

ИНЖЕНЕРНО-ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ С СЕРИЙНЫМ ИЛИ МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

О.М.Пигнастый

НПФ Технология, 61170, Харьков, ул.Котлова 10/12, E-mail: techpom@online.kharkov.ua

Построена математическая модель экономико-производственной системы с массовым выпуском продукции. Состояние элемента производственной системы задается точкой в двумерном фазовом пространстве. Введена функция Лагранжа базовых продуктов производственной системы и оценены составляющие ее слагаемые.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: синергетика, базовый продукт, микроскопическое описание, системный подход

Как известно [1], производственная функция является основным способом описания макроскопических производственных систем. Выбор конкретной модели описания системы зависит от общего состояния экономики в целом и предприятия в отдельности. В идеале соотношения макроекономической модели должны получаться агрегированием микроскопических описаний [2]. При этом условия агрегируемости должны определять переход от одной макроскопической модели описания к другой, а макроскопические величины описания макроскопической модели связаны между собой через параметры микроскопического описания и не могут быть заданы независимо. Схема агрегирования микроскопических параметров системы для обеспечения связи макроскопических величин технологической структуры экономики, предложенная В.В.Леонтьевым, широко использовалась в моделях межотраслевого баланса. Первоначально в моделях межотраслевого баланса описывались чистые отрасли, выпускающие однородный продукт с помощью только одной технологии. В дальнейшем для описания структурных изменений в производственной системе потребовалось рассматривать чистые отрасли с несколькими технологиями, интенсивность использования которых ограничивалась производственными мощностями. Однако и такое обобщение оказалось слишком узким для моделирования развития технологической структуры. Появились работы Л.В.Канторовича и его школы, в которых рассматривается выбор технологии производства в зависимости от производственной мощности. В рамках минимизации

затрат предприятия при условии обеспечения максимального выпуска продукции, изменение во времени производственной мощности предприятия влечет за собой изменение технологии производства. Возникла потребность в моделях, допускающих большое множество технологий производства. Такая модель была предложена в работах Х.Хаутеккера [3] и Л.Иохансена [4,5] и на текущий момент является одним из главных инструментов исследования структурных изменений в конкретных отраслях промышленности. Основным предположением в модели Хаутеккера-Иохансена является гипотеза о том, что при создании мощности производственного предприятия осуществляется выбор технологии, по которой эта мощность может функционировать. Таким образом, в каждый момент времени производственные мощности оказываются распределенными по технологиям. Изменение этого распределения регулируется медленными процессами перспективного развития отрасли, связанного с перспективным развитием отрасли или предприятия. В модели Хаутеккера-Иохансена удается описать функционирование системы на макроскопическом уровне с помощью агрегированной производственной функцией, которая сопоставляет заданным исходным условиям максимально возможный выпуск в задаче распределения ресурсов. Модель Хаутеккера-Иохансена дает макроскопическое описание производства на основе информации о распределении мощностей по технологиям. Этот подход позволяет описать в терминах изменения производственной функции влияние на производство экономических явлений, которые допускают интерпретацию на микроуровне в терминах изменения распределения производственных мощностей по технологиям. Модель Хаутеккера-Иохансена позволяет описать новый класс экономических эффектов, связанных со структурными изменениями в производстве на микроскопическом уровне. В работе К.Сато [6] был поставлен вопрос обобщении модели Хаутеккера-Иохансена. Предполагалось рассматривать более общий класс производственных функций на микроскопическом уровне – допускающих замену производственных факторов. Исследование такой модели позволило распространить подход Хаутеккера-Иохансена на более широкий класс производственных систем. Отличительной

особенностью предложенных моделей является то, что технология задается вектором $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ коэффициентов затрат n -видов производственных факторов текущего пользования на выпуск единицы продукции. К производственным факторам текущего пользования относятся такие факторы, у которых срок службы по порядку величины совпадает с характерным временем производственного цикла. Функционирование имеющихся технологий описываются неоклассическими производственными функциями на микроуровне вида [2]:

$$F_0 = \left(\frac{u_1}{x_1}, \dots, \frac{u_n}{x_n} \right) = \min \left(\frac{u_1}{x_1}, \dots, \frac{u_n}{x_n} \right), \quad (1)$$

