

УДК 620.178.5

ВАРИАНТЫ УЧЕТА КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В БАНДАЖНЫХ ПОЛКАХ ПРИ РАСЧЕТАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНОГО ВЕНЦА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Я.Д.КРУГЛИЙ^{1*}

¹ *отдел вибрационной прочности, Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины, Киев, УКРАИНА*
**email: yanademuz@gmail.com*

АННОТАЦИЯ Приведены результаты обчислювальних експериментів з визначення закономірностей впливу скінченноелементного моделювання контактної взаємодії бандажних полиць на спектр власних частот коливань лопаткових вінців робочих коліс турбін. Встановлено, що незалежно від умов експлуатації двигуна і співвідношення геометричних розмірів лопаток спосіб моделювання не має суттєвого впливу на власні частоти коливань. **Ключові слова:** лопатковий вінець, бандажна полка, скінченний елемент, власна частота коливань.

АННОТАЦИЯ Приведены результаты вычислительных экспериментов по определению закономерностей влияния конечноэлементного моделирования контактного взаимодействия бандажных полок на спектр собственных частот колебаний лопаточных венцов рабочих колес турбин. Установлено, что независимо от условий эксплуатации двигателя и соотношения геометрических размеров лопаток способ моделирования не оказывает существенного влияния на собственные частоты колебаний. **Ключевые слова:** лопаточный венец, бандажная полка, конечный элемент, собственная частота колебаний

VARIANTS OF THE CONSIDERATION OF THE CONTACT INTERACTION IN THE SHROUDS FOR THE MODAL ANALYSIS OF THE TURBINE BLADING BY FINITE ELEMENT METHOD

YA. D. KRUGLIY^{1*}

¹ *G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine
Kyiv, UKRAINE*

ABSTRACT This paper presents the computational investigation on the influence of the finite element simulation method of contact interaction between shrouds on the natural frequency spectrum of blade rows.

In the simulation of blade rows we assumed their structural rotational symmetry. The problem is solved using the finite element method. Three approaches to taking into account the contact interaction between shrouds are considered: 1. Applying of the compatibility conditions of nodal displacements at the nodes where non-zero contact pressures are observed; 2. Development of elastic elements (the values of the stiffness coefficient correspond to those of the contact pressure at the corresponding nodes); 3. Combination of the first and second approaches.

Based on the performed computational experiments, the regularities of influence of the simulation method of contact interaction between blade shrouds on the natural frequency spectrum of turbine blade rows have been established, which are characterized by different twists of airfoils and different ratio of its length L to the chord b of the end section. It has been found that the type of simulation of contact interaction between shrouds and the aspect ratio of blades slightly affect the values of natural frequencies of the considered blade rows, and their maximum difference under the operating conditions chosen does not exceed 5.6%. **Keywords:** blade assembly, shroud, finite element, natural frequency of vibration

Введение

В современном турбостроении полочное бандажирование рабочих лопаток турбин получило широкое применение как способ повышения надежности и работоспособности их венцов за счет уменьшения чувствительности к возбуждению колебаний путем объединения лопаток в замкнутую на круг систему или пакеты.

При решении задачи о колебаниях венцов с полочной бандажной связью лопаток необходимо учитывать возможность нестабильности их динамических свойств. От конкретно реализующегося

в этом случае характера контактного взаимодействия полок существенно зависит спектр собственных колебаний исследуемого лопаточного венца.

В настоящее время при изучении вибрационных характеристик лопаточных венцов в силу дорогостоящих натурных их испытаний, более широкое применение получил вычислительный эксперимент, который основывается на использовании метода конечных элементов. В работах [1-10] использовались модели лопаточных венцов, основанные на трехмерных конечных элементах, которые могут наиболее точно описать сложную их геометрию. Однако при этом остается

открытым вопросом: как правильно задать контактное взаимодействие в бандажной связи лопаток при расчетах собственных частот колебаний, ведь присутствие контактных элементов приводит к нелинейности задачи? как линейризовать систему? Анализ представленных в указанных работах моделей показывает, что существует три варианта моделирования контактного взаимодействия бандажных полок: 1 - накладывание условий совместности перемещений на узлы, в которых имеет место ненулевое контактное давление [2,3,5,9]; 2- накладывание этих же условий на всю контактную поверхность, предполагая, что все узлы входят во взаимодействие [3]; 3- создание между узлами упругих элементов [1,4,10].

