

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**СТИСЛИЙ КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

**Частина II**

**Математичний аналіз. Теорія границь.  
Диференціальне числення функції однієї змінної**

Навчальний посібник  
для студентів технічних університетів

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 17.05.2019



УДК 517  
С 80

Рецензенти:

*В. Б. Гриньов*, д-р техн. наук, проф., Харківський національний університет будівництва та архітектури, зав. кафедри будівельної механіки;  
*К. В. Аврамов*, д-р техн. наук, проф., провідний наук. співроб., Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

**С 80**      **Стислий курс вищої математики: Ч. 2: Математичний аналіз. Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної. :** навч. посіб. / Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, Н. О. Кириллова, К. І. Любицька. – Харків : Видавництво Іванченка І.С. , 2023. – 232 с.

ISBN 978-617-8052-83-6.  
ISBN 978-617-8059-98-9 (Ч. 2).

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал з курсу теорії границь, диференціального числення функції однієї змінної, а також зразки розв'язання типових задач, тестові питання та задачі, варіанти контрольних робіт, індивідуальні варіанти типових розрахунків.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Іл. 31.    Бібліогр.: 10 назв.

УДК 517

© Г. М.Тимченко, 2023.  
© О. В. Одинцова, 2023.  
© Н. О. Кириллова, 2023.  
© К. І. Любицька, 2023.  
© НТУ «ХП», 2023.

ISBN 978-617-8052-83-6.  
ISBN 978-617-8059-98-9 (Ч. 2).

## Вступ

Наданий навчальний посібник відповідає програмі курсу вищої математики, що викладається для студентів технічних спеціальностей Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Призначено посібник для аудиторної і самостійної роботи студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання.

Посібник є другою частиною збірника під назвою «Стислий курс вищої математики», орієнтованого, в першу чергу, на такі підрозділи університету, як навчально-науковий інженерно-фізичний інститут, навчально-науковий інститут механічної інженерії та транспорту, а також технічні спеціальності військового інституту танкових військ. Наданий посібник включає навчальний матеріал першого семестру з математичного аналізу та складається з тем: вступ до математичного аналізу, теорія границь, диференціальне числення функції однієї змінної та його застосування. Кожна глава посібника містить теоретичний матеріал одної з тем, в якому наведені означення та їх пояснення, формулювання і доведення теорем, достатня кількість наочних прикладів. До кожної теми додається по тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань та зразок виконання одного варіанта з докладними поясненнями, кожен варіант містить достатню для засвоєння теми кількість задач. До тем надано перелік теоретичних питань, що виносяться на колоквиум та іспит, по чотири варіанти контрольних робіт з двома рівнями складності завдань та набори з 15 варіантів тестових завдань для проведення модульного контролю і поточної перевірки знань. Тестові завдання складаються з базових теоретичних та практичних питань на рівні знання формул, означень і формулювання теорем, не потребують доведень та багатокрокового виконання практичних завдань і можуть бути застосовані як допуск до іспиту або відповіді на задовільну оцінку. Наприкінці по-

сібника наведено стислий довідник основних формул з розглянутих тем. Також довідник містить формули елементарної математики, які використовуються при виконанні завдань.

Такий довідник дозволить студентам сконцентрувати увагу на головних моментах наданого матеріалу та допоможе його систематизувати.

Завдяки вищезазначеному структурному наповненню матеріалами посібник може бути використаний як викладачами, так і студентами для підготовки до контрольних робіт, колоквиумів, іспитів, при виконанні обов'язкових та домашніх завдань. Також посібник надає можливість студентам самостійно перевіряти рівень своїх знань з кожної теми.

Посібник був написаний на основі багаторічного досвіду викладання курсу вищої математики на кафедрі «Прикладна математика» НТУ ХПІ під керівництвом д.т.н., професора Л.В. Курпи, якій автори висловлюють подяку за цінні зауваження і поради.

