * xv - .55 * ld * Sin[α]) * Sin[β]); ψ0 = (ηP0 - ηA0) / la;
QvM = xv * Sin[α] * Cos[β] - yv * Cos[α] - ld * Cos[β];
QrM = (xv - ld * Sin[α]) * Sin[β]; ζ = -ArcTan[(ηA'[t] + rA * ψ'[t]) / ξA'[t]];

```

$$s_U = \sqrt{S_{U\eta}^2 + S_{U\xi}^2}; s_L = \sqrt{S_{L\eta}^2 + S_{L\xi}^2}; e_U = \frac{f * (s_U - S_U)}{s_U * S_U}; e_L = \frac{f * (s_L - S_L)}{s_L * S_L};$$

$$S_{U\eta} = h_U + l_U * b_1 - \eta_A[t]; S_{U\xi} = h_U * \kappa[t] + l_U * b_2 - \xi_A[t];$$

$$S_{L\eta} = -h_L - l_L * b_3 - \eta_A[t]; S_{L\xi} = -h_L * \kappa[t] + l_L * b_4 - \xi_A[t];$$

$$b_1 = \text{Cos}[\kappa[t] + \theta_U[t]]; b_2 = \text{Sin}[\kappa[t] + \theta_U[t]];$$

$$b_3 = \text{Cos}[-\kappa[t] + \theta_L[t]]; b_4 = \text{Sin}[-\kappa[t] + \theta_L[t]];$$

$$\text{system} = \{ (m_A + m_a) * \xi_A''[t] - e_U * S_{U\xi} - e_L * S_{L\xi} = 0,$$

$$(m_A + m_a) * \eta_A''[t] + m_a * r_A * \psi''[t] + m_a * g - e_U * S_{U\eta} - e_L * S_{L\eta} = 0,$$

$$I_A * \psi''[t] + m_a * r_A * (\xi_A''[t] * \psi[t] + g + \eta_A''[t]) = 0,$$

$$I_U * (\theta_U''[t] + \kappa''[t]) + m_U * r_U * h_U * b_1 * \kappa''[t] + c_U * (\theta_U[t] + \varphi_U) +$$

$$e_U * l_U * (S_{U\xi} * b_1 - S_{U\eta} * b_2) = 0,$$

$$I_L * (\theta_L''[t] - \kappa''[t]) - m_L * r_L * h_L * b_3 * \kappa''[t] + c_L * (\theta_L[t] + \varphi_L) +$$

$$e_L * l_L * (S_{L\xi} * b_3 + S_{L\eta} * b_4) = 0,$$

$$(I_H + I_U + I_L + m_U * h_U^2 + m_L * h_L^2 + I_{cm} + I_{cM} + I_{dm} + I_{dM} + I_{bm} +$$

$$I_{bM} + I_v + M_v * (x_v^2 + y_v^2)) * \kappa''[t] + I_U * \theta_U''[t] - I_L * \theta_L''[t] +$$

$$m_U * r_U * h_U * (b_1 * (\theta_U''[t] + 2 * \kappa''[t]) - b_2 * (\theta_U'[t] + \kappa'[t])^2)$$

$$- m_L * r_L * h_L * (b_3 * (\theta_L''[t] - 2 * \kappa''[t]) - b_4 * (\theta_L'[t] - \kappa'[t])^2)$$

$$+ (m_c * Q_{cm} + M_c * Q_{cM}) * q_c''[t] + (m_b * Q_{bm} + M_b * Q_{bM}) * q_b''[t] +$$

$$2 * ((m_d * Q_{vm} + M_d * Q_{vM}) * q_v''[t] + (m_d * Q_{\tau m} + M_d * Q_{\tau M}) * q_{\tau}''[t]) +$$

$$e_U * (S_{U\xi} * (l_U * b_1 + h_U) - S_{U\eta} * l_U * b_2) - e_L * (S_{L\xi} * (l_L * b_3 + h_L) + S_{L\eta} * l_L * b_4) = 0,$$

$$(M_c + m_c * 33 / 140) * q_c''[t] + (m_c * Q_{cm} + M_c * Q_{cM}) * \kappa''[t] + c_c * q_c[t] = 0,$$

$$(M_b + m_b * 33 / 140) * q_b''[t] + (m_b * Q_{bm} + M_b * Q_{bM}) * \kappa''[t] + c_b * q_b[t] = 0,$$