Цель работы

Расчетное исследование влияния способа конечноэлементного моделирования контактного взаимодействия бандажных полок на спектр собственных частот колебаний лопаточных венцов.

Изложение основного материала

В качестве объектов исследований были выбраны лопаточные венцы 4-й ступени цилиндра низкого давления паровой турбины (венец 1) и турбины среднего давления (ТСД) АГТД Д-18Т (венец 2), лопатки которых снабжены Z-образными бандажными полками. Такой выбор венцов объясняется следующими обстоятельствами. Во-первых, их лопатки характеризуются существенной разницей отношения длины L пера к хорде b концевое сечения. Во-вторых, в [3] представлены некоторые данные расчетных и экспериментальных исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемых венцов, что позволяет провести сравнение получаемых в данной работе результатов исследований с приведенными в указанных работах.

Рассмотрим некоторые конструктивные особенности выбранных венцов, фрагменты которых приведены на рис.1.

Венец 1 состоит из 90 лопаток, перо которых длиной 628 мм характеризуется большой закруткой. Венец 2 включает 136 лопаток с длиной пера 117 мм незначительной закрутки. Отношение L/b для лопаток выбранных венцов равно 6.3 и 3.7 соответственно.

При моделировании выбранных лопаточных венцов предполагалась их конструктивная поворотная симметрия. В этом случае определение их характеристик НДС, в том числе и спектра собственных колебаний, осуществляется на основе рассмотрения отдельного периода в виде одной или нескольких лопаток с соответствующими граничными условиями. В данном случае рассматривался период, состоящий из одной лопатки (рис.2).

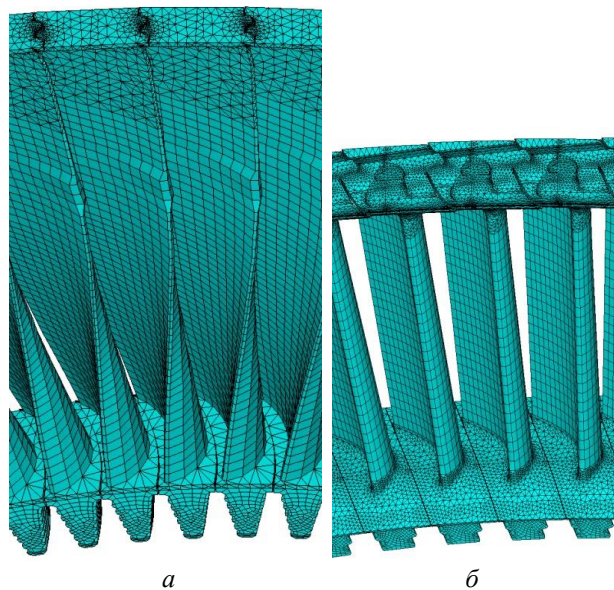


Рис.1 – Фрагменты лопаточных венцов 1 (а) и 2 (б) с конечно-элементной сеткой

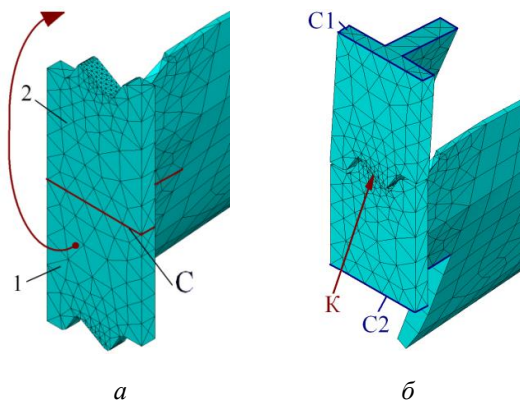


Рис. 2 - Схемы разреза бандажной полки (а) и моделирования сопряжения контактных поверхностей соседних полок (б)