# Глава 1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

## §1. МНОЖИНИ

### 1.1. Логічні символи

При викладанні курсу математичного аналізу для скорочення записів використовують деякі логічні символи (квантори)

№	квантор	Як читається	Приклад використання
1	$\Rightarrow$	впливає	$a > b \Rightarrow a^3 > b^3$
2	$\Leftrightarrow$	рівносильно, необхідно та достатньо	$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$
3	$\in$	належить	$3 \in N$ або $-2 \in Z$
4	$\notin$	не належить	$0,5 \notin N$
5	$\exists$	існує	$\exists x: x^2 - 1 = 0$ (це $x = \pm 1$ )
6	$\exists!$	існує і притому єдине значення	$\exists! x \in R: 2^x = 1$ (дійсно, це $x = 0$ )
7	$\forall$	для всіх, для кожного	$\forall x \in R \rightarrow x^2 + x + 1 > 0$

### 1.2. Множини. Основні поняття

**Множиною** називають сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за будь-якою ознакою. Наприклад, множина дійсних чисел, множина студентів першого курсу, множина коренів рівняння.

Об'єкти, з яких складається множина, називають його елементами. Множини позначають великими літерами латинського алфавіту  $A, B, \dots, X, Y, \dots$ , а елементи множин – відповідними маленькими літерами  $a, b, \dots, x, y, \dots$

Якщо елемент  $a$  належить множині  $A$ , то пишуть  $a \in A$ , якщо елемент  $a$  не належить множині  $A$ , то пишуть  $a \notin A$  або  $a \bar{\in} A$ . Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою та позначається  $\emptyset$ .

Щоб задати множину, її елементи записують у фігурних дужках, в

середині яких вони перелічені (якщо це можливо), або вказують спільну ознаку, яку мають всі елементи даної множини.

Наприклад, запис  $A = \{3, 7, 11\}$  означає, що множина  $A$  складається з трьох чисел – 3, 7 та 11; запис  $X = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$  означає, що множина  $X$  складається з усіх дійсних чисел, що задовольняють умові:  $-2 \leq x \leq 2$ .

Множина  $A$  називається **підмножиною** множини  $B$ , якщо кожний елемент множини  $A$  є елементом множини  $B$ . Позначається це так:  $A \subset B$  («множина  $A$  є частиною множини  $B$ ») або  $B \supset A$  («множина  $B$  вміщує в себе множину  $A$ »).

Множини, що складаються з однакових елементів, називаються рівними. Записують це так:  $A = B$ , тобто  $A \subset B$  та  $B \supset A$ .

**Об'єднанням(сумою) множин**  $A$  та  $B$  називають множину  $C$ , що складається з елементів  $x$ , кожний з яких належить або множині  $A$ , або множині  $B$ , або обом множинам одночасно. Позначається це так:  $C = A \cup B$ . Тобто  $C = A \cup B = \{x : x \in A \text{ або } x \in B\}$ .

**Перетином множин**  $A$  та  $B$  називають множину  $C$ , що складається з елементів  $x$ , кожний з яких належить множині  $A$  та множині  $B$  одночасно. Позначається це так:  $C = A \cap B$ . Тобто  $C = A \cap B = \{x : x \in A \text{ та } x \in B\}$ .

Різницею множин  $A$  та  $B$  називають множину  $C$ , що складається з елементів  $x$ , які належить множині  $A$  та не належать множині  $B$ . Позначається це  $C = A \setminus B$ . Тобто  $C = A \setminus B = \{x : x \in A \text{ та } x \notin B\}$ . У випадку, коли  $B$  є підмножиною множини  $A$  ( $B \subset A$ ), то різниця  $C = A \setminus B$  зветься доповненням множини  $B$  до множини  $A$ .

### 1.3. Числові множини. Множина дійсних чисел

Множини, елементами яких є числа, називають **числовими**.

Наприклад:

$N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$  – множина натуральних чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$  – множина цілих невід'ємних чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$  – множина цілих чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$  – множина раціональних чисел;

$R$  – множина дійсних чисел.

Множина  $R$  складається з раціональних та ірраціональних чисел. Раціональне число – це таке число, що можна виразити простим нескоротним дробом, або кінцевим десятковим дробом, або нескінченним періодичним дробом. Наприклад,  $\frac{1}{2} = 0,5$ ,  $\frac{1}{3} = 0,333\dots$  – раціональні числа.

Дійсні числа, що не є раціональними, називаються ірраціональними. Ірраціональне число можна виразити тільки нескінченним неперіодичним дробом. Наприклад,  $\pi = 3,1415926\dots$ ,  $e = 2,71828\dots$  Множина  $R$  дійсних чисел є упорядкованою, щільною, неперервною та незліченою. Саме неперервність дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх дійсних чисел та множиною всіх точок прямої. Це означає, що кожному числу  $x \in R$  відповідає певна точка числової осі та навпаки.

