НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СТИСЛИЙ КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина I

Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри

Навчальний посібник
для студентів технічних університетів

Київ

КОНДОР

2016

УДК 51
ББК 22.1
С 80

Затверджено редакційно-видавничою радою університету,
протокол № 1 від 07.06.13.

Рецензенти:

В.Б. Гриньов, д-р техн. наук, проф., Харківський національний університет будівництва та архітектури, зав. кафедри будівельної механіки;

К.В. Аврамов, д-р техн. наук, проф., провідний наук. співроб., Інститут проблем машинобудування ім. А .М. Підгорного НАН України.

Авторський колектив:

Г. М. Тимченко, доц., О. В. Одинцова, ст. викл.,
О. С. Мазур, доц., Н. О. Кириллова, доц.

С 80 **Стислий курс вищої математики**: Т. 1: Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри : навч. посіб. / Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, О. С. Мазур, Н. О. Кириллова. – К. : Кондор-Видавництво, 2016. – 176 с. Іл. 53. Бібліогр. 10 назв.

ISBN 978-617-7278-82-4

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал з лінійної алгебри, аналітичної геометрії та векторної алгебри, а також зразки розв'язання типових задач, тестові питання та задачі, індивідуальні варіанти типових розрахунків.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-617-7278-82-4

Вступ

Даний навчальний посібник відповідає програмі курсу вищої математики, що викладається на технічних факультетах Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Він призначений як для аудиторної, так і для і самостійної роботи студентів очної та заочної форм навчання.

Посібник входить до складу збірника під назвою «Стислий курс вищої математики» та може бути застосований на декількох факультетах університету, у першу чергу, на енергомашинобудівному, фізико-технічному, інженерно-фізичному факультетах та на факультеті інтегрованих технологій хімічної техніки. Він включає навчальний матеріал першого модуля першого семестру та складається з таких тем: елементи лінійної алгебри; елементи векторного аналізу; аналітична геометрія на площині та у просторі. Кожна глава посібника містить теоретичний матеріал однієї з тем, який складається з означень та їх пояснень, формулювань і доказів теорем, що проілюстровані достатньою кількістю наочних прикладів. До кожної теми додається по тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань та зразок виконання одного варіанта з докладними поясненнями; варіант завдання містить достатню для засвоєння теми кількість задач. Після кожної теми подано перелік теоретичних питань, що виносяться на колоквіум і іспит, набори тестових завдань з теми для проведення модульного контролю і поточної перевірки знань, варіанти контрольних робіт. Підручник також містить задачі домашньої роботи. Наприкінці посібника наведено стислий довідник основних формул, які потрібні для розв'язання задач з поданих тем. На наш погляд, такий довідник дозволить студентам сконцентрувати увагу під час розв'язання задач на головних моментах викладеного матеріалу та допоможе його систематизувати. На таку сконцентровану форму подання навчального матеріалу авторів навів досвід викладання дисципліни за останні десять років в умовах модульної системи оцінювання знань.

Завдяки зазначеному вище структурному наповненню матеріалами навчальний посібник може бути використаний як викладачами, так і студентами під час аудиторних занять, для підготовки до контрольних робіт, колоквіумів, іспитів, при виконанні обов'язкових та домашніх завдань. Також посібник дає можливість студентам самостійно перевіряти рівень своїх знань з кожної теми.

Навчальний посібник був написаний на основі багаторічного досвіду викладання курсу вищої математики на кафедрі «Прикладна математика» НТУ ХПІ під керівництвом доктора технічних наук, професора Курпи Л. В., якій автори висловлюють велику подяку та пошану за цінні зауваження і поради.

Глава 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. МАТРИЦІ

1.1. Основні поняття

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з m рядків однакової довжини та n стовпців (також однакової довжини). Позначається як $A_{m \times n}$. Матриця записується у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або, скорочено, як $A = (a_{ij})$, де $i = \overline{1,m}$ (тобто $i = 1,2,3,\dots,m$) – номер рядка; $j = \overline{1,n}$ (тобто $j = 1,2,3,\dots,n$) – номер стовпця. Рядки та стовпці матриці називаються її рядами. Числа a_{ij}, що складають матрицю, називаються її елементами. Елементи, що стоять на діагоналі, яка прямує з верхнього лівого кута до правого нижнього, утворюють головну діагональ матриці.

Дві матриці називаються рівними, якщо є рівними між собою всі їхні відповідні елементи, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається квадратною. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею n-го порядку.

Квадратна матриця, в якій всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною.***

Діагональна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** і позначається літерою E.

Приклад 1.1. Одинична матриця 3-го порядку має вигляд

$$E_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі елементи, що розташовані з одного боку головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою. Вона позначається літерою O та має вигляд

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

У матричному численні матриці O та E відіграють ролі чисел 0 та 1 в арифметиці.

Матриця, що складається з одного стовпця або з одного рядка, називається вектором (або вектор-стовпець, або вектор-рядок відповідно).

Вони мають вигляд $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix}$.

Матриця розміру 1×1, що складається з одного числа, ототожнюється з цим числом, тобто $(5)_{1\times1}=5$.

Матриця, що одержана з даної шляхом заміни кожного її рядка на стовпець з тим же номером, називається матрицею транспонованою до даної. Позначається як A^T.

Так, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; якщо $A=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Транспонована матриця має таку властивість: $\left(A^T\right)^T=A$.

1.2. Дії з матрицями

Додавання

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць, що мають однаковий розмір.

Сумою матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ та $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$ така, що $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$. Записують це так: $C=A+B.$

Приклад 1.2. Нехай $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C=A+B$.

Розв'язання.

$$C=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Різниця матриць визначається аналогічно, тобто: якщо $C=A-B$, то $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$.

Приклад 1.3. Нехай $A=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C=A-B$.

Розв'язання.

$$C=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -6 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множення на число

Добутком матриці $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на постійне число k називається матриця $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ така, що $b_{ij}=k\cdot a_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$. Записують це так: $B=k\cdot A$.

Приклад 1.4. Нехай $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $k=3$. Знайти матрицю $B=k\cdot A$.

Розв'язання.

$$B=\begin{pmatrix} 15 & -6 & -9 \\ -3 & 18 & 12 \end{pmatrix}.$$

Матриця $-A=(-1)\cdot A$ називається протилежною до матриці A.

Різницю матриць $A-B$ тоді можна ввести так: $A-B=A+(-B)$.

Операції додавання матриць та множення матриці на число мають такі властивості:

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3) $A+0=A$;
5) $1\cdot A=A$;
6) $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$;
7) $(k+m)\cdot A=k\cdot A+m\cdot A$;

4) $A+(-A)=0$; 8) $k\cdot(mA)=(km)\cdot A$,

де A, B, C − матриці; k, m − числа.

Добуток матриць

Операція множення матриці на матрицю вводиться тільки для тих матриць, в яких кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p}=(b_{jk})$ називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ik})$ така, що $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\dots+a_{in}\cdot b_{nk}$, де $i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}$,

тобто елемент матриці-добутку C, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-ого стовпця матриці B. Записують це так: $C=A\cdot B$.

Приклад 1.5. Нехай $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B_{3\times 2}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

Знайти добуток цих матриць $C=A\cdot B$.

Розв'язання.

Розмір матриці C буде 2×2;

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.6. Нехай $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти добутки цих матриць, якщо вони існують.

Розв’язання.

Добуток $A\cdot B$ цих матриць не існує, тому що кількість стовпців матриці А дорівнює 3 і вона не збігається з кількістю рядків матриці B, яка дорівнює 2. При цьому добуток $B \cdot A$ існує та може бути обчислений таким чином:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot 4 & 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 2+1\cdot 3 \\ 1\cdot 3+3\cdot 4 & 1\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 2+3\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 2 & 7 \\ 15 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A та B є квадратними однакового розміру, то їхні добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$ завжди існують. Але в загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$. У разі, якщо $A \cdot B = B \cdot A$, матриці A та B називаються ***комутативними***.

Легко довести, що $A \cdot E = E \cdot A = A$, де A − квадратна матриця, E − одинична матриця того ж розміру.

Операція множення матриць має такі властивості

1) $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$;
2) $A \cdot (B + C) = AC + BC$;
3) $(A + B)C = A \cdot C + B \cdot C$;
4) $k \cdot (A \cdot B) = (kA) \cdot B$,

де A, B, C − матриці, k − число.

Для операції транспонування є правильними такі властивості:

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Елементарні перетворення матриць

Елементарними перетвореннями матриць є:

- переставлення місцями двох паралельних рядків матриці;
- множення всіх елементів ряда матриці на число, що не дорівнює нулю;
- додавання до всіх елементів ряда матриці відповідних елементів паралельного ряда, помножених на те саме число.

Дві матриці A і B називаються еквівалентними, якщо одна з них може бути одержана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується як $A \sim B$. За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до матриці, у якої напочатку головної діагоналі стоять поспіль кілька одиниць, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Таку матрицю називають канонічною, наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.7. Звести до канонічного вигляду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Позначимо рядки матриці як вектор-рядки $e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, а стовпці як вектор-стовпці $t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді речення «множимо елементи першого рядка на 1 та додаємо їх до відповідних елементів другого рядка» можна записати так: $e_1 \cdot 1 + e_2 = e_2$.

Виконуємо елементарні перетворення:

1) міняємо місцями перший та третій стовпці;

2) $e_1 \cdot 1 + e_2 = e_2$; $e_1 \cdot (-5) + e_3 = e_3$;

3) $e_2 \cdot 3 + e_3 = e_3$;

4)ділимо всі елементи третього стовпця на 2 (це записується так: $t_1 \cdot {}^1\!/_2 = t_1$);

5) міняємо місцями другий та третій стовпці;

6) $t_1 \cdot (-1) + t_2 = t_2$; $t_1 \cdot (-3) + t_3 = t_3$; $t_1 \cdot (-2) + t_4 = t_4$;

7) $t_2 \cdot (-5) + t_3 = t_3$; $t_2 \cdot (-3) + t_4 = t_4$.

Одержана матриця є канонічною.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 2. ВИЗНАЧНИКИ

2.1. Основні поняття

Квадратній матриці A можна поставити у відповідність число $\det A$ (або $|A|$, або Δ), що називається її визначником. Для матриць першого, другого та третього порядків це число обчислюється таким чином:

1) $n=1$. $A=(a_{11})$; $\det A = a_{11}$.

2) $n=2$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$.

3) $n=3$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} -$$
$$-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Приклад 2.1. Знайти визначники матриць

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ та } B=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 5\cdot(-4) = 6-(-20) = 26;$$

$$\det B = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

Приклад 2.2. Знайти визначник матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 8\cdot 3 - 7\cdot 5\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 9 - 8\cdot 6\cdot 1 =$$

$= 45 + 84 + 96 – 105 – 72 – 48 = 225 – 225 = 0.$

Визначник матриці A також називають її детермінантом. Правило обчислення детермінанта для матриці n-го порядку є достатньо складним для сприйняття та використання. Однак існують методи, що дозволяють реалізувати обчислення визначників вищих порядків на основі визначників низьких порядків, при цьому використовуються властивості визначників.

2.2. Властивості визначників

Сформулюємо основні властивості визначників, що притаманні визначникам всіх порядків. Деякі з них доведемо на визначниках третього порядку.

***Властивість* 1.** («Рівноправність рядків та стовпців»). Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями, та навпаки. Тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доведення.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - \\ - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - \\ - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \quad .$$

Як бачимо, одержані алгебраїчні суми рівні між собою.

Властивість 1 можна сформулювати і так. При транспонуванні матриці значення її визначника не змінюється.

У подальшому рядки та стовпці будемо називати рядами визначника.

***Властивість* 2.** При перестановці двох паралельних рядів визначник змінює знак на протилежний.

***Властивість* 3.** Визначник, що має два однакових ряди, дорівнює нулю.

Ця властивість випливає з властивості 2, тому що, якщо переставити місцями два однакових ряди, визначник залишиться незмінним, але при цьому його знак повинен змінитися на протилежний, а це можливо тільки тоді, коли визначник дорівнює нулю.

***Властивість* 4.** Спільний множник елементів будь-якого ряда визначника можна винести за знак визначника.

Доведення.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot ka_{22} \cdot a_{33} +$$

$$+ ka_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot ka_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot ka_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot ka_{12} \cdot a_{33} - ka_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} =$$

$$= k \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - \\ -a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідки з властивостей 3 та 4:

1. Якщо всі елементи будь-якого ряда визначника дорівнюють нулю, то цей визначник дорівнює нулю.

2. Якщо всі елементи будь-якого ряда визначника пропорційні відповідним елементам паралельного ряда, то такий визначник дорівнює нулю.

Дійсно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

***Властивість* 5.** Якщо елементи будь-якого ряда визначника є сумами двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних визначників.

Тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Доведення цієї властивості може бути проведене аналогічно попереднім доведенням.

***Властивість* 6.** («Елементарні перетворення визначника»). Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряда додати відповідні елементи паралельного ряда, помножені на будь-яке число.

Доведення.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot 0 = \Delta .$$

Подальші властивості визначників пов’язані з поняттями мінора та алгебраїчного доповнення.

Мінором елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, який можна отримати з даного шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця. Такий мінор називається додатковим мінором елемента a_{ij}. Позначається як M_{ij}.

Так, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається його мінор, помножений на $(-1)^{i+j}$. Позначається як A_{ij}. Тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

***Властивість** 7.* («Розкладення визначника за елементами деякого ряда»). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого ряду на їхні алгебраїчні доповнення.

Доведення.

Доведемо цю властивість на прикладі визначника третього порядку. Розкладемо визначник за елементами другого рядка. Доведемо, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

Дійсно:

$$a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1) \cdot (a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}) + a_{22} \cdot (a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13}) +$$
$$+ a_{23} \cdot (-1) \cdot (a_{12} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{13}) =$$

$$= -a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{22} \cdot a_{11} \cdot a_{33} - a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{13} -$$
$$- a_{23} \cdot a_{12} \cdot a_{32} + a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{13} = \Delta.$$

Наслідок. Сума добутків елементів деякого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого ряду дорівнює нулю.

Властивість 7 дає змогу обчислення визначників вищих порядків.

Приклад 2.3. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Розкладаємо визначник за елементами четвертого рядка, тому що він містить 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-96) + 0 - 2 \cdot 32 + 1 \cdot 0 = (-96) - 64 = -160.$$

§ 3. НЕВИРОДЖЕНІ МАТРИЦІ

3.1. Основні поняття

Нехай $A-$ квадратна матриця n-го порядку:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається ***невиродженою***, якщо її визначник не дорівнює нулю: $\Delta=\det A\neq 0$. Якщо її визначник дорівнює нулю, то матриця A називається ***виродженою*** : $\Delta=\det A=0$.

Долученою матрицею матриці A називається матриця

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij}-$ алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} даної матриці A.

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до матриці A за умови, що

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E, \qquad (3.1)$$

де E − одинична матриця того ж порядку, що і матриця A. Матриця A^{-1} має ті самі розміри, що і A.

3.2. Обернена матриця

Теорема 3.1. Будь-яка невироджена матриця має обернену.

Доведення.

Проведемо доведення для випадку матриці 3-го порядку. Нехай

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ та } \det A\neq 0.$$

Запишемо союзну матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

Знайдемо добуток матриць A та A^*:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

тобто

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E. \tag{3.2}$$

При обчисленні $A \cdot A^*$ була використана властивість 7 визначників та висновок з неї. Аналогічно доведемо, що

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E. \tag{3.3}$$

Рівності (3.2) та (3.3) перепишемо у вигляді

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{та} \quad A^* \cdot \frac{A}{\det A} = E.$$

Порівнюючи одержані рівності з визначенням оберненої матриці (3.1), робимо висновок, що

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \text{ тобто } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Властивості оберненої матриці:

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

2) $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$;

3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

4) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Приклад 3.1. Знайти A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Знаходимо Δ: $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 8 - 5 = 3 \neq 0$.

Знаходимо елементи A^*: $A_{11} = 4, A_{12} = -5, A_{21} = -1, A_{22} = 2$, тому $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Знаходимо A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Перевіряємо:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} - \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{20}{3} - \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} + \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Приклад 3.2. Знайти A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Знаходимо Δ:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 100 - 84 - 105 + 16 + 90 = 206 - 207 = -1 \neq 0.$$

Знаходимо елементи A^*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4) = (-9 + 8) = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 \cdot (-3) - 5 \cdot 4) = (-1) \cdot (-18 - 20) = 38;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 \cdot (-2) - 5 \cdot 3) = (-12 - 15) = -27;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & 7\\ -2 & -3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(5\cdot(-3)-(-2)\cdot 7)=(-1)\cdot(-15+14)=1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(2\cdot(-3)-5\cdot 7)=(-6-35)=-41;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(2\cdot(-2)-5\cdot 5)=(-1)\cdot(-4-25)=29;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(5\cdot 4-3\cdot 7)=(20-21)=-1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}=(-1)\cdot(2\cdot 4-6\cdot 7)=(-1)\cdot(8-42)=34;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=1\cdot(2\cdot 3-6\cdot 5)=(6-30)=-24.$$

Одержуємо : $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$

3.3. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m\times n$:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній k рядків та k стовпців $(k\le\min(m;n))$. З елементів, що стоять на перетині цих рядків та стовпців, утворюється визначник k-го порядку. Усі визначники, одержані в такий спосіб, називаються мінорами цієї матриці. У матриці A пунктиром виділений мінор другого порядку.

Рангом матриці називається число, що дорівнює найбільшому порядку відмінного від нуля мінора цієї матриці. Це означає, що якщо ранг матриці дорівнює числу l, то ця матриця має принаймні один мінор

l-го порядку, який не дорівнює нулю, при цьому всі мінори більш високих порядків дорівнюють нулю. Позначається як $r = l, r(A) = l$ або $\mathrm{rangA} = l$.

Зрозуміло, що $0 \le \mathrm{rangA} \le \min(m;n)$, де $\min(m;n)$ − найменше з чисел m та n.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається ***базисним мінором***.

Приклад 3.3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Зрозуміло, що $\mathrm{rangA} \le 3$. Ця матриця містить 4 мінори третього порядку, обчислимо їх:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Усі мінори третього порядку дорівнюють нулю. Будемо обчислювати мінори другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \ne 0 \ .$$

Обчислювати інші мінори другого порядку не потрібно, достатньо того, що один з мінорів другого порядку не дорівнює нулю. Робимо висновок, що ранг матриці $\mathrm{rangA} = 2$. Базисний мінор стоїть на перетині 1 і 2 рядків та 1 і 2 стовпців.

Властивості рангу матриці:

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

2. Якщо викреслити з матриці нульовий ряд, то її ранг не змінюється.

3. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетворюваннях матриці.

Ранг канонічної матриці дорівнює кількості одиниць на головній діагоналі. На цьому факті базується один із способів обчислення рангу матриці – метод елементарних перетворень.

Приклад 3.4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Зведемо матрицю до канонічного вигляду. Позначимо рядки матриці як вектор-рядки e_i, а стовпці як вектор-стовпці t_j, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_1+e_2=e_2 \\ e_1\cdot(-5)+e_3=e_3 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ -15 & -6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} e_3\cdot\frac{1}{3}=e_3 \\ \text{ì ³íÿºìî ì³ñöÿìè } t_1 \text{ ³ } t_3 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_1+e_2\cdot(-1)=e_1 \\ e_2+e_3=e_3 \\ t_2\cdot\frac{1}{2}=t_2 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} t_1\cdot 2+t_2\cdot(-5)+t_3=t_3 \\ t_1+t_2\cdot(-3)+t_4=t_4 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці $\mathrm{rangA}=2$.

Вираз $\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\alpha_3\cdot e_3+\cdots\alpha_n\cdot e_n$ називається лінійною комбінацією елементів $e_1,e_2,\ldots,e_n$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_n$ − дійсні числа, що називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

Нехай $e_1,e_2,\ldots,e_n$ − рядки матриці A.

Рядки матриці називаються ***лінійно незалежними***, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю, тобто $\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\alpha_3\cdot e_3+\cdots\alpha_n\cdot e_n=0$, тільки за умови, що всі її коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто $\alpha_i=0, i=\overline{1,n}$. Рядки називаються ***лінійно залежними***, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю за умови, що принаймні один з коефіцієнтів α_i відрізняється від нуля. Лінійна незалежність стовпців визначається аналогічно.

Теорема про базисний мінор. Якщо ранг матриці дорівнює числу r, то в цій матриці можна знайти r лінійно незалежних рядків та r лінійно незалежних стовпців, які називаються базисними. Всі інші рядки та стовпці можуть бути представлені у вигляді лінійної комбінації базисних.

Теорема про необхідну та достатню умови рівності визначника нулю. Для того, щоб визначник дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб його ряди були лінійно залежні.

§ 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Основні поняття

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь, що містить m рівнянь з n невідомими, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ називаються коефіцієнтами системи, числа b_i − вільними членами, x_i − невідомими .

Розв'язком системи називається сукупність n чисел $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, які при підстановці в систему перетворюють всі її рівняння на тотожності.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь зручно записувати в матричній формі:

$$A \cdot X = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ − матриця коефіцієнтів системи (ще вона називається основною матрицею);

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – вектор-стовпець вільних членів;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$$ – вектор-стовпець невідомих.

Розширеною матрицею системи називається матриця $\overline{A}$, отримана з матриці A додаванням до неї стовпця вільних членів:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Будь-який розв’язок системи можна записати у вигляді вектора-стовпця

$$X=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв’язок, та ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв’язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв’язок, та ***невизначеною,*** якщо вона має більше одного розв’язку. В останньому випадку кожний розв’язок називається частинним. Сукупність всіх частинних розв’язків називається ***загальним розв'язком*** системи.

Дві системи називаються ***еквівалентними*** (або рівносильними), якщо вони мають однакові загальні розв’язки. Іншими словами, якщо системи є еквівалентними, то кожний розв’язок однієї з них є розв’язком іншої, та навпаки. Еквівалентні системи виходять при елементарних перетвореннях системи за умови, що перетворення виконуються тільки над рядками матриці.

4.2. Необхідна та достатня умови сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера − Капеллі

Нехай задана довільна система m рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Відповідь на питання, чи є ця система сумісною, дає теорема Кронекера − Капеллі, яку наводимо без доведення.

Теорема. Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу матриці коефіцієнтів, (тобто $\mathrm{rang A} = \mathrm{rang}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{r}$). Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система має єдиний Розв’язання. Якщо ранг сумісної системи менший від числа невідомих, то система має нескінченну безліч розв’язків.

4.3. Розв’язання невироджених систем лінійних алгебричних рівнянь. Правило Крамера. Розв’язання за допомогою оберненої матриці

Нехай дана система n рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

в матричній формі $A \cdot X = B$. Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

називається головним визначником системи. Якщо головний визначник системи є відмінним від нуля, то система називається невиродженою. Очевидно, що для невиродженої системи $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} \overline{A} = n$, тобто вона має єдиний розв'язок.

Правило Крамера. Нехай система (4.1) невироджена. Тоді її розв'язок можна знайти за правилом Крамера (за формулами Крамера):

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \mathrm{j} = \overline{1,n},$$

де Δ_j − визначник, отриманий з головного визначника системи Δ заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів.

Приклад 4.1. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_{31}}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3.$$

Розв'язання системи за допомогою оберненої матриці

В матричній формі система (4.1) має вигляд $A \cdot X = B$. Нехай система невироджена, тоді її основна матриця A має обернену матрицю A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини матричного рівняння на A^{-1}. Одержимо $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$;

Враховуючи, що $\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{X}$, знаходимо розв'язок системи: $X = A^{-1} \cdot B$.

Приклад 4.2. Розв'язати систему рівнянь за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Тут $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Оскільки розв'язок системи визначається за формулою $X = A^{-1} \cdot B$, знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до основної матриці A. $\det A = -25 \neq 0$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{-17}{25} & \frac{10}{25} \\ \frac{-7}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{5}{25} \\ \frac{-5}{25} & \frac{10}{25} & \frac{0}{25} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{-17}{25} & \frac{10}{25} \\ \frac{-7}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{5}{25} \\ \frac{-5}{25} & \frac{10}{25} & \frac{0}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} \cdot 1 - \frac{17}{25} \cdot 3 + \frac{10}{25} \cdot 2 \\ \frac{-7}{25} \cdot 1 - \frac{1}{25} \cdot 3 + \frac{5}{25} \cdot 2 \\ \frac{-5}{25} \cdot 1 + \frac{10}{25} \cdot 3 + \frac{0}{25} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

4.4. Розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь методом Гаусса

Одним з найбільш універсальних та ефективних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гаусса, який полягає в послідовному виключенні невідомих. Нехай задана система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

1. Виписують розширену матрицю системи і відокремлюють стопець вільних членів вертикальною рискою:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо $a_{11}\neq 0$, то його вибирають за головній елемент і за допомогою елементарних перетворень, що виконуються тільки над рядками матриці, виключають невідому a_{11} з усіх рівнянь, крім першого; якщо $a_{11}=0$, то міняють місцями рядки матриці так, щоб на перетині першого рядка та першого стовпця стояв ненульовий елемент, і цей елемент беруть за головний. Рядок, в якому вибраний головний елемент, називається головним. Внаслідок цих перетворень отримують матрицю системи, що є рівносильною початковій системі. Слід зауважити, що найбільш зручно проводити перетворення, коли головний елемент дорівнює одиниці.

2. На другому кроці одержаний перший рядок залишають незмінним. Аналогічним чином вибирають головний елемент, що стоїть на перетині другого рядка та другого стовпця, та виключають елемент a_{22} з решти рівнянь.

3. Вказаним способом частину матриці, що стоїть ліворуч вертикальної риски, зводять до трикутного або трапецеїдального вигляду. Якщо під час перетворень матриці утворюється рядок, що містить тільки нулі, то його викреслюють. Якщо утворюється рядок, в якому ліворуч вертикальної риски стоять самі нулі, а праворуч – число, відмінне від нуля, то це означає, що система несумісна. Зведення матриці до трикутного або трапецеїдального вигляду становить прямий хід методу Гаусса.

4. Застосовують зворотний хід методу Гаусса, який полягає у такому.

Якщо ліва частина матриці звелася до трикутного вигляду, то $\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}\overline{A}=n$, тобто система має єдиний розв’язок. Записують систему рівнянь, відповідну до одержаної матриці. Невідомі визначають послідовно, починаючи з останнього. Тобто з n-го рівняння знаходять x_n, з $n-1$-го – x_{n-1} і так далі.

Якщо ліва частина матриці звелася до трапецеїдального вигляду, то $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\overline{A} < n$, тобто система має нескінченну безліч рішень. Тоді вибирають базисний мінор і тим самим фіксують базисні невідомі (вони відповідають тим стовпцям, що увійшли в базисний мінор), решту невідомих називають вільними. Записують систему рівнянь, відповідну одержаній матриці, а потім перетворюють її таким чином: доданки, що містять базисні невідомі, залишають у лівих частинах рівнянь, а доданки, що містять вільні невідомі, переносять в праві частини. Далі за описаною раніш схемою знаходять базисні невідомі або як лінійну комбінацію вільних, або як числа. Одержані рівности є загальним розв'язком системи.

Надаючи вільним невідомим будь-яких числових значень, знаходять відповідні значення базисних невідомих, одержують частинні розв'язки системи.

Приклад 4.3. Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_1 \cdot (-2) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-3) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-7) + e_4 = e_4 \\ \ \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_2 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_2 \cdot (-2) + e_4 = e_4 \\ \ \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right).$$

За базисний беремо той мінор, що стоїть на перетині першого та другого рядків з першим та другим стовпцями, тоді невідомі x_1 та x_2 будуть базисними, а x_3 та x_4 − вільними. Записуємо систему, що відповідає одержаній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + -5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3, \end{cases}$$

тоді $x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3$, $x_1 = -8x_3 + 5x_4 - 1$.

Загальним розв'язком системи є $X = \begin{pmatrix} -8x_3 + 5x_4 - 1 \\ -13x_3 + 5x_4 - 3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

Одержимо будь-який частинний розв'язок; нехай $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, тоді

$$X = \begin{pmatrix} -8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 1 \\ -13 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.5. Розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь методом Жордана − Гаусса

Цей метод є модифікацією методу Гаусса. Від класичного методу він відрізняється тим, що під час перетворень на кожному кроці головний елемент виключається зо всіх рівнянь, крім головного. Головний елемент не обов'язково повинен стояти на головній діагоналі. На кожному кроці, якщо головний елемент не дорівнював одиниці, всі елементи головного рядка діляться на головний елемент.

Приклад 4.4. Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Жордана − Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_1 \cdot (-1) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-3) + e_4 = e_4 \\ \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left\| \begin{array}{l} e_3 \cdot (-2) + e_1 = e_1 \\ e_3 \cdot 3 + e_2 = e_2 \\ e_3 \cdot 2 + e_4 = e_4 \\ \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left\| e_2 \cdot \left(-\frac{1}{14}\right) = e_2 \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim$$

$$\left\| \begin{array}{l} e_2 \cdot (-11) + e_1 = e_1 \\ e_2 \cdot 4 + e_3 = e_3 \\ e_2 \cdot 14 + e_4 = e_4 \\ \end{array} \right\| \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$, система має єдиний розв'язок.

Записуємо систему

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Тобто розв'язком є $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.6. Однорідні системи лінійних алгебричних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що для неї $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\overline{A}$; вона завжди має нульовий (тривіальний) розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

За яких умов однорідна система має і ненульові розв'язки?

Теорема. Для того щоб однорідна система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці був менший від числа невідомих.