В предположении жесткой заделки лопаток в диске определяющим моментом в определении граничных условий является моделирование бандажной связи лопаток, а именно: сопряжения контактных поверхностей K соседних бандажных полок. Для моделирования бандажной связи лопаток использовалась методика, описанная в [3]. Продемонстрируем это на примере Z-образной бандажной полки. Она разрезается как показано на рис. 2,а таким образом, чтобы узлы ее частей 1 и 2 на поверхности разреза C совпадали. Затем часть 2 перемещалась в цилиндрической системе координат на угол, равный $2\pi/N$, где N – число лопаток венца, что на рис. 2,а показано стрелкой. Таким образом обеспечивался натяг по контактным поверхностям K бандажных полок, а на поверхностях разреза $C1$ и $C2$

задавались условия сопряжения (рис. 2, б). Общий вид КЭ моделей периодов рассматриваемых лопаточных венцов приведен на рис.3.

Как показали исследования, проведенные в работе [11] использование 8-узловых конечных элементов обеспечивает необходимую точность расчетов при сгущении КЭ-сетки. Ввиду сложности геометрии бандажной полки, для создания ее КЭ модели в программном комплексе ANSYS были использованы тетраэдрические модификации SOLID45. Как видно из рис. 3, КЭ сетка бандажной полки в целом является равномерной, однако в зоне контакта она измельчалась.

Первым этапом расчета является определение контактного давления в бандажном соединении путем решения статической контактной задачи с использованием конечного элемента типа «поверхность-поверхность», который позволяет получить характеристики НДС периода, возникающего при взаимодействии двух поверхностей. В результате решения указанной задачи кроме давлений, возникающих на контактных поверхностях, можно определить такие характеристики при соответствующих условиях сопряжения полков: зазор – нулевые контактные давления; натяг – проникновение поверхностей и значения контактных давлений; скольжение и трение – поля трения и скольжения.

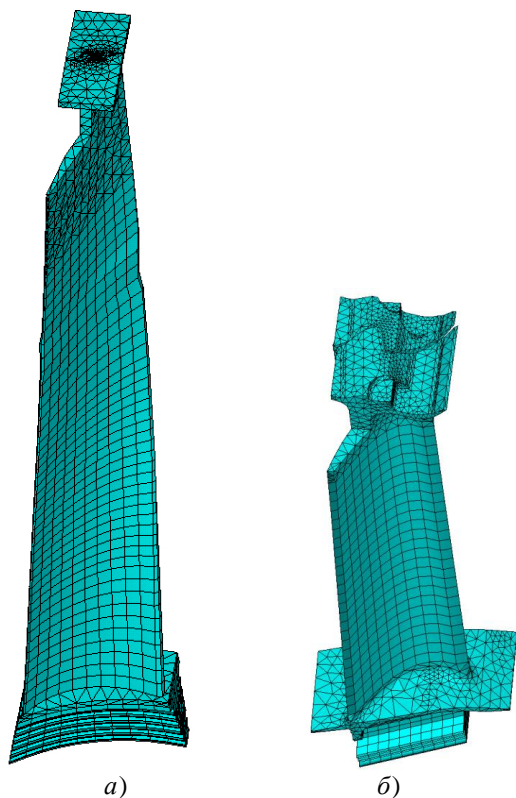


Рис.3 - Вид КЭ модели периодов лопаточных венцов 1 (а) и 2 (б)

В результате решения статической контактной задачи определены распределения контактных давлений в бандажном соединении при различных условиях эксплуатации двигателя, пример которых для выбранных лопаточных венцов приведен на рис. 4.