#### 1.4. Числові проміжки. Окіл точки

Нехай  $a$  та  $b$  – дійсні числа, причому  $a < b$ .

**Числовими проміжками або інтервалами** називають підмножини всіх дійсних чисел, що мають вигляд:

$[a;b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  – відрізок (сегмент, замкнений проміжок);

$(a;b) = \{x : a < x < b\}$  – інтервал (відкритий проміжок);

$[a;b) = \{x : a \leq x < b\}$ ;  $(a;b] = \{x : a < x \leq b\}$  – напіввідкриті інтервали (або напіввідкриті відрізки);

$(-\infty;b] = \{x : x \leq b\}$ ;  $(-\infty;b) = \{x : x < b\}$ ;  $[a;+\infty) = \{x : x \geq a\}$ ;  
 $(a;+\infty) = \{x : x > a\}$  – напівпрямі.

$(-\infty;+\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = R$  – нескінченний інтервал (проміжок).

Числа  $a$  та  $b$  є відповідно лівим та правим кінцями проміжка.

Нехай  $x_0$  – будь-яке дійсне число (точка на числовій осі).

**Околом** точки  $x_0$  називається будь-який інтервал  $(a;b)$ , який містить точку  $x_0$ . Зокрема, інтервал  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ , де  $\varepsilon > 0$ , називається  $\varepsilon$  – околом точки  $x_0$ . Якщо  $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ , то виконується нерів-

ність  $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ , або  $|x - x_0| < \varepsilon$ . Виконання останньої нерівності означає, що точка  $x$  належить  $\varepsilon$ -околу точки  $x_0$ .

## §2. ФУНКЦІЇ

### 2.1. Поняття функції. Графік функції. Способи задання функцій

Нехай  $X$  та  $Y$  – множини дійсних чисел (тобто  $X \subset R$  та  $Y \subset R$ ). Якщо кожному елементу множини  $x \in X$  поставлений у відповідність за певним правилом елемент множини  $y \in Y$ , то кажуть, що на множині  $X$  визначена числова функція  $y = f(x)$ . Множина  $X$  називається **областю визначення** функції  $f(x)$  та позначається  $D(f)$ . Множина всіх  $y \in Y$  називається **множиною значень** функції  $f(x)$  та позначається  $E(f)$ . Змінна  $x$  при цьому називається **аргументом** або незалежною змінною, а  $y$  – **функцією** або залежною змінною (від  $x$ ). Про  $x$  та  $y$  кажуть, що вони знаходяться у функціональній залежності, іноді функціональну залежність  $y$  від  $x$  позначають так:  $y = y(x)$ .

Графіком функції  $y = f(x)$  називається множина всіх точок площини  $Oxy$ , для кожної з яких  $x$  є значенням аргументу, а  $y$  є відповідним значенням функції (рис. 1.1). Щоб задати функцію  $y = f(x)$ , треба вказати правило, за яким, по обраному значенню змінної  $x$ , можна знайти відповідне значення змінної  $y$ . Найбільш часто зустрічаються три способи задання функції: аналітичний, графічний, табличний.

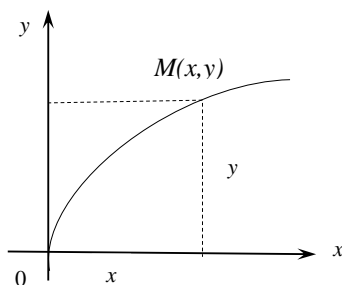


Рис. 1.1

При аналітичному способі функція задається за допомогою однієї або кількох формул або рівнянь. Наприклад:

$$1) y = x^3 \cdot \ln x; \quad 2) y = \begin{cases} y = x, & x < 0, \\ y = x^2, & x \geq 0. \end{cases} \quad 3) x^2 + y^2 = R^2.$$

При графічному способі задається графік функції. Значення функ-

ції  $y$ , що відповідають тим чи іншим значенням змінної  $x$ , знаходяться безпосередньо з цього графіка.

При табличному способі функція задається таблицею ряду значень аргументу та відповідних значень функції. Наприклад, широко відомі таблиці Брадіса.