где $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ вектор затрат производственных факторов текущего пользования. Неоклассическая производственная функция (1) рассматривает суммарно требуемые ресурсы $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ на производство единицы продукции, но не затрагивает вопроса о том, как они распределены вдоль технологической цепочки производственного процесса. Как известно, технология производства определяется видом технологических операций и их последовательностью выполнения. На каждой технологической операции происходит воздействие на операционную заготовку посредством потребления производственных ресурсов. Тем самым, производственные ресурсы (производственные факторы текущего пользования) j -го вида могут быть использованы на разных технологических операциях производства продукции:

$$x_j = \int_0^{S_d} \tilde{x}_j(S) \cdot dS, \quad (2)$$

где интегрирование произведено вдоль технологической цепочки производственного процесса. Плотность распределения производственных ресурсов $\tilde{x}_j(S)$ вдоль технологической цепочки $[0; S_d]$ задается маршрутными и технологическими картами движения операционной заготовки. В ходе движения операционной заготовки вдоль технологической цепочки на заготовку осуществляется перенос производственных затрат S_j (грн.) от нуля до средней себестоимости готовой

продукции S_d . Вопрос распределения потребления производственных ресурсов тесно связан с вопросом функционирования производственных систем, определяет их устойчивость и управляемость. Если же производственный цикл имеет продолжительность, соизмеримую с периодом поставки сырья, материалов и комплектующих, то вопрос распределения потребления производственных ресурсов вдоль технологической цепочки производственного процесса напрямую связан с вопросом управления производственными запасами предприятия. В связи с этим, вопрос влияния распределения потребления производственных ресурсов вдоль технологической цепочки приобретает для функционирования предприятия особо важное значения.

Рассмотрим производственную систему с массовым выпуском продукции и составляющими ее отдельными элементами – базовыми продуктами [7]. Под базовым продуктом будем понимать элемент большой системы, на который происходит перенос затрат производственной системы (затрат сырья, материалов, электроэнергии, вещественного труда) через орудия труда посредством увеличения его стоимости в ходе движения вдоль технологической цепочки. Другими словами, базовый продукт представляет собою заготовку или некий полуфабрикат, постепенно превращающийся в готовое изделие в ходе своего движения вдоль технологической цепочки. Состояние производственной системы будем определять как состояние множества базовых продуктов, каждый из которых находится на конкретной технологической операции. При построении модели производственного процесса за базовый продукт модели может быть взято выпускаемое производством изделие. Весь производственный процесс изготовления базового продукта (процесс перенесения затрат S_j (грн.) на единичный базовый продукт от нуля до средней себестоимости S_d по мере продвижения вдоль технологической цепочки) разобьем на элементарные участки dS_j технологической цепочки, $dS_j \ll S_d$. Состояние базового продукта будем описывать микроскопическими величинами (S_j, μ_j) , где

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu_j = \frac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) - сумма затрат в единицу времени, которые несет

предприятие на изготовление j -го базового продукта ($0 \leq j \leq N$, N - количество базовых продуктов, находящихся в производственном процессе на всей технологической цепочке производства) в текущий момент времени. Состояние производственной системы в некоторый момент времени будет определено, если определены в некоторый момент микроскопические величины $(S_1, \mu_1; \dots; S_N, \mu_N)$ состояния базовых продуктов. Согласно этому принципу, рассматриваемая производственная система характеризуется функцией $J_{\Pi}(t, S_j, \mu_j)$. Функция $J_{\Pi}(t, S_j, \mu_j)$ является функцией Лагранжа производственной системы предприятия и для партии базовых продуктов размером $N_{\text{парм}}$ может быть представлена с точностью до членов второго порядка малости в виде суммы функций «центрального» базового продукта $J_{\Pi_наpm}(t, S, \dot{S})$ и границы партии $J_{\Pi_наpm}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$:

$$J_{\Pi_наpm}(t, S_j, \dot{S}_j) = J_{\Pi_наpm}(t, S, \dot{S}) + J_{\Pi_наpm}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}), \quad \frac{J_{\Pi_наpm}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{J_{\Pi_наpm}(t, S, \dot{S})} \ll 1 \quad (1)$$