$$(M_d + m_d * 33 / 140) * q_v''[t] + (m_d * Q_{vm} + M_d * Q_{vM}) * \kappa''[t] + c_d * q_v[t] = 0,$$

$$(M_d + m_d * 33 / 140) * q_{\tau}''[t] + (m_d * Q_{\tau m} + M_d * Q_{\tau M}) * \kappa''[t] + c_d * q_{\tau}[t] = 0,$$

$$\xi_A[0] = \xi_{A0}, \eta_A[0] = \eta_{A0}, \theta_L[0] = \theta_{L0}, \theta_U[0] = \theta_{U0}, \psi[0] = \psi_0,$$

$$\psi'[0] = 0, \kappa[0] = 0, \xi_A'[0] = 0, \eta_A'[0] = 0, \theta_L'[0] = 0,$$

$$\theta_U'[0] = 0, \kappa'[0] = 0, q_c[0] = 0, q_c'[0] = 0, q_b[0] = 0,$$

$$q_b'[0] = 0, q_v[0] = 0, q_v'[0] = 0, q_{\tau}[0] = 0, q_{\tau}'[0] = 0 \};$$

$$t_0 = 0; t_1 = 0.01529;$$

$$\text{solution} = \text{NDSolve}[\text{system},$$

$$\{ \xi_A, \eta_A, \psi, \theta_L, \theta_U, \kappa, q_c, q_v, q_{\tau}, q_b \}, \{ t, t_0, t_1 \},$$

$$\text{Method} \rightarrow \text{ExplicitRungeKutta}]$$

Результаты моделирования для современного спортивного лука, соответствующего стандарту FITA (Международной федерации стрельбы из лука) [12], представлены в графической форме (рис. 2 – 4). Внутренняя баллистика стрелы характеризуется интенсивными колебаниями с частотой около 430 Гц (см. рис. 2). Время совместного движения стрелы с тетивой составляет 15,3 мс.

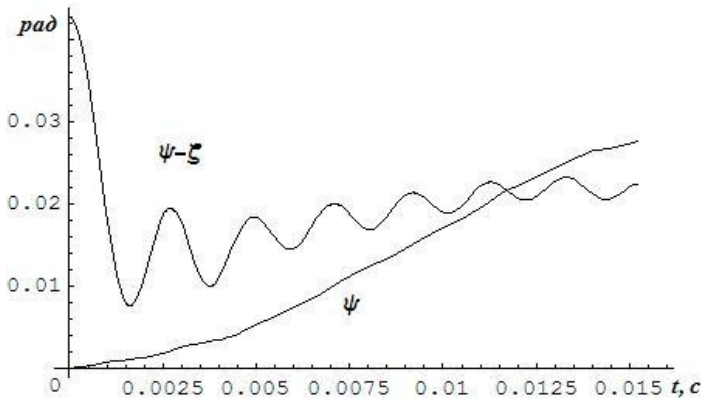


Рис. 2. Угол положения ( $\psi$ ) и угол атаки ( $\psi - \zeta$ ) стрелы лука

После выпуска тетивы сила растяжения в её ветвях в результате трёх циклов колебаний возрастает примерно в три раза по сравнению с силой натяжения лука при прицеливании (см. рис. 4). Сила отдачи, в это же время, в противофазе силе растяжения тетивы практически плавно падает до нуля.

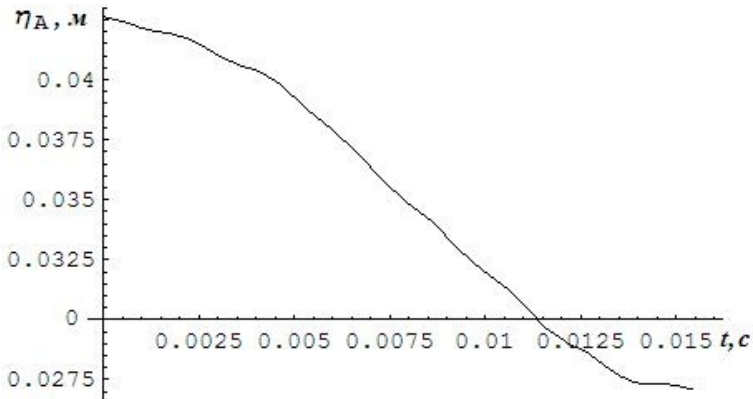


Рис. 3. Поперечная координата хвостовика стрелы

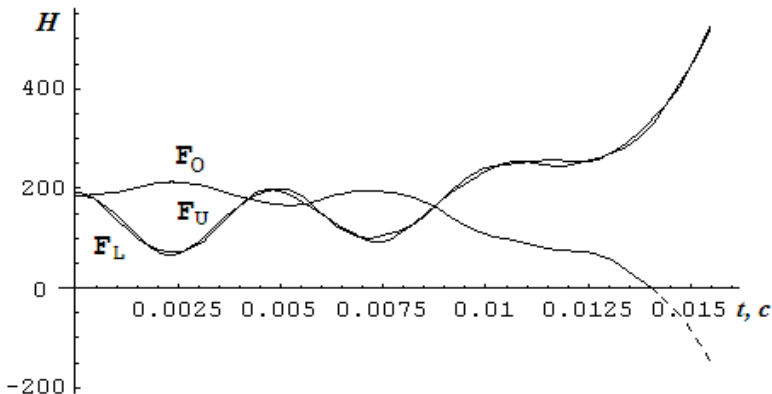


Рис. 4. Сила отдачи при выстреле ( $F_O$ ) и силы натяжения верхней ( $F_U$ ) и нижней ( $F_L$ ) ветвей тетивы

**Выводы.** Модель показала свою пригодность для изучения основных кинематических и кинетических параметров взаимодействия стрелы с луком в вертикальной плоскости. С использованием результатов имитационного моделирования внутренней баллистики стрелы представляется возможным в дальнейшем разработать расчётную методику согласования параметров лука и стрел с индивидуальными особенностями техники выполнения выстрела.