## 2.2. Основні властивості функцій

1. Функція  $y = f(x)$ , яка визначена на множині  $D$ , називається **парною**, якщо  $\forall x \in D$ , виконуються умови:  $(-x) \in D$  та  $f(-x) = f(x)$ ; функція називається **непарною**, якщо  $\forall x \in D$ , виконуються умови:  $(-x) \in D$  та  $f(-x) = -f(x)$ .

Графік парної функції є симетричним відносно осі ординат (дзеркальна симетрія), а непарної – відносно початку координат (поворотна симетрія).

Наприклад,  $y = x^2$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \frac{1}{1+x^2}$  – є парними функціями, а  $y = x^3$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \frac{-x}{1+x^2}$  – є непарними, функції  $y = x - 3$ ,  $y = 3^x$  – є функціями загального вигляду, тобто вони не є парними чи непарними.

2. Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на множині  $D$  та нехай  $D_1 \subset D$ . Функція  $y = f(x)$  називається **монотонно зростаючою** на множині  $D_1$ , якщо для будь-яких значень  $x_1, x_2 \in D_1$ , таких, що  $x_1 < x_2$ , виконується строга нерівність  $f(x_1) < f(x_2)$ . Якщо виконується нестрога нерівність  $f(x_1) \leq f(x_2)$  – функція називається **неспадною**. Функція  $y = f(x)$  називається **монотонно спадною** на множині  $D_1$ , якщо для будь-яких значень  $x_1, x_2 \in D_1$ , таких, що  $x_1 < x_2$ , виконується строга нерівність  $f(x_1) > f(x_2)$ . Якщо виконується нестрога нерівність  $f(x_1) \geq f(x_2)$  – функція називається **незростаючою**.

Наприклад, функція  $y = x^2$  на інтервалі  $(-\infty; 0)$  є спадною, а на інтервалі  $(0; +\infty)$  – зростаючою. Інтервали, на яких функція є монотонною, називаються інтервалами монотонності.

3. Функція  $y = f(x)$ , визначена на множині  $D$ , називається **об-**

**меженою** на цій множині, якщо існує таке число  $M > 0$ , що для всіх  $x \in D$  виконується нерівність  $|f(x)| \leq M$ . Зрозуміло, що графік обмеженої функції лежить між прямими  $y = -M$  та  $y = M$ . Наприклад,  $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow |\sin x| \leq 1$ . Функція називається *обмеженою зверху*, якщо існує таке число  $\bar{M}$ , що для всіх  $x \in D$  виконується нерівність  $f(x) \leq \bar{M}$ . Функція називається *обмеженою знизу*, якщо існує таке число  $\underline{m}$ , що для всіх  $x \in D$  виконується нерівність  $f(x) \geq \underline{m}$ .

4. Функція  $y = f(x)$ , визначена на множині  $D$ , називається **періодичною** на цій множині, якщо існує таке число  $T > 0$ , що для всіх  $x \in D$  значення та  $f(x+T) = f(x)$ . Число  $T$  називається **періодом** функції. Якщо  $T$  є періодом функції, то її періодами також будуть числа  $n \cdot T$ , де  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Так, для функції  $y = \cos x$  періодами будуть  $\pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi, \dots$

Основний період (найменший додатний) – це період  $T = 2\pi$ . Взагалі за основний період беруть найменше додатне число  $T$ , яке задовольняє рівності  $f(x+T) = f(x)$ .

### 2.3. Обернена функція

Нехай функція  $y = f(x)$ , визначена на множині  $D$ , має множину значень  $E$ . Якщо кожному значенню  $y \in E$  відповідає єдине значення  $x \in D$ , то визначена функція  $x = \varphi(y)$ , яка має область визначення  $E$  та множину значень  $D$ . Така функція  $x = \varphi(y)$  називається **оберненою** до функції  $y = f(x)$ . Про функції  $x = \varphi(y)$  та  $y = f(x)$  кажуть, що вони є взаємно оберненими. Щоб знайти функцію  $x = \varphi(y)$ , обернену до функції  $y = f(x)$ , достатньо розв'язати рівняння  $y = f(x)$  відносно  $x$  (якщо це можливо).

Наприклад, для функції  $y = 3x - 5$  оберненою є функція  $x = \frac{y+5}{3}$ .