Спираючись на цю теорему, можна зробити такий висновок: будь-яка однорідна система, в якій кількість рівнянь менша від числа невідомих, має нескінченну безліч розв'язків, серед яких є і ненульові.

Теорема. Для того щоб однорідна система n рівнянь з n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю.

Довести цей факт дуже просто. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний, нульовий розв'язок. Якщо $\Delta = 0$, то ранг основної матриці системи менший від числа невідомих $\mathrm{rang}A < n$, а отже, система має нескінченну безліч розв'язків, серед яких є і ненульові.

Приклад 4.5. Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Жордана − Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

При розв'язанні однорідних систем нульовий стовпець вільних членів в розширеній матриці не записують:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_1 \cdot (-2) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-3) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-2) + e_4 = e_4 \\ \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} e_4 \cdot (-2) + e_1 = e_1 \\ e_4 \cdot 5 + e_2 = e_2 \\ e_4 \cdot 4 + e_3 = e_3 \\ \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_4 \cdot (-2) + e_1 = e_1 \\ e_4 \cdot 5 + e_2 = e_2 \\ e_4 \cdot 4 + e_3 = e_3 \\ \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} e_2 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_4 \cdot (-1) = e_4 \\ \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left\| \begin{matrix} e_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{8}\right) = e_2 \\ \text{міняємо місцями } e_2 \text{ і } e_4 \\ \text{викреслюємо } e_3 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_3 \cdot (-1) + e_2 = e_2 \\ e_4 \cdot (-3) + e_1 = e_1 \\ \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{pmatrix},$$

Ранг матриці дорівнює 3. Базисний мінор утворюють стовпці 1, 2 і 3, невідомі x_1, x_2 та x_3 – базисні, x_4 та x_5 – вільні. Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{7}{8}x_5 = 0, \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 = 0, \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 = 0. \end{cases}$$

Переносимо доданки, що містять вільні невідомі, в праві частини рівнянь та одержуємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5, \\ x_3 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5. \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 \\ -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Приклад виконання обов'язкового домашнього завдання

Виконаємо варіант № 31 обов'язкового домашнього завдання.

Завдання 1. Знайти $C = 2(A - B) \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Знаходимо матрицю $A - B$:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-2 & -2-(-3) & 4-1 \\ 6-6 & -3-2 & 5-4 \\ -1-(-4) & 0-(-5) & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю $(A - B) \cdot A$:

$$(A - B) \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 + 1\cdot 6 + 3\cdot(-1) & (-1)\cdot(-2) + 1\cdot(-3) + 3\cdot 0 & (-1)\cdot 4 + 1\cdot 5 + 3\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + (-5)\cdot 6 + 1\cdot(-1) & 0\cdot(-2) + (-5)\cdot(-3) + 1\cdot 0 & 0\cdot 4 + (-5)\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 6 + 1\cdot(-1) & 3\cdot(-2) + 5\cdot(-3) + 1\cdot 0 & 3\cdot 4 + 5\cdot 5 + 1\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -31 & 15 & -23 \\ 32 & -21 & 39 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю $C = 2(A - B) \cdot A$:

$$C=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 14 \\ -62 & 30 & -46 \\ 64 & -42 & 78 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 & 6 \\ 3 & -5 & 10 & 10 \\ 2 & -2 & 10 & 15 \\ 2 & -7 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Винесемо спільний множник 3 елементів першого рядка, а потім зробимо перетворення рядків визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 & 6 \\ 3 & -5 & 10 & 10 \\ 2 & -2 & 10 & 15 \\ 2 & -7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 10 \\ 2 & -2 & 10 & 15 \\ 2 & -7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} e_1\cdot(-3)+e_2=e_2 \\ e_1\cdot(-2)+e_3=e_3 \\ e_1\cdot(-2)+e_4=e_4 \end{matrix} \right\| =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \textit{розкладаємо визначник за} \\ \textit{елементами першого} \\ \textit{стовпця} \end{matrix} \right\| = 3\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| e_1\cdot(-4)+e_2=e_2 \right\| =$$

$$=3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} \textit{розкладаємо визначник} \\ \textit{за елементами другого} \\ \textit{рядка} \end{matrix} \right\| = 3\cdot 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(10-15) = 15.$$

Треба зауважити, що визначник можна було б обчислити і без попередніх перетворень, одразу використовуючи теорему про розкладення визначника за елементами будь-якого рядка, як це було зроблено в прикладі 2.3.

Завдання 3. Розв’язати систему рівнянь трьома способами:

а) за допомогою оберненої матриці;

б) за допомогою формул Крамера;

в) методом Жордана − Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язання.

а) тут $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

За допомогою оберненої матриці розв’язок системи обчислюється як $X = A^{-1} \cdot B$. Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до матриці коефіцієнтів A, за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Обчислимо головний визначник системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) \cdot 2 -$$

$$- 3 \cdot (-1) \cdot 4 = 20 + 29 = 49 \neq 0.$$

Матриця не є виродженою, тому вона має обернену. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot (-3)) = 13;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 \cdot 4 - 1 \cdot (-3)) = -15;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(-1)\cdot((-1)\cdot 4-1\cdot 3)=7;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(2\cdot 4-1\cdot 1)=7;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot\left(2\cdot 3-1\cdot(-1)\right)=-7;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot((-1)\cdot(-3)-1\cdot 1)=2;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(2\cdot(-3)-3\cdot 1)=9;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(2\cdot 1-3\cdot(-1))=5.$$

Записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}13 & 7 & 2\\ -15 & 7 & 9\\ 8 & -7 & 5\end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв’язок системи:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix}13 & 7 & 2\\ -15 & 7 & 9\\ 8 & -7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix}13\cdot(-3)+7\cdot 5+2\cdot 2\\ (-15)\cdot(-3)+7\cdot 5+9\cdot 2\\ 8\cdot(-3)+(-7)\cdot 5+5\cdot 2\end{pmatrix}==\frac{1}{49}\begin{pmatrix}0\\ 98\\ -49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

б) головний визначник системи вже знайдений $\det A=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=49$. Він не дорівнює нулю, а отже, система має єдиний розв’язок. Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=(-12+6+15)-(2+27-20)=0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & 5 & -3\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=(40+9+6)-(5-36-12)=98,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=(4-5-27)-(-3+30-6)=-49.$$

Знаходимо розв'язок системи за формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{0}{49}=0;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{98}{49}=2;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-49}{49}=-1.$$

в) запишемо розширену матрицю системи та проведемо її перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -3 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{array}\right)\sim\left\|\begin{array}{l}e_1+e_2=e_2\\ e_1\cdot 3+e_3=e_3\\ \end{array}\right\|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & -3\\ 5 & 0 & -2 & 2\\ 7 & 0 & 7 & -7\end{array}\right)\sim\left\|\begin{array}{l}e_3:7=e_3\\ e_1\cdot(-1)=e_1\\ \end{array}\right\|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & -1 & 3\\ 5 & 0 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\sim\left\|\begin{array}{l}e_3\cdot 2+e_1=e_1\\ e_3\cdot(-5)+e_2=e_2\\ \end{array}\right\|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -7 & 7\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\sim\left\|\begin{array}{l}e_2:(-7)=e_2\\ \\ \end{array}\right\|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\sim\left\|\begin{array}{l}e_2:(-1)+e_1=e_1\\ e_2:(-1)+e_3=e_3\\ \end{array}\right\|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці:

$$\begin{cases}x_2=2,\\ x_3=-1,\\ x_1=0,\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}x_1=0,\\ x_2=2,\\ x_3=-1.\end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати систему рівнянь або встановити її несумісність:

$$\begin{cases}12x_1+14x_2-15x_3+23x_4+27x_5=5,\\ 16x_1+18x_2-22x_3+29x_4+37x_5=8,\\ 18x_1+20x_2-21x_3+32x_4+41x_5=9,\\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5=4.\end{cases}$$

Розв’язання.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 18 & 20 & -21 & 32 & 41 & 9 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right) \sim \left\|\begin{array}{l} e_4\cdot(-1)+e_1=e_1 \\ e_4\cdot(-1)+e_2=e_2 \\ e_4\cdot(-1)+e_3=e_3 \\ \end{array}\right\| \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & -6 & 9 & 14 & 4 \\ 8 & 8 & -5 & 12 & 18 & 5 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{l} e_1\cdot(-3)+e_2=e_2 \\ e_1\cdot(-4)+e_3=e_3 \\ e_1\cdot(-5)+e_4=e_4 \\ \end{array}\right\| \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left\|\begin{array}{l} e_2\cdot(-1)+e_3=e_3 \\ e_2\cdot(-2)+e_4=e_4 \\ \\ \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left\|\begin{array}{l} e_3\cdot(-1)+e_1=e_1 \\ e_2 :\cdot 2=e_2 \\ \\ \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left\|\begin{array}{l} e_2+e_3=e_3 \\ e_2\cdot(-5)+e_1=e_1 \\ \\ \end{array}\right\| \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & \frac{53}{2} & -2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{15}{2} & 5 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{l} e_1 : 2=e_1 \\ e_3 :\cdot 2=e_3 \\ \\ \end{array}\right\| \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{53}{4} & -1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{15}{4} & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{4} \end{array}\right).$$

Ранг матриці дорівнює 3. Базисний мінор утворюють стовпці 1, 2 та 5, невідомі x_1, x_2 та x_5 − базисні, x_3 та x_4 − вільні. Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці:

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{53}{4}x_3-x_4=\dfrac{3}{4}, \\ -\dfrac{9}{2}x_3+x_5=\dfrac{1}{2} \\ x_2-\dfrac{15}{4}x_3+\dfrac{5}{2}x_4=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Переносимо доданки, що містять вільні невідомі, в праві частини рівнянь та одержуємо загальний розв’язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{53}{4}x_3 + x_4, \\ x_2 = -\frac{5}{4} + \frac{15}{4}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \\ x_5 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}x_3. \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{53}{4}x_3 + x_4 \\ -\frac{5}{4} + \frac{15}{4}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{2} + \frac{9}{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 5. Розв’язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 30 & 15 \\ 6 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_1 \cdot (-3) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-2) + e_4 = e_4 \\ \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & -21 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & 21 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -11 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} \text{рядки } e_2 \text{ і } e_3 \text{ пропорціональні,} \\ \text{викреслюємо } e_2 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 21 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -11 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} e_3 \cdot 2 + e_1 = e_1 \\ e_3 \cdot 2 + e_2 = e_2 \\ \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -11 & -7 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_2 \cdot (-12) + e_1 = e_1 \\ e_2 \cdot (-11) + e_3 = e_3 \\ \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 48 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} e_1 \cdot (-1) = e_1 \\ e_2 \cdot (-1) = e_2 \\ e_3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = e_3 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -24 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_1 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює 3. Базисний мінор утворюють стовпці 2, 3 та 4, невідомі x_2, x_3 та x_4 – базисні, x_1 та x_5 – вільні. Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 - 52x_5 = 0, \\ x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 28x_5 = 0. \end{cases}$$

Переносимо доданки, що містять вільні невідомі, в праві частини рівнянь та одержуємо загальний розв'язок системи :

$$\begin{cases} x_3 = 3x_1 + 52x_5, \\ x_4 = -5x_5, \\ x_2 = -3x_1 - 28x_5, \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 - 28x_5 \\ 3x_1 + 52x_5 \\ -5x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Варіанти обов'язкового домашнього завдання

Завдання 1. Виконати дії з матрицями. Знайти матрицю C:

1. $C = 2(A+B)\cdot B,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $C = B(B-2A),\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

3. $C = (A-B)\cdot A,\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

4. $C = (3A-B)\cdot A,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

5. $C=(A+2B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

6. $C=(A+B)\cdot 2B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

7. $C=(3A+2B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

8. $C=(3A-2B)\cdot A,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

9. $C=A\cdot(B-4A),\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

10. $C=(A+B)\cdot 3B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

11. $C=(A-B)\cdot 2A,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$

12. $C=2(A+B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$

13. $C=(A-B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & -3 & 4 \\ -6 & 8 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \\ -8 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

14. $C=3A\cdot(A+B),\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

15. $C=(2A+B)\cdot A,\ A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -1\\ 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -6 & 4\\ 1 & 3 & -5\\ -2 & 1 & -4\end{pmatrix}.$

16. $C=(2A-B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\ -4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 9 & 3\\ -6 & 3 & 2\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix}.$

17. $C=(A+2B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & 6 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & -3 & 2\end{pmatrix}.$

18. $C=(A+2B)\cdot A,\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}.$

19. $C=(A-2B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix}4 & 9 & 3\\ -6 & 3 & 2\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}.$

20. $C=(3A+B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\ 1 & 2 & -5\\ -5 & -4 & 3\end{pmatrix}.$

21. $C=(A+3B)\cdot A,\ \ A=\begin{pmatrix}4 & 9 & 3\\ -6 & 3 & 2\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$

22. $C=(3A-B)\cdot B,\ \ A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}.$

23. $C=(3A-B)\cdot A,\ \ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}.$

24. $C=(2A+3B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$

25. $C=(2A+3B)\cdot A,\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}.$

26. $C=2B\cdot(3B-2A),\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}.$

27. $C=2(3A-B)\cdot A,\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 5 & -2\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -4 & 9 & -4\\ 8 & -2 & -5\end{pmatrix}.$

28. $C=(A-2B)\cdot B,\ A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -2\\ 1 & 6 & 1\\ 4 & 7 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 6 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}.$

29. $C=(2A+B)\cdot A,\ A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}.$

30. $C=A\cdot(3A+B),\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\\ -7 & 6 & -1\\ -4 & 8 & 2\end{pmatrix}.$

31. $C=2(A-B)\cdot A,\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 6 & -3 & 5\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 6 & 2 & 4\\ -4 & -5 & 1\end{pmatrix}.$

Завдання 2. Обчислити визначник.

1. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 9\\ 7 & 3 & 2 & 3\\ -3 & 2 & 0 & 5\\ 4 & 6 & 6 & 7\end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix}2 & 7 & 4 & 7\\ 3 & 5 & 7 & 8\\ 4 & -6 & -3 & 5\\ 2 & -4 & -6 & 5\end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix}3 & 11 & -5 & 9\\ 2 & 8 & -3 & 5\\ 3 & 13 & -1 & 14\\ 2 & 0 & -3 & 11\end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & -5\\ 4 & -5 & 10 & -7\\ 2 & 1 & 9 & 1\\ 6 & -2 & 20 & -6\end{vmatrix}.$

5. $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. $$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

8. $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

9. $$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

11. $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

12. $$\begin{vmatrix} 6 & 5 & -2 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & -9 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

13. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

14. $$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

15. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

16. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 & 3 \\ 7 & -4 & 2 & -15 \\ 1 & -2 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{vmatrix}.$$

17. $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

18. $$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

19. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 8 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 6 & 5 & -2 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & -9 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 5 & -6 & 5 \\ 6 & 8 & -8 & 5 \\ 3 & 5 & -8 & 7 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 8 & -18 \\ 7 & -4 & 2 & -15 \\ 1 & -2 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} -6 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 5 & 11 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 & 6 \\ 3 & -5 & 10 & 10 \\ 2 & -2 & 10 & 15 \\ 2 & -7 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Розв'язати систему рівнянь трьома способами:

а) за допомогою оберненої матриці;

б) за допомогою формул Крамера;

в) методом Жордана – Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -14. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 12. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

Завдання 4. Розв'язати систему рівнянь або встановити її несумісність.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28, \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43, \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58, \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25, \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40, \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65, \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x_1 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 21x_4 + 21x_5 = 15, \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43, \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58, \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 = 29, \\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 = 55, \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 = 115, \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 = 50. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 20x_1 + 46x_2 + 34x_3 + 89x_4 = 70, \\ 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25, \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40, \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ -2x_3 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 + = 20. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 20x_1 + 46x_2 + 34x_3 + 89x_4 = 70, \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40, \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65, \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -2x_2 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 27x_1 + 36x_2 - 48x_3 + 72x_4 = 84, \\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 = 55, \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 = 115, \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 = 50. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_4 = 12. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 45x_4 = 45, \\ 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25, \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40, \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1+6x_2+8x_3+3x_4=5, \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=7, \\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4=12, \\ 5x_1+7x_2+9x_3+2x_4=20. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=-2, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4=5, \\ 3x_1+6x_2+2x_3+x_4=1, \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-7x_2-x_3+2x_4=7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+x_2+7x_3-2x_4+6x_5=3, \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x_1+8x_2+8x_3-6x_4+4x_5=9, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 12x_1+14x_2-15x_3+23x_4+27x_5=5, \\ 16x_1+18x_2-22x_3+29x_4+37x_5=8, \\ 18x_1+20x_2-21x_3+32x_4+41x_5=9, \\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5=4. \end{cases}$

Завдання 5. Розв'язати однорідну систему рівнянь.

1. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3+9x_4+6x_5=0, \\ 9x_1+8x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+8x_2+7x_3+30x_4+15x_5=0, \\ 6x_1+6x_2+4x_3+7x_4+5x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+4x_3+5x_4+8x_5=0, \\ 4x_1+4x_2+8x_3+5x_4+4x_5=0, \\ x_1-9x_2-3x_3-5x_4-14x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+5x_4+6x_5=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0, \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+2x_4+7x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+7x_3+4x_4+5x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4-11x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+x_3+4x_4-13x_5=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_2+4x_3+21x_4+9x_5=0, \\ 9x_1+8x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+8x_2+7x_3+30x_4+15x_5=0, \\ 6x_1+6x_2+4x_3+7x_4+5x_5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_3+8x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+6x_4+3x_5=0, \\ 6x_1-2x_2+5x_3+20x_4+3x_5=0, \\ 9x_1-3x_2+4x_3+2x_4+15x_5=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+16x_2+7x_3+10x_4+22x_5=0, \\ 4x_1+4x_2+8x_3+5x_4+4x_5=0, \\ x_1-9x_2-3x_3-5x_4-14x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+5x_4+6x_5=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0, \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+2x_4+7x_5=0, \\ x_3+3x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4-11x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+x_3+4x_4-13x_5=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 8x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 16x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0, \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3+9x_4+6x_5=0, \\ 9x_1+8x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+8x_2+7x_3+30x_4+15x_5=0, \\ 6x_1+6x_2+4x_3+7x_4+5x_5=0. \end{cases}$

Глава 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. ВЕКТОРИ

1.1. Основні поняття

Величини, які повністю визначаються своїм чисельним значенням, називаються ***скалярними***. Прикладами скалярних величин є: площа, довжина, об'єм, температура, робота, маса.

Інші величини, наприклад сила, швидкість, прискорення, визначаються не лише своїм числовим значенням, але і напрямом. Такі величини називають ***векторними***. Векторна величина геометрично зображується за допомогою вектора.

Вектор – це направлений прямолінійний відрізок, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначається символом $\overline{AB}$ або $\overline{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у нього початок у точці B, а кінець у точці A) називається ***протилежним*** до вектора $\overline{AB}$. Вектор, протилежний до вектора $\overline{a}$, позначається як $-\overline{a}$.

Довжиною або ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ називається довжина відрізка, що позначається як $\left|\overline{AB}\right|$. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається ***нульовим вектором*** і позначається як $\overline{0}$. Нульовий вектор напряму не має.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним вектором*** і позначається через $\overline{e}$. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, називається ***ортом*** вектора $\overline{a}$ і позначається як $\overline{a}^0$.

Вектори $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих; записують $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Колінеарні вектори можуть бути направлені однаково або протилежно.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Два вектори $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ називаються рівними ($\overline{a} = \overline{b}$), якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають однакові довжини.

З визначення рівності векторів виходить, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора поміщати в будь-яку точку O простору.

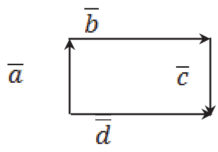


Рис. 1

На рис. 1 вектори утворюють прямокутник. Справедлива рівність $\overline{b} = \overline{d}$, але $\overline{a} \neq \overline{c}$. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ – протилежні $\overline{a} = -\overline{c}$.

Три вектори в просторі називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Якщо серед трьох векторів хоч би один нульовий або два будь-які колінеарні, то такі вектори компланарні.

1.2. Лінійні операції над векторами

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання і віднімання векторів, а також множення вектора на число.

Нехай $\overline{a}$ i $\overline{b}$ – два довільні вектори. Візьмемо довільну точку O і побудуємо вектор $\overline{OA} = \overline{a}$. Від точки A відкладемо вектор $\overline{AB} = \overline{b}$. Вектор $\overline{OB}$, що з'єднує початок першого вектора з кінцем другого, називається сумою векторів $\overline{a}$ i $\overline{b}$: $\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$ (рис. 2).

Це правило ***складання векторів*** називають ***правилом трикутника***. Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма (рис. 3).

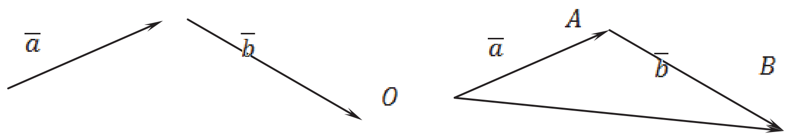


Рис. 2

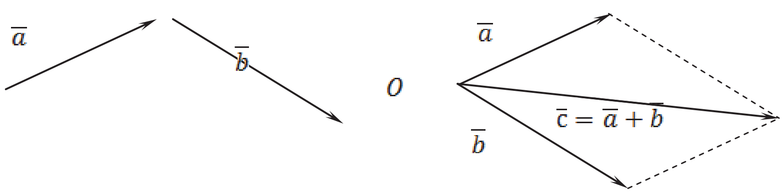


Рис. 3

На рис. 4 показано складання трьох векторів, $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$.

Під різницею векторів $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ розуміється вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такий, що $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис. 5).

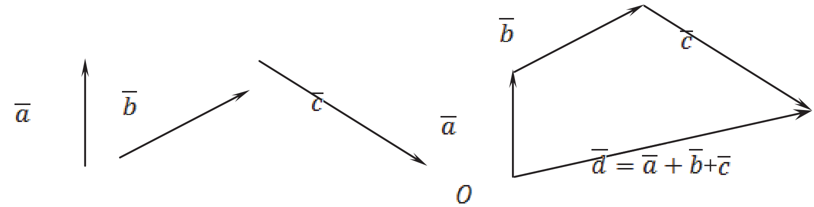


Рис. 4

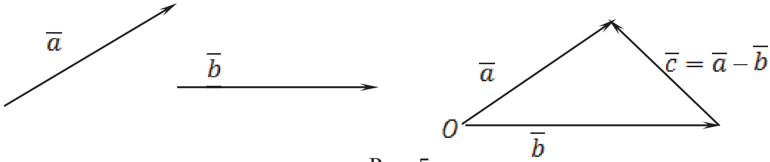


Рис. 5

Відзначимо, що в паралелограмі, побудованому на векторах $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$, одна направлена діагональ є сумою векторів $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$, а інша – їх різницею (рис. 6).

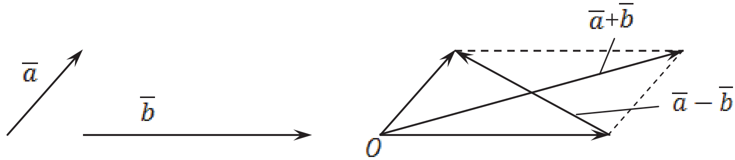


Рис. 6

Можна віднімати вектори за правилом $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + \left(-\bar{b}\right)$, тобто віднімання векторів замінити складанням вектора $\bar{a}$ з вектором, протилежним до вектора $\bar{b}$.

Добутком вектора $\bar{a}$ ***на скаляр (число)*** λ називається вектор $\overline{\lambda a}$ (або $\overline{a\lambda}$), який колінеарен вектору $\bar{a}$ та має довжину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, та який має напрям вектора, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$. Наприклад, якщо задано вектор, то вектори $3\bar{a}$ і $-2\bar{a}$ матимуть вигляд

З означення добутку вектора на число випливають властивості цього добутку:

1) якщо $\overline{b} = \overline{\lambda a}$, то $\overline{b} \| \overline{a}$, і навпаки, якщо $\overline{b} \| \overline{a}$, ($\overline{a} \neq 0$), то при будь якому $\lambda \neq 0$ вірна рівність $\overline{b} = \overline{\lambda a}$;

2) завжди $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a}^{0}$, тобто кожен вектор дорівнює добутку його модуля на орт.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;

2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;

3) $\lambda_1(\lambda_2 \overline{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \overline{a}$;

4) $(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{a}$;

5) $(\overline{a} + \overline{b})\lambda = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}$.

Ці властивості дозволяють проводити перетворення в лінійних операціях з вектором так, як це робиться в звичайній алгебрі: доданки міняти місцями, вводити дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні загальні множники.

1.3. Проекція вектора на вісь

Хай в просторі задана вісь l, тобто направлена пряма. Проекцією точки M на вісь l називається основа M_1 перпендикуляра MM_1, опущеного з точки на вісь.

Точка M_1 є точкою перетину осі l з площиною, що проходить через точку M перпендикулярно осі (рис. 7).

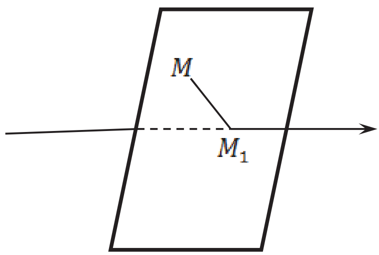


Рис. 7

Якщо точка M лежить на осі l, то проекція точки M на вісь збігається з M.

Нехай $\overline{AB}$ – довільний вектор ($\overline{AB} \neq 0$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектора $\overline{AB}$ і розглянемо вектор $\overline{A_1B_1}$.

Проекцією вектора $\overline{AB}$ ***на вісь*** l називається додатне число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l однаково направлені, та від'ємне число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l протилежно направлені (рис. 8). Якщо точки A_1 і B_1 збігаються ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекція вектора $\overline{AB}$ дорівнює 0.

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь l позначається так: $np_l\,\overline{AB}$. Якщо $\overline{AB} = 0$ або $\overline{AB} \perp l$, то $np_l\,\overline{AB} = 0$.

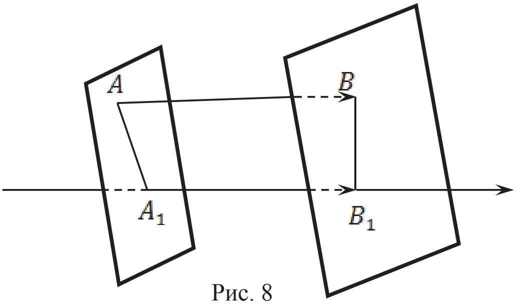


Рис. 8

Кут φ ***між вектором*** $\overline{a}$ ***і віссю*** l (або кут між двома векторами) зображеними на рис. 9. Очевидно, $0 \le \varphi \le \pi$.

Розглянемо деякі ***основні властивості проекцій***.

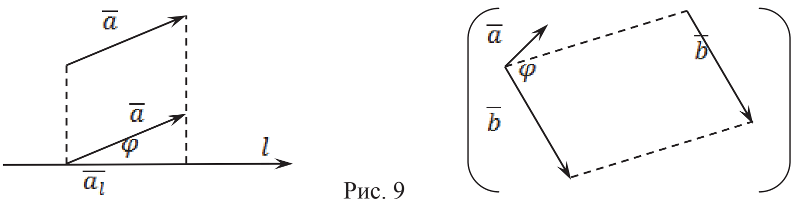


Рис. 9

Властивість 1. Проекція вектора $\overline{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\overline{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто $np_l\,\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$.

Якщо $\varphi = (\overline{a}, l) \langle \frac{\pi}{2}$, то $np_l\,\overline{a} = +|\overline{a}_l| = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi > 0.$

Якщо $\varphi \rangle \frac{\pi}{2} (\varphi \le \pi)$, то $np_l\,\overline{a} = -|\overline{a}_l| = -|\overline{a}| \cdot \cos(\varphi - \pi) = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi < 0$ (рис. 10).

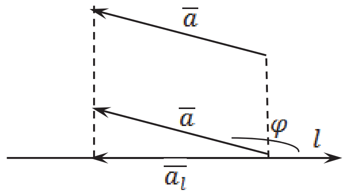


Рис. 10

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $np_l\,\overline{a} = 0 = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$.

Наслідок 5.1. Проекція вектора на вісь додатна (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут прямий.

Наслідок 5.2. Проекції рівних векторів на ту саму вісь рівні між собою.

Властивість 2. Проекція суми декількох векторів на ту саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь.

Нехай, наприклад, $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$. Маємо $np_l\,\overline{d} = +|\overline{d}_1| = +|\overline{a}_1| + |\overline{b}_1| - |\overline{c}_1|$, тобто $np_l(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b} + np_l\,\overline{c}$ (рис. 11).

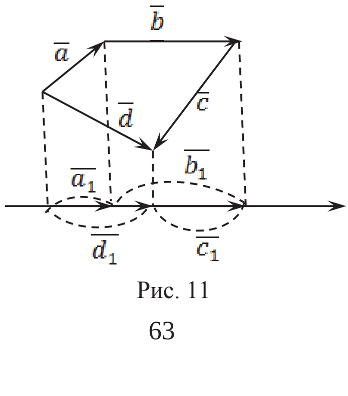


Рис. 11

Властивість 3. При множенні вектора $\overline{a}$ на число λ його проекція на вісь також множиться на це число, тобто

$$np_l\left(\lambda \cdot \overline{a}\right) = \lambda \cdot np_l \overline{a}.$$

При $\lambda > 0$ маємо $np_l\left(\lambda \cdot \overline{a}\right) = \left|\lambda \cdot \overline{a}\right| \cos\varphi = (\textit{властивість1}) = \lambda \cdot np_l \overline{a}$ **.**

При $\lambda < 0$:

$$np_l\left(\lambda \cdot \overline{a}\right) = \left|\lambda \cdot \overline{a}\right| \cos(\varphi - \pi) = -\lambda \cdot \left|\overline{a}\right| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda \cdot \overline{a} \cdot \cos\varphi =$$

$= \lambda \cdot np_l \overline{a}$. Властивість справедлива, очевидно, і при $\lambda = 0$.