где

$$J_{\Pi_наpm}(t, S, \dot{S}) = \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \frac{a_S \cdot \dot{S}^2}{2} - \Phi_{(\Pi_П)_j}(t, S) \Big|_0 \cdot N_{\text{парм}}, \quad (2)$$

$$J_{\Pi_наpm}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \frac{a_S \cdot \dot{\varepsilon}_j^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{(\Pi_П)}}{\partial S^2} \Big|_0 \cdot \sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \quad (3)$$

где a_S - коэффициент пропорциональности, определяющий выбор размерности системы единиц для описания производственной системы; $\Phi_{\Pi_П}(t, S_j)$ - интегральная инженерно-производственная функция предприятия [3], задаваемая документооборотом предприятия через таблицы норм расхода сырья (материалов), нормативных цен на сырье (материалы), сменных норм и расценок за выполнение работником технологических операций. Тот факт, что функция Лагранжа производственной системы содержит только $S_j(t)$, $\mu_j(t)$, но не более высокие производные является выражением утверждения, что состояние производственной системы предприятия полностью определяется знанием координат $S_j(t)$ и их

скоростей изменения во времени $\mu_j(t)$. Для описания состояния партии базовых продуктов используются групповые переменные:

$$S = \frac{1}{N_{\text{парм}}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} S_j, \quad S_j = S + \varepsilon_j, \quad \dot{S} = \frac{1}{N_{\text{парм}}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \dot{S}_j, \quad \dot{S}_j = \dot{S} + \dot{\varepsilon}_j \quad (4)$$

Основной материал:

Сумма ряда $\sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i$ в выражении для функции Лагранжа (3) может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j^2 + 2 \cdot \sum_{i \rangle j}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \quad (5)$$

Дисперсия суммы случайных величин равна сумме всех элементов ковариационной матрицы $\|K_{n,m}\|$ (4,стр.269). Так как ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали, относительно которой находятся дисперсии отдельных величин, то

$$D \left[\sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \right] = \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} D[\varepsilon_j^2] + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j \rangle i}^{N_{\text{парм}}} K_{i,j}[\varepsilon_j, \varepsilon_i] \quad (6)$$

Так как случайные величины ε_j и ε_i независимы, т.е. не коррелируют между собой, то (4,стр.271):

$$K_{i,j}[\varepsilon_j, \varepsilon_i] = 0, \quad \sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j \rangle i}^{N_{\text{парм}}} K_{i,j}[\varepsilon_j, \varepsilon_i] = 0, \quad D \left[\sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \right] = \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} D[\varepsilon_j^2] \quad (7)$$

и

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j^2 + 0 \left(\sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j^2 \right), \quad \sum_{i \rangle j}^{N_{\text{парм}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{парм}}} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \rightarrow 0 \quad (8)$$

Через $0\left(\sum_{j=1}^{N_{напм}} \varepsilon_j^2\right)$ обозначены члены более высокого порядка малости по сравнению со

слагаемым $\sum_{j=1}^{N_{напм}} \varepsilon_j^2$. Сумма ряда $\sum_{j=1}^{N_{напм}} \dot{\varepsilon}_j^2$ может быть записана через групповую

случайную величину $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{N_{напм}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{напм}} \dot{\varepsilon}_j$ с математическим ожиданием

$$M[\dot{\varepsilon}] = M\left[\frac{1}{N_{напм}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{напм}} \dot{\varepsilon}_j\right] = \frac{1}{N_{напм}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{напм}} M[\dot{\varepsilon}_j] = M[\dot{\varepsilon}_j] = 0; \quad (9)$$