З означення оберненої функції випливає, що функція  $y = f(x)$  має обернену тільки тоді, коли функція  $f(x)$  задає взаємно однозначну відповідність між множинами  $D$  та  $E$ . Звідси виходить, що будь-яка стро-

го монотонна функція має обернену. При цьому, якщо функція зростає (спадає), то обернена функція теж зростає (спадає).

Функція  $y = f(x)$  та обернена до неї  $x = \varphi(y)$  зображуються однією і тією ж кривою, тобто їхні графіки збігаються. Якщо домовитися, що, як звичайно, незалежну

змінну позначати через  $x$ , а залежну змінну через  $y$ , то функція, обернена до функції  $y = f(x)$ , запишеться у вигляді  $y = \varphi(x)$ . Це означає, що точка  $A_1(a;b)$  кривої  $y = f(x)$  стає точкою  $A_2(b;a)$  кривої  $y = \varphi(x)$ . Але точки  $A_1(a;b)$  та  $A_2(b;a)$  симетричні відносно прямої  $y = x$ . Тому робимо висновок, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів. (рис. 1.2).

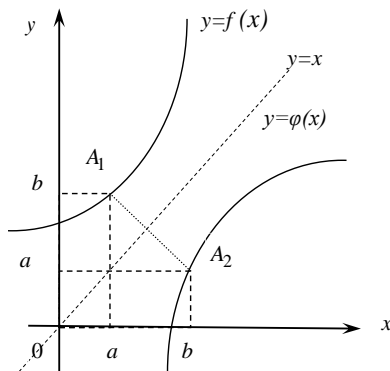


Рис. 1.2

#### 2.4. Складна функція

Нехай функція  $y = f(u)$ , визначена на множині  $D$ , а функція  $u = \varphi(x)$  визначена на множині  $D_1$ , причому для  $\forall x \in D_1$  відповідне значення  $u = \varphi(x) \in D$ . Тоді на множині  $D$  визначена функція  $y = f(\varphi(x))$ , яка називається **складною функцією** від  $x$  (або суперпозицією функцій, або функцією від функції). Змінну  $u = \varphi(x)$  називають проміжним аргументом складної функції. Наприклад, функція  $y = \ln(\arctg x)$  є суперпозицією двох функцій  $y = \ln u$  та  $u = \arctg x$ . Складна функція може мати кілька проміжних аргументів. Наприклад,  $y = \sin(3^{5x+1})$ .

#### 2.5. Основні елементарні функції та їхні графіки

Основними елементарними функціями називають такі функції.

1) *Показникова функція*  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . На рис.1.3 зображені

графіки показникових функцій, що відповідають різним основам степеня.

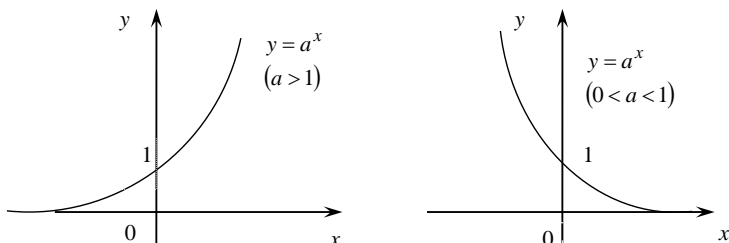


Рис. 1.3

2) *Степенева функція*  $y = x^a, a \in R$ . Приклади графіків степеневих функцій, що відповідають різним показникам степеня, показані на рис. 1.4.

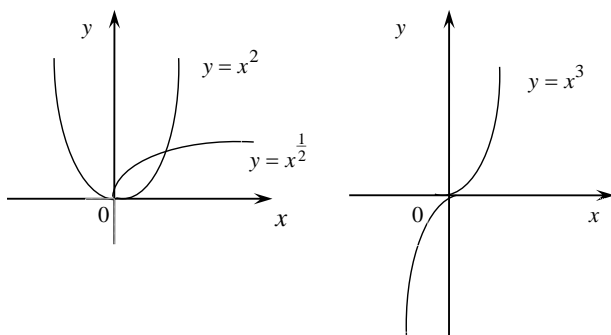


Рис. 1.4

3) *Логарифмічна функція*  $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ . Графіки логарифмічних функцій, що відповідають різним основам, зображені на рис. 1.5.