Таким чином, лінійні операції над векторами призводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

1.4. Розкладання вектора по ортах координатних осей. Модуль вектора. Напрямні косинуси

Розглянемо в просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Виділимо на координатних осях Ox, Oy і Oz одиничні вектори (орти), що позначаються відповідно як $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис. 12). Ці орти мають назву ортів прямокутної системи координат.

Візьмемо довільний вектор $\overline{a}$ простору і поєднаємо його початок з початком координат: $\overline{a} = \overline{OM}$.

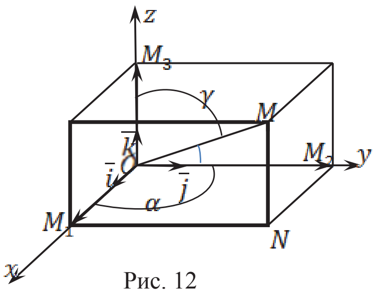


Рис. 12

Знайдемо проекції вектора $\overline{a}$ на координатні осі. Проведемо через кінець вектора $\overline{OM}$ площину, паралельну координатній площині. Точки перетину цієї площини з осями позначимо відповідно через M_1, M_2 і M_3. Отримаємо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overline{OM}$. Тоді $np_x \overline{a} = \left|\overline{OM_1}\right|$, $np_y \overline{a} = \left|\overline{OM_2}\right|$, $np_z \overline{a} = \left|\overline{OM_z}\right|$. За означенням суми декількох векторів знаходимо $\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}$.

А оскільки $\overline{OM_2} = \overline{M_1N}$, $\overline{OM_3} = \overline{NM}$, то $\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}$. (2.1)

Але $\overline{OM}_1 = \left|\overline{OM_1}\right| \cdot \overline{i}$, $\overline{OM}_2 = \left|\overline{OM_2}\right| \cdot \overline{j}$, $\overline{OM}_3 = \left|\overline{OM_3}\right| \cdot \overline{k}$. (2.2)

Позначимо проекції вектора $\overline{a} = \overline{OM}$ на осі Ox, Oy і Oz відповідно через a_x, a_y, і a_z, тобто $\left|\overline{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overline{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overline{OM_3}\right| = a_z$. Тоді з рівностей (2.1) і (2.2) отримуємо

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}. \tag{2.3}$$

Ця формула є основною у векторному численні та називається розкладанням вектора по ортах координатних осей. Числа a_x, a_y, a_z називаються координатами вектора $\overline{a}$, ***тобто координатами вектора є його проекції на відповідні координатні осі***.

Векторну рівність частіше записують у символічному вигляді: $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$.

Знаючи проекції вектора, можна легко знайти вираз для модуля вектора. На підставі теореми про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда можна написати: $\left|\overline{OM}\right|^2 = \left|\overline{OM_1}\right|^2 + \left|\overline{OM_2}\right|^2 + \left|\overline{OM_3}\right|^2$, тобто

$$\left|\overline{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{2.4}$$

Звідси $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$,

тобто ***модуль вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його проекцій на осі координат***.

Нехай кути вектора $\overline{a}$ з осями Ox, Oy і Oz відповідно дорівнюють α, β, γ. За властивістю проекції вектора на вісь маємо

$$a_x = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\alpha,\ a_y = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\beta,\ a_z = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\gamma, \tag{2.5}$$

або те ж саме:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\overline{a}$.

Підставимо вирази (2.5) у рівність (2.4) і отримаємо

$$\left|\overline{a}\right|^2 = \left|\overline{a}\right|^2 \cdot \cos^2\alpha + \left|\overline{a}\right|^2 \cdot \cos^2\beta + \left|\overline{a}\right|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Скоротивши на $\left|\overline{a}\right|^2 \neq 0$, маємо основну властивість напрямних косинусів: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

тобто сума квадратів напрямних косинусів ненульового вектора дорівнює одиниці.

Відмітимо, що координатами одиничного вектора $\overline{e}$ є числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, тобто $\overline{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$; також орт вектора має координати $\overline{a^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Отже, задавши координати вектора, завжди можна визначити його модуль і напрям, тобто сам вектор.

1.5. Дії над векторами, заданими проекціями

Нехай вектори $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$ задані своїми проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz, тобто

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}, \quad \overline{b} = b_x \cdot \overline{i} + b_y \cdot \overline{j} + b_z \cdot \overline{k}.$$

Лінійні операції над векторами

Оскільки лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів, то можна записати:

1) $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x)\ \overline{i} + (a_y \pm b_y)\ \overline{j} + (a_z \pm b_z)\ \overline{k}$, або коротше: $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$.

Тобто при додаванні (відніманні) векторів їх однойменні координати додаються (віднімаються).

2) $\lambda\overline{a} = \lambda a_x \cdot \overline{i} + \lambda a_y \cdot \overline{j} + \lambda a_z \cdot \overline{k}$, або $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

Тобто при множенні вектора на скаляр координати вектора помножуються на цей скаляр.

Рівність векторів

З означення вектора як спрямованого відрізка, який можна пересувати в просторі паралельно самому собі, випливає, що два вектори $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ ***рівні*** тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, або

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z \end{cases}$$

Колінеарність векторів

З'ясуємо умови колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих своїми координатами. Оскільки $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то можна записати: $\bar{a} = \lambda \bar{b}$, де λ – деяке число. Тобто

$$a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda\left(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}\right) = \lambda b_x \cdot \bar{i} + \lambda b_y \cdot \bar{j} + \lambda b_z \cdot \bar{k}.$$

Звідси $\quad a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y,\ a_z = \lambda b_z,$

тобто $\dfrac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \dfrac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda,$ або $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}.$

Таким чином, проекції колінеарних векторів пропорційні. Вірне і зворотне твердження: вектори, які мають пропорційні координати, колінеарні.

Координати точки

Нехай у просторі задана прямокутна декартова система координат $Oxyz$. Для будь-якої точки M координати вектора $\overline{OM}$ називаються координатами точки M. Вектор $\overline{OM}$ називається радіус-вектором точки M і позначається як $\bar{r}$, тобто $\overline{OM} = \bar{r}$. Отже, координати точки – це координати її радіус-вектора:

$$\bar{r} = (x; y; z) \quad \text{або} \quad \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Координати точки M записуються у вигляді $M(x;y:z)$.

Координати вектора

Знайдемо координати вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_{2;}\ y_2;\ z_2)$ (рис. 13):

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\left(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}\right)-\left(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}\right)$$
$$=\left(x_2-x_1\right)\bar{i}+\left(y_2-y_1\right)\bar{j}+\left(z_2-z_1\right)\bar{k}.$$

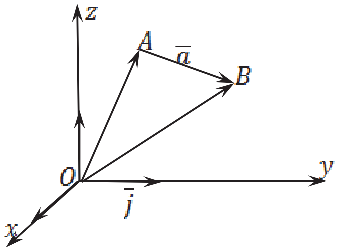


Рис. 13

§ 2 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

2.1. Визначення скалярного добутку

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Позначається як $\overline{ab}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$ або як $(\bar{a},\bar{b})$. Отже, за означенням

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi,\text{ де }\varphi=\left(\bar{a}\,^\wedge\,\bar{b}\right). \qquad (2.6)$$

Формулу (2.6) можна записати в іншому вигляді. Оскільки $\left|\bar{a}\right|\cos\varphi=np_{\bar{b}}\bar{a}$ (рис. 14),

а $\left|\bar{b}\right|\cos\varphi=np_{\bar{a}}\bar{b}$, то отримаємо:

$$\bar{a}\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}=\left|\bar{b}\right|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}, \qquad (2.7)$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію іншого на вісь, співнаправлену з першим вектором.

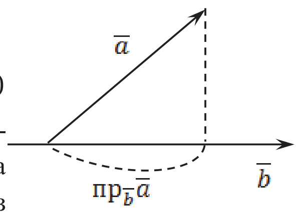


Рис. 14

2.2. Властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток має комутативну властивість:
$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right)$, а $\bar{b} \cdot \bar{a} = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right)$.

Враховуючи $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}|$, добуток чисел і $\cos\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = \cos\left(\bar{b} \,\hat{}\, \bar{a}\right)$,

то $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$.

2. Скалярний добуток має сполучну властивість щодо скалярного множника:

$(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a}\,\bar{b})$.

$(\lambda\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\lambda\bar{a} = \lambda \cdot |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$.

3. Скалярний добуток має розподільну властивість:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}.$$

4. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини:

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 \qquad \bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos 0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2.$$

Зокрема $\bar{i}^{\,2} = \bar{j}^{\,2} = \bar{k}^{\,2} = 1$.

Якщо вектор $\bar{a}$ піднести до квадрата і потім добути корінь, то отримаємо не вихідний вектор, а його модуль $|\bar{a}|$, тобто $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$. (Зверніть увагу на те, що $\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a}$!).

Приклад 2.1. Знайти довжину $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$ $\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання:

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{\left(2\bar{a} + 4\bar{b}\right)^2} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 12\bar{a}\bar{b} + 9\bar{b}^2} =$$
$$= \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 4 \cdot 3 + 9 \cdot 9} = \sqrt{289} = 17.$$

5. Якщо ненульові вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a}\,\bar{b} = 0$. Справедливе і зворотне твердження: якщо $\bar{a}\,\bar{b} = 0$ і $\bar{a} \neq 0 \neq \bar{b}$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$. Оскільки

$\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. Отже, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot 0 = 0$. Якщо ж $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ та $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$, то $\cos\left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = 0$. Звідси $\varphi = \left(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b}\right) = 90^\circ$, тобто $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Зокрема $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0$.

2.3. Вираз скалярного добутку через координати

Задано два вектори: $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ та $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$.

Знайдемо скалярний добуток векторів, перемножуючи їх як многочлени і користуючись таблицею скалярного добутку векторів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) =$

$= a_x b_x \bar{i}\,\bar{i} + a_x b_y \bar{i}\,\bar{j} + a_x b_z \bar{i}\,\bar{k} + a_y b_x \bar{j}\,\bar{i} + a_y b_y \bar{j}\,\bar{j} + a_y b_z \bar{j}\,\bar{k} +$

$+ a_z b_x \bar{k}\,\bar{i} + a_z b_y \bar{k}\,\bar{j} + a_z b_z \bar{k}\,\bar{k} =$

$= a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y by + 0 + 0 + 0 + a_z b_z$,

тобто $\bar{a}\,\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Отже, скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат.

Приклад 2.2. Довести, що діагоналі чотирикутника, заданого координатами вершин *A* (–4; –4; –4), *B* (1; 5; 2), *C* (1; 2; –3), *D* (12; –2; 3), взаємно перпендикулярні.

Розв'язання:

Складемо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$, що лежать на діагоналях даного чотирикутника. Маємо $\overline{AC} = \{5; 6; 1\}$ і $\overline{BD} = \{11; -7; 1\}$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 55 - 56 - 1 = 0.$$

Звідси випливає, що $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Діагоналі чотирикутника *ABCD* взаємно перпендикулярні.

2.4. Застосування скалярного добутку

Кут між векторами

Визначення кута φ між ненульовим векторами $\overline{a}=\{a_x;a_y;a\}_z$ та $\overline{b}=\{b_x;b_y;b\}:$

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|},\text{ тобто }\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Звідси випливає умова перпендикулярності ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Проекція вектора на заданий напрямок

Знаходження проекції вектора $\overline{a}$ на напрям, заданий вектором $\overline{b}$, може здійснюватися за формулою

$$np_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}\left(np_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}\right),\text{ тобто }np_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Робота постійної сили

Нехай матеріальна точка переміщується прямолінійно з положення A в положення B під дією постійної сили $\overline{F}$, що утворює кут з переміщенням $\overline{AB}=\overline{S}$ (рис. 15).

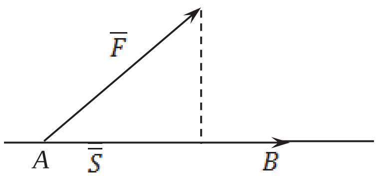


Рис. 15

З фізики відомо, що робота сили $\overline{F}$ при переміщенні $\overline{S}$ становить:

$A=F\cdot S\cdot\cos\varphi$, тобто $A=\overline{F}\cdot\overline{S}$.

Таким чином, робота постійної сили при прямолінійному переміщенні її точки прикладання дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.

Приклад 2.3. Обчислити роботу, зроблену силою $\overline{F} = \{1;\ 2;\ 3\}$, якщо точка її додатка переміщається прямолінійно з положення *A(3;4;2)* у положення $B(2;\ 5;\ 3)$. Під яким кутом до AB спрямована сила $\overline{F}$?

Розв'язання:

Знаходимо $\overline{S}:\ \overline{S} = \overline{AB} = (-1,\ 1,\ 1)$. Отже,

$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$ (од. роботи).

Кут φ між $\overline{F}$ і $\overline{S}$ визначаємо за формулою $\cos\varphi = \dfrac{\overline{F} \cdot \overline{S}}{|\overline{F}| \cdot |\overline{S}|}$, тобто

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

§ 3. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

3.1. Визначення векторного добутку

Три некомпланарних упорядкованих вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють праву трійку, якщо з кінця третього вектора $\overline{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\overline{a}$ до другого вектора $\overline{b}$ буде відбуватися проти руху годинникової стрілки, і ліву, якщо за рухом годинниковою стрілки (рис. 16).

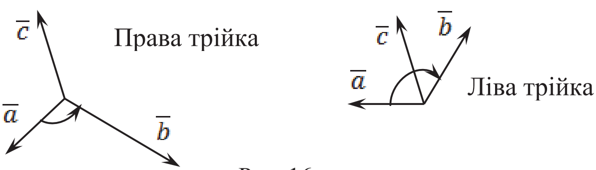


Рис. 16

Векторним добутком вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який:

1) перпендикулярний векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$, тобто $\overline{c} \perp \overline{a}$ і $\overline{c} \perp \overline{b}$;

2) має довжину, яка чисельно дорівнює

$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$; де $\varphi = \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right)$;

3) напрям вектора $\bar{c}$ має бути таким, щоб з векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворити праву трійку.

Векторний добуток позначається $\bar{a} \times \bar{b}$ або $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах (рис. 17).

З означення векторного добутку безпосередньо випливають такі співвідношення між ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис. 18):

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$.

Доведемо, наприклад, що $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$;

1) $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$;

2) $|\bar{k}| = 1$, але $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin 90^0 = 1$;

3) вектори $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ утворюють праву трійку (рис. 16).

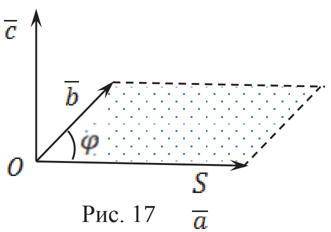


Рис. 17

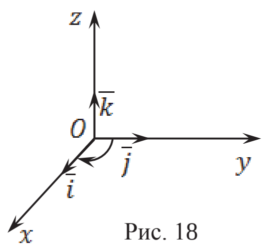


Рис. 18

3.2. Властивості векторного добутку

1. При перестановці співмножників векторний добуток змінює знак, тобто $\bar{a} \times \bar{b} = -[\bar{b} \times \bar{a}]$ (рис. 19).

Вектори $\bar{a} \times \bar{b}$ і $\bar{b} \times \bar{a}$ колінеарні, мають однакові модулі (площа паралелограма залишається незмінною), але протилежно спрямовані (трійки, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \times \bar{b}$ і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{b} \times \bar{a}$ протилежної орієнтації). Тобто $\bar{a} \times \bar{b} =$
$= -[\bar{b} \times \bar{a}]$.

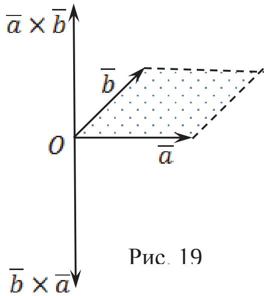


Рис. 19

2. Векторний добуток має сполучну властивість щодо скалярного множника, тобто $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$.

Нехай $\lambda > 0$. Вектор $\lambda[\bar{a}\,\bar{b}]$ перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Вектор $(\lambda\bar{a})\times\bar{b}$ також перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (вектори, $\bar{a}$, $(\lambda\bar{a})$ лежать в одній площині). Отже, вектори $\lambda[\bar{a}\,\bar{b}]$ і $(\lambda\bar{a})\times\bar{b}$ колінеарні. Очевидно, що і напрямки їх збігаються. Ці вектори мають однакову довжину:

$$\left|\lambda\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right| = \lambda\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \lambda|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)$$

і $\left|(\lambda\bar{a})\times\bar{b}\right| = |\lambda\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\overline{\lambda a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) = \lambda|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)$.

Тому $\lambda(\bar{a}\times\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\times\bar{b}$.

Аналогічно виконується доведення при $\lambda < 0$.

3. Два ненульових вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору, тобто $\bar{a}\parallel\bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a}\times\bar{b})=0$.

Якщо $\bar{a}\parallel\bar{b}$, то тоді кут між ними дорівнює 0° або 180°. Але тоді $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = |\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) = 0$. Отже, $\bar{a}\times\bar{b}=0$.

Якщо $\bar{a}\times\bar{b}=0$, то тоді $|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi = 0$. Але тоді $\varphi=0°$ або $\varphi=180°$, тобто $\bar{a}\parallel\bar{b}$.

Зокрема, $\bar{i}\times\bar{i} = \bar{j}\times\bar{j} = \bar{k}\times\bar{k} = 0$.

4. Векторний добуток має розподільну властивість:

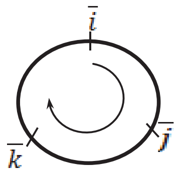
$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}.$$

Приймемо це без доведення.

3.3. Вираз векторного добутку через координати

Ми будемо використовувати таблицю векторного добутку векторів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Щоб не помилитися зі знаком, зручно користуватися такою схемою: якщо напрямок найкоротшого шляху від першого вектора $\bar{k}$ до другого збігається з напрямом стрілки, то добуток дорівнює третьому вектору, а якщо він не збігається, то третій вектор береться зі знаком «мінус».



	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Нехай задано два вектори: $\bar{a} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})$ і $\bar{b} = (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k})$. Знайдемо векторний добуток цих векторів, перемножуючи їх як многочлени (згідно з властивостями векторного добутку):

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= a_xb_x(\bar{i}\times\bar{i}) + a_xb_y(\bar{i}\times\bar{j}) + a_xb_z(\bar{i}\times\bar{k}) + a_yb_x(\bar{j}\times\bar{i}) +$$

$$+ a_yb_y(\bar{j}\times\bar{j}) + a_yb_z(\bar{j}\times\bar{k}) + a_zb_x(\bar{k}\times\bar{i}) + a_zb_y(\bar{k}\times\bar{j}) +$$

$$+ a_zb_z(\bar{k}\times\bar{k}) = \bar{0} + a_xb_y\bar{k} - a_xb_z\bar{j} - a_yb_x\bar{k} + \bar{0} + a_yb_z\bar{i} +$$

$$+ a_zb_x\bar{j} - a_zb_y\bar{i} + \bar{0} =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k},$$

тобто
$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}. \qquad (2.8)$$

Отриману формулу можна записати ще коротше:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \qquad (2.9)$$

оскільки права частина рівності (2.8) відповідає розкладанню визначника третього порядку за елементами першого рядка. Рівність (2.9) легко запам'ятовується.

3.4. Деякі застосування векторного добутку

Встановлення колінеарності векторів

Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ (і навпаки), тобто

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overline{0} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{a_z} \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}.$$

Визначення площі паралелограма та трикутника

Згідно з визначенням векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$

$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$, тобто $S_{\text{пар}} = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$. Тому $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$.

Визначення моменту сили щодо точки

Нехай в точці A прикладена сила $\overline{F} = \overline{AB}$ і нехай O – деяка точка простору (рис. 20).

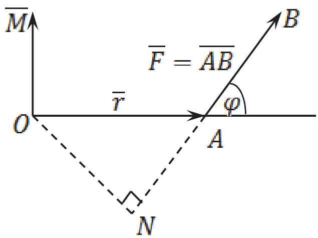


Рис. 20

З фізики відомо, що моментом сили щодо точки O називається вектор, який проходить через точку O і він

1) перпендикулярний площині, яка проходить через точки O, A, B;
2) чисельно дорівнює добутку сили на плече:

$$\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot ON = \left|\overline{F}\right| \cdot |\overline{r}| \cdot \sin\varphi = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{OA}\right| \sin\left(\overline{F} \,\hat{}\, \overline{OA}\right);$$

3) утворює праву трійку з векторами $\overline{OA}$ і $\overline{AB}$.

Тобто $\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{OA}$ або $\overline{M} = \overline{F} \times \overline{r}$.

§ 4. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

4.1. Визначення мішаного добутку, його геометричний зміст

Розглянемо добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, складений таким чином: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Тут перші два вектори перемножуються векторно, а їх результат – скалярно на третій вектор. Такий добуток називається ***векторно-скалярним***, або ***мішаним***, добутком трьох векторів. Мішаний добуток являє собою деяке число.

З'ясуємо геометричний зміст виразу $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, та вектор $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$ (рис. 21).

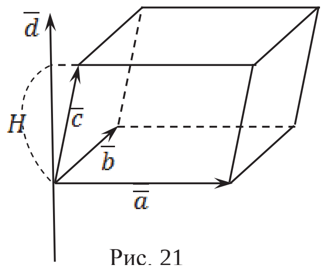


Рис. 21

Маємо $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{d}\cdot\bar{c}=\left|\bar{d}\right|\cdot np_{\bar{d}}\bar{c}$, $\quad\left|\bar{d}\right|=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=S$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, $np_{\bar{d}}\bar{c}=H$ для правої трійки векторів і $np_{\bar{d}}\bar{c}=-H$ для лівої, де H – висота паралелепіпеда. Отримуємо $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=S\cdot(\pm H)$, тобто $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\pm V$ де V – об'єм паралелепіпеда, утвореного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$.

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком «плюс», якщо ці вектори утворюють праву трійку, та зі знаком «мінус», якщо вони утворюють ліву трійку.

4.2. Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці його множників, тобто $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$.

Дійсно, в цьому випадку не змінюється ні об'єм паралелепіпеда, ні орієнтація його ребер.

2. Мішаний добуток не змінюється при зміні місць знаків векторного та скалярного добутку, тобто $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$.

Дійсно, $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \pm V$ і $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a} = \pm V$. Знак у правій частині цих рівностей беремо той самий, бо трійки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a}$ – ***однієї орієнтації.***

Отже, $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$. Це дозволяє записувати мішаний добуток векторів $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ у вигляді $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ без знаків векторного, скалярного множення.

3. Мішаний добуток змінює свій знак при зміні місць довільних двох векторів-співмножників, тобто $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c}$, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$.

Дійсно, така перестановка рівносильна перестановці співмножників у векторному добутку, яка змінює знак добутку.

4. Мішаний добуток ненульових векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, і $\bar{c}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Якщо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$, тоді $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні.

Припустимо, що це не так. Можна було б побудувати паралелепіпед з об'ємом $V\neq 0$. Але оскільки $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \pm V$, то тоді отримаємо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \neq 0$. Це заперечує умові $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$.

Навпаки, нехай вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні. Тоді вектор $\bar{d}=(\bar{a}\times\bar{b})$ буде перпендикулярний площині, в якій лежать *вектори* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, і отже, $\bar{d}\perp\bar{c}$. Тому $\bar{d}\cdot\bar{c}=0$, тобто $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$.

4.3. Вираз мішаного добутку через координати

Нехай задано вектори $\bar{a}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})$ і $\bar{b}=(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})$, $\bar{c}=(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k})$. Знайдемо їх мішаний добуток, використовуючи вираз в координатах для векторного та скалярного добутків:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \right) \cdot (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z. \qquad (2.10)$$

Отриману формулу можна записати коротше:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

тому що права частина рівності (2.10) являє собою розкладання визначника третього порядку за елементами третього рядка.

Отже, мішаний добуток векторів дорівнює визначнику третього порядку, складеному з координат векторів, що перемножуються.

4.4. Деякі застосування мішаного добутку

1. Визначення взаємної орієнтації векторів у просторі.

Визначення взаємної орієнтації векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ базується на таких міркуваннях. Якщо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} > 0$, то тоді $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – права трійка; якщо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} < 0$, то тоді $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – ліва трійка.

2. Встановлення ***компланарності*** векторів.

Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, і $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ і $\bar{c} \neq \bar{0}$):

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{вектори } \bar{a},\ \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарні.}$$

Визначення об'ємів паралелепіпеда і трикутної піраміди

Згідно з геометричним змістом мішаного добутку неважко показати, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, обчислюється як $V = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$, а об’єм трикутної піраміди, побудованої на цих же векторах, як $V = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Приклад 2.4. Вершинами піраміди служать точки $A(1;\ -2;\ -3)$, $B(0;\ -1;\ -1)$, $C(-2;\ 5;\ -2)$ та $D(-3;\ 0;\ -2)$. Знайти об’єм піраміди.

Розв’язання.

Знаходимо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, і $\bar{c}$:

$\bar{a} = \overline{AB} = \{1;\ 1;\ 2\}$, $\bar{b} = \overline{AC} = \{-3;\ 7;\ 1\}$, $\bar{c} = \overline{AD} = \{-4;\ 2;\ 1\}$.

Знаходимо мішаний добуток $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) - 4 \cdot (-8) = -5 - 9 + 32 = 28.$$

Отже, $V = \frac{1}{6} \cdot 28 = \frac{14}{3}$.

Приклад розв’язання варіанта 31 з контрольних завдань до розділу 2

Завдання 1. Написати розкладання вектора x по векторах p, q, r:

$$\bar{x} = \{0; -3; -7\},\ \bar{p} = \{0; -1; -2\},\quad \bar{q} = \{-1; 0; -1\},\ \bar{r} = \{1; -2; -4\}.$$

Розв’язання:

Розкладання вектора x по векторах $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$:

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{p} + \alpha_2 \bar{q} + \alpha_3 \bar{r}.$$

Запишемо систему для визначення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_3 = -3, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = -7. \end{cases} .$$

Методом Жордана – Гаусса розв’яжемо систему рівнянь. Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над нею елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & -2 & | & -3 \\ -2 & -1 & -4 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \left\| e_1 \cdot (-1) + e_3 \to e_3 \right\| \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & -3 \\ -2 & 0 & -5 & | & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| e_2 \cdot (-2) + e_3 \to e_3 \right\| \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_3 + e_1 \to e_1 \\ e_3 \cdot (-1) + e_2 \to e_2 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}. \ \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.$$

Відповідь: $\overline{x} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$.

Завдання 2. З'ясувати колінеарність векторів $\bar{c}_1$ та $\bar{c}_2$, які побудовані по векторах $\bar{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a} = \{1;\ -2;\ -8\},\ \overline{b} = \{-3;\ -7;\ 1\},\ \overline{c_1} = -4\overline{a} + 3\overline{b},\ \overline{c_2} = -9\overline{b} + 12\overline{a}.$$

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\bar{c}_1$ та $\bar{c}_2$, які побудовані по векторах $\bar{a}$ і $\overline{b}$.

$\overline{c_1} = -4\{1;\ -2;\ -8\} + 3\{-3;\ -7;\ 1\} = \{-4;\ 8;\ 32\} + \{-9; -21; 3\} = \{-13;\ -13;\ 35\}$,

$\overline{c_2} = -9\{1;\ -2;\ -8\} + 12\{-3;\ -7;\ 1\} = \{27;\ 63;\ -9\} + \{12;\ -24;\ -96\} = \{35;\ 39;\ -105\}$.

Умова колінеарності $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, у нашому випадку

$$\frac{-13}{35} \ne \frac{-13}{39} \ne \frac{35}{-105} \Rightarrow \overline{c_1} \text{ та } \overline{c_2} \text{ не колінеарні.}$$

Завдання 3. Знайти косинус кута між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, якщо $A(-2;\ -4;\ -6)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(6;\ -8;\ -10)$.

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = \{2;\ 6;\ 10\}$, $\overline{AC} = \{8;\ -4;\ -4\}$;

$$\cos\left(\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{AC}\right) = \frac{\left(\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right)}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|} = \frac{16 - 24 - 40}{\sqrt{4 + 36 + 100}\sqrt{64 + 16 + 16}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{35}}.$$

Завдання 4. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$:

$$\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=3\overline{p}+2\overline{q},\ \left|\overline{p}\right|=3,\ \left|\overline{q}\right|=4,\ \left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання.

$$S=\left|\left[\overline{a}\overline{b}\right]\right|=\left|\left[\left(2\overline{p}-\overline{q}\right)\left(3\overline{p}+2\overline{q}\right)\right]\right|=6\left|\left[\overline{p}\,\overline{p}\right]\right|-3\left|\left[\overline{q}\,\overline{p}\right]\right|+4\left|\left[\overline{p}\overline{q}\right]\right|-2\left|\left[\overline{q}\overline{q}\right]\right|=$$

$$=\left(\left|\left[\overline{p}\,\overline{p}\right]\right|=\left|\overline{p}\right|\left|\overline{p}\right|\sin 0^{\circ}=0,\left[\overline{q}\,\overline{p}\right]=-\left[\overline{p}\overline{q}\right]\right)=7\left|\left[\overline{p}\overline{q}\right]\right|=7\cdot\left|\overline{p}\right|\cdot\left|\overline{q}\right|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=7\cdot 3\cdot 4\cdot 1=84\text{î ä}^{2}.$$

Завдання 5. Встановити, чи компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{c}$.

$$\overline{a}=\{-7;-4;-6\},\ \overline{b}=\{-2;-1;-1\},\ \overline{c}=\{-19;-11;-17\}.$$

Розв'язання.