и дисперсией

$$D[\dot{\varepsilon}] = D\left[\frac{1}{N_{напм}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{напм}} \dot{\varepsilon}_j\right] = \left(\frac{1}{N_{напм}}\right)^2 \cdot D\left[\sum_{j=1}^{N_{напм}} \dot{\varepsilon}_j\right] = \left(\frac{1}{N_{напм}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{N_{напм}} D[\dot{\varepsilon}_j] = \left(\frac{1}{N_{напм}}\right)^2 \cdot N_{напм} \cdot D[\dot{\varepsilon}_j] = \frac{D[\dot{\varepsilon}_j]}{N_{напм}} = \frac{\sigma^2}{N_{напм}} = (\sigma_{\dot{\varepsilon}})^2; \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{напм}} \dot{\varepsilon}_j^2 = \sum_{j=1}^{N_{напм}} (\dot{\varepsilon} + \Delta_{\varepsilon_j})^2 = \sum_{j=1}^{N_{напм}} (\dot{\varepsilon}^2 + 2 \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \Delta_{\varepsilon_j} + (\Delta_{\varepsilon_j})^2) = \sum_{j=1}^{N_{напм}} \dot{\varepsilon}^2 + 0\left(\sum_{j=1}^{N_{напм}} (\Delta_{\varepsilon_j})^2\right) \quad (11)$$

Сумма ряда $\sum_{j=1}^{N_{напм}} \varepsilon_j^2$ может быть представлена в виде канонического разложения

случайной величины ε_j :

$$\varepsilon_j(t) = \int_{t_{нач}}^t \dot{\varepsilon}_j(\tau) \cdot d\tau \quad \text{или} \quad \varepsilon_j(t_i) = \sum_{k=1}^i \dot{\varepsilon}_j(t_k) \cdot \Delta t + 0(\Delta t^2), \quad (12)$$

где посредством $0(\Delta t^2)$ - представлены члены более высокого порядка малости (4, стр.264).

Делая подстановку

$$\dot{\varepsilon}_j = \dot{\varepsilon} + \Delta_{\varepsilon_j} \quad (13)$$

случайная величина ε_j может быть представлена как:

$$\varepsilon_j(t) = \int_{t_{нач}}^t (\dot{\varepsilon}(\tau) + \Delta_{\varepsilon_j}(\tau)) \cdot d\tau = \int_{t_{нач}}^t \dot{\varepsilon}(\tau) \cdot d\tau + \int_{t_{нач}}^t \Delta_{\varepsilon_j}(\tau) \cdot d\tau \quad (14)$$

ИЛИ

$$\varepsilon_j(t_i) = \sum_{k=1}^i \left(\dot{\varepsilon}(t_k) + \Delta_{\varepsilon_j}(t_k) \right) \cdot \Delta t + O(\Delta t^2) = \sum_{k=1}^i \dot{\varepsilon}(t_k) \cdot \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (15)$$

Под $\int_{t_{нач}}^t \Delta_{\varepsilon_j}(\tau) \cdot d\tau$ и $O(\Delta t^2)$ следует понимать более высокие члены канонического разложения случайной величины $\dot{\varepsilon}_j$. Последнее дает возможность записать функцию Лагранжа

$$J_{\Pi_нарт}(t, S_j, \dot{S}_j) = \left(\frac{a_S \cdot \dot{S}^2}{2} - \Phi_{(\Pi_П)_j}(t, S) \Big|_0 + \frac{a_S \cdot \dot{\varepsilon}^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{(\Pi_П)}}{\partial S^2} \Big|_0 \cdot \varepsilon^2 \right) \cdot N_{нарт} \quad (16)$$

Из свойств функции Лагранжа следует, что умножение функции Лагранжа для партии базовых продуктов $J_{\Pi}(t, S_j, \mu_j)$ на произвольную постоянную не отражается на уравнениях движения описываемой системы, а приводит только к выбору определенной системы единиц, с использованием которых происходит построение модели. Постоянная величина $N_{нарт}$ представляет собою количество базовых продуктов в партии, является безразмерной, позволяет упростить выражение для функции Лагранжа (16):

$$J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \frac{a_S \cdot \dot{S}^2}{2} - \Phi_{(\Pi_П)_j}(t, S) \Big|_0 + \frac{a_S \cdot \dot{\varepsilon}^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{(\Pi_П)}}{\partial S^2} \Big|_0 \cdot \varepsilon^2 \quad (17)$$