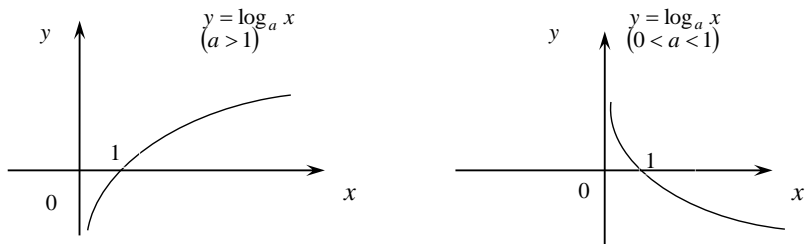


Рис. 1.5

4) Тригонометричні функції синус, косинус, тангенс, котангенс (позначаються  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  відповідно).

Функція  $y = \sin x$  (графік наведений на рис. 1.6).

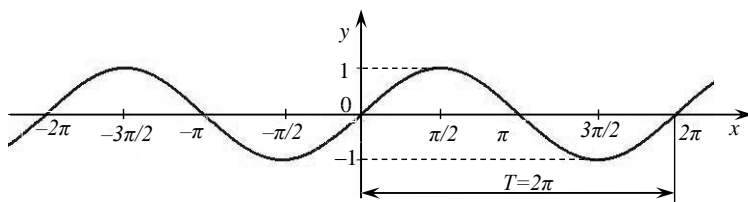


Рис. 1.6

Область визначення функції  $x \in R$ , область значень  $y \in [-1; 1]$ , функція непарна, тобто  $\sin(-x) = -\sin x$ , функція періодична з найменшим додатним періодом  $2\pi$ .

Функція  $y = \cos x$  (графік наведений на рис. 1.7).

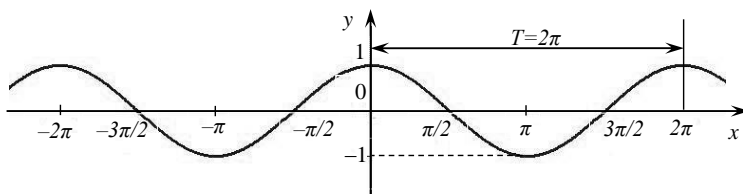


Рис. 1.7

Область визначення функції  $x \in R$ , область значень  $y \in [-1; 1]$ , функція парна, тобто  $\cos(-x) = \cos x$ , функція періодична з найменшим додатним періодом  $2\pi$ .

Функція  $y = \operatorname{tg} x$  (графік наведений на рис. 1.8).

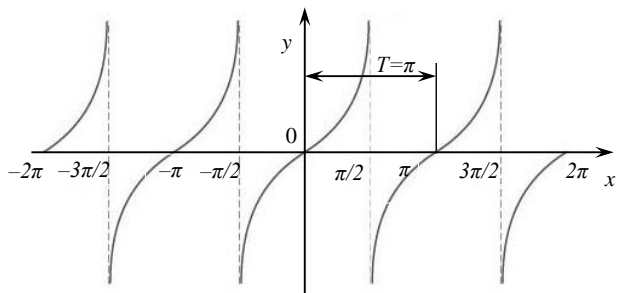


Рис. 1.8

Область визначення функції  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , область значень  $y \in \mathbb{R}$ , функція непарна, тобто  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$ , функція періодична з найменшим додатним періодом  $\pi$ .

Функція  $y = \operatorname{ctg}x$  (графік наведений на рис.1.9).

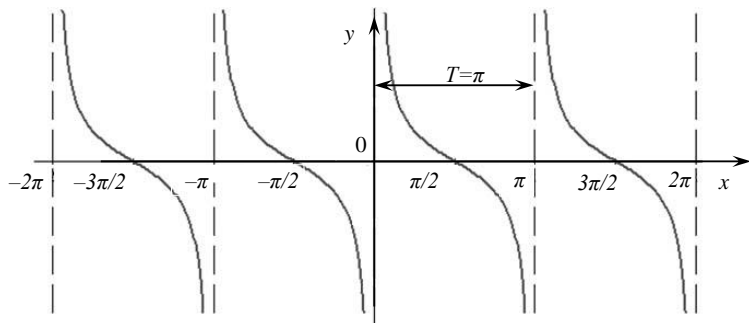


Рис. 1.9

Область визначення функції  $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , область значень  $y \in \mathbb{R}$ , функція непарна, тобто  $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}x$ , функція періодична з найменшим додатним періодом  $\pi$ .

5) *Обернені тригонометричні функції* арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс (позначаються  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg}x$  відповідно).