Знайдемо мішаний добуток:

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}-7 & -4 & -6\\ -2 & -1 & -1\\ -19 & -11 & -17\end{vmatrix}=7\cdot(-17)+12\cdot(-11)+4\cdot(-19)-6\cdot(-19)-$$

$$-7\cdot(-11)-8\cdot(-17)=-17(7-8)-11(12-7)-19(4-6)=17-55+38=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c}-$ компланарні.

Завдання 6. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка побудована з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$: $A_1(-1;\ 1;\ -2)$, $A_2(-2;\ -1;\ -2)$, $A_3(-1;\ -1;\ -4)$, $A_4(-6;\ 3;\ -8)$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів, на яких побудовано тетраедр:

$$\overline{a}=\overline{A_1A_2}=\{-1;\ -2;\ 0\},\ \overline{b}=\overline{A_1A_3}=\{0;\ -2;\ -2\},\ \overline{c}=\overline{A_1A_4}=\{-5;\ 2;\ -6\}.$$

Знайдемо мішаний добуток:

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ -5 & 2 & -6\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 12 & -6\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 12 & -6\end{vmatrix}=2\cdot(-18)=-36.$$

Тоді об'єм тетраедра буде $V_T=\frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|=\frac{36}{6}=6\text{î ä}^{3}$.

Визначимо площу основи:

$$\left[\overline{ab}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}=4\cdot\bar{i}-2\cdot\bar{j}+2\cdot\bar{k}.$$

$$S=\left|\left[\overline{ab}\right]\right|=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\,од^2$$

Знайдемо висоту:

$$h=\frac{3\cdot V_T}{S}=\frac{3\cdot 6}{2\sqrt{6}}=\frac{9}{\sqrt{6}}.$$

Варіанти обов'язкового домашнього завдання

Завдання 1. Написати розкладання вектора x по векторах $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$.

1. $\bar{x}=\{-15;12;-3\}$, $\bar{p}=\{0;-2;-1\}$, $\bar{q}=\{0;-1;1\}$, $\bar{r}=\{-5;3;-2\}$.
2. $\bar{x}=\{-2;-1;-2\}$, $\bar{p}=\{-1;0;-1\}$, $\bar{q}=\{-1;2;0\}$, $\bar{r}=\{0;-3;-1\}$.
3. $\bar{x}=\{-9;1;-1\}$, $\bar{p}=\{0;-1;-5\}$, $\bar{q}=\{-3;1;2\}$, $\bar{r}=\{-1;0;1\}$.
4. $\bar{x}=\{-10;2;-1\}$, $\bar{p}=\{0;2;-1\}$, $\bar{q}=\{-3;-1;1\}$, $\bar{r}=\{-4;0;-1\}$.
5. $\bar{x}=\{-8;-2;-7\}$, $\bar{p}=\{-1;1;-2\}$, $\bar{q}=\{-3;-2;0\}$, $\bar{r}=\{1;-1;-1\}$.
6. $\bar{x}=\{-4;6;1\}$, $\bar{p}=\{0;-3;-1\}$, $\bar{q}=\{-1;1;-2\}$, $\bar{r}=\{-2;1;0\}$.
7. $\bar{x}=\{-3;-1;0\}$, $\bar{p}=\{-2;-1;0\}$, $\bar{q}=\{-1;0;-1\}$, $\bar{r}=\{-4;-2;-1\}$.
8. $\bar{x}=\{-1;-6;-10\}$, $\bar{p}=\{-2;-1;0\}$, $\bar{q}=\{-1;1;0\}$, $\bar{r}=\{3;-2;-5\}$.
9. $\bar{x}=\{-2;5;-5\}$, $\bar{p}=\{-1;0;-1\}$, $\bar{q}=\{0;2;-1\}$, $\bar{r}=\{-1;-3;0\}$.
10. $\bar{x}=\{-5;-16;0\}$, $\bar{p}=\{0;-5;-1\}$, $\bar{q}=\{-3;-2;1\}$, $\bar{r}=\{1;-1;0\}$.
11. $\bar{x}=\{10;5;-17\}$, $\bar{p}=\{-1;-1;-4\}$, $\bar{q}=\{3;0;-2\}$, $\bar{r}=\{-1;-2;1\}$.
12. $\bar{x}=\{-1;3;1\}$, $\bar{p}=\{0;-1;2\}$, $\bar{q}=\{-3;1;-1\}$, $\bar{r}=\{-4;-1;0\}$.
13. $\bar{x}=\{-13;20;-11\}$, $\bar{p}=\{-1;4;-1\}$, $\bar{q}=\{3;-2;0\}$, $\bar{r}=\{-1;1;-2\}$.
14. $\bar{x}=\{-1;-8;1\}$, $\bar{p}=\{-1;-2;1\}$, $\bar{q}=\{-3;0;-2\}$, $\bar{r}=\{1;-1;-1\}$.
15. $\bar{x}=\{0;3;-6\}$, $\bar{p}=\{0;-1;-3\}$, $\bar{q}=\{-1;-2;1\}$, $\bar{r}=\{-2;0;-1\}$.
16. $\bar{x}=\{15;7;3\}$, $\bar{p}=\{-2;0;-1\}$, $\bar{q}=\{-1;-1;0\}$, $\bar{r}=\{-4;-1;-2\}$.
17. $\bar{x}=\{9;10;4\}$, $\bar{p}=\{-1;0;-2\}$, $\bar{q}=\{1;0;-1\}$, $\bar{r}=\{-2;-5;3\}$.
18. $\bar{x}=\{7;11;-9\}$, $\bar{p}=\{-1;-1;0\}$, $\bar{q}=\{0;-1;2\}$, $\bar{r}=\{-1;0;-3\}$.

19. $\overline{x}=\{4;-9;23\}$, $\overline{p}=\{-1;0;-5\}$, $\overline{q}=\{1;-3;2\}$, $\overline{r}=\{0;1;-1\}$.

20. $\overline{x}=\{7;-4;10\}$, $\overline{p}=\{-1;2;0\}$, $\overline{q}=\{1;-1;-3\}$, $\overline{r}=\{-1;0;-4\}$.

21. $\overline{x}=\{3;-8;26\}$, $\overline{p}=\{-1;-1;-4\}$, $\overline{q}=\{0;3;-2\}$, $\overline{r}=\{-2;-1;1\}$.

22. $\overline{x}=\{0;8;-5\}$, $\overline{p}=\{1;-2;-1\}$, $\overline{q}=\{-2;0;-3\}$, $\overline{r}=\{-1;-1;1\}$.

23. $\overline{x}=\{18;3;-5\}$, $\overline{p}=\{-3;-1;0\}$, $\overline{q}=\{1;-2;-1\}$, $\overline{r}=\{1;0;-2\}$.

24. $\overline{x}=\{-3;2;-1\}$, $\overline{p}=\{-1;0;-2\}$, $\overline{q}=\{0;-1;-1\}$, $\overline{r}=\{-2;1;-4\}$.

25. $\overline{x}=\{23;13;6\}$, $\overline{p}=\{0;-1;-1\}$, $\overline{q}=\{2;0;-1\}$, $\overline{r}=\{-3;-1;0\}$.

26. $\overline{x}=\{14;3;-9\}$, $\overline{p}=\{-5;-1;0\}$, $\overline{q}=\{-2;1;-3\}$, $\overline{r}=\{-1;0;1\}$.

27. $\overline{x}=\{-10;32;13\}$, $\overline{p}=\{2;0;-1\}$, $\overline{q}=\{-1;-3;1\}$, $\overline{r}=\{0;-4;-1\}$.

28. $\overline{x}=\{-2;7;12\}$, $\overline{p}=\{-4;-1;-1\}$, $\overline{q}=\{-2;0;-3\}$, $\overline{r}=\{1;-2;-1\}$.

29. $\overline{x}=\{1;17;-7\}$, $\overline{p}=\{-2;-1;1\}$, $\overline{q}=\{0;-3;-2\}$, $\overline{r}=\{-1;1;-1\}$.

30. $\overline{x}=\{2;11;-10\}$, $\overline{p}=\{-1;-3;0\}$, $\overline{q}=\{-2;1;-1\}$, $\overline{r}=\{0;1;-2\}$.

31. $\overline{x}=\{0;-3;-7\}$, $\overline{p}=\{0;-1;-2\}$, $\overline{q}=\{-1;0;-1\}$, $\overline{r}=\{1;-2;-4\}$.

Завдання 2. З’ясувати колінеарність векторів $\overline{c_1}$ та $\overline{c_2}$, які побудовані по векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

1. $\overline{a}=\{1;-2;-3\}$, $\overline{b}=\{-3;0;-1\}$, $\overline{c_1}=-2\overline{a}+4\overline{b}$, $\overline{c_2}=-3\overline{b}-\overline{a}$.

2. $\overline{a}=\{-1;0;-1\}$, $\overline{b}=\{-2;-3;-5\}$, $\overline{c_1}=-\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-3\overline{a}-\overline{b}$.

3. $\overline{a}=\{-2;-4;-1\}$, $\overline{b}=\{-1;2;-7\}$, $\overline{c_1}=-5\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-2\overline{a}-\overline{b}$.

4. $\overline{a}=\{-1;-2;3\}$, $\overline{b}=\{-2;1;-1\}$, $\overline{c_1}=-4\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-8\overline{a}+\overline{b}$.

5. $\overline{a}=\{3;-5;-4\}$, $\overline{b}=\{-5;-9;7\}$, $\overline{c_1}=2\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{c_2}=-3\overline{a}-2\overline{b}$.

6. $\overline{a}=\{-1;-4;2\}$, $\overline{b}=\{-1;-1;-1\}$, $\overline{c_1}=-\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c_2}=4\overline{a}-2\overline{b}$.

7. $\overline{a}=\{-1;-2;-5\}$, $\overline{b}=\{-3;-1;0\}$, $\overline{c_1}=-4\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-\overline{b}+2\overline{a}$.

8. $\overline{a}=\{3;-4;-1\}$, $\overline{b}=\{-2;-1;1\}$, $\overline{c_1}=-6\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-\overline{b}+2\overline{a}$.

9. $\overline{a}=\{-2;3;2\}$, $\overline{b}=\{-1;0;-5\}$, $\overline{c_1}=-3\overline{a}-9\overline{b}$, $\overline{c_2}=3\overline{b}+\overline{a}$.

10. $\overline{a}=\{-1;4;-2\}$, $\overline{b}=\{-3;-2;6\}$, $\overline{c_1}=-2\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{c_2}=-3\overline{b}-6\overline{a}$.

11. $\overline{a}=\{-5;0;-1\}$, $\overline{b}=\{-7;-2;-3\}$, $\overline{c_1}=-2\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c_2}=3\overline{b}-6\overline{a}$.

12. $\overline{a}=\{0;-3;-2\}$, $\overline{b}=\{-1;-2;-1\}$, $\overline{c_1}=-5\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-3\overline{a}-5\overline{b}$.

13. $a=\{-2;7;-1\}$, $b=\{-3;5;2\}$, $c_1=2a+3b$, $c_2=3a+2b$.

14. $\overline{a}=\{-3;-7;0\}$, $\overline{b}=\{-1;3;-4\}$, $\overline{c_1}=-4\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-\overline{b}+2\overline{a}$.

15. $\overline{a}=\{1;-2;1\}$, $\overline{b}=\{-2;-7;-1\}$, $\overline{c_1}=-6\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-\overline{b}+3\overline{a}$.

16. $\overline{a}=\{-7;-9;2\}$, $\overline{b}=\{-5;-4;-3\}$, $\overline{c_1}=-4\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c_2}=-4\overline{b}+\overline{a}$.

17. $\overline{a}=\{-5;0;-2\}$, $\overline{b}=\{-6;-4;-3\}$, $\overline{c_1}=-5\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-6\overline{b}+10\overline{a}$.

18. $\overline{a}=\{-8;-3;1\}$, $\overline{b}=\{-4;-1;-3\}$, $\overline{c_1}=-2\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c_2}=-2\overline{b}+4\overline{a}$.

19. $\overline{a}=\{-3;1;-6\}$, $\overline{b}=\{-5;-7;-10\}$, $\overline{c_1}=-4\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-\overline{b}+2\overline{a}$.

20. $\overline{a}=\{-1;2;-4\}$, $\overline{b}=\{-7;-3;-5\}$, $\overline{c_1}=-6\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-\overline{b}+2\overline{a}$.

21. $\overline{a}=\{-3;-7;0\}$, $\overline{b}=\{-4;-6;1\}$, $\overline{c_1}=-3\overline{a}-2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-5\overline{a}+7\overline{b}$.

22. $\overline{a}=\{-2;1;-4\}$, $\overline{b}=\{-3;7;6\}$, $\overline{c_1}=-2\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-3\overline{a}+2\overline{b}$.

23. $\overline{a}=\{-5;1;2\}$, $\overline{b}=\{-6;0;-7\}$, $\overline{c_1}=-3\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-4\overline{b}+6\overline{a}$.

24. $\overline{a}=\{9;-5;-3\}$, $\overline{b}=\{-7;-1;2\}$, $\overline{c_1}=-2\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c_2}=-3\overline{a}-5\overline{b}$.

25. $\overline{a}=\{-4;-2;-9\}$, $\overline{b}=\{0;1;-3\}$, $\overline{c_1}=-4\overline{b}+3\overline{a}$, $\overline{c_2}=-4\overline{a}+3\overline{b}$.

26. $\overline{a}=\{-2;1;-6\}$, $\overline{b}=\{1;-3;-8\}$, $\overline{c_1}=-5\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-2\overline{a}+5\overline{b}$.

27. $\overline{a}=\{-5;0;-8\}$, $\overline{b}=\{3;-1;-7\}$, $\overline{c_1}=-3\overline{a}+4\overline{b}$, $\overline{c_2}=-12\overline{b}+9\overline{a}$.

28. $\overline{a}=\{1;-3;-4\}$, $\overline{b}=\{-2;1;0\}$, $\overline{c_1}=-6\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{c_2}=-\overline{b}+3\overline{a}$.

29. $\overline{a}=\{-4;-2;7\}$, $\overline{b}=\{-5;0;3\}$, $\overline{c_1}=-\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-6\overline{b}+2\overline{a}$.

30. $\overline{a}=\{-2;0;5\}$, $\overline{b}=\{-1;3;-4\}$, $\overline{c_1}=-2\overline{a}+5\overline{b}$, $\overline{c_2}=-5\overline{a}+2\overline{b}$.

31. $\overline{a}=\{1;-2;-8\}$, $\overline{b}=\{-3;-7;1\}$, $\overline{c_1}=-4\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{c_2}=-9\overline{b}+12\overline{a}$.

Завдання 3. Знайти косинус кута між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$.

1. $A(-1;2;-3)$, $B(0;1;-2)$, $C(-3;4;-5)$.
2. $A(0;3;-6)$, $B(12;3;3)$, $C(-9;3;6)$.
3. $A(3;-2;-1)$, $B(-4;5;-2)$, $C(3;-2;1)$.
4. $A(-1;-2;-3)$, $B(-3;4;-6)$, $C(-1;1;-1)$.
5. $A(-4;2;0)$, $B(1;2;-4)$, $C(-3;-2;-1)$.
6. $A(-5;-3;1)$, $B(-5;2;0)$, $C(-6;4;-1)$.
7. $A(-3;7;5)$, $B(0;1;-2)$, $C(-2;-3;0)$.
8. $A(2;-4;-6)$, $B(0;-2;-4)$, $C(6;-8;-10)$.

9. $A(0;1;2)$, $B(-3;1;-2)$, $C(4;-1;1)$.
10. $A(-3;-3;-1)$, $B(1;-5;-2)$, $C(-4;-1;1)$.
11. $A(2;1;-1)$, $B(6;-1;-4)$, $C(4;2;1)$.
12. $A(-1;-2;1)$, $B(-4;-2;5)$, $C(-8;-2;2)$.
13. $A(-6;2;-3)$, $B(-6;3;-2)$, $C(-7;3;-3)$.
14. $A(0;0;-4)$, $B(-3;6;-1)$, $C(5;-10;1)$.
15. $A(-2;8;-1)$, $B(-4;-6;0)$, $C(2;-5;1)$.
16. $A(3;-6;-9)$, $B(0;3;-6)$, $C(9;-12;-15)$.
17. $A(0;-2;-4)$, $B(-8;-2;2)$, $C(-6;2;-4)$.
18. $A(-3;3;-1)$, $B(-5;1;-2)$, $C(-4;-1;-1)$.
19. $A(-4;-3;0)$, $B(0;-1;-3)$, $C(2;-4;-2)$.
20. $A(-1;-1;0)$, $B(2;-1;-4)$, $C(-8;1;1)$.
21. $A(-7;0;-2)$, $B(-7;-1;3)$, $C(8;1;2)$.
22. $A(-2;-3;-2)$, $B(-1;3;-1)$, $C(3;7;-3)$.
23. $A(-2;2;-7)$, $B(0;0;-6)$, $C(-2;-5;-7)$.
24. $A(1;-2;-3)$, $B(0;-1;-2)$, $C(3;-4;5)$.
25. $A(0;-3;6)$, $B(-9;-3;-6)$, $C(-12;-3;-3)$.
26. $A(-3;3;-1)$, $B(5;1;2)$, $C(-4;1;-3)$.
27. $A(-2;-1;1)$, $B(2;3;2)$, $C(0;0;-3)$.
28. $A(-1;-4;-1)$, $B(2;-4;-5)$, $C(-8;-4;0)$.
29. $A(0;-1;0)$, $B(0;-2;-1)$, $C(-1;-2;0)$.
30. $A(4;0;-4)$, $B(-1;-6;-7)$, $C(-1;-10;9)$.
31. $A(-2;-4;-6)$, $B(0;2;4)$, $C(6;-8;-10)$.

Завдання 4. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

1. $\overline{a}=3\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\overline{p}\,^\wedge\overline{q}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$.

2. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\overline{p}\,^\wedge\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

3. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\vec{b}=\overline{p}-3\overline{q}$, $|\overline{p}|=\dfrac{1}{4}$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\overline{p}\,^\wedge\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

4. $\overline{a}=\overline{p}+5\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=5$, $|\overline{q}|=\frac{1}{2}$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

5. $\overline{a}=2\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=4$, $|\overline{q}|=3$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

6. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=3$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

7. $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

8. $\overline{a}=\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=4\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=5$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

9. $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-4\overline{q}$, $|\overline{p}|=7$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

10. $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+4\overline{q}$, $|\overline{p}|=4$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

11. $\overline{a}=\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=5$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

12. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=4\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=7$, $|\overline{q}|=4$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

13. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=10$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

14. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=4$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

15. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=3$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

16. $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-3\vec{q}$, $|\overline{p}|=7$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

17. $\overline{a}=\overline{p}-3\overline{q}$, $\overline{b}=5\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=4$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{6}$.

18. $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=7\overline{p}-2\overline{q}$, $|\overline{p}|=\frac{1}{3}$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

19. $\overline{a}=\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=6\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=8$, $|\overline{q}|=3$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

20. $\overline{a}=3\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=10\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=5$, $|\overline{q}|=1$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

21. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=6\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=4$, $|\overline{q}|=\frac{1}{2}$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

22. $\overline{a}=\overline{q}-\overline{p}$, $\overline{b}=3\overline{p}+4\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=2{,}5$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{3\pi}{2}$.

23. $\overline{a}=\overline{p}-3\overline{q}$, $\overline{b}=7\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=3$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

24. $\overline{a}=3\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=3$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

25. $\overline{a}=\overline{p}-3\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}+\overline{q}$, $|\overline{p}|=6$, $|\overline{q}|=7$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

26. $\overline{a}=\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=5\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=5$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

27. $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}-4\overline{q}$, $|\overline{p}|=4$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

28. $\overline{a}=5\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=6\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=\frac{1}{4}$, $|\overline{q}|=\frac{1}{2}$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{4}$.

29. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}+3\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

30. $\overline{a}=5\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-3\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=2$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.

31. $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=3$, $|\overline{q}|=4$, $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Завдання 5. Встановити, чи компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{c}$.

1. $\overline{a}=\{-2;-3;-1\}$, $\overline{b}=\{1;0;1\}$, $\overline{c}=\{-2;-2;-2\}$.
2. $\overline{a}=\{-3;-2;-1\}$, $\overline{b}=\{-2;-3;-4\}$, $\overline{c}=\{-3;-1;1\}$.
3. $\overline{a}=\{-1;-5;-2\}$, $\overline{b}=\{1;-1;1\}$, $\overline{c}=\{-1;-1;-1\}$.
4. $\overline{a}=\{-1;1;3\}$, $\overline{b}=\{-3;-2;-1\}$, $\overline{c}=\{-2;-3;-4\}$.
5. $\overline{a}=\{-3;-3;-1\}$, $\overline{b}=\{-1;2;-1\}$, $\overline{c}=\{-1;-1;-1\}$.
6. $\overline{a}=\{-3;-1;1\}$, $\overline{b}=\{2;1;0\}$, $\overline{c}=\{-5;-2;1\}$.
7. $\overline{a}=\{-4;-3;-1\}$, $\overline{b}=\{-1;2;-1\}$, $\overline{c}=\{-2;-2;-2\}$.
8. $\overline{a}=\{-4;-3;-1\}$, $\overline{b}=\{-6;-7;-4\}$, $\overline{c}=\{-2;0;-1\}$.

9. $\bar{a}=\{-3;-2;-1\}$, $\bar{b}=\{-1;3;7\}$, $\bar{c}=\{-1;-2;-3\}$.

10. $\bar{a}=\{-3;-7;-2\}$, $\bar{b}=\{2;0;1\}$, $\bar{c}=\{-2;-2;-1\}$.

11. $\bar{a}=\{-1;2;-6\}$, $\bar{b}=\{-1;0;-1\}$, $\bar{c}=\{-2;6;-17\}$.

12. $\bar{a}=\{-6;-3;-4\}$, $\bar{b}=\{1;2;1\}$, $\bar{c}=\{-2;-1;-2\}$.

13. $\bar{a}=\{-7;-3;-4\}$, $\bar{b}=\{-1;-2;-1\}$, $\bar{c}=\{-4;-2;-4\}$.

14. $\bar{a}=\{-2;-3;-2\}$, $\bar{b}=\{-4;-7;-5\}$, $\bar{c}=\{-2;0;1\}$.

15. $\bar{a}=\{-5;-3;-4\}$, $\bar{b}=\{1;0;1\}$, $\bar{c}=\{-4;-2;-4\}$.

16. $\bar{a}=\{-3;-10;-5\}$, $\bar{b}=\{2;2;3\}$, $\bar{c}=\{-2;-4;-3\}$.

17. $\bar{a}=\{2;4;3\}$, $\bar{b}=\{-4;-3;-1\}$, $\bar{c}=\{-6;-7;-4\}$.

18. $\bar{a}=\{-3;-1;1\}$, $\bar{b}=\{-1;0;1\}$, $\bar{c}=\{-8;-3;2\}$.

19. $\bar{a}=\{-4;-2;-2\}$, $\bar{b}=\{3;3;3\}$, $\bar{c}=\{-2;-1;-2\}$.

20. $\bar{a}=\{-4;-1;-2\}$, $\bar{b}=\{-9;-2;-5\}$, $\bar{c}=\{-1;-1;1\}$.

21. $\bar{a}=\{-5;-3;-4\}$, $\bar{b}=\{-4;-3;-3\}$, $\bar{c}=\{-9;-5;-8\}$.

22. $\bar{a}=\{-3;-4;-2\}$, $\bar{b}=\{-1;-1;0\}$, $\bar{c}=\{-8;-11;-6\}$.

23. $\bar{a}=\{-4;1;6\}$, $\bar{b}=\{-1;3;7\}$, $\bar{c}=\{-2;1;4\}$.

24. $\bar{a}=\{-3;-1;0\}$, $\bar{b}=\{5;4;5\}$, $\bar{c}=\{-4;-2;-4\}$.

25. $\bar{a}=\{-3;0;-3\}$, $\bar{b}=\{-8;-1;-6\}$, $\bar{c}=\{-1;-1;1\}$.

26. $\bar{a}=\{-1;1;-4\}$, $\bar{b}=\{-1;0;-3\}$, $\bar{c}=\{-1;3;-8\}$.

27. $\bar{a}=\{-6;-3;-4\}$, $\bar{b}=\{1;2;1\}$, $\bar{c}=\{-2;-1;-2\}$.

28. $\bar{a}=\{-4;-1;-1\}$, $\bar{b}=\{9;4;9\}$, $\bar{c}=\{-6;-2;-6\}$.

29. $\bar{a}=\{7;-10;5\}$, $\bar{b}=\{0;2;1\}$, $\bar{c}=\{2;-4;1\}$.

30. $\bar{a}=\{3;-3;-3\}$, $\bar{b}=\{4;-7;-6\}$, $\bar{c}=\{-3;0;1\}$.

31. $\bar{a}=\{-7;-4;-6\}$, $\bar{b}=\{-2;-1;-1\}$, $\bar{c}=\{-19;-11;-17\}$.

Завдання 6. Обчислити об’єм тетраедра з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка побудована з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(-1;-3;-6)$, $A_2(-2;-2;-1)$, $A_3(1;0;-1)$, $A_4(4;-6;3)$.

2. $A_1(4;-2;-6)$, $A_2(-2;3;0)$, $A_3(10;-5;-8)$, $A_4(5;-2;4)$.

3. $A_1(-7;-2;-4)$, $A_2(-7;1;2)$, $A_3(-3;-3;-1)$, $A_4(4;-2;-1)$.

4. $A_1(-2;-1;-4)$, $A_2(1;-5;2)$, $A_3(7;3;-2)$, $A_4(6;3;-6)$.

5. $A_1(1;5;-2)$, $A_2(6;0;3)$, $A_3(-3;-6;3)$, $A_4(10;-6;-7)$.

6. $A_1(0;1;1)$, $A_2(2;-3;-5)$, $A_3(-1;5;9)$, $A_4(1;6;-3)$.

7. $A_1(-5;-2;0)$, $A_2(-2;-5;0)$, $A_3(-1;-2;-4)$, $A_4(1;-1;-1)$.

8. $A_1(-2;1;2)$, $A_2(-1;-2;-1)$, $A_3(-5;0;6)$, $A_4(10;-9;7)$.

9. $A_1(2;0;4)$, $A_2(1;-7;-1)$, $A_3(-4;8;4)$, $A_4(-1;4;-6)$.

10. $A_1(-14;-4;-5)$, $A_2(5;3;-2)$, $A_3(2;6;3)$, $A_4(2;-2;1)$.

11. $A_1(-1;-2;0)$, $A_2(-3;0;3)$, $A_3(-5;-2;-6)$, $A_4(-8;-4;9)$.

12. $A_1(-2;1;-2)$, $A_2(-1;-2;1)$, $A_3(-3;-2;-1)$, $A_4(4;-2;-5)$.

13. $A_1(-1;-1;-2)$, $A_2(1;-1;-3)$, $A_3(-2;2;-4)$, $A_4(1;0;2)$.

14. $A_1(-2;-3;-1)$, $A_2(-4;-1;2)$, $A_3(-6;-3;-7)$, $A_4(-7;-5;3)$.

15. $A_1(-1;-1;1)$, $A_2(-2;-3;-1)$, $A_3(-3;-2;-1)$, $A_4(-5;-9;8)$.

16. $A_1(-1;-5;7)$, $A_2(3;-6;-3)$, $A_3(2;-7;-3)$, $A_4(4;-8;12)$.

17. $A_1(3;-4;7)$, $A_2(-1;-5;4)$, $A_3(5;2;0)$, $A_4(-2;-5;-4)$.

18. $A_1(1;-2;3)$, $A_2(-4;1;0)$, $A_3(-2;-1;2)$, $A_4(-3;-4;-5)$.

19. $A_1(-4;1;-3)$, $A_2(2;-1;0)$, $A_3(0;5;-1)$, $A_4(-3;-2;6)$.

20. $A_1(-1;1;-1)$, $A_2(2;0;-3)$, $A_3(-2;-1;1)$, $A_4(-2;2;4)$.

21. $A_1(-1;-2;0)$, $A_2(-1;1;-2)$, $A_3(0;-1;1)$, $A_4(3;0;-1)$.

22. $A_1(-1;0;-2)$, $A_2(-1;-2;1)$, $A_3(-2;2;-1)$, $A_4(-2;-1;0)$.

23. $A_1(1;2;-3)$, $A_2(1;0;1)$, $A_3(-2;-1;6)$, $A_4(0;-5;-4)$.

24. $A_1(-3;-10;1)$, $A_2(2;-3;5)$, $A_3(6;0;3)$, $A_4(-1;1;-2)$.

25. $A_1(1;-2;-4)$, $A_2(1;2;4)$, $A_3(-3;0;1)$, $A_4(-7;3;-1)$.

26. $A_1(0;3;-1)$, $A_2(4;-1;-2)$, $A_3(-2;1;-5)$, $A_4(-3;-1;4)$.

27. $A_1(-1;-3;0)$, $A_2(-4;1;-2)$, $A_3(-3;0;-1)$, $A_4(4;-3;-5)$.