Из представленных на рис. 4 (а) распределений контактных давлений в бандажной полке следует, что при отсутствии центробежных сил для венца 1 ненулевые контактные давления сосредоточены в очень узкой зоне верхней кромки полки, и их значения невысокие. При учете центробежных сил площадь контактирования и значения давлений для этого венца существенно увеличивается (см.рис.4 (б)).

Из представленных на рис. 4 (а) распределений контактных давлений в бандажной полке следует, что при отсутствии центробежных сил для венца 1 ненулевые контактные давления сосредоточены в очень узкой зоне верхней кромки полки, и их значения невысокие. При учете центробежных сил площадь контактирования и значения давлений для этого венца существенно увеличивается (см.рис.4 (б)).

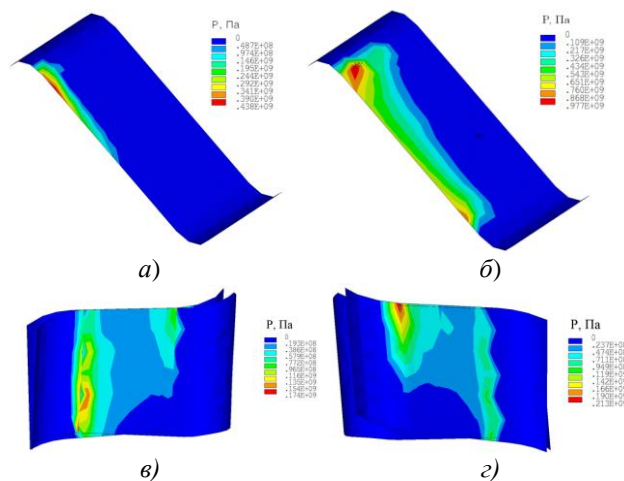


Рис.4 - Распределение контактного давления для венцов 1 (а,б) и 2 (в,г) при скорости вращения рабочего колеса ω , равной 0 (а,в); 50 об/с (венец 1) (б) и 612 об/с (венец 2) (г)

Для венца 2 при учете действия центробежных сил происходит перераспределение максимальных значений контактного давления с нижней части полки к верхней ее кромке. При этом площадь контакта остается примерно такой же, как в случае отсутствия центробежной силы, а значения контактного давления возрастают.

Вторым этапом исследования является задание условий контактного взаимодействия бандажных полков. В данной работе, учитывая ее постановку, были рассмотрены указанные выше три варианта моделирования контактного взаимодействия полков. Для их реализации осуществлялось следующее:

Вариант 1. Накладывание условий совместности перемещений с использованием процедуры COUPLING (команда CP) в программном комплексе ANSYS по всем направлениям в узлах поверхностей бандажных полок, в которых наблюдается ненулевое значение контактного давления (см. рис. 4).

Вариант 2. Создание упругих элементов типа COMBIN14 в программном комплексе ANSYS между узлами, в которых наблюдаются ненулевые контактные давления. Значения коэффициента жесткости каждого такого элемента соответствует значениям контактного давления в соответствующих узлах. При этом предполагается возможность растяжения и сжатия по всем осям декартовой системы координат.

Вариант 3. Комбинированный способ применения COMBIN14 и COUPLING, который предполагает создание упругих элементов между узлами по двум степеням свободы (UX и UY). Величины коэффициента жесткости каждого элемента совпадают со значениями контактного давления в соответствующих узлах. Также производилось накладывание условий совместности перемещений в радиальном направлении (вдоль пера лопатки, UZ) на узлы, в которых наблюдается ненулевое значение контактного давления.

Обсуждение результатов

С использованием разработанных КЭ моделей периодов выбранных лопаточных венцов были проведены вычислительные эксперименты по установлению влияния варианта моделирования контактного взаимодействия бандажных полок на спектр собственных частот колебаний.