**Список литературы:** 1. Coaches Manual. Entry Level. [Электронный ресурс] / International Archery Federation: FITA Coaches Committee, 2009. – Режим доступа: [http://www.archery.org/content.asp?id=1036&me\\_id=836&cnt\\_id=2625](http://www.archery.org/content.asp?id=1036&me_id=836&cnt_id=2625). 2. Виноградський Б.А. Моделювання складних біомеханічних систем і його реалізація в спорті / Б.А. Виноградський. – Львів: ЗУКЦ, 2007. – 284 с. 3. Hickman C.N. Dynamics of a bow and arrow / C.N. Hickman // Journal of Applied Physics. – 1937. – V. 8. – P. 404-409. 4. Marlow W.C. Bow and arrow dynamics / W.C. Marlow // American Journal of Physics. – 1981. – V. 49. – № 4. – P. 320-333. 5. Kooi B.W. On the static deformation of a bow / B.W. Kooi, J.A. Sparenberg // Journal of Engineering Mathematics. – 1980. – V. 14. – № 1. – P. 27-45. 6. Ohsima S. Simulation of the shape and dynamics of Japanese bow – Application of large deflection theory / S. Ohsima, A. Ohtsuki / The Book of the 4<sup>th</sup> International Conference on Engineering of Sport, Kyoto, 2002. – P. 102-107. 7. Park J.L. Compound-archery-bow nocking-point locus in the vertical plane / J.L. Park // Proc. IMechE, Part P: Journal of Sports Engineering and Technology. – 2009. – V. 224. – № 4. – P. 141-153. 8. Zanevskyy I. Bow tuning in the vertical plane / I. Zanevskyy // Sports Engineering. – 2006. – V. 9. – № 4. – P. 77-86. 9. Zanevskyy I. Modeling and computer simulation of bow stabilization in the vertical plane / I. Zanevskyy // International Journal of Sports Science and Engineering. – 2008. – V. 2. – № 1. – P. 3-14. 10. Zanevskyy I. Modeling of the archery bow and arrow vibrations / I. Zanevskyy // Shock and Vibration. – 2009. – V. 16. – № 4. – P. 203-212. 11. Zanevskyy I. Archer-bow-arrow behaviour in the vertical plane / I. Zanevskyy // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 2008. – V. 8. – № 1. – P. 65-82. 12. Recurve bow. [Электронный ресурс] / International Archery Federation: Equipment, 2010. – Режим доступа: <http://www.archery.org>.

УДК 799.322.2:623.446.4

**Комп'ютерна модель внутрішньої балістики стріли лука / Заневський І.П**  
// Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2011. – № 36. – С. 78 – 86.

Методом Лагранжа створено математичну модель взаємодії стріли з луком у формі системи десяти диференціальних рівнянь і початкових умов. Відповідну задачу Коші розв'язано методом Рунге-Кутта із застосуванням програми NDSolve з пакету Mathematica. Модель показала придатність для вивчення основних параметрів внутрішньої балістики стріли лука. Іл.: 4. Бібліогр.: 12 назв.

**Ключові слова:** стріла, лук, математична модель, задача Коші, метод Рунге-Кутта, пакет Mathematica, балістика.

UDC 799.322.2:623.446.4

**Computer model of the archery arrow internal ballistics / Zanevskyy I.P.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2011. – № 36. – P. 78 – 86.

A mathematical model of bow and arrow interaction was created using Lagrange method as a system of ten differential equations and initial conditions. Correspondent Cauchy problem was solved using Runge-Kutta method and NDSolve programs from Mathematica package. The model shown its possibility for studying of the main parameters of the archery arrow internal ballistics. Figs.: 4. Refs.: 12 titles.

**Keywords:** arrow, bow, mathematical model, Cauchy problem, Runge-Kutta method, Mathematica package, ballistics.

*Поступила в редакцію 01.05.2011*