28. $A_1(2;1;1)$, $A_2(0;-3;-2)$, $A_3(-3;-1;4)$, $A_4(4;-7;-3)$.

29. $A_1(3;5;-6)$, $A_2(-2;-1;4)$, $A_3(0;3;1)$, $A_4(5;-2;8)$.

30. $A_1(-2;4;3)$, $A_2(-5;6;0)$, $A_3(1;-3;3)$, $A_4(10;8;-7)$.

31. $A_1(-1;1;-2)$, $A_2(-2;-1;-2)$, $A_3(-1;-1;-4)$, $A_4(-6;3;-8)$.

Глава 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

§ 1. ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА У ПРОСТОРІ

1.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії у просторі

Прямокутна система координат

Три взаємно перпендикулярні осі *Ox, Oy* та *Oz,* що мають спільний початок, точку O та однакову масштабну одиницю, утворюють ***прямокутну систему координат*.**

Відстань між двома точками. Ділення відрізка у даному співвідношенні

Якщо задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_1)$, то тоді ***відстань*** між ними задається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (3.1)$$

Нехай відрізок AB поділено точкою M у співвідношенні $\lambda > 0$:

$$\frac{AM}{MB} = \lambda\,,$$

тоді (рис. 22)

$$\overline{AM} = \lambda \overline{MB}\,.$$

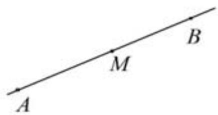


Рис. 22

Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$, то останню рівність можна переписати у вигляді рівностей координат векторів:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x);$$
$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y);$$
$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

звідки випливає, що

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\,;\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\,; \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\,. \qquad (3.2).$$

Формули (3.2) задають ***координати точки M, яка ділить відрізок AB у співвідношенні*** λ.

Зауважимо, що якщо $\lambda = 0$, то точки A та M збігаються, а якщо $\lambda < 0$, $(\lambda \neq -1)$, то M не належить відрізку AB.

1.2. Рівняння площини

Загальне рівняння площини. Рівняння першого ступеня відносно невідомих x, y та z

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.3}$$

де A, B, C, D – довільні числа та $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, називається ***загальним рівнянням площини***.

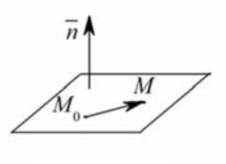


Рис. 23

Нехай у просторі $Oxyz$ задана площина α точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та вектором $\overline{n}(A, B, C)$, перпендикулярним до площини (рис. 23). Розглянемо вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, де $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Зауважимо, що вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{n}$ перпендикулярні, а тому $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.4}$$

Рівняння (3.4) називається ***рівнянням площини, що проходить через точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***перпендикулярно до вектора*** $\overline{n}(A, B, C)$.

Вектор $\overline{n}(A, B, C)$, перпендикулярний до площини, називається ***нормальним вектором площини***.

Зауважимо, що два загальних рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ та } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

визначають ту саму площину в тому випадку, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Приклад 3.1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1,2,3)$ та має нормальний вектор $\overline{n}(2,-5,1)$.

Розв'язання

Щоб скласти рівняння площини, слід застосувати формулу (3.4):

$$2 \cdot (x - (-1)) - 5 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 3) = 0$$

або

$$2x - 5y + z + 9 = 0.$$

Приклад 3.2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3,4,-1)$ паралельно двом векторам: $\overline{a}_1(1,-2,1)$ та $\overline{a}_2(2,4,-3)$.

Розв'язання.

Щоб знайти нормальний до площини вектор, помножимо векторно $\overline{a}_1$ на $\overline{a}_2$:

$$[\overline{a}_1, \overline{a}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + 8\overline{k}.$$

Як відомо, отриманий таким чином вектор є перпендикулярним до $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$, а тому він є перпендикулярним до шуканої площини. Отже, за нормаль візьмемо вектор

$$\overline{n} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + 8\overline{k}.$$

Підставляючи координати точки та вектора нормалі в рівняння (3.4), отримуємо

$$2 \cdot (x-3) + 5 \cdot (y-4) + 8 \cdot (z-(-1)) = 0;$$

$$2x + 5y + 8z - 18 = 0.$$

Неповні рівняння площини

Загальне рівняння площини (3.3) називається ***повним***, якщо всі його коефіцієнти є відмінними від нуля, тобто $A, B, C, D \neq 0$. Якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння називається ***неповним***.

Розглянемо різні випадки неповних рівнянь площини:

1. $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок координат;
2. $C = 0$, $Ax + By + D = 0$ – рівняння площини, що паралельна осі *Oz*;
3. $B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ – рівняння площини, що паралельна осі *Oy*;
4. $A = 0$, $By + Cz + D = 0$ – рівняння площини, що паралельна осі *Ox*;
5. $C = D = 0$, $Ax + By = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок координат паралельно осі *Oz*;
6. $B = D = 0$, $Ax + Cz = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок координат паралельно осі *Oy*;

7. $A = D = 0$, $By + Cz = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок координат паралельно осі *Ox*;

8. $A = B = 0$, $Cz + D = 0$ – рівняння площини, що паралельна площині *Oxy*;

9. $B = C = 0$, $Ax + D = 0$ – рівняння площини, що паралельна площині *Oyz*;

10. $A = C = 0$, $By + D = 0$ – рівняння площини, що паралельна площині *Oxz*;

11. $A = B = D = 0$, $Cz = 0$ – рівняння площини *Oxy;*

12. $A = C = D = 0$, $By = 0$ – рівняння площини *Oxz;*

13. $B = C = D = 0$, $Ax = 0$ – рівняння площини *Oyz.*

Рівняння площини у відрізках

Розглянемо повне рівняння площини (3.3). Оскільки $D \neq 0$, то, поділивши рівняння на D, отримаємо

$$\frac{x}{\frac{A}{D}} + \frac{y}{\frac{B}{D}} + \frac{z}{\frac{C}{D}} + 1 = 0$$

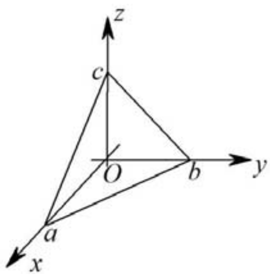


Рис. 24

або

$$\frac{x}{-\frac{A}{D}} + \frac{y}{-\frac{B}{D}} + \frac{z}{-\frac{C}{D}} = 1. \qquad (3.5)$$

Позначимо в останньому рівнянні

$$a = -\frac{A}{D},\ b = -\frac{B}{D},\ c = -\frac{C}{D},$$

тоді (3.5) набуває вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називається ***рівнянням площини у відрізках.***

Зауважимо, що числа a, b, c є величинами відрізків, які площина відсікає на осях координат *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно (рис. 24).

Рівняння площини, що проходить через три дані точки

Побудуємо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній

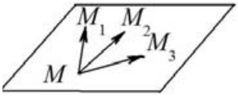


Рис. 25

прямій (рис. 25). Нехай точка $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Тоді вектори

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overline{M_2M} = (x - x_2, y - y_2, z - z_2),$$
$$\overline{M_3M} = (x - x_3, y - y_3, z - z_3)$$

належать одній площині, а тому вони є компланарними і їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overline{M_1M}, \overline{M_2M}, \overline{M_3M}\right) = 0.$$

Останню рівність можна подати у розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.7}$$

Рівняння (3.7) є ***рівнянням площини, що проходить через три дані точки, які не лежать на одній прямій***.

Приклад 3.3. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки: $M_1(1,0,-2)$, $M_2(3,7,1)$ та $M_2(-5,2,6)$.

Розв'язання.

Для знаходження рівняння площини застосуємо формулу (3.7):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-(-2) \\ 3-1 & 7-0 & 1-(-2) \\ -5-1 & 2-0 & 6-(-2) \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо

$$50(x-1) - 34y + 46(z+2) = 0 \Rightarrow \; 25x - 17y + 23z + 21 = 0.$$

Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задані дві площини своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Під ***кутом між площинами*** φ будемо розуміти один з двох двогранних кутів, утворених цими площинами. Кут φ збігається з кутом між нормалями до площин $\overline{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ та $\overline{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Отже,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3.8}$$

З аналогічних міркувань можна отримати *умови паралельності та перпендикулярності*:

$$\alpha_1 // \alpha_2 \Rightarrow \overline{n}_1 // \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \tag{3.9}$$

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Приклад 3.4. Встановити, чи є площини $2x-3y-z-3=0$ та $2x+y+z-1=0$ перпендикулярними.

Розв'язання.

Випишемо нормальні вектори до площин:

$$\overline{n}_1=(2,-3,-1),\ \overline{n}_2=(2,1,1).$$

Тоді, скориставшись умовами (3.9), маємо

$$(\overline{n}_1,\overline{n}_2)=2\cdot2+3\cdot(-1)+(-1)\cdot1=0.$$

Отже, дві площини є перпендикулярними.

Відстань від точки до площини

Знайдемо відстань від точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$. Ця відстань дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на напрямок нормалі до площини $\overline{n}=(A,B,C)$, де точка $M(x,y,z)$ – довільна точка площини (рис. 26). Враховуючи, що $\overline{MM}_0=(x_0-x,y_0-y,z_0-z)$, маємо

$$d=\left|np_{\overline{n}}\overline{MM}_0\right|=\frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.10}$$

Оскільки $Ax+By+Cz=-D$, з (3.10) отримуємо

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.11}$$

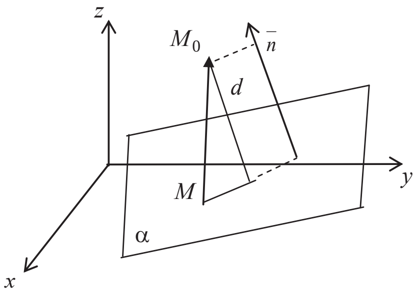


Рис. 26

Приклад 3.5. Знайти відстань від точки $M(1,2,3)$ до площини $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Розв'язання.

За формулою (3.11) маємо

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{4+1+4}} = 3.$$

1.3. Пряма лінія в просторі

Пряма лінія в просторі задається як перетин двох непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \qquad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.12}$$

Рівняння (3.12) визначають ***загальні рівняння прямої у просторі.***

Канонічні рівняння прямої

Як і у випадку прямої на площині, введемо поняття напрямного вектора.

Напрямним вектором прямої називається будь-який ненульовий вектор, паралельний даній прямій.

Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка прямої L, точка $M(x, y, z)$ – довільна точка прямої L, а вектор $\bar{q}(l, m, n)$ – напрямний вектор цієї прямої (рис. 27). Виходячи з означення напрямного вектора,

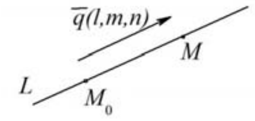


Рис. 27

маємо $\overline{M_0M} \,//\, \overline{q}(l,m,n)$. Оскільки координати паралельних векторів пропорційні, отримуємо рівність

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (3.13)$$

Рівняння (3.13) називаються ***канонічними рівняннями прямої.***

Будь-яку пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ будемо розуміти як рівність $ad=bc$. Рівність нулю одного зі знаменників в канонічному рівнянні означає рівність нулю відповідного чисельника.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

У випадку, коли пряма проходить через дві дані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, вектор $\overline{q}=\overline{M_2M_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ можна вважати напрямним, і рівняння (3.13) набуде вигляду

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.14)$$

Отримані рівняння (3.14) ***є рівняннями прямої, що проходить через дві дані точки:*** $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Параметричні рівняння прямої

Введемо параметр t таким чином:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

Розв'язуючи останні рівняння відносно x,y,z, отримуємо ***параметричні рівняння прямої, що проходить через точку*** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ***та має напрямний вектор*** $\overline{q}=(l,m,n)$***:***

$$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0, \\ z=nt+z_0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Перехід від загальних рівнянь прямої до канонічних

Нехай пряма задається загальними рівняннями (3.12)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Для того щоб отримати канонічні рівняння прямої, необхідно знати напрямний вектор $\overline{q}$ прямої та точку M_0, що лежить на ній. Рівняння (3.12) визначають площини з нормальними векторами $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ та $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ відповідно (рис.7). Оскільки пряма L перпендикулярна до векторів $\overline{n}_1$ та $\overline{n}_2$, то вектор $\left[\overline{n}_1, \overline{n}_2\right]$ буде напрямним до прямої L. Отже,

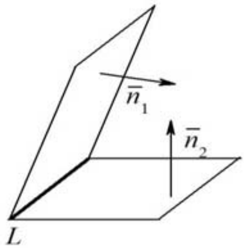


Рис. 28

$$\overline{q} = \left[\overline{n}_1, \overline{n}_2\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Координати точки M_0 можна отримати із системи (3.12), надавши одній з координат довільне значення, наприклад $z_0 = 0$. Розв’язуючи отриману систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0, \end{cases}$$

знаходимо координати x_0, y_0.

Приклад 3.6. Записати канонічні рівняння прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Нормальні вектори до площин – $\overline{n}_1(1,-1,3)$ та $\overline{n}_2(2,1,1)$, їхній векторний добуток, а отже, і напрямний вектор шуканої прямої

$$\overline{q} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}.$$

Поклавши $z_0 = 0$, розв’язуємо систему

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ 2x + y - 2 = 0, \end{cases} \quad x_0 = 1,\ y_0 = 0.$$

Тепер запишемо канонічні рівняння прямої (3.13), що проходить через точку $M_0(1,0,0)$ паралельно вектору $\overline{q} = (-4,5,3)$. Відповідь:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}.$$

Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності прямих

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Під ***кутом між двома прямими*** будемо розуміти кут між їх напрямними векторами.

Виходячи з цього, отримуємо формулу для обчислення косинусу кута між прямими, а також умови перпендикулярності та паралельності:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{q}_1 \cdot \overline{q}_2}{|\overline{q}_1| \cdot |\overline{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + +n_2^2}}; \tag{3.16}$$

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \overline{q}_1 // \overline{q}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}; \tag{3.17}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{q}_1 \perp \overline{q}_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Відстань від точки до прямої в просторі

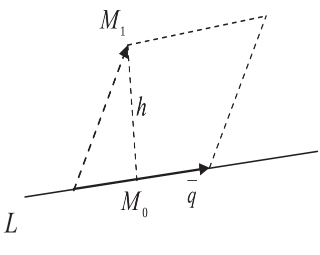


Рис. 29

Нехай пряма задана рівняннями

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ не належить даній прямій. Відстань h між точкою M_1 та прямою L дорівнює висоті паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_0 M_1}$ та $\overline{q}$ (рис. 29):

$$h = \frac{S}{|\overline{q}|} = \frac{\left|\left[\overline{M_0 M_1}, \overline{q}\right]\right|}{|\overline{q}|}. \tag{3.18}$$

1.4. Взаємне розташування прямої та площини

Кут між прямою та площиною, умови паралельності та перпендикулярності

Розглянемо площину та пряму, які відповідно задані рівняннями

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3.19)$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (3.20)$$

Під ***кутом між прямою та площиною*** розуміють кут між прямою та її проекцією на площині.

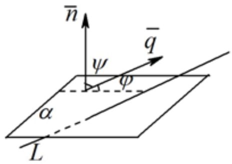


Рис. 30

Через ψ позначимо кут між векторами $\bar{n} = (A, B, C)$ та $\bar{q} = (l, m, n)$ (рис. 30), тоді

$$\cos\psi = \frac{(\bar{n}, \bar{q})}{|\bar{n}||\bar{q}|}.$$

Оскільки $\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\psi$, запишемо формулу

$$\sin\varphi = \frac{(\bar{n}, \bar{q})}{|\bar{n}||\bar{q}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (3.21)$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих випливають з відповідних умов для векторів:

$$\text{пл.}\alpha // \text{пр.}L \Leftrightarrow \bar{n} \perp \bar{q} \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0; \qquad (3.22)$$

$$\text{пл.}\alpha \perp \text{пр.}L \Leftrightarrow \bar{n} // \bar{q} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Приклад 3.7. Перевірити, чи перпендикулярні пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-5}{1}$ та площина $-6x + 9y - 3z + 10 = 0$.

Розв'язання.

Перевіримо виконання умови перпендикулярності прямої та площини (3.22):

$$\frac{-6}{2} = \frac{9}{-3} = \frac{-3}{1}.$$

Отже, пряма та площина перпендикулярні.

Умова належності прямої площині

Пряма (3.20) належить площині (3.19) у випадку, якщо пряма та площина паралельні, а також, якщо будь-яка точка прямої належить площині, зокрема точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тобто маємо умови

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (3.23)$$

Точка перетину прямої та площини

Для того щоб знайти точку перетину прямої (3.20) та площини (3.19), перепишемо рівняння (3.20) у параметричному вигляді (3.15). Отримані вирази для x, y та z підставимо у рівняння площини (3.19), звідки йде відповідне значення параметра t. Знаючи t, визначимо координати точки перетину з рівнянь (3.15).

Приклад 3.8. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ та площини $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Розв'язання

Параметричні рівняння даної прямої мають вигляд

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \end{cases}$$

Підставляємо вирази для x, y та z в рівняння площини:

$$2(t+1) + 3(-2t - 1) + 6t - 1 = 0,\ t = 1.$$

Отже, координати точки такі:

$$x_0 = 1 + 1 = 2,\ y_0 = -2 \cdot 1 - 1 = -3,\ z_0 = 6 \cdot 1 = 6.$$

Маємо відповідь: $M_0(2, -3, 6)$.

§ 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

2.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині

Прямокутна система координат. Перетворення координат

Дві взаємно перпендикулярні осі *Ox* та *Oy*, що мають спільний початок точку *O* та однакову масштабну одиницю, утворюють ***прямокутну систему координат*.**

При розв’язанні деяких задач разом з даною системою координат необхідно вводити інші системи координат. Виникає задача: знаючи координати точки в одній (старій) системі координат, знайти координати цієї ж точки в іншій (новій) системі координат.

Під ***паралельним перенесенням осей координат*** будемо розуміти перехід до нової системи координат, при якому змінюється розташування початку координат, а напрямок осей та масштабна одиниця залишаються незмінними.

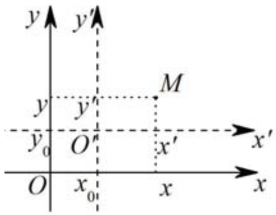


Рис. 31

Нехай задана прямокутна система координат Oxy та точка M з координатами x, y в цій системі координат. Перенесемо початок координат в точку $O'(x_0, y_0)$, отримуючи нову прямокутну систему координат $O'x'y'$ (рис. 31). Нехай точка M має координати x', y' в новій системі координат $O'x'y'$. Тоді отримуємо зв'язок між старими та новими координатами у вигляді

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Формули (3.24) є ***формулами перетворення координат при паралельному перенесенні.***

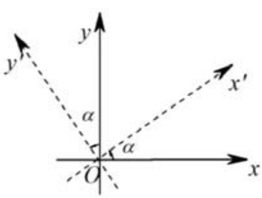


Рис. 32

Під ***поворотом осей координат*** будемо розуміти таке перетворення координат, при якому обидві осі повертаються на той самий кут, а початок координат та масштаб залишаються незмінними (рис. 32).

Формули перетворення координат при повороті на кут α мають такий вигляд:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Приклад 3.9. Визначити координати точки $M(3{,}5)$ в новій системі координат, початок якої знаходиться в точці $(-2{,}1)$, а осі паралельні старим.

Розв'язання

Застосовуємо формули (3.24):

$$\begin{cases} x' = 3 + 2 = 5, \\ y' = 5 - 1 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $M(5{,}4)$.

Відстань між двома точками. Ділення відрізка у даному співвідношенні. Площа трикутника

Якщо задано точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, тоді відстань між ними задається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{3.25}$$

Нехай відрізок AB поділено точкою M у співвідношенні $\lambda > 0$:

$$\frac{AM}{MB} = \lambda,$$

тоді

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\,. \tag{3.26}$$

Формули (3.26) задають ***координати точки*** M, ***яка ділить відрізок*** AB ***у співвідношенні*** λ.

Якщо $\lambda = 0$, то точки A та M збігаються, якщо $\lambda < 0 (\lambda \neq -1)$, то M не належить відрізку AB.

Якщо трикутник має координати $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, то його ***площу*** можна обчистити за формулою

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

2.2. Рівняння прямої на площині

В даному розділі не будемо зосереджуватися на доведеннях, оскільки вони повторюють аналогічні міркування попереднього параграфа.

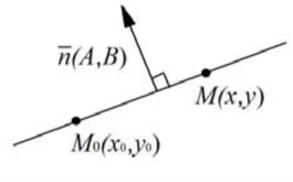


Рис. 33

Загальне рівняння прямої Розглянемо рівняння першого степеня відносно x та y

$$Ax+By+C=0, \tag{3.28}$$

де A,B,C довільні числа, причому $A^2+B^2\neq 0$. Рівняння (3.28) називається ***загальним рівнянням прямої***.

Рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{3.29}$$

називається ***рівнянням прямої, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0,y_0)$ ***перпендикулярно заданому вектору*** $\overline{n}=(A,B)$ (рис. 33).

Вектор $\overline{n}=(A,B)$, перпендикулярний до прямої, називається вектором ***нормалі***, або ***нормальним вектором прямої***.

Неповні рівняння прямої

Загальне рівняння прямої називається ***повним***, якщо $A,B,C\neq 0$. Якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння називається ***неповним***.

Розглянемо різні випадки неповних рівнянь прямої:

1. $C=0$, $Ax+By=0$ – рівняння прямої, що проходить через початок координат;
2. $B=0$, $Ax+C=0$ – рівняння прямої, паралельної осі *Oy*;
3. $A=0$, $By+C=0$ – рівняння прямої, паралельної осі *Ox*;
4. $B=0$, $C=0$, $Ax=0$ – визначає вісь *Oy;*
5. $A=0, C=0$, $By=0$ – визначає вісь *Ox*.

Рівняння прямої у відрізках

Перепишемо повне рівняння прямої

$$Ax+By+C=0$$

у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (3.30)$$

де a та b позначені як

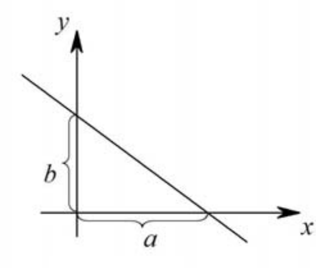


Рис. 34

$$a=\frac{-C}{A},\ b=\frac{-C}{B}.$$

Отримане рівняння (3.30) називається ***рівнянням прямої «у відрізках»***.

Числа a і b відповідають величинам відрізків, що пряма відсікає на осях OX та OY (рис. 34). Дійсно, поклавши $x=0$, отримуємо $y=b$. Отже, координати точки перетину з віссю OY – $(0,b)$. Аналогічно з віссю OX – $(a,0)$.

Приклад 3.10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,4)$ та відтинає на координатних осях ненульові відрізки рівної довжини.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої у відрізках (3.30). З умови задачі маємо $|a|=|b|$. Оскільки точка належить прямій, то виконується рівність $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$, $a\neq 0$. Отже, для знаходження a та b маємо такі співвідношення:

$$\begin{cases} b=a \\ b+4a=ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a \\ 5a=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} b=-a \\ b+4a=ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ 3a=-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \end{cases}.$$

Відповідь: $a=5, b=5$; $a=-3, b=3$.

Канонічне рівняння прямої

Будь-який ненульовий вектор $\bar{q}=(l,m)$, паралельний даній прямій, називається ***напрямним вектором прямої***.

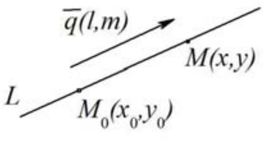


Рис. 35

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\overline{q}$ (рис. 35), має вигляд

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad (3.31)$$

і називається ***канонічним рівнянням прямої***.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через дві дані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

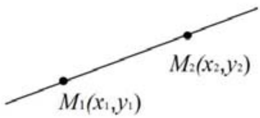


Рис. 36

(рис. 36). Як і в просторовому випадку, візьмемо за напрямний вектор до прямої вектор $\overline{q} = \overline{M_2M_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Оскільки пряма проходить через точку M_1, відповідне канонічне рівняння буде мати вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3.32)$$

Рівняння (3.32) називається ***рівнянням прямої, що проходить через дві дані точки:*** $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Приклад 3.11. Пряма проходить через точки $A(2,3)$, $B(-4,-1)$ та перетинає вісь OY в точці C. Знайти координати точки C.

Розв'язання

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві дані точки (3.32):

$$\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-6} = \frac{y-3}{-4} \Leftrightarrow 2x - 3y + 5 = 0.$$

Оскільки точка C належить осі OY, то її абсциса дорівнює 0. Поклавши в рівнянні прямої $x = 0$, отримуємо $y = \frac{5}{3}$.

Отже, маємо точку $C\left(0, \frac{5}{3}\right)$.

Параметричні рівняння прямої

Розв'язавши канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t$$

відносно x, y, отримуємо **параметричними *рівняннями прямої, що проходить через точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***та має напрямний вектор*** $\bar{q}=(l, m)$.

$$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Перетворимо канонічне рівняння прямої (3.31) до вигляду

$$y-y_0=\frac{m}{l}(x-x_0),$$

Звідки, увівши позначення $k=\frac{m}{l}$, отримуємо

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{3.34}$$

Кутом нахилу α ***прямої до осі Ox*** будемо називати кут, що відкладається від додатного напрямку осі OX до прямої проти годинникової стрілки (рис. 37).

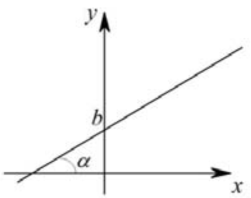


Рис. 37

Можна показати, що k в рівнянні (3.34) дорівнює $\mathrm{tg}\alpha$, де α – кут нахилу прямої до осі Ox. Число

$$k=\mathrm{tg}\alpha \tag{3.35}$$

називається ***кутовим коефіцієнтом*** прямої, а рівняння (3.34) – ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** k***, що проходить через дану точку*** $M_0(x_0, y_0)$.

Розкривши дужки в рівнянні (3.34), неважко отримати таке рівняння:

$$y=kx+b, \tag{3.36}$$

де через b позначено вираз y_0-kx_0. Рівняння (3.36) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** k. Відмітимо, що b у виразі (3.36) дорівнює ординаті точки перетину прямої з віссю OY (рис. 37).

Якщо пряма паралельна осі OX, то $\alpha = 0$, звідки $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Отримуємо рівняння $y = b$. У випадку, коли пряма перпендикулярна осі OX, тобто $\alpha = \frac{\pi}{2}$ та $\operatorname{tg}\alpha$ не існує, маємо пряму $x = a$.

Приклад 3.12. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A\left(-2, \frac{2}{5}\right)$ та утворює з віссю OX кут, що дорівнює $\operatorname{arctg} 3$.

Розв'язання.

Виходячи з формули (3.35), отримуємо $k = 3$. Тоді рівняння прямої, застосовуючи формулу (3.34), записуємо як

$$y - \frac{2}{5} = 3(x+2) \Leftrightarrow 15x - 5y + 32 = 0.$$

Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

а) нехай дві прямі задано загальними рівняннями

$$L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Нормалі до заданих прямих відповідно мають вигляд $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$. Кут між прямими L_1 та L_2 – це кут між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}$ та $\overrightarrow{n_2}$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.37}$$

Аналогічно отримуємо умови паралельності та перпендикулярності прямих:

$$L_1 \,//\, L_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \,//\, \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \tag{3.38}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

б) нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Кут між прямими в цьому випадку збігається з кутом між напрямними векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{q}_1 \cdot \overline{q}_2}{\left|\overline{q}_1\right| \cdot \left|\overline{q}_2\right|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \quad . \tag{3.39}$$

Умови паралельності та перпендикулярності отримуємо у вигляді

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \overline{q}_1 // \overline{q}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}; \tag{3.40}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{q}_1 \perp \overline{q}_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0.$$

в) нехай прямі задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом

$$L_1 : y = k_1 x + b_1;$$

$$L_2 : y = k_2 x + b_2.$$

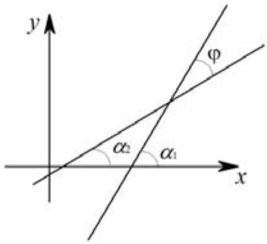


Рис. 38

Для того щоб отримати формулу для обчислення кута між прямими, позначимо кути нахилу прямих L_1 та L_2 через α_1 та α_2 (рис. 38). Тоді $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Якщо $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2 \mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Отже,

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{3.41}$$

Якщо у формулі (3.41) поміняти місцями k_1 та k_2, то отримаємо суміжний кут. Якщо ж треба обчислити гострий кут між прямими, то права частина формули (3.41) береться за модулем

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Умови паралельності та перпендикулярності для даного випадку отримуємо з наступних міркувань. Якщо прямі L_1 та L_2 паралельні, то $\varphi = 0$, та з формули (3.41) $k_2 - k_1 = 0$. Отже,

$$L_1 // L_2 \Rightarrow k_1 = k_2. \tag{3.42}$$

У випадку, коли L_1 та L_2 перпендикулярні, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ та $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$.

Звідси $$k_2 = \mathrm{tg}(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{k_1}.$$

Таким чином, отримуємо умову перпендикулярності прямих у вигляді

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1. \qquad (3.43)$$

Приклад 3.13. При яких значеннях α прямі $2x - 3y + 4 = 0$ і $\alpha x - 6y + 7 = 0$ паралельні та перпендикулярні?

Розв'язання

Оскільки рівняння задано в загальному вигляді, то застосуємо умови (3.38)

- паралельності:

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \alpha = 4;$$

- перпендикулярності:

$$2\alpha + 18 = 0 \Rightarrow \alpha = -9.$$

Приклад 3.14. Знайти кут між прямими $y = 2x - 3$, $y = \frac{1}{2}x + 5$.