Полученные значения собственных частот колебаний p_{mn} рассматриваемых венцов, где m, n – число узловых диаметров и окружностей соответственно, для $n=0$ при некоторых частотах вращения рабочего колеса приведены в таблицах 1 и 2. Здесь же указаны значения параметра

$$\varepsilon_m = \frac{P_{m0}^{(1)} - P_{m0}^{(2)}}{P_{m0}^{(1)}} \cdot 100\% \quad (1)$$

характеризующего различие собственных частот колебаний, определенных с использованием вариантов 1 и 2.

Анализ полученных данных вычислительных экспериментов позволяет сделать следующие выводы:

Во-первых, собственные частоты каждой из рассматриваемых форм колебаний исследуемых лопаточных венцов несущественно зависят от способа моделирования контактного взаимодействия бандажных полок. При этом, за исключением отдельных форм колебаний, например соответствующих $m=0$, наиболее высокие значения

собственных частот имеют место при использовании варианта 1, а наиболее низкие – варианта 2.

Во вторых, не установлено влияние соотношения геометрических размеров лопаток на различие собственных частот колебаний венцов. Так, например если для венца 1 при отсутствии центробежных сил максимальное значение параметра ε_m равно 2,5%, то для венца 2 – 1,8%.

Таблица 1 – Значения собственных частот колебаний p_{m0} в Гц исследуемых лопаточных венцов, определенные с использованием различных вариантов моделирования контактного взаимодействия, при $\omega=0$

m	Венец 1				Венец 2			
	Вариант			$\varepsilon_m, \%$	Вариант			$\varepsilon_m, \%$
	1	2	3		1	2	3	
0	89,95	89,7	90	0,05	543	539	539	0,76
1	120,3	117	118,6	1,45	611	607	607	0,74
2	149,4	147,6	148,3	0,75	745	739	740	0,82
3	157,8	156,8	157,3	0,27	843	837	837	0,72
4	161,7	161,2	161,5	0,14	892	885	885	0,85
5	164,9	164,5	164,7	0,09	918	911	911	0,82
6	168,2	167,8	168	0,08	935	927	928	0,9
7	171,8	171,3	171,6	0,11	948	941	941	0,83
8	175,8	175,2	175,5	0,14	961	953	953	0,86
9	180,2	179,5	179,9	0,18	973	965	966	0,92
10	185,2	184,1	184,7	0,25	987	979	979	0,86
15	214,7	212,8	216,2	1,6	1080	1070	1070	0,9
20	248,1	244,5	250,7	2,5	1232	1217	1218	1,2
25	267,9	264,3	269,6	1,95	1444	1421	1423	1,6
30	269,4	266,1	270	1,45	1687	1658	1660	1,75
35	264	260,6	264,3	1,4	1888	1862	1864	1,37
45	258,7	254,9	258,8	1,5	1990	1977	1979	1,4

Таблица 2 - Значения собственных частот колебаний p_{m0} в Гц исследуемых лопаточных венцов, определенные с использованием различных вариантов моделирования контактного взаимодействия, при $\omega=50$ об/с (венце 1) и 612 об/с (венце 2)

m	Венец 1				Венец 2			
	Вариант			$\varepsilon_m, \%$	Вариант			$\varepsilon_m, \%$
	1	2	3		1	2	3	
0	135,67	130,95	130,69	3,5	596	595	595	0,17
1	167,95	162,69	165,17	3,1	658	650	651	1,2
2	189,91	186,96	187,43	1,5	783	767	767	2,0
3	195,53	192,92	192,64	1,3	877	863	864	1,6
4	199,23	196,16	195,71	1,5	925	916	917	0,97
5	203,07	199,19	198,76	1,9	951	945	945	0,6
6	207,52	202,62	202,3	2,3	968	963	963	0,5
7	212,77	206,68	206,55	2,8	981	977	978	0,4
8	218,88	211,5	211,65	3,3	993	990	990	0,3
9	225,9	217,16	217,6	3,9	1006	1003	1003	0,3
10	233,8	223,7	224,65	4,3	1019	1016	1016	0,3
15	281,88	267,22	271,03	5,5	1112	1101	1101	0,99
20	318,11	306,49	310,88	3,6	1301	1268	1269	2,5
25	326,18	318,15	321,24	2,4	1472	1421	1423	3,5