Функции Лагранжа для партии базовых продуктов состоит из двух слагаемых, отличающихся друг от друга порядком малости $\frac{J_{\Pi}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{J_{\Pi}(t, S, \dot{S})} \ll 1$. Слагаемые более высокого порядка малости в рассмотрение не включены. Запишем для рассматриваемой функции Лагранжа уравнения Эйлера, представляющие собой уравнения движения системы в переменных $t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial S} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \dot{S}} \right) = 0; \quad \frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \varepsilon} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = 0 \quad (18)$$

Положив $a_S=1$ и выполнив преобразования

$$\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial S} = \frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S})}{\partial S} = - \frac{\partial \Phi_{(\Pi-\Pi)_j}(t, S) \Big|_0}{\partial S}; \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \dot{S}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S})}{\partial \dot{S}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{\dot{S}^2}{2} \right)}{\partial \dot{S}} \right) = \ddot{S};$$

$$\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial J_{\Pi}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \varepsilon} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \Phi_{(\Pi-\Pi)} \Big|_0}{\partial S^2} \cdot \varepsilon^2 \right)}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial^2 \Phi_{(\Pi-\Pi)} \Big|_0}{\partial S^2} \cdot \varepsilon; \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{\Pi}(t, S, \dot{S}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J_{\Pi}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{\dot{\varepsilon}^2}{2} \right)}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = \ddot{\varepsilon};$$

уравнения движения принимают вид

$$\ddot{S} = - \frac{\partial \Phi_{(\Pi-\Pi)_j}(t, S) \Big|_0}{\partial S} \quad \text{для «центрального» базового продукта,} \quad (21)$$

$$\ddot{\varepsilon} = - \frac{\partial^2 \Phi_{(\Pi-\Pi)} \Big|_0}{\partial S^2} \cdot \varepsilon \quad \text{для границы партии базовых продуктов,} \quad (22)$$

при условиях построения модели

$$\dot{\varepsilon}^2 \ll \dot{S}^2, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{(\Pi-\Pi)} \Big|_0}{\partial S^2} \ll \frac{\Phi_{(\Pi-\Pi)_j}(t, S) \Big|_0}{\sqrt{\varepsilon^2}} \quad (23)$$

Выводы: Записана функция Лагранжа для партии базовых продуктов производственной системы (17) с точностью до членов второго порядка малости, который определяемыми условиями (23). Получены уравнения состояния (21), (22), описывающие поведения базовых продуктов партии. Последнее дает возможность исследовать состояние базовых продуктов при движении партии через состояние «центрального» базового продукта и параметры расплывания границы партии базовых продуктов.

1. В.В.Леонтьев Исследования структуры американской экономики. – М.: Государственное статистическое издательство, 1958. - 640 с.
2. А.А.Шананин. Обобщенная модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, том 9, №9, с.117-127
3. H.S.Houthakker. The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis. // Rev. Econ. Studies, 1955 – 56, v.23(1), №60, p.27-31.
4. L.Johansen. Outline of an approach to production studies. // Mem. Inst. Econ. Univ. of Oslo, 28 April, Oslo, 1969
5. L.Johansen, T.Hersoug. Derivation of macro production functions from distributions of micro units with respect to input coefficients. Some mathematical illustrations. // Mem. Inst. Econ. Univ. of Oslo, 28 October, Oslo, 1969
6. K.Sato. Production function and aggregation. Amsterdam-London, North Holland Co., 1975.
7. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. Х.: ХНУ, 2003 .-272стр
8. Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции / В.П.Демуцкий, В.С.Пигнастая, О.М.Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академперіодика". - 2005. - № 7. - С. 66-71. doi.org/10.13140/RG.2.2.31202.32968