Розв'язання.

Випишемо кутові коефіцієнти прямих

$$k_1 = 2,\ k_2 = \frac{1}{2}.$$

Тоді за формулою (3.41)

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},\ \varphi = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} \approx 37^\circ.$$

Відстань від точки до прямої

Нехай задана пряма $L:\ Ax + By + C = 0$ та точка $M_0(x_0, y_0)$, що не належить прямій (рис. 39). Тоді відстань d від точки M_0 до прямої L обчислюється за формулою

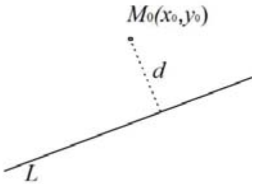


Рис. 39

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.44)$$

Приклад 3.15. Знайти відстань від точки $M_0(1,-1)$ до прямої $3x+4y+6=0$.

Розв'язання

За формулою (3.44) отримуємо

$$d == \frac{\left|3\cdot 1+4\cdot(-1)+6\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.$$

§ 3. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

Лінії, що визначаються рівнянням другого порядку відносно поточних координат

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (3.45)$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому $A^2+B^2+C^2\neq 0$, називаються *лініями (кривими)* другого порядку.

Розглянемо найпростіші рівняння ліній другого порядку.

3.1. Коло

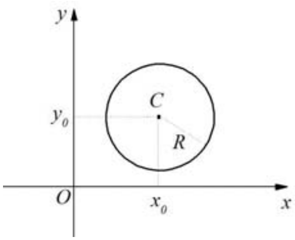


Рис. 40

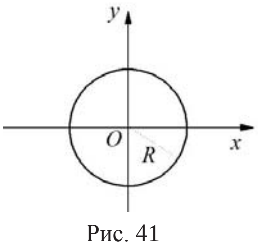


Рис. 41

Колом називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від деякої точки, центра кола, на задану відстань, що називається радіусом кола.

Нехай точка C є центром кола, $R>0$ – радіус кола. В деякій прямокутній системі координат Oxy центр кола нехай має координати x_0, y_0, а точка $M(x,y)$ є довільною точкою кола. Тоді з умови $CM=R$, за формулою (3.2), отримуємо рівняння

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

звідки

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (3.46)$$

Рівняння (3.46) – ***рівняння кола з центром у точці*** $C(x_0, y_0)$ ***радіуса*** R (рис. 40).

У випадку, коли $x_0 = 0, y_0 = 0$ (рис. 41), отримуємо *канонічне рівняння кола*:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Приклад 3.16. Визначити центр та радіус кола $x^2 + y^2 - 2x +$ $+ 4y - 20 = 0$ побудувати його графік.

Розв'язання.

Перегрупуємо доданки так, щоб наступним кроком можна було виділити повні квадрати:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0,$$

звідки

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 20 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Отримане рівняння є рівнянням кола з центром у точці $C(1,-2)$ та радіусом $R = 5$ (рис. 21).

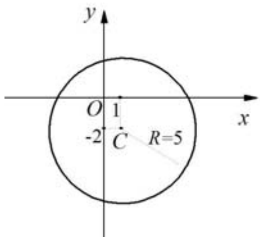


Рис. 42

3.2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок площини, що називаються фокусами, є величиною постійною, більшою, ніж відстань між фокусами.

Позначимо фокуси як F_1 та F_2, відстань між ними – як $2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпсу до фокусів – як $2a$. За визначенням маємо $2a > 2c$ та $a > c$. Розглянемо таку прямокутну систему координат, в якій фокуси лежать на осі абсцис, а початок координат розділяє відрізок F_1F_2 навпіл.

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка еліпса, r_1, r_2 – відстані від точки M до фокусів F_1 та F_2 (фокальні радіуси) (рис. 43).

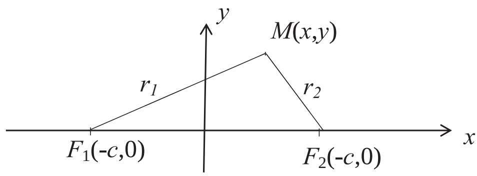


Рис. 43

Зауважимо, що

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{3.47}$$

Застосуємо формулу відстані між двома точками (3.25):

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \; r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

звідки, враховуючи (3.47), маємо

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо останню рівність до квадрата

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

та перепишемо її у вигляді

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Підносячи до квадрата отриманий вираз, маємо

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

або

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) - a^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = 0. \tag{3.48}$$

Введемо позначення

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{3.49}$$

Тоді з виразу (3.48) отримуємо

$$x^2b^2 - a^2b^2 + a^2y^2 = 0.$$

Перепишемо останню рівність як

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.50)$$

Рівняння (3.50) – ***канонічне рівняння еліпса***.

Досліджуючи отримане рівняння, побудуємо криву (рис. 44).

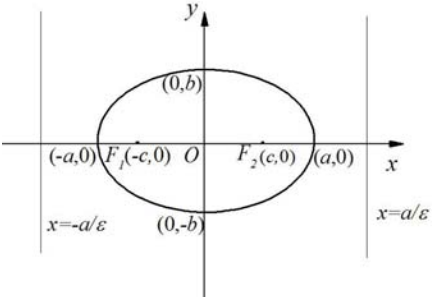


Рис. 44

Точки $(-a,0)$, $(a,0)$, $(0,-b)$, $(0,b)$ називаються ***вершинами еліпса,*** величини a та b – відповідно ***великою та малою півосями***, $2a$ та $2b$ – ***великою та малою осями***.

Відношення половини фокусної відстані до довжини більшої півосі називається ***ексцентриситетом еліпса***:

$$\varepsilon=\frac{c}{a},\ \ 0<\varepsilon<1.$$

Геометричний зміст ексцентриситету. При малому значенні ε числа a та b практично рівні. Дійсно, з виразу (3.49) маємо

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Якщо $\varepsilon=0$, то $a=b$, і еліпс перетворюється в коло. Якщо ж ε близьке до 1, то b набагато менше, ніж a і еліпс буде сплющений.

Зауважимо, що фокальні радіуси r_1 та r_2 точки $M(x,y)$ задовольняють формули:

$$r_1=a+\varepsilon x,\ \ r_2=a-\varepsilon x.$$

Дві прямі, перпендикулярні осі OX і розташовані симетрично відносно центра еліпса на відстані a/ε, називаються ***директрисами***:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

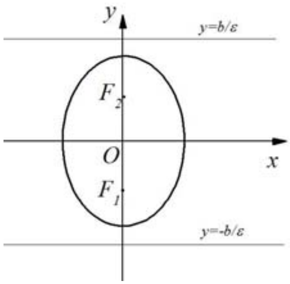


Рис. 45

Зауваження. Раніше ми припускали, що $a > b$. Якщо ж $a < b$ (рис. 45), то більша вісь $2b$ лежить на осі OY, а менша вісь $2a$ – на осі Ox. Фокуси такого еліпса знаходяться в точках $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, де $c^2 = \sqrt{b^2 - a^2}$. Ексцентриситет та директриси такого еліпсу визначаються формулами $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$ та $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$.

Фокально-директоріальна властивість еліпса: відношення відстані будь-якої точки $M(x, y)$ кривої до одного з фокусів до відстані від цієї ж точки до відповідної до цього фокуса директриси – величина постійна та дорівнює ексцентриситету:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Зауваження. Рівняння

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

задає еліпс з центром в точці $M(x_0, y_0)$ та півосями a та b, паралельними осям координат Ox, Oy відповідно.

Приклад 3.17. Звести до канонічного вигляду криву

$$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0,$$

побудувати її графік та визначити основні характеристики.

Розв'язання.

Застосовуючи метод виділення повних квадратів, виконаємо такі перетворення:

$$4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32 = 0,$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 3(y^2 + 4y + 4) - 12 - 32 = 0,$$

$$4(x - 1)^2 + 3(y + 2)^2 = 48$$

або

$$\frac{(x - 1)^2}{12} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1.$$

Зауважимо, що дане рівняння визначає еліпс з центром у точці $(1,-2)$.

Виконаємо паралельний перенос системи координат (3.24):

$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 2. \end{cases} \tag{3.51}$$

Початок нової системи координат буде збігатися з точкою $O'(1,-2)$. В новій системі координат $O'x'y'$ рівняння еліпса має канонічний вигляд:

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{16} = 1.$$

Визначимо основні характеристики отриманого еліпса в системі координат $O'x'y'$: півосі – $a = 2\sqrt{3}, b = 4$, фокуси $F_1(0,-2)$, $F_2(0,2)$, $(c = \sqrt{16-12} = 2)$, ексцентриситет – $\varepsilon = \frac{1}{2}$, рівняння директрис $y' = \pm 8$. Якщо повернутися до початкової системи координат Oxy, то, використовуючи зв'язок (3.51), отримуємо координати фокусів та рівняння директрис у цій системі координат: $F_1(1,-4), F_2(1,0)$, $y = 6, y = -10$.

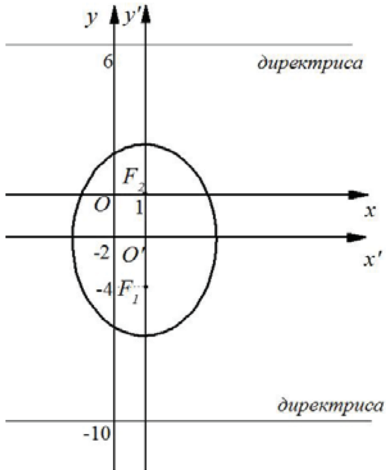


Рис. 46

3.3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, для яких модуль різниці до двох даних точок, що називаються фокусами, – величина постійна, менша ніж відстань між фокусами.

Позначимо фокуси як F_1 та F_2, відстань між фокусами – як $2c$, модуль різниці відстаней до довільної точки – як $2a$.

Розглянемо таку прямокутну систему координат, у якій фокуси лежать на осі абсцис, а початок координат ділить відрізок F_1F_2 навпіл.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи, r_1 та r_2 – відстані від цієї точки до фокусів (фокальні радіуси), тоді

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Виконуючи з останньої рівності дії аналогічні тим, що були виконані при отриманні рівняння еліпсу, знаходимо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.52)$$

Рівняння (3.52) – *канонічне рівняння гіперболи*.

При отриманні рівняння гіперболи було введено позначення

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (3.53)$$

Точки $(-a,0)$, $(a,0)$ називаються ***вершинами гіперболи***, величини a та b – відповідно ***дійсною та уявною півосями***, $2a$ та $2b$ – ***дійсною та уявною осями***.

Відношення половини фокусної відстані до довжини дійсної півосі називається ***ексцентриситетом гіперболи***:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1.$$

Геометричний зміст ексцентриситету. Виходячи з означення ексцентриситету та (3.30), запишемо таку рівність:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Звідси випливає висновок, що чим менше ε, тим менше $\frac{b}{a}$, тобто тим більше витягнутий основний прямокутник гіперболи.

Прямі $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ називаються ***асимптотами гіперболи***.

Дві прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і розташовані симетрично відносно її центра на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$, називаються ***директрисами гіперболи***:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

Досліджуючи рівняння гіперболи (3.29), побудуємо її графік (рис. 47).

Фокальні радіуси гіперболи можна знайти за формулами

$$r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = -a + \varepsilon x,\ x > 0,$$

$$r_1 = -a + \varepsilon x,\ r_2 = a - \varepsilon x,\ x < 0.$$

Фокально-директоріальна властивість гіперболи: відношення відстані від будь-якої точки $M(x, y)$ гіперболи до одного з фокусів до відстані від цієї ж точки до відповідної до цього фокуса директриси – величина постійна та дорівнює ексцентриситету:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

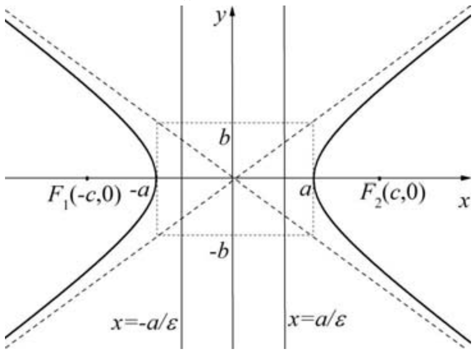


Рис. 47

Зауваження. Поряд з гіперболою $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ введемо до розгляду так звану спряжену до неї гіперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Дійсна ті уявна оісі даної гіперболи – відповідно $2b$ та $2a$. Фокуси розташовані в точках $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, ексцентриситет задовольняє формулу $\varepsilon=\frac{c}{b}$. Рівняння асимптот спряженої гіперболи мають вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$, рівняння директрис – $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ (рис. 48).

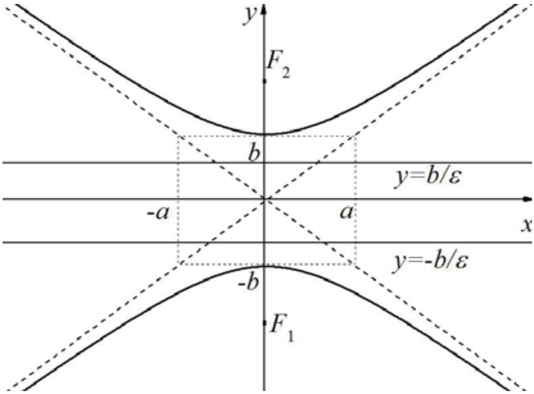


Рис. 48

Гіпербола, рівняння якої має вигляд

$$x^2-y^2=a^2,$$

називається ***рівносторонньою***.

Зауваження. Рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

визначає гіперболу з центром у точці $C(x_0,y_0)$.

Приклад 3.18. Звести до канонічного вигляду криву

$$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0,$$

побудувати її графік та визначити основні характеристики.

Розв'язання.

Перегрупуємо доданки та виділимо повні квадрати:

$$9(x^2+10x+25)-16(y^2-2y+1)-225+16-367=0;$$
$$9(x+5)^2-16(y-1)^2=576;$$
$$\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1.$$

Отримане рівняння є рівнянням гіперболи. Перенесемо початок системи координат в точку $O'(-5{,}1)$ паралельним переносом:

$$\begin{cases} x' = x+5, \\ y' = y-1. \end{cases}$$

У прямокутній системі координат $O'x'y'$ рівняння гіперболи набуде канонічного вигляду:

$$\frac{x'^2}{64}-\frac{y'^2}{36}=1.$$

Основні характеристики даної гіперболи в системі координат $O'x'y'$: півосі – $a=8$, $b=6$; ексцентриситет $\varepsilon=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ ($c=\sqrt{64+36}=10$); координати фокусів $F_1(-10,0)$, $F_2(10,0)$; рівняння директрис $x'=\pm\frac{32}{5}$; рівняння асимптот $y'=\pm\frac{3}{4}x'$. Повертаючись до початкової системи координат Oxy, отримуємо фокуси $F_1(-15{,}1)$, $F_2(5{,}1)$, рівняння директрис $x=\frac{7}{5}=1{,}4$, $x=-\frac{57}{5}=-11{,}4$, рівняння асимптот $3x+4y+11=0$, $3x-4y+19=0$.

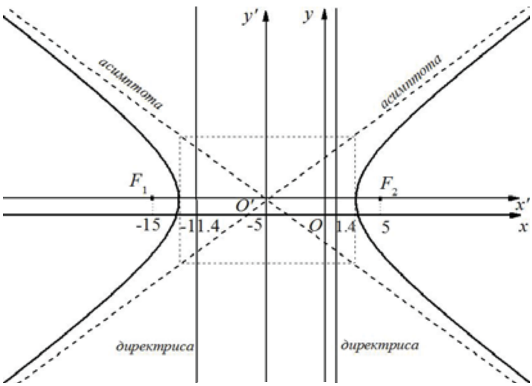


Рис. 49

3.4. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, рівно віддалених від точки, що називається *фокусом*, та прямої, що називається *директрисою*.

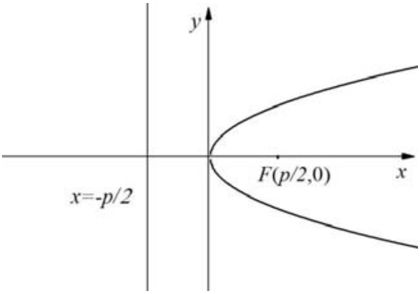


Рис. 50

Розглянемо таку прямокутну систему координат, коли вісь Ox проходить через фокус перпендикулярно директрисі в напрямку від директриси до фокуса. Початок координат розташований посередині між директрисою та фокусом (рис. 50).

Нехай точка $M(x,y)$ є точкою на параболі. Позначимо через r відстань від точки $M(x,y)$ до фокуса, а через d – відстань від точки $M(x,y)$ до директриси. Нехай відстань від фокуса до директриси дорівнює p, тоді координати фокусу визначатимуться як $F(\frac{p}{2},0)$, а рівняння директриси – як

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Згідно з означенням параболи маємо $r=d$. Оскільки з формули (3.25)

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \text{ та } d=\frac{p}{2}+x,$$

маємо
$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x.$$

Підносячи до квадрата останню рівність та виконуючи перетворення

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{p^2}{4}+px+x^2 \Rightarrow x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=\frac{p^2}{4}+px+x^2,$$

отримуємо рівняння параболи

$$y^2 = 2px. \qquad (3.54)$$

Рівняння (3.54) – ***канонічне рівняння параболи.***

Геометричний зміст параметра p. Параметр $p > 0$ параболи характеризує ширину області, що обмежена параболою.

Відстань r від точки $M(x, y)$ до фокуса називається ***фокальним радіусом***.

Зауваження. Разом з параболою, що задається рівнянням (3.54), введемо до розгляду такі параболи (рис. 51):

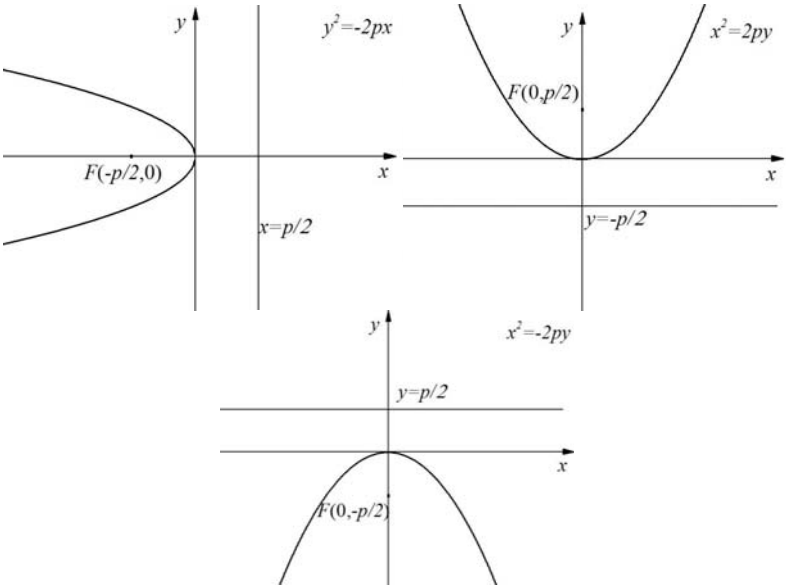


Рис. 51

Зауваження. Рівняння

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

є рівнянням параболи з вершиною в точці $C(x_0, y_0)$.

Приклад 3.19. Звести до канонічного вигляду криву $x^2 - 12x + 6y + 42 = 0$, побудувати її графік та визначити основні характеристики.

Розв'язання.

Виділимо повний квадрат у правій частині рівняння:

$$(x^2-12x+36)+6y+42-36=0\Rightarrow$$

$$(x-6)^2+6y+6=0\Rightarrow(x-6)^2=-6(y+1).$$

Отже, маємо параболу вершина якої знаходиться в точці $O'(6,-1)$. Паралельним переносом перенесемо початок координат у точку O':

$$\begin{cases} x'=x-6, \\ y'=y+1. \end{cases}$$

Тоді рівняння параболи набуде канонічного вигляду

$$x'^2=-6y'.$$

Параметр отриманої параболи $p=3$, фокус $F(0,-3/2)$, рівняння директриси $y'=3/2$. У початковій системі координат Oxy фокус $F(6,-5/2)$, рівняння директриси $y=1/2$.

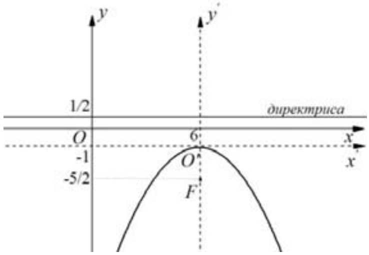


Рис. 52

Зауважимо, що рівняння другого порядку (3.45) визначає на площині такі криві: коло, еліпс, гіперболу, параболу, при цьому можливі випадки їх виродження або розпадання. Вірна наступна теорема.

Теорема. Нехай у прямокутній системі координат задано загальне рівняння лінії другого порядку

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Тоді існує така прямокутна система координат, в якій це рівняння набуває одного з таких видів:

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – еліпс;

2. $x^2+y^2=R^2$ – коло;

3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – уявний еліпс;

4. $a^2x^2+c^2y^2=0$ – одна точка (вироджений еліпс);

5. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – гіпербола;

6. $a^2x^2-c^2y^2=0$ – пара прямих, що перетинаються;

7. $y^2=2px$ – парабола;

8. $y^2-a^2=0$ – пара паралельних прямих;

9. $y^2+a^2=0$ – пара уявних паралельних прямих;

10. $y^2=0$ – пара збіжних прямих.

Контрольні завдання до § 1

Задано точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Знайти:

1) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

2) рівняння площини, що проходить через точку A_4 паралельно площині $A_1A_2A_3$;

3) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$;

4) рівняння прямої A_1A_4;

5) рівняння прямої, що проходить через точку A_4 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;

6) рівняння прямої, що проходить через точку A_2 паралельно прямій A_1A_4;

7) проекцію точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$;

8) кут між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$;

9) кут між прямими A_1A_2 і A_1A_4.

У таблиці нижче наведено координати точок A_1, A_2, A_3, A_4 для різних варіантів.

1	A_1 (–1;2;3)	A_2 (–1;0;–4)	A_3 (4;1;0)	A_4 (2;0;1)
2	A_1 (–2;3;1)	A_2 (2;0;2)	A_3 (1;2;2)	A_4 (–3;2;1)
3	A_1 (2;1;3)	A_2 (2;1;2)	A_3 (0;2;5)	A_4 (1;2;0)
4	A_1 (3;0;2)	A_2 (2;–3;3)	A_3 (3;4;5)	A_4 (1;2;5)
5	A_1 (4;1;0)	A_2 (–1;2;3)	A_3 (2;0;1)	A_4 (–1;0;–4)
6	A_1 (5;1;3)	A_2 (3;–5;2)	A_3 (–3;4;2)	A_4 (2;9;8)
7	A_1 (1;2;5)	A_2 (3;0;2)	A_3 (2;–3;3)	A_4 (3;4;5)
8	A_1 (2;1;2)	A_2 (0;2;5)	A_3 (1;2;0)	A_4 (2;1;3)
9	A_1 (2;0;2)	A_2 (1;2;2)	A_3 (–2;3;1)	A_4 (–3;2;1)
10	A_1 (3;4;5)	A_2 (1;2;5)	A_3 (3;0;2)	A_4 (2;–3;3)
11	A_1 (0;2;5)	A_2 (1;2;0)	A_3 (2;1;3)	A_4 (2;1;2)
12	A_1 (2;1;2)	A_2(1;1;-5)	A_3 (1;2;3)	A_4 (4;5;1)
13	A_1 (3;-5;2)	A_2(5;1;3)	A_3 (2;9;8)	A_4 (-3;4;2)
14	A_1 (4;5;1)	A_2(1;2;3)	A_3 (1;1;–5)	A_4 (2;1;2)
15	A_1 (2;–3;3)	A_2(3;4;5)	A_3 (1;2;5)	A_4 (3;0;2)
16	A_1 (3;0;2)	A_2 (1;2;5)	A_3 (3;4;5)	A_4 (2;–3;3)
17	A_1 (3;5;4)	A_2 (3;2;4)	A_3 (3;5;4)	A_4 (2;8;3)
18	A_1 (1;2;3)	A_2 (4;5;1)	A_3 (2;1;2)	A_4 (1;1;-5)
19	A_1 (4;1;0)	A_2 (2;0;1)	A_3 (–1;2;3)	A_4 (–1;0;–4)
20	A_1 (3;1;0)	A_2 (4;3;2)	A_3 (3;0;4)	A_4 (7;3;0)
21	A_1 (2;9;8)	A_2 (3;-5;2)	A_3 (-3;4;2)	A_4 (5;1;3)
22	A_1 (1;2;0)	A_2 (2;1;3)	A_3 (2;1;2)	A_4 (0;2;5)
23	A_1 (1;2;2)	A_2 (–3;2;1)	A_3 (–2;3;1)	A_4 (2;0;2)
24	A_1 (1;1;–5)	A_2 (1;2;3)	A_3 (4;5;1)	A_4 (2;1;2)
25	A_1 (5;1;3)	A_2 (–3;4;2)	A_3 (3;–5;2)	A_4 (2;9;8)
26	A_1 (2;0;1)	A_2 (–1;2;3)	A_3 (–1;0;–4)	A_4 (4;1;0)
27	A_1 (1;2;2)	A_2 (–2;3;1)	A_3 (2;0;2)	A_4 (–3;2;1)
28	A_1 (–1;0;–4)	A_2 (4;1;0)	A_3 (2;0;1)	A_4 (–1;2;3)
29	A_1 (4;5;1)	A_2 (2;1;2)	A_3 (1;1;–5)	A_4 (1;2;3)
30	A_1 (-3;4;2)	A_2 (2;9;8)	A_3 (5;1;3)	A_4 (3;-5;2)

Приклад розв'язання контрольного завдання до § 1

Нехай задано точки $A_1(2,3,-1)$, $A_2(0,5,1)$, $A_3(-1,2,0)$, $A_4(3,2,6)$.

Завдання 1. Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

Для того щоб визначити рівняння площини, будемо використовувати формулу (3.7):

$$\text{пл.}A_1A_2A_3: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 0-2 & 5-3 & 1+1 \\ -1-2 & 2-3 & 0+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\big(2(x-2)-2(y-3)+4(z+1)\big) =$$

$$= 2\big(2(x-2)-2(y-3)+4(z+1)\big) = 4x-4y+8z+12.$$

Отже, рівняння площини отримуємо у вигляді

$$4x-4y+8z+12=0,$$

або
$$x-y+2z+3=0.$$

Завдання 2. Знайти рівняння площини, що проходить через точку A_4 паралельно площині $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

Знайдемо нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$:

$$\bar{n}=(1,-1,2).$$

Оскільки шукана площина паралельна площині $A_1A_2A_3$, то знайдений вектор буде нормальним і до шуканої площини, а тому, використовуючи рівняння (3.4), отримуємо

$$1\cdot(x-3)-1\cdot(y-2)+2\cdot(z-6)=0,$$

де координати точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – це координати точки A_4. Розкривши дужки в останній формулі, отримуємо необхідне рівняння:

$$x-y+2z-13=0.$$

Завдання 3. Знайти відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

Для виконання завдання 3 необхідно застосувати формулу (3.11):

$$d=\frac{|1\cdot 3-1\cdot 2+2\cdot 6+3|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{16}{\sqrt{6}}=\frac{8}{3}\sqrt{6}\,.$$

Завдання 4. Знайти рівняння прямої A_1A_4.

Розв'язання.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, визначається за формулою (3.14), підставивши в яку координати точок A_1 та A_4 отримуємо рівняння прямої A_1A_4:

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{2-3}=\frac{z+1}{6+1}$$

та
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{7}.$$

Завдання 5. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A_4 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

Вектор нормалі $\bar{n}=(1,-1,2)$ до площини $A_1A_2A_3$ буде паралельним шуканій прямій, а тому може бути її напрямним вектором. Підставляючи координати точки A_4 та напрямного вектора в канонічні рівняння (3.13), отримуємо

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{2}.$$

Завдання 6. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A_2 паралельно прямій A_1A_4.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої, паралельної прямій A_1A_4, що проходить через точку $A_2(0,5,1)$. Напрямним вектором шуканої прямої є вектор $\bar{q}=\overline{A_1A_4}=(-1,1,-7)$. Тоді канонічні рівняння прямої (3.13) мають вигляд

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-1}{-7}.$$

Завдання 7. Знайти проекцію точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

Проекцією точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$ буде точка перетину прямої, перпендикулярної площині $A_1A_2A_3$, що проходить через точку A_4. Рівняння такої прямої знайдено в пункті 5:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{2}.$$

Згідно з алгоритмом знаходження точки перетину прямої та площини запишемо рівняння цієї прямої в параметричній формі:

$$\begin{cases} x=t+3, \\ y=-t+2, \\ z=2t+6. \end{cases}$$

Підставимо останні рівняння в рівняння площини

$$t+3-(-t+2)+2(2t+6)+3=0,$$

звідки

$$t=-\frac{8}{3}.$$

Координати проекції P точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$ знаходимо, підставляючи $t=-\frac{8}{3}$ в параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x=-\frac{8}{3}+3=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}, \\ z=2\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+6=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отже, $P\left(\frac{1}{3},\frac{14}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Завдання 8. Знайти кут між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

Кут між прямою

$$A_1A_4:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{7}$$

та площиною

$$A_1A_2A_3: x - y + 2z + 3 = 0$$

будемо знаходити за формулою (3.21):

$$\sin\alpha = \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 7}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 7^2}} = \frac{16}{\sqrt{6}\sqrt{51}},\ \alpha = \arcsin(\frac{16}{\sqrt{6}\sqrt{51}}).$$

Завдання 9. Знайти кут між прямими A_1A_2 і A_1A_4.