30	325,09	316,85	319,29	2,5	1714	1643	1690	4,1
35	320,93	312,63	314,74	2,6	1919	1851	1888	3,5
45	315,53	307,67	309,56	2,5	2039	2013	2020	1,3

В третьих, учет центробежных сил приводит к возрастанию различия собственных частот колебаний рассматриваемых венцов. Так, в этом случае максимальное значение параметра ε_m для венца 1 равна 5,5%, а венца 2 – 4,1%. Такое явление можно объяснить тем, что центробежные силы обуславливают увеличение площади контакта, а для варианта 1 и количества узлов, на которые накладываются связи, что приводит к ужесточению модели лопаточного венца.

Рассмотрим теперь частотные функции $p_{mn}=f(m)$, которые были построены и приведены на рис. 5-6. Видно, что их вид для венцов, характеризующихся различной величиной L/b , не зависит от варианта моделирования контактного взаимодействия бандажных полок, что хорошо согласуется с известными данными [3,5,11].

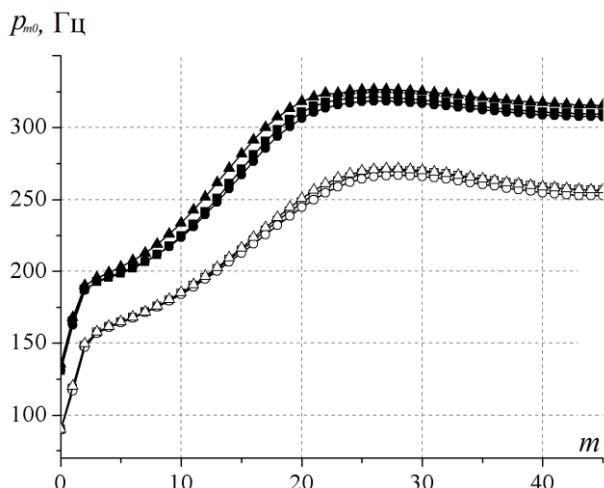


Рис. 5 - Частотная функция венца 1 при 1 (▲,△), 2 (□,■)и 3(○,●) вариантах моделирования контактного взаимодействия для скорости вращения рабочего колеса ω , равной 0 (□,○,△); 50 об/с (■,●,▲)

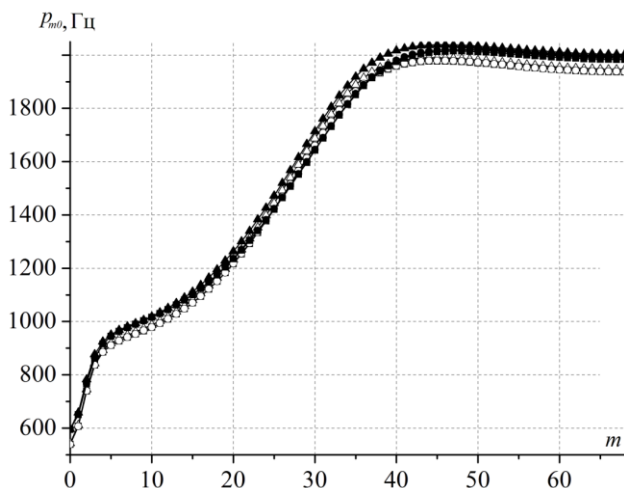


Рис. 6- Частотная функция венца 2 при 1 (▲,△), 2 (□,■)и 3(○,●) вариантах моделирования контактного взаимодействия для скорости вращения рабочего колеса ω , равной 0 (□,○,△); 612 об/с (■,●,▲)

Выводы

На основании выполненных вычислительных экспериментов установлены закономерности влияния способа моделирования контактного взаимодействия бандажных полок лопаток на спектр собственных частот колебаний венцов турбин, характеризующихся различными закруткой пера лопаток и отношением его длины L к хорде b конечного сечения.

Установлено, что вариант моделирования контактного взаимодействия бандажных полок не влияет на значения собственных частот рассматриваемых венцов, а максимальная их разница при выбранных условиях эксплуатации не превышает 5,6%.

Исходя из результатов анализа данных вычислительных экспериментов можно сделать заключение, что для определения спектра собственных частот колебаний бандажированных лопаточных венцов более приемлемым и физически обоснованным является способ моделирования контактного взаимодействия полок, основанный на комбинированном использовании COMBIN14 и COUPLING в программном комплексе ANSYS.

Список литературы

1. Воробьев Ю.С. Моделирование колебаний охлаждаемых лопаток газовых турбин / Ю.С. Воробьев, К.Ю. Дьяконенко, С.Б. Кулишов, А.Н. Скрицкий // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2007. – Вип. 9/45. – С. 12 - 15.
2. Ларин А.А. Исследование вынужденных колебаний лопаточных аппаратов со случайной технологической расстройкой по модели одного сектора / А.А. Ларин, В.А. Жовдак // *Вест. НТУ «ХПИ»*. – Харків: НТУ «ХПИ». – 2009. – №42. – С. 89-99
3. Zinkovskii A. P. Effect of identity violations of contact interaction between shrouds on the static and dynamic stress state characteristics of blade rings / A. P. Zinkovskii, Ya. D Kruglii // *Strength of Materials*. - 2012. - Vol. 44, № 2. - P. 144-150.
4. Frrone C.M. Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks / C.M.Firrone, S.Zucca // *Numerical Analysis – Theory and Application*. –Rijeka, 2011. – 301 - 334.
5. Савченко К.В. Влияние условий сопряжения бандажных полок на спектр собственных частот колебаний лопаточного венца / К.В. Савченко // *Вібрації в техніці і технологіях*. – 2015. – № 1 (77). – С. 111 – 116
6. Fan Jiang Research on structural design and optimization of the turbine blade shroud/ Fan Jiang, Le Han, Rongqiao Wang, Xiuli Shen, Weiwei Zang, Zhipeng Chang // *Proc of ASME Gas Turbine India Conference*. – New York, 2012. – P. 657-663.
7. N. Bachschmid On impulsive vibration tests of shrouded blade row / N. Bachschmid, E. Pesatori, S. Bistolfi, M. Ferrante, S. Chatterton // *Proc of the 6th International*

Conference Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques: 25-26 October 2011. – Compiegne: 2011. – P. 1-10

8. **Herzog A.** Nonlinear vibrations with friction: a multiharmonic approach / **A. Herzog, L. Panning** // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.* - 2010. - Vol. 10, № 1. - P. 245-246

9. **Savchenko K.V.** Influence of the Orientation of Shroud Contact Surfaces on the Static Stress State of Turbine Rotor Blades/ **K.V. Savchenko, A.P. Zinkovskii, I.G. Tokar, Ya.D. Kruglii** // *Strength of Materials.* - 2014. - Vol. 46, № 4. - P. 493-502.

10. **Chen Z.N.** Finite element analysis on collision-vibration characteristics of shrouded blades based on ANSYS/LS-DYNA / **Z.N.Chen, X.X. Lu, L.P.Li, Z.J.Huang, F.H.Jin** // *Dongli Gongcheng Xuebao/Journal of Chinese Society of Power Engineering.* - 2013. - Vol. 33, № 3. - P.189-193

11. **Зиньковський А.П.** Влияние характеристик конечно-элементной модели лопаточного венца на результаты расчета его спектра собственных частот колебаний / **А.П. Зиньковський, Д.В. Петришин, Я.Д.Круглий**// *Вибрації в техніці і технологіях.* – 2014. - № 3(75). - С. 77- 83.