Розв'язання.

Для виконання останнього завдання необхідно знайти рівняння прямої A_1A_2. Напрямним вектором даної прямої буде вектор $\overline{A_1A_2} = (-2{,}2{,}2)$; напрямним також буде і вектор $\overline{q} = (-1{,}1{,}1)$, колінеарний $\overline{A_1A_2}$. Тому канонічні рівняння прямої можна записати як

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1},$$

кут між прямими знайти за формулою (3.16):

$$\cos\varphi = \frac{-1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 7}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 7^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{51}},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{51}}\right).$$

Контрольні завдання до § 2

Задано координати вершин трикутника *ABC*. Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;

2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини *B*;

4) скласти рівняння прямої, що проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні *AC*;

5) знайти площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *A*.

Координати точок для різних варіантів наведені в таблиці нижче.

1	$A(–1;2)$	$B(2;3)$	$C(1;2)$	16	$A(2;3)$	$B(1;2)$	$C(–1;2)$
2	$A(–2;–1)$	$B(1;0)$	$C(3;–2)$	17	$A(1;0)$	$B(3;–2)$	$C(–2;–1)$
3	$A(3;1)$	$B(2;–1)$	$C(4;2)$	18	$A(3;2)$	$B(1;0)$	$C(2;2)$
4	$A(1;0)$	$B(2;2)$	$C(3;2)$	19	$A(4;2)$	$B(3;1)$	$C(2;–1)$
5	$A(3;–2)$	$B(–2;–1)$	$C(1;0)$	20	$A(2;3)$	$B(–1;2)$	$C(1;2)$
6	$A(3; 2)$	$B(3;–1)$	$C(0;-1)$	21	$A(3;–2)$	$B(1;0)$	$C(–2;–1)$
7	$A(1;2)$	$B(–1;2)$	$C(2;3)$	22	$A(2;2)$	$B(3;2)$	$C(1;0)$
8	$A(1;4)$	$B(3;–2)$	$C(1;5)$	23	$A(2;–1)$	$B(4;2)$	$C(3;1)$
9	$A(3;–2)$	$B(1;4)$	$C(1;5)$	24	$A(1; 5)$	$B(1;4)$	$C(3;–2)$
10	$A(3; 2)$	$B(0;–1)$	$C(3;-1)$	25	$A(2; 2)$	$B(3;2)$	$C(1;0)$
11	$A(2;–1)$	$B(3;1)$	$C(4;2)$	26	$A(4;2)$	$B(2;–1)$	$C(3;1)$
12	$A(–1;2)$	$B(1;2)$	$C(2;3)$	27	$A(–3;1)$	$B(2;6)$	$C(3;2)$
13	$A(–2;–1)$	$B(3;–2)$	$C(1;0)$	28	$A(1;2)$	$B(-5;8)$	$C(1;4)$
14	$A(1;2)$	$B(2;1)$	$C(–2;3)$	29	$A(2;-3)$	$B(3;1)$	$C(–1;–4)$
15	$A(–2;–4)$	$B(0;1)$	$C(3;5)$	30	$A(0;1)$	$B(2;3)$	$C(2;4)$

Приклад розв'язання контрольного завдання до § 2

Розв'яжемо завдання при $A(1,3)$, $B(4,-3)$ та $C(-2,0)$.

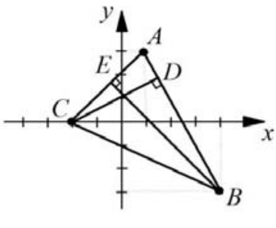


Рис. 53

Завдання 1. Скласти рівняння сторони AB.

Розв'язання

Застосовуючи формулу (3.32), отримуємо

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-3}{-3-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-6} \Leftrightarrow 2x+y-5=0.$$

$$AB\colon\ 2x+y-5=0.$$

Завдання 2. Скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

Розв'язання.

Позначимо точку перетину висоти, проведеної з вершини C, зі стороною AB через D. Знайти висоту CD можна двома способами:

1-й спосіб. Запишемо нормальний вектор сторони AB: $\vec{n}_{AB} = (2{,}1)$. Очевидно, $\vec{n}_{AB}$ є напрямним вектором до CD, отже, можемо застосувати канонічне рівняння (3.31):

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-0}{1} \Leftrightarrow x-2y+2=0.$$

2-й спосіб. Визначимо кутовий коефіцієнт прямої AB:

$$y=-2x+5 \Rightarrow k_{AB}=-2.$$

З умови перпендикулярності двох прямих (3.43) отримуємо

$$k_{CD} = \frac{-1}{k_{AB}} = \frac{1}{2}.$$

Знаючи кутовий коефіцієнт прямої CD та координати точки C, складаємо рівняння висоти за формулою (3.34):

$$y-0=\frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow x-2y+2=0;$$

$$CD:\ x-2y+2=0.$$

Завдання 3. Обчислити довжину висоти, проведеної з вершини B.

Розв'язання.

Зауважимо, що довжина висоти BE співпадає з відстанню від точки B до прямої AC. Отже, спочатку запишемо рівняння сторони AC за формулою (3.32):

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{0-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow x-y+2=0;$$

$$AC:\ x-y+2=0.$$

Тоді за формулою (3.44) отримаємо

$$d=\frac{|4-(-3)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}};$$

$$d=\frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Завдання 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні AC.

Розв'язання.

Для знаходження центра ваги застосуємо відому формулу:

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 + 4 + (-2)}{3} = 1;$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + (-3) + 0}{3} = 0.$$

Отже, центр ваги має координати $O(1,0)$. Провести пряму, паралельну даній, та таку, що приходить через дану точку, можна такими способами:

1-й спосіб. Знайдемо вектор $\overline{AC} = (-3,-3)$, який буде напрямним вектором шуканої прямої. Запишемо канонічне рівняння цієї прямої (3.31):

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-0}{-3} \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$

2-й спосіб. Запишемо кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_{AC} = 1$. З умови паралельності прямих (3.42) $k = 1$ та

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$

Завдання 5. Знайти площу трикутника.

Розв'язання.

Знайдемо площу трикутника за формулою (3.27), для чого обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-1 & -3-3 \\ -2-1 & 0-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -27.$$

Звідки $S == \frac{27}{2}$.

Завдання 6. Знайти внутрішній кут трикутника при вершині *A*.

Розв'язання.

У попередніх пунктах було знайдено загальні рівняння сторони AB та AC. Для визначення кута при вершині A застосуємо формулу (3.37):

$$\cos\angle A = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Контрольні завдання до § 3

Звести рівняння лінії, що наведена у таблиці відповідно до варіанту, до канонічного вигляду, побудувати ці лінію та знайти її основні характеристики.

1	$4x^2+9y^2-8x-18y-23=0$; $x^2+4x-2y+4=0$.	16	$4x^2-9y^2-8x+18y-41=0$; $3x^2-12x-4y+4=0$.
2	$x^2-y^2-2x+2y-9=0$; $y^2+2y+10x+1=0$.	17	$x^2+y^2-2x-2y-7=0$; $x^2-4x-4y+4=0$.
3	$x^2+9y^2-4x-18y+4=0$; $y^2+2x+2y+3=0$.	18	$9x^2+y^2+54x-2y+73=0$; $y^2-x+2y+3=0$.
4	$9x^2-y^2+54x+2y+89=0$; $y^2-x+6=0$.	19	$4x^2-9y^2+24x-36y-36=0$; $3y^2-4x-6y+3=0$.
5	$4x^2-9y^2+24x-36y-36=0$; $x^2-4x-6y+4=0$.	20	$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$; $2x^2-4x-y-1=0$.
6	$x^2-y^2-2x-4y-7=0$; $x^2+6x-2y+1=0$.	21	$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$; $y^2-6y-x+8=0$.
7	$25x^2-4y^2-50x+8y-79=0$; $2x^2-8x+y+2=0$.	22	$x^2+y^2-2x-2y-23=0$; $2y^2-8y-x+8=0$.
8	$x^2-y^2-2x+2y-25=0$; $6y^2-x-12y+4=0$.	23	$x^2-y-4x+1=0$; $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.
9	$x^2-9y^2+4x+18y-41=0$; $x^2-10x+5y=0$.	24	$4x^2-25y^2-32x-50y+139=0$; $y^2-2x+4y+2=0$.
10	$y=2x^2-8x$; $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.	25	$x^2+y^2-6x-8y+9=0$; $x^2-6x-8y+9=0$.
11	$4x^2-25y^2-8x-50y-121=0$; $y^2-x-2y+4=0$.	26	$x^2+y^2-2y-24=0$; $3y^2-12y+2x+12=0$.

12	$x^2+9y^2-18y-27=0;$ $y^2-6x-6y+1=0.$	25	$x^2+y^2+2x-3=0;$ $y^2+10y+5x=0.$
13	$y^2+10y+x-3=0;$ $4x^2+25y^2-32x+50y-11=0.$	28	$x^2+y^2-6x-8y+9=0;$ $x=2y^2+4y+2.$
14	$x^2+y^2-4x+6y-68=0;$ $x^2-8x+10y+64=0.$	29	$25x^2+4y^2+50x-8y-71=0;$ $2y^2+3x-12y=0.$
15	$4x^2-25y^2-8x-50y+79=0;$ $2y^2+4y+x=0.$	30	$2x^2+20x-5y=0;$ $4x^2+25y^2-8x+100y+4=0.$

Контрольні завдання до § 3 глави 3 треба виконувати так, як наведено в прикладах 3.16 – 3.19.

Варіанти тестових завдань до глави 1
«Елементи лінійної алгебри»

Тестове завдання 1

1. Яка матриця називається оберненою до матриці A? Дати відповідь на питання та записати умови існування A^{-1}.

2. Чому дорівнює визначник трикутної матриці? Дати відповідь на питання, навести приклад.

3. Обчислити матрицю $□^2$, якщо $□=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Сформулювати теорему Кронекера – Капеллі про існування розв'язку СЛАР.

5. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81 \end{cases}$

за допомогою методу Крамера.

Тестове завдання 2

1. Яка матриця називається квадратною? Записати означення, навести приклад.

2. Задано матриці $□=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ і $□=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Обчислити

матриці $□ = □\cdot □$ та $□ = □\cdot □$.

3. Записати загальний вигляд довільної СЛАР та навести її матричну форму запису.

4. Записати означення алгебраїчного доповнення $A_{□}$ та мінору $M_{□}$ визначника.

5. З'ясувати, чи сумісна або несумісна СЛАР $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1□ \\ -x_1+x_2-x_3=2□ \end{cases}$

Обґрунтувати відповідь.

Тестове завдання 3

1. Яка матриця називається одиничною? Записати означення, навести приклад.

2. Відповісти, чи зміниться або ні визначник, якщо всі елементи одного рядка (стовпця) помножити на число, що не дорівнює нулю, і додати їх до елементів іншого рядка (стовпця)? Дати відповідь на питання, навести приклад такого перетворення.

3. Сформулювати теорему Кронекера – Капеллі про кількість розв'язків сумісної СЛАР.

4. Обчислити матрицю $\square = \square \cdot \square^{\square}$, якщо $\square = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Знайти загальний розв'язок однорідної СЛАР $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\square \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\square \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\square \end{cases}$

Тестове завдання 4

1. Яка матриця зветься діагональною? Записати означення, навести приклад.

2. Які СЛАР називають однорідними? Навести означення і відповісти на питання, чи можуть однорідні СЛАР бути несумісними. Обґрунтувати відповідь.

3. Сформулювати теорему Крамера.

4. Показати, що матриця $\square = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ є оберненою до матриці $\square = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. При якому значенні параметра λ визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ буде дорівнювати нулю?

Тестове завдання 5

1. Записати правило множення матриці на матрицю. Які дві матриці можна помножити одна на одну?

2. Для якого виду матриць існує визначник? Яка матриця називається виродженою?

3. Обчислити матрицю $\square = 2\square - \square$, якщо $\square = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\square = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Який висновок можна зробити про розв'язок деякої СЛАР, якщо для неї ранг матриці коефіцієнтів дорівнює 4, ранг розширеної матриці дорівнює 5, число невідомих дорівнює 5?

5. Розв'язати СЛАР за методом Крамера: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 5\square \\ -x_1 + 2x_2 = 1\square \\ 2x_2 - x_3 = 0\square \end{cases}$

Тестове завдання 6

1. Яка матриця називається транспонованою? Записати означення, навести приклад.

2. Чому дорівнює визначник діагональної матриці? Дати відповідь на питання, навести приклад.

3. Обчислити матрицю $\square = 3\square \cdot \square$, де $\square = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$,

$\square = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Навести схему розв'язання матричного рівняння $\square\square = \square$ за допомогою оберненої матриці.

5. Знайти загальний розв'язок системи $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = -2\square \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1\square \end{cases}$

Тестове завдання 7

1. Які матриці називаються переставними? Яку розмірність повинні мати такі матриці?

2. Записати формулу «трикутника» для обчислення визначника 3-го порядку.

3. Який розв'язок однорідної СЛАР називають тривіальним? За яких умов однорідна СЛАР має нескінченну кількість розв'язків?

4. При якому значенні параметра λ матриця $\square=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & \lambda\end{pmatrix}$ буде виродженою?

5. Знайти загальний розв'язок СЛАР $\begin{cases}x_1 - x_2 = 3\\ 2x_2 + x_3 = 0\\ x_2 + x_3 = -2\end{cases}$

Тестове завдання 8

1. Навести означення лінійної незалежності двох рядків (стовпців) матриці.

2. Записати формулу розкладання визначника $\square$-го порядку по $\square$-му рядку.

3. Які СЛАР називають сумісними? Несумісними? Визначеними? Невизначеними?

4. При якому значенні параметра λ система $\begin{cases}x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = -1\\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2\\ 3x_1 + 4x_3 = 1\end{cases}$ не може бути розв'язана за формулами Крамера?

5. Показати, що матриці $\square=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ і $\square=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ є переставними одна до одної.

Тестове завдання 9

1. Записати правило віднімання двох матриць. Які матриці можна віднімати? Навести приклад.

2. Нехай рядок (або стовпець) деякого визначника має спільний множник. Яке перетворення можна застосувати до цього визначника? Дати відповідь на питання, навести приклад.

3. При якому значенні параметра λ систему $\begin{cases}6x_1 - \lambda x_2 = 1\\ 3x_1 - x_2 = 2\end{cases}$ не можна розв'язати за формулами Крамера? Відповідь обґрунтувати.

4. Скільки головних і скільки вільних невідомих має деяка СЛАР, якщо для неї ранг матриці коефіцієнтів дорівнює 3, ранг розширеної матриці також дорівнює 3, а число невідомих дорівнює 5?

5. Обчислити матрицю $\square^{-1}$, якщо $\square = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тестове завдання 10

1. Навести означення лінійної залежності двох рядків (стовпців) матриці.

2. Записати правило обчислення визначника 2-го порядку. Навести приклад.

3. Навести схему розв’язання матричного рівняння $\square\square = \square$ за допомогою оберненої матриці.

4. Визначити ранг матриці $\square = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Розв’язати СЛАР за методом Крамера: $\begin{cases} 5x_1 + 21x_2 = 5\square \\ -10x_1 + 2x_2 = 10\square \end{cases}$

Тестове завдання 11

1. Сформулювати теорему про базисний мінор матриці.

2. Чому дорівнює визначник, усі елементи одного рядка (або стовпця) якого пропорційні елементам іншого рядка (або стовпця)? Дати відповідь на питання, навести приклад.

3. Надана система $\begin{cases} \square_{11}x_1 + \square_{12}x_2 = \square_1 \\ \square_{21}x_1 + \square_{22}x_2 = \square_2 \end{cases}$. Записати визначники Δ, Δ_1, Δ_2 за допомогою яких записуються формули Крамера.

4. Обчислити матрицю $\square = \square^{\square} + \square \cdot \square$, де $\square$ – одинична матриця, а $\square = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Знайти розв’язок СЛАР $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1\square \\ x_1 + 3x_2 = 4\square \\ -x_1 + 8x_2 = 7\square \end{cases}$

Тестове завдання 12

1. Записати формулу розкладання визначника □-го порядку по □-му стовпцю.

2. Записати правило додавання двох матриць. Які матриці можна додавати одна до одної? Навести приклад.

3. Які розв’язки однорідної СЛАР утворюють фундаментальну систему розв’язків? Як за допомогою фундаментальних розв’язків записати загальний розв’язок СЛАР?

4. Знайти обернену матрицю для матриці $\square = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Розв’язати систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1\square \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0\square \\ 2x_2 + 4x_3 = 6\square \end{cases}$

Тестове завдання 13

1. Записати формулу, за якою обчислюється обернена матриця.

2. Як зміниться визначник, коли один його рядок (або стовпець) помножити на число α, що не дорівнює нулю?

3. При якому значенні параметра λ система $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = \lambda\square \\ -3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ буде мати безліч розв’язків?

4. Довести, що однорідна СЛАР $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\square \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\square \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ має тільки тривіальний розв’язок.

5. Обчислити матрицю $\square = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Тестове завдання 14

1. Записати правило піднесення матриці до цілого степеня. Для яких матриць визначена ця дія? Навести приклад.

2. Чому дорівнює визначник, всі елементи одного рядка (або стовпця) якого дорівнюють нулю? Дати відповідь на питання, навести приклад такого визначника.

3. Записати схему розв'язання матричного рівняння □□□ = □ за допомогою оберненої матриці.

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -20 & 0 & 40 \\ 3 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. Яку властивість визначників можна застосувати для спрощення дій при обчисленні?

5. Знайти загальний розв'язок СЛАР $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \square \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \square \end{cases}$

Скільки головних і скільки вільних невідомих має ця система?

Тестове завдання 15

1. Записати правило множення матриці на число. Навести приклад.

2. Як зміниться визначник, якщо в ньому поміняти місцями два рядки (два стовпці)? Дати відповідь на питання, навести приклад такого перетворення.

3. Для розв'язку яких СЛАР можна застосовувати правило Крамера?

4. Обчислити матрицю $\square^3$, де $\square = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати СЛАР методом Жордана–Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \square \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \square \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \square \end{cases}$

Варіанти тестових завдань до глави 2
«Елементи векторної алгебри»

Тестове завдання 1

1. Дати означення вектора. За яких умов два вектори будуть рівними?

2. Як обчислюється в декартовій прямокутній системі координат мішаний добуток векторів $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ і $\overline{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$?

3. Обчислити напрямні косинуси вектора $\overline{a}=\{4;-12;3\}$.

4. Розкласти вектор $\overline{c}=3\overline{i}-3\overline{j}$ по базису векторів $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}$ і $\overline{b}=-2\overline{i}+\overline{j}$.

Тестове завдання 2

1. Сформулювати правило «трикутника» додавання і віднімання двох векторів, поданих в алгебраїчної формі, та зобразити це правило графічно.

2. Що таке: а) модуль вектора; б) орт вектора? Як обчислюється довжина вектора та його орт в декартовій прямокутній системі координат?

3. Знайти площу трикутника з координатами вершин $A(1,-2,3)$, $B(4,-2,7)$, $C(-2,1,-5)$.

4. Визначити, при яких значеннях параметра λ вектори $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}+\lambda\overline{k}$ і $\overline{b}=5\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$ будуть перпендикулярні.

Тестове завдання 3

1. Що відбувається з вектором, якщо його помножити: а) на позитивне число; б) на негативне число? Навести рисунок. Який вектор називається протилежним?

2. Записати в декартовій прямокутній системі координат формулу обчислення проекції вектора $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ на вектор $\overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$.

3. Знайти скалярний добуток $\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right)$, якщо задано координати точок: $A(1,-2,3)$, $B(4,-2,7)$, $C(-2,1,-5)$.

4. Визначити, при яких значеннях параметра λ вектори $\bar{a} = -\bar{i} + \lambda\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ і $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j}$ будуть компланарні.

Тестове завдання 4

1. Які вектори називають колінеарними? Яким співвідношенням (в алгебраїчної формі) вони зв'язані?

2. Записати умови компланарності векторів $\bar{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}$, $\bar{b} = \left\{b_x; b_y; b_z\right\}$ і $\bar{c} = \left\{c_x; c_y; c_z\right\}$ в декартовій прямокутній системі координат.

3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = \{2; -2; -3\}$ і $\bar{b} = \{2; 0; 3\}$.

4. Знайти кут між векторами $\bar{a} = \{-1; 2; -2\}$ і $\bar{b} = \{1; 0; -2\}$.

Тестове завдання 5

1. Зобразити графічно правило «паралелограма» додавання і віднімання двох векторів

2. Дати означення напрямних косинусів вектора $\bar{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}$ та записати основну властивість цих косинусів.

3. Перевірити, чи є вектори $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарними, якщо $\bar{a} = \{-1; 4; -2\}$, $\bar{b} = \{0; 3; 0\}$, $\bar{c} = \{3; 8; 6\}$.

4. Знайти вектор $\bar{c}$, якщо він перпендикулярний до вектора $\bar{a} = \{2; 3\}$ і задовольняє умову $\left(\bar{c}, \bar{b}\right) = -7$, де $\bar{b} = \{1; -2\}$.

Тестове завдання 6

1. Що таке: а) орт вектора; б) модуль вектора? Як обчислюється довжина вектора в декартовій прямокутній системі координат?

2. Як з'ясувати, ліву чи праву трійку векторів утворюють три вектори?

3. Знайти модуль суми векторів $\overline{a} = \{1,6,-4\}$ і $\overline{b} = \{3,-2,2\}$.

4. Знайти кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = 6$, $\left|\overline{a}\right| = 3$, $\left|\overline{b}\right| = 2$.

Тестове завдання 7

1. Дати означення скалярного добутку векторів (в алгебраїчної формі). За яких умов два вектори будуть перпендикулярними?

2. Чому дорівнює сума і різниця векторів $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$?

3. Задано координати трьох послідовних вершин паралелограма: $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(3,-1)$. Знайти координати його четвертої вершини D.

4. Визначити, якою є трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ (правою або лівою), якщо $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

Тестове завдання 8

1. Дати означення векторного добутку (в алгебраїчної формі). Навести рисунок, що ілюструє означення.

2. Як знайти координати вектора, якщо задані координати точок $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$, що збігаються відповідно з початком і кінцем вектора?

3. На векторах $\overline{a} = \{1; 4; -2\}$ і $\overline{b} = \{3; -8; -6\}$ побудований паралелограм. Знайти вектори діагоналей паралелограма.

4. Визначити, при яких значеннях параметрів λ та μ вектори $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + \lambda\overline{k}$ і $\overline{b} = \mu\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ будуть колінеарні.

Тестове завдання 9

1. Дати означення проекції вектора на вісь (в алгебраїчній формі). Навести рисунок.

2. Записати формулу обчислення косинуса кута між векторами $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ і $\overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ в декартовій прямокутній системі координат.

3. Задано точки $A(2,2,-7)$, $B(5,-4,2)$, $C(-1,5,-10)$, $D(5,-7,8)$. Перевірити колінеарність векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.

4. Знайти об'єм тетраедра, якій побудований на векторах $\overline{a}=\{-1;4;-2\}$, $\overline{b}=\{2;3;-1\}$, $\overline{c}=\{3;8;6\}$.

Тестове завдання 10

1. Які вектори називаються незалежними? Дати означення базису.

2. Записати формулу обчислення скалярного добутку векторів $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ і $\overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ та навести його геометричний зміст.

3. Знайти орт вектора $\overline{a}=\{-6;-2;3\}$.

4. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}-2\overline{k}$ і $\overline{b}=2\overline{j}+2\overline{k}$.

Тестове завдання 11

1. Дати означення мішаного добутку трьох векторів в алгебраїчній формі. Яке геометричне тлумачення має абсолютна величина цього добутку?

2. Записати розкладання вектора $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ і вектора $\lambda\overline{a}$ по базису прямокутної системи координат $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$.

3. Задано вершини чотирикутника $A(-4,1,1)$, $B(-5,-5,3)$, $C(1,-2,2)$, $D(1,4,0)$. Довести, що його діагоналі перпендикулярні.

4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}=\{1;4;-2\}$, $\overline{b}=\{0;5;0\}$ і $\overline{c}=\{3;8;4\}$.

Тестове завдання 12

1. Чи можуть бути незалежними чотири вектори в тривимірному просторі? Три вектори на площині? Які вектори називаються лінійно залежними?

2. Записати формулу обчислення векторного добутку векторів $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, заданих в прямокутній декартовій системі координат. Яке геометричне тлумачення має модуль векторного добутку?

3. Знайти модуль різниці векторів $\bar{a} = \{3,-5,8\}$ і $\bar{b} = \{-1,1,-4\}$.

4. Вершини трикутника мають координати $A(1,-2,3)$, $B(4,-2,7)$, $C(1,-2,5)$. Знайти $\cos\angle A$.

Тестове завдання 13

1. Дати означення компланарності векторів та записати умову компланарності трьох векторів.

2. Як обчислюється в декартовій прямокутній системі координат площа трикутника, побудованого на векторах $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$?

3. Знайти проекцію вектора $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ на вісь, яка паралельна вектору $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{k}$.

4. Перевірити колінеарність векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A(1,0,-2)$, $B(-1,3,1)$, $C(-4,1,-2)$, $D(0,-5,-8)$.

Тестове завдання 14

1. Як обчислюється в прямокутній системі координат об’єм тетраедра, побудованого на векторах $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ і $\bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$?

2. Записати умову перпендикулярності векторів $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, заданих в прямокутній декартовій системі координат.

Знайти довжину вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$, якщо $\bar{a} = \bar{i} + \bar{k}$ і $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ..

3. Обчислити проекцію вектора $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$ на вектор $\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = 4;\ |\bar{n}| = 3;\ (\bar{m}\,\hat{}\,\bar{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Тестове завдання 15

1. Як обчислити довжину і напрямні косинуси вектора $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$? Записати основну властивість напрямних косинусів.

2. Як обчислюється сума і різниця векторів $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, заданих в прямокутній декартовій системі координат?

3. Обчислити кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $(\bar{a}, \bar{b}) = 6$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$.

4. Задано точки $A(1,-2,3)$, $B(4,-2,7)$, $C(-2,1,-5)$, $D(1,1,4)$. Знайти мішаний добуток $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

Варіанти тестових завдань до глави 3
«Аналітична геометрія»

Тестове завдання 1

1. Записати загальне рівняння прямої лінії в просторі.

2. За якою формулою обчислюється тангенс кута між двома прямими на площині, що задані рівняннями $l_1 : y = k_1 x + b_1$ та $l_2 : y = k_2 x + b_2$?

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(5,2,-1)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = \{2,-1,3\}$.

4. Яку криву другого порядку описує рівняння $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$? Навести графік, вказати розташування фокусів. Чому дорівнює ексцентриситет?

Тестове завдання 2

1. Записати загальне рівняння площини в просторі.

2. Записати умови перпендикулярності і паралельності двох прямих ліній на площині, заданих рівняннями $l_1 : y = k_1 x + b_1$ та $l_2 : y = k_2 x + b_2$.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1,3,0)$ паралельно вектору $\bar{s} = \{-2,-1,4\}$.

4. Яку криву другого порядку описує рівняння $\frac{x^2}{4} - 16y = 0$? Навести графік цієї кривої та записати координати фокуса і директриси.

Тестове завдання 3

1. Записати канонічне рівняння прямої лінії в просторі.

2. Записати рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом на площині, пояснити геометричний зміст кутового коефіцієнта k і параметра b.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки: $M_1(1,2,3)$, $M_2(4,-1,-2)$, $M_3(4,0,3)$.

4. Яку криву другого порядку описує рівняння $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$? Чому дорівнює її ексцентриситет? Навести графік кривої. На якій вісі розташовані фокуси?

Тестове завдання 4

1. Записати параметричне рівняння прямої лінії в просторі.

2. Навести формулу обчислення на площині відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $l: Ax+By+C=0$.

3. Знайти точку перетину прямої $x=t+1$, $y=-2t-1$, $z=6t$ та площини $2x+3y+z-1=0$.

4 Яку криву другого порядку описує рівняння $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$? Чому дорівнює її ексцентриситет? Навести графік та вказати розташування фокусів.

Тестове завдання 5

1. Записати рівняння прямої лінії в просторі, що проходить через дві точки: $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$.

2. Як перейти від загального рівняння прямої на площині $Ax+By+C=0$ до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$?

3. Знайти точку перетину площин $2x+z-1=0$, $y-2z-4=0$ і $x-2y+3=0$.

4. Яку криву другого порядку описує рівняння $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$? Навести графік кривої, вказати розташування фокусів. Чому дорівнює ексцентриситет кривої?

Тестове завдання 6

1. Дати означення кута між площинами $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Як обчислюється цій кут?

2. Записати канонічне рівняння еліпса. Як обчислити ексцентриситет еліпса і в якому числовому проміжку можуть змінюватися його значення?

3. Довести, що прямі $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ та $\frac{x+3}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-7}{1}$ схрещуються.

4. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;-3)$ паралельно прямій $2x + 3y + 4 = 0$.

Тестове завдання 7

1. За якою формулою обчислюється відстань від точки $M_{.0}(x_0, y_0, z_0)$ до площини $P : Ax + By + Cz + D = 0$?

2. Записати канонічне рівняння гіперболи. Як обчислюється ексцентриситет і в якому числовому проміжку змінюються його значення? Записати рівняння асимптот.

3. Знайти кут між площинами $2x + y - z + 2 = 0$ і $x + 2y + z - 7 = 0$.

4. Відомі вершини трикутника $A(4;-3)$, $B(-2;1)$, $C(4;5)$. Скласти рівняння медіани AM.