12. **Иванов В. П.** Колебания рабочих колес турбомашин. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с.

Bibliography (transliterated)

1 **Vorobev Ju.S.** Modelirovanie kolebanij ohlazhdaemykh lopatok gazovykh turbin / **Ju.S. Vorobev, K.Ju. Djakonenko, S.B. Kulishov, A.N. Skrickij** // *Aviacionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija.* – 2007. – Vip. 9/45. - S. 12 - 15.

2. **Larin A.A.** Issledovanie vynuzhdennykh kolebanij lopatochnykh apparatov so sluchajnoj tehnologicheskoy rasstrojkoj po modeli odnogo sektora / **A.A. Larin, V.A. Zhovdak** // *Vest. NTU «XPI».* – Xarkiv: NTU«XPI». – 2009. – №42. – S. 89-99

3. **Zinkovskii A. P.** Effect of identity violations of contact interaction between shrouds on the static and dynamic stress state characteristics of blade rings / **A. P. Zinkovskii, Ya. D**

Kruglii // *Strength of Materials.* - 2012. - Vol. 44, № 2. - P. 144-150.

4. **Firrone C.M.** Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks / **C.M.Firrone, S.Zucca** // *Numerical Analysis – Theory and Application.* –Rijeka, 2011. – 301 - 334.

5. **Savchenko K.V.** Vliyanie uslovij sopryazheniya bandazhnykh polok na spektr sobstvennykh chastot kolebanij lopatochnogo venca / **K.V. Savchenko** // *Vibracii v tehnici i tehnologiyax.* – 2015. – № 1 (77). – S. 111 – 116

6. **Fan Jiang** Research on structural design and optimization of the turbine blade shroud/ **Fan Jiang, Le Han, Rongqiao Wang, Xiuli Shen, Weiwei Zang, Zhipeng Chang** // *Proc of ASME Gas Turbine India Conference.* – New York, 2012. – P. 657-663.

7. **N. Bachschmid** On impulsive vibration tests of shrouded blade row / **N. Bachschmid, E. Pesatori, S. Bistolfi, M. Ferrante, S. Chatterton** // *Proc of the 6th International Conference Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques: 25-26 October 2011. – Compiegne: 2011. – P. 1-10*

8. **Herzog A.** Nonlinear vibrations with friction: a multiharmonic approach / **A. Herzog, L. Panning** // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.* - 2010. - Vol. 10, № 1. - P. 245-246

9. **Savchenko K.V.** Influence of the Orientation of Shroud Contact Surfaces on the Static Stress State of Turbine Rotor Blades/ **K.V. Savchenko, A.P. Zinkovskii, I.G. Tokar, Ya.D. Kruglii** // *Strength of Materials.* - 2014. - Vol. 46, № 4. - P. 493-502.

10. **Chen Z.N.** Finite element analysis on collision-vibration characteristics of shrouded blades based on ANSYS/LS-DYNA / **Z.N.Chen, X.X. Lu, L.P.Li, Z.J.Huang, F.H.Jin** // *Dongli Gongcheng Xuebao/Journal of Chinese Society of Power Engineering.* - 2013. - Vol. 33, № 3. - P.189-193

11. **Zinkovskii A.P.** Vliyanie harakteristik konechno-elementnoj modeli lopatochnogo venca na rezultaty rascheta ego spektra sobstvennykh chastot kolebanij / **A.P.Zinkovskii, D.V. Petrishin, Ya.D.Kruglii**// *Vibracii v tehnici i tehnologiyah.* – 2014. - № 3(75). - S. 77- 83.

12. **Ivanov V. P.** Kolebaniya rabochikh koles turbomashin / **V. P. Ivanov.** – М.: Mashinostroenie, 1983. – 224 с.