Тестове завдання 8

1. Як визначити напрямний вектор прямої, що задана загальним рівнянням: $L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$?

2. Записати рівняння прямої лінії на площині, що проходить через дві точки: $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$.

3. Знайти значення параметра λ, при якому площина $P : 2x - y + \lambda z - 2 = 0$ буде паралельна прямій $L : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$.

4. Яку криву другого порядку описує рівняння $\frac{y^2}{2} = 5(x-1)$? Навести графік цієї кривої та записати координати фокуса і директриси.

Тестове завдання 9

1. Записати канонічне рівняння параболи і рівняння її директриси.

2. Дати означення кута між прямими $L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ і $L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$. Як обчислити косинус цього кута?

3. Визначити, при яких значеннях параметрів λ і μ площини $P_1 : \lambda x + 3y - 2z - 1 = 0$ і $P_2 : 2x - 5y - \mu z = 0$ будуть паралельні.

4. Довести, що точки $A(2;1)$, $B(-3;3)$, $C(7;-1)$ лежать на одній прямій. Записати рівняння цієї прямої.

Тестове завдання 10

1. Записати умову паралельності площин $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

2. Записати рівняння прямої лінії на площині, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k.

3. Довести, що прямі $L_1 : \begin{cases} x = -8t + 7, \\ y = 2t + 2, \\ z = -4t + 1 \end{cases}$ і $L_2 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{2}$ паралельні.

4. Яку криву другого порядку описує рівняння $x^2 + 4x + y^2 - 2x - 4 = 0$? Записати канонічне рівняння, навести графік і вказати координати центра.

Тестове завдання 11

1. Записати умову перетину двох прямих: $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ і $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$.

2. Сформулювати визначення параболи як геометричного місця точок.

3. Обчислити відстань між паралельними площинами $2x+y-2z+2=0$ і $4x+2y-4z+7=0$.

4. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;1)$ перпендикулярно прямій $5x-y+4=0$.

Тестове завдання 12

1. Який кут зветься кутом між прямою $L: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ і площиною $P: Ax+By+Cz+D=0$? Як він обчислюється?

2. Сформулювати визначення еліпса як геометричного місця точок.

3. Довести, що прямі $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ і $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ лежать в одній площині (перетинаються).

4. Довести перпендикулярність прямих $9x-12y+5=0$ та $8x+6y-13=0$.

Тестове завдання 13

1. Записати умову перпендикулярності та умову паралельності прямих $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ і $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$.

2. Сформулювати визначення гіперболи як геометричного місця точок.

3. Знайти кут між прямою $L: \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+5}{2}$ і площиною $P: x-y+5=0$.

4. Трикутник має вершини $A(2{,}1)$, $B(5{,}3)$, $C(3{,}-4)$. Скласти рівняння висоти BD.

Тестове завдання 14

1. Записати умову перпендикулярності прямої

$$L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$ і площини $P: Ax+By+Cz+D=0$.

2. Записати канонічне рівняння спряженої гіперболи. На якій осі розташовані фокуси такої гіперболи та які вони мають координати?

3. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки: $M_1(3,-1,2)$ і $M_2(4,-2,-1)$.

4. Знайти відстань від точки $A(2;-1)$ до прямої $4x+3y+10=0$.

Тестове завдання 15

1. Записати умови перпендикулярності та паралельності двох площин: $P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

2. Записати канонічне рівняння кола радіуса R з центром в точці $M_0(x_0,y_0)$. Зобразити це коло на рисунку.

3. Обчислити відстань від точки $M(2,3,-1)$ до прямої $L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{4}$.

4. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$.

Тестове завдання 16

1. Записати умови паралельності та перпендикулярності прямої $L: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ і площини $P: Ax+By+Cz+D=0$.

2. Скласти канонічне рівняння прямої $L: \begin{cases} x-2y+3z=0, \\ 4x+2y-z+4=0. \end{cases}$

3. Сформулювати визначення кола як геометричного місця точок.

4. Знайти кут між прямими на площині: $x-2y-5=0$ та $4x+12y-1=0$.

Тестове завдання 17

1. За якою умовою схрещуються у просторі дві прямі: $L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$?

2. Яка гіпербола зветься рівнобічною? Записати її рівняння, рівняння асимптот та значення ексцентриситету.

3. Довести, що площина $x-3y+2z-7=0$ та пряма $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-9}=\frac{z-2}{6}$ перпендикулярні.

4. Задано вершини трикутника: A(4, 3); B(-2, 3); C(2, 1). Знайти рівняння серединної лінії, що паралельна до сторони AC.

Тестове завдання 18

1. Як обчислити у просторі відстань від точки $M_{.0}(x_0, y_0, z_0)$ до прямої $L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$?

2. У якому разі еліпс буде мати фокуси, що розташовані на осі ординат? Навести приклад, вказати координати фокусів.

3. Обчислити відстань d між паралельними прямимі $l_1: 3x-4y-10=0$ та $l_2: 6x-8y+5=0$.

4. Скласти рівняння площини, яка відтинає на координатних осях відрізки $a=2$, $b=-3$, $c=4$.

Питання до іспиту з вищої математики

Лінійна алгебра

1. Матриці: основні поняття, види матриць. Операції над матрицями (додавання, віднімання, множення на число, добуток, піднесення до цілого степеня). Транспонована матриця.

2. Визначники 2-го і 3-го порядку, їх обчислення. Означення визначника n-го порядку. Властивості визначників. Мінор і алгебраїчні доповнення визначника. Теорема про розкладання визначника n-го порядку за елементами рядка або стовпця.

3. Теорема Крамера.

4. Обернена матриця: означення, теорема про обчислення. Види матричних рівнянь, їх розв'язання за допомогою оберненої матриці.

5. Лінійна залежність і незалежність рядків (стовпців) матриці, мінори та ранг матриці. Елементарні перетворення матриць, теорема про базисний мінор.

6. Довільні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (основні визначення). Формулювання теорем Кронекера – Капеллі. Поняття про головні і вільні невідомі. Рішення СЛАР методом Гаусса і методом Жордана – Гаусса.

7. Однорідні СЛАР (означення, особливості, умови існування нетривіальних розв'язків, система фундаментальних розв'язків).

Векторна алгебра

1. Вектори (означення, довжина вектора, рівність двох векторів), лінійні дії над векторами, їх властивості, правила трикутника та паралелограма. Проекція вектора на вісь та її властивості.

2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Лінійна залежність трьох векторів в двовимірному просторі і чотирьох векторів у тривимірному просторі. Поняття базису. Розкладання вектора за базисом. Декартова прямокутна система координат.

3. Координати вектора, його довжина, орт, напрямні косинуси та їх основна властивість. Додавання, віднімання та множення на число векторів

у прямокутній системі координат. Умова колінеарності двох векторів. Перехід від прямокутного базису до іншого.

4. Скалярний добуток векторів, його властивості та геометричне тлумачення. Обчислення в декартовій системі координат. Обчислення проекції вектора на вісь, умова перпендикулярності двох векторів, обчислення кута між векторами (в алгебраїчній формі та в декартовій системі координат).

5. Векторний добуток векторів, його властивості і геометричне тлумачення. Обчислення в декартовій системі координат. Обчислення площі трикутника та паралелограма.

6. Мішаний добуток векторів (означення, властивості, обчислення в декартовій системі координат, геометричний зміст, застосування). Умова компланарності трьох векторів.

7. Поділ відрізка у даному співвідношенні.

Аналітична геометрія

1. Виведення загального рівняння площини. Неповні рівняння площин. Рівняння площини у відрізках на осях. Взаємне розташування площин у просторі. Відстань від точки до площини.

2. Загальне рівняння прямої в просторі. Виведення канонічного рівняння прямої в просторі. Перехід від загального рівняння до канонічного. Різні види рівнянь прямої в просторі. Взаємне розташування прямих у просторі. Відстань від точки до прямої у просторі.

3. Взаємне розташування прямої та площини у просторі, кут між прямою і площиною, точка перетину прямої і площини.

4. Різні види рівнянь прямої лінії на площині. Взаємне розташування прямих на площині, кут між прямими. Відстань від точки до прямої на площині.

5. Еліпс, коло, гіпербола і парабола (визначення і виведення рівнянь, графіки, основні характеристики, директриси, ексцентриситет, асимптоти гіперболи).

6. Паралельний перенос і поворот в площині системи координат. Загальне рівняння кривих 2-го порядку на площині, три типи рівнянь, перехід до канонічного рівняння.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Основні формули лінійної алгебри

Означення матриці розміром $m\times n$	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ або $A=(a_{ij})$, де $\begin{cases} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n} \end{cases}$
Одинична матриця E розміром $n\times n$	$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, або $E=(e_{ij})$, де $e_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$
Транспонована матриця A^T	Якщо $A_{m\times n}=(a_{ij})$, то $A^T_{n\times m}=(a_{ji})$, де $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$
Множення матриці на число λ $(\lambda=\text{const})$	$\lambda A=(\lambda a_{ij})$, де $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$
Додавання (віднімання) матриць (визначено, якщо матриці мають однакову розмірність)	$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})$, де $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$
Добуток двох матриць AB (існує, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B)	$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$, де $c_{ik}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$, або $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk},\ i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}$
Піднесення квадратної матриці у цілий степінь	$A^m_{n\times n}=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m}$
Визначник квадратної матриці розміру 2×2	$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$
Визначник квадратної матриці розміром 3×3 (правило трикутника)	$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$ $=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-$ $-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$

Продовження додатка 1

Алгебраїчні доповнення A_{ij} та мінори M_{ij} визначника Δ $(i, j = \overline{1,n})$	$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, де M_{ij} – визначник, якій здобутий з визначника Δ викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.
Обчислення визначника порядку $n \times n$ розкладанням за елементами i-го рядка або j-го стовпця та їх алгебраїчними доповненням A_{ij}	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, або $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} =$ $= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$
Обернена матриця A^{-1} (за означенням $AA^{-1} = E$ існує для квадратної матриці A, визначник якої $\Delta \neq 0$)	$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, де $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$
Розв'язок матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці	Якщо $AX = B$, то $X = A^{-1}B$; якщо $XA = B$, то $X = BA^{-1}$; якщо $AXB = C$, то $X = A^{-1}CB^{-1}$;
Формули Крамера для розв'язку СЛАР, яка має n рівнянь і n невідомих	$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, де $\Delta \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, Δ_k – допоміжні визначники
Умова існування розв'язку довільної СЛАР, яка має m рівнянь і n невідомих	$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r$, де r – ранг матриці коефіцієнтів A та розширеної матриці $\overline{A}$, яка складається з матриці A та стовпця правих частин
Умова існування єдиного розв'язку довільної СЛАР	$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r = n$, де n – число невідомих
Умова існування безлічі розв'язків довільної СЛАР	$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r < n$, де n – число невідомих

Додаток 2
Основні формули векторної алгебри

Координати вектора $\overline{AB}$, $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_b;y_B;z_B)$	$\overline{AB}=\{\,x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\}$
Довжина вектора $\overline{AB}$	$\lvert\overline{AB}\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
Координати точки C, яка поділяє відрізок AB у співвідношенні $AC:CB=\lambda$	$x_C=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$, $y_C=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$, $z_C=\dfrac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}$
Координати середини відрізка AB ($AC=CB$)	$x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}$, $y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}$, $z_C=\dfrac{z_A+z_B}{2}$
Проекція вектора $\bar{a}$ на вісь	$np_{\bar{\ell}}\,\bar{a}=\bar{a}\cdot\cos\varphi$, де $\varphi=\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{\ell}\right)$, $\bar{\ell}$ – вісь
Координати вектора $\bar{a}=\{a_x;\,a_y;\,a_z\}$	$a_x=np_{OX}\,\bar{a}$, $a_y=np_{OY}\,\bar{a}$, $a_z=np_{OZ}\,\bar{a}$
Розкладання вектора $\bar{a}$ по ортах системи координат	$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$
Довжина (модуль) вектора	$\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
Напрямні косинуси вектора $\bar{a}$	$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\lvert\bar{a}\rvert}$, $\cos\beta=\dfrac{a_y}{\lvert\bar{a}\rvert}$, $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\lvert\bar{a}\rvert}$.
Основна властивість напрямних косинусів	$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
Орт вектора $\bar{a}$ і його координати	$\bar{a}^0=\dfrac{\bar{a}}{\lvert\bar{a}\rvert}=\left(\dfrac{a_x}{\lvert\bar{a}\rvert};\dfrac{a_y}{\lvert\bar{a}\rvert};\dfrac{a_z}{\lvert\bar{a}\rvert}\right)$
Властивості орта вектора	$\bar{a}^0=\{\cos\alpha;\,\cos\beta;\,\cos\gamma\},\cdot\left\lvert\bar{a}^0\right\rvert=1$
Лінійні операції з векторами, які задані координатами	$\lambda\bar{a}=\{\,\lambda a_x;\,\lambda a_y;\,\lambda a_z\}$ $\bar{a}\pm\bar{b}=\{\,a_x\pm b_x;\,a_y\pm b_y;\,a_z\pm b_z\}$

Продовження додатка 2

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, позначення добутку: $\bar{a}\cdot\bar{b}$ або $(\bar{a},\bar{b})$	$\bar{a}\cdot\bar{b}=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cos\varphi$, де $\varphi=\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)$
Вираз скалярного добутку через координати	$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
Квадрат вектора $\bar{a}$	$\bar{a}^2=\lvert\bar{a}\rvert^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2$
Вираз проекції вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ через скалярний добуток	$пр_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{b}\rvert}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Вираз косинуса кута між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ через скалярний добуток	$\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, позначення добутку: $\bar{a}\times\bar{b}$ або $[\bar{a},\bar{b}]$	$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}$, де: 1) $\lvert\bar{c}\rvert=\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert\sin\varphi$, $\varphi=\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)$; 2) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$,; 3) вектори $\lvert\bar{a}\rvert$, $\lvert\bar{b}\rvert$ i $\lvert\bar{c}\rvert$ утворюють праву трійку
Вираз векторного добутку через координати	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$ $=(a_eb_z-a_zb_y)\bar{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k}$
Площі паралелограма та трикутника, які побудовані на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$	$S_{пар}=\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$, $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert$, де $\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert=$ $=\sqrt{(a_eb_z-a_zb_y)^2+(a_xb_z-a_zb_x)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}$
Мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, позначення добутку: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ або $\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}$, або $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=$ $=a_x(a_eb_z-a_zb_y)-a_y(a_xb_z-a_zb_x)+a_z(a_xb_y-a_yb_x)$

Закінчення додатка 2

Об’єми паралелепіпеда та тетраедра, побудованих на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$	$V_{\text{паралелепіпеда}} = \lvert \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \rvert$, $V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6}\lvert \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \rvert$
Взаємне розташування векторів	
Умова колінеарності векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$	$\overline{a} = \lambda \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = 0$ або $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.
Умова перпендикулярності векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$	$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ або $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$
Умова компланарності векторів $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$	$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$ або $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$
Орієнтація трійки векторів $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$	Якщо $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} > 0$, то трійка векторів права, якщо $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} < 0$, то трійка векторів ліва
Фізичні застосування векторної алгебри	
Рівнодіюча сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$	$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \cdot + \ldots + \overline{F}_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}; \sum_{k=1}^{n} f_{y_k}; \sum_{k=1}^{n} f_{z_k} \right\}$, де $\overline{F}_k = \left\{ f_{x_k}; f_{y_k}; f_{z_k} \right\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$
Робота постійної сили $\overline{F}$ уздовж вектора $\overline{S}$	$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = f_x s_x + f_y s_y + f_z s_z$, де $\overline{F} = \left\{ f_x; f_y; f_z \right\}$, $\overline{S} = \left\{ s_x; s_y; s_z \right\}$
Момент сили $\overline{F}$, яка прикладена у точці $A(x_A; y_A; z_A)$, щодо точки $O(x_0; y_0; z_O)$	$\overline{M} = \overline{F} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ x_A - x_0 & y_A - y_0 & z_A - z_0 \end{vmatrix}$, де $\overline{F} = \left\{ f_x; f_y; f_z \right\}$, $\overline{OA} = \left\{ x_A - x_0; y_A - y_0; z_A - z_0 \right\}$

Додаток 3
Основні формули аналітичної геометрії у просторі

Площина у просторі	
Рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{n}$	$P: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, де $M_0(x_0;y_0;z_0)\in P$, $\overline{n}\perp P$, $\overline{n}=\{A,B,C\}$
Загальне рівняння площини	$P:\ Ax+By+Cz+D=0$, де $\overline{n}=\{A,B,C\}$ – нормальний вектор
Рівняння площин, які паралельні координатним осям	$P\parallel OZ:\quad Ax+By+D=0$, $P\parallel OY:\quad Ax+Cz+D=0$, $P\parallel OX:\quad By+Cz+D=0$
Рівняння площин, які паралельні координатним площинам	$P\parallel YOZ:\quad Ax+D=0$, $P\parallel XOY:\quad Cz+D=0$, $P\parallel XOZ:\quad By+D=0$
Рівняння координатних площин	$P_{XOY}:\quad z=0$, $P_{YOZ}:\quad x=0$, $P_{XOZ}:\quad y=0$
Рівняння площини, що проходить через початок координат	$O(0,0,0)\in P\Rightarrow\quad Ax+By+Cz=0$
Рівняння площини у відрізках на осях	$P:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, де $\lvert a\rvert,\lvert b\rvert,\lvert c\rvert$ – довжини відрізків, які площина відтинає на осях OX, OY і OZ
Рівняння площини, що проходить через три дані точки: M_1, M_2, M_3	$P: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, де $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)\in P$

Продовження додатка 3

Відстань від точки M_0 до площини $P:\ Ax+By+Cz+D=0$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, де $M_0(x_0;y_0;z_0)\notin P$
Взаємне розташування площин у просторі Рівняння площин: $P_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $P_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ Координати нормальних векторів: $\overline{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $\overline{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$	
Косинус кута між площинами P_1 і P_2	$\cos\varphi=\dfrac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\lvert\overline{n_1}\rvert\cdot\lvert\overline{n_2}\rvert}=$ $=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
Умова паралельності площин P_1 і P_2	$P_1\Vert P_2\Rightarrow\overline{n}_1\Vert\overline{n}_2\Rightarrow\quad\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
Умова перпендикулярності площин P_1 і P_2	$P_1\perp P_2\Rightarrow\ \overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=0\ \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
Пряма лінія у просторі	
Загальне рівняння прямої (лінія перетину непаралельних площин P_1 і P_2)	$L:P_1\cap P_2\Rightarrow\ L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
Канонічне рівняння прямої (пряма, що проходить через точку M_0 паралельно напрямному вектору $\overline{q}$)	$L:\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, де $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$, $\overline{q}\parallel L$, $\overline{q}=\{l,m,n\}$
Параметричне рівняння прямої	$L:\ \begin{cases}x=lt+x_0,\\y=mt+y_0,\\z=nt+z_0,\end{cases}$ де t – змінний параметр, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$, $\overline{q}\parallel L$, $\overline{q}=\{l,m,n\}$
Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки: M_1 і M_2	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$, де $M_1(x_1,y_1,z_1)\in L$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in L$

Продовження додатка 3

Відстань від точки $M_1(x_1;y_1;z_1)\notin L$ до прямої $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$	$d=\dfrac{\left\lvert\overline{M_0M_1}\times\overline{q}\right\rvert}{\lvert\overline{q}\rvert}=\dfrac{\left\lVert\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ l & m & n\end{matrix}\right\rVert}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$
Взаємне розташування двох прямих у просторі Рівняння прямих: $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ і $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ Координати напрямних векторів: $\overline{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\},\overline{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ Точки $M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1,\ M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$	
Косинус кута між прямими L_1 і L_2,	$\cos\varphi=\dfrac{\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}}{\lvert\overline{q_1}\rvert\cdot\lvert\overline{q_2}\rvert}=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$
Умова паралельності прямих L_1 і L_2	$L_1\parallel L_2\Rightarrow\overline{q_1}\parallel\overline{q_2}\Rightarrow\quad\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$
Умова перпендикулярності прямих L_1 і L_2	$L_1\perp L_2\Rightarrow\quad\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}=0\ \Rightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
Умова перетину прямих L_1 і L_2	$\overline{M_1M_2}\cdot\overline{q}_1\cdot\overline{q}_2=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0$
Умова схрещування прямих L_1 і L_2	$\overline{M_1M_2}\cdot\overline{q}_1\cdot\overline{q}_2\neq 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}\neq 0$
Взаємне розташування прямої та площини у просторі Пряма $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, площина $P: Ax+By+Cz+D=0$	
Кут між прямою L та площиною P	$\sin\varphi=\dfrac{\overline{n}\cdot\overline{q}}{\lvert\overline{n}\rvert\lvert\overline{q}\rvert}=\dfrac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$
Умова паралельності прямої L і площини P	$P\parallel L\Rightarrow\overline{n}\perp\overline{q}$ або $Al+Bm+Cn=0$

Закінчення додатка 3

Умова належності прямої L до площини P	$L \in P \Rightarrow \begin{cases} \bar{n} \perp \bar{q} \\ M_0 \in L \\ M_0 \in P \end{cases}$ або $\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$
Умова перпендикулярності прямої L і площини P	$L \perp P \Rightarrow \bar{q} \,\|\, \bar{n}$ або $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$
Знаходження точки K перетину прямої та площини	$K = L \cap P \Rightarrow K: \begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$

Додаток 4
Основні формули аналітичної геометрії на площині

Пряма лінія на площині	
Загальне рівняння прямої на площині	$L:\ Ax+By+C=0$
Рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\bar{n}$	$L:\ A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, де $M_0(x_0,y_0)\in L$, $\bar{n}\perp L$, $\bar{n}=\{A,B\}$ – нормальний вектор прямої
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$L:\ y=kx+b$, де k – кутовий коефіцієнт, $b=\text{const}$
Рівняння прямої на площині, що проходить через початок координат	$O(0,0)\in L\Rightarrow\ Ax+By=0$ або $y=kx$
Рівняння прямих на площині, які паралельні координатним осям	$L\,\|\,OY\Rightarrow\ Ax+C=0$ або $x=a$, де $a=\text{const}$ $L\,\|\,OX\Rightarrow\ By+C=0$ або $y=b$, де $b=\text{const}$
Рівняння координатних осей на площині	Вісь OX: $y=0$, вісь OY: $x=0$
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через точку M_0	$L:\ y-y_0=k(x-x_0)$, де $M_0(x_0,y_0)\in L$
Канонічне рівняння прямої (рівняння прямої, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\bar{q}$)	$L:\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$, де $M_0(x_0,y_0)\in L$, $\bar{q}\,\|\,L$, $\bar{q}=\{m,n\}$ – напрямний вектор прямої
Параметричне рівняння прямої L	$L:\ \begin{cases}x=lt+x_0,\\ y=mt+y_0,\end{cases}$ де t – змінний параметр, $M_0(x_0,y_0)\in L$, $\bar{q}=\{l,m\}\,\|\,L$
Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки: M_1 і M_2	$L:\ \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де $M_1(x_1,y_1)\in L$, $M_2(x_2,y_2)\in L$

Продовження додатка 4

Рівняння прямої на площині у відрізках на осях	$L:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де $\lvert a\rvert,\lvert b\rvert$ – довжини відрізків, які площина відтинає на осях OX і OY
Відстань від точки M_0 до прямої L на площині	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $M_0(x_0;y_0)\notin L$
Взаємне розташування двох прямих на площині Рівняння прямих $L_1:\ y=k_1x+b_1,\ L_2:\ y=k_2x+b_2$	
Тангенс гострого кута між прямими L_1 та L_2, якщо вони не перпендикулярні	$\operatorname{tg}\varphi=\left\lvert\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\rvert$, суміжний тупий кут $\psi=\pi-\varphi$
Умова паралельності прямих L_1 і L_2 на площині	$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \quad k_1=k_2$
Умова перпендикулярності прямих L_1 і L_2 на площині	$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \quad k_1k_2=-1$
Перетворення системи координат на площині	
Паралельне перенесення системи координат XOY до системи $X'O'Y'$	$\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=x-x_0\\ y'=y-y_0\end{cases}$, де $XOY:O'(x_0,y_0)$
Поворот системи координат XOY на кут α	$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}$
Криві другого порядку на площині	
Загальне рівняння кривих другого порядку	$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$
Умови того, що крива має: а) еліптичний тип; б) гіперболічний тип; в) параболічний тип	а) $AC-B^2>0$; б) $AC-B^2<0$; в) $AC-B^2=0$

Продовження додатка 4

Коло	
Рівняння кола радіусом R з центром у точці $C(x_0, y_0)$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
Канонічне рівняння кола	$x^2+y^2=R^2$
Еліпс	
Канонічне рівняння еліпса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де a,b – півосі еліпса, $a>0, b>0$
Координати фокусів	$F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$ -, де $c^2=a^2-b^2$, $a>b$ або $F_1(0,-c),\ F_2(0,c)$, де $c^2=b^2-a^2$, $b>a$
Ексцентриситет еліпса	$\varepsilon=\frac{c}{a}$, де $a>b$ або $\varepsilon=\frac{c}{b}$, де $b>a$, $0<\varepsilon<1$
Фокальні радіуси еліпса	$r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$, $r_1+r_2=2a$, $a>b$ або $r_1=b+\varepsilon x$, $r_2=b-\varepsilon x$, $r_1+r_2=2b$, $b>a$
Директриси еліпса	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, якщо $a>b$ або $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$, якщо $b>a$
Фокально-директоріальна властивість еліпса	$\frac{r}{d}=\varepsilon$, де r – відстань від точки *M* еліпса до одного з фокусів; d – відстань від точки *M* до відповідної директриси
Гіпербола	
Канонічне рівняння гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де a,b – півосі еліпса
Координати фокусів	$F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$, де $c^2=a^2+b^2$
Ексцентриситет гіперболи	$\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon>1$
Асимптоти гіперболи	$y=\pm\frac{b}{a}x$
Фокальні радіуси гіперболи	$r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=-a+\varepsilon x$, $x>0$, $r_1=-a-\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$, $x<0$, $\lvert r_1-r_2\rvert=2a$

Продовження додатка 4

Директриси гіперболи	$x = \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$
Фокально-директоріальна властивість гіперболи	$\dfrac{r}{d} = \varepsilon$, де r – відстань від точки M гіперболи до одного з фокусів; d – відстань від точки M до відповідної директриси
Спряжена гіпербола	
Канонічне рівняння спряженої гіперболи	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, де a, b – півосі еліпса
Координати фокусів	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, де $c^2 = a^2 + b^2$
Ексцентриситет спряженої гіперболи	$\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, $\varepsilon > 1$
Асимптоти спряженої гіперболи	$y = \pm \dfrac{b}{a} x$
Фокальні радіуси спряженої гіперболи	$r_1 = b + \varepsilon y$, $r_2 = -b + \varepsilon y$, $y > 0$, $r_1 = -b - \varepsilon y$, $r_2 = b - \varepsilon y$, $y < 0$, $\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2b$
Директриси спряженої гіперболи	$y = \pm \dfrac{b}{\varepsilon}$
Парабола	
Канонічне рівняння параболи	$y^2 = 2px$, де p – відстань від фокуса до директриси, $p > 0$
Координати фокуса та рівняння директриси	$F_1\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, $x = -\dfrac{p}{2}$
Фокальний радіус параболи	$r = x + \dfrac{p}{2}$
Фокально-директоріальна властивість параболи	$\dfrac{r}{d} = 1$, де r – відстань від точки M параболи до фокуса, d – відстань від точки M до директриси

Закінчення додатка 4

Окремі випадки ліній другого порядку	
Рівняння точки $M_0(x_0, y_0)$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$
Уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
Пара прямих, що перетинаються	$a^2x^2-b^2y^2=0 \Rightarrow y=\pm kx,\ k=\frac{a}{b}$
Пара уявних прямих, що перетинаються	$a^2x^2+b^2y^2=0$
Пара паралельних прямих	$x^2-c^2=0 \Rightarrow x=\pm c$ або $y^2-c^2=0 \Rightarrow y=\pm c$
Пара уявних паралельних прямих	$y^2+c^2=0$ або $x^2+c^2=0$, де $c\neq 0$
Пара збіжних прямих	$y^2=0$ або $x^2=0$

Список літератури

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный. – М , 2009.

2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М : Высш. шк, 1986.

3. Шипачев В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – М , 2005.

4. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М : Наука, 1984.

5. Ильин В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М : Наука, 1988.

6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М : Наука, 1969.

7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М : Наука, 1966.

8. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. – М : Физматгиз, 1958.

9. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов / Л. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1983.

10. Вища математика в прикладах та задачах. Т. 1 : навч. посіб. / за ред. Л. В. Курпи. – Х. : НТУ «ХПІ», 2009.

Зміст

Навчальне видання

ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна
ОДИНЦОВА Олена Володимирівна
МАЗУР Ольга Сергіївна
КИРИЛЛОВА Наталія Олександрівна

СТИСЛИЙ КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина I

Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри

Навчальний посібник

Роботу до видання рекомендував проф. Д. В. Бреславський

Керівник видавничих проектів – А. О. Ястребов
Друкується в авторській редакції
Дизайн обкладинки – М. В. Кухаришина
Верстка – М. В. Кухаришина

Формат 60x84 1/16. Підписано до друку 31.05.2016.
Друк офсетний. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Умовн. друк. аркушів – 10,23. Обл.-вид. аркушів – 9,87.
Наклад 100 пр.

ТОВ «Кондор-Видавництво»
Свідоцтво Серія А01 №376847 від 28.07.2010 р.
03067, м. Київ, вул. Гарматна, 29/31
тел./факс (044) 408-76-17, 408-76-25