Оскільки вихідні тригонометричні функції періодичні, то обернені функції, взагалі кажучи, є багатозначними. Щоб забезпечити однозначне відповідність між двома змінними, області визначення вихідних тригонометричних функцій обмежують, розглядаючи лише їх головні гілки. Наприклад, функція  $y = \sin x$  розглядається лише в проміжку  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , так званий основний інтервал. На цьому інтервалі обернена функція арксинус визначена однозначно.

Функція  $y = \arcsin x$  (графік наведений на рис. 1.10).

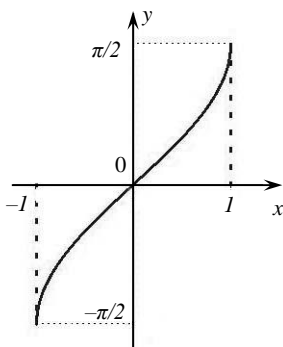


Рис. 1.10

*Арксинусом* числа  $a$  називається значення кута  $x$  в проміжку  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , при якому  $\sin x = a$ . Обернена функція  $y = \arcsin x$  визначена при  $x \in [-1; 1]$ , областю її значень є відрізок  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , функція непарна.

Функція  $y = \arccos x$  (графік наведений на рис. 1.11).

*Аркосинусом* числа  $a$  називається значення кута  $x$  в проміжку  $x \in [0; \pi]$ , при якому  $\cos x = a$ . Обернена функція  $y = \arccos x$  визначена при  $x \in [-1; 1]$ , областю її значень є відрізок  $y \in [0; \pi]$ .

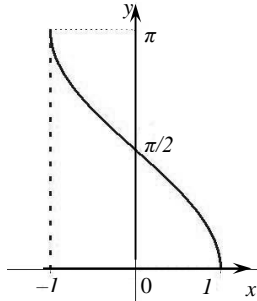


Рис. 1.11

Функція  $y = \text{arctg} x$  (графік наведений на рис. 1.12).

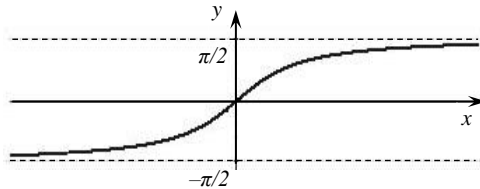


Рис. 1.12

*Арктангенсом* числа  $a$  називається значення кута  $x$  у відкритому інтервалі  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , при якому  $\text{tg} x = a$ . Обернена функція  $y = \text{arctg} x$  визначена при всіх  $x \in \mathbb{R}$ , областю значень арктангенса є інтервал  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Функція  $y = \text{arcctg} x$  (графік наведений на рис. 1.13).

*Аркотангенсом* числа  $a$  називається значення кута  $x$  у відкритому інтервалі  $x \in (0; \pi)$ , при якому  $\text{ctg} x = a$ . Обернена функція  $y = \text{arcctg} x$  визначена при всіх  $x \in \mathbb{R}$ , областю значень аркотангенса є інтервал  $y \in (0; \pi)$ .

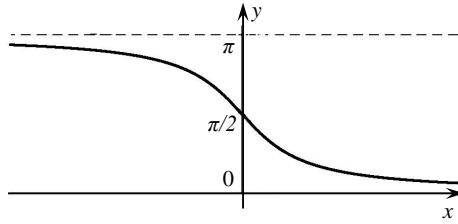


Рис. 1.13

Функція, що утворена з основних елементарних функцій за допомогою кінцевого числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та коренювання) і операцій суперпозиції, називається *елементарною функцією*. Наприклад,  $y = \sin(x^2 + 2x - 1)$ ,  $y = \operatorname{tg}x \cdot e^x$ ,  $y = \frac{\ln x}{3 + 2x^3}$ ,  $y = \arccos(2x + 5)$ ,  $y = 2^{\sqrt[3]{x+4}}$ .

Кожну елементарну функцію можна задати формулою, тобто набором кінцевого числа символів, що відповідають використуваним операціям. Усі елементарні функції неперервні на своїй області визначення.

Приклади неелементарних функцій:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x, & \text{якщо } x > 0. \end{cases} \quad y = \frac{x^n}{n!+2}.$$

## §3. ПОСЛІДОВНОСТІ

### 3.1. Числова послідовність

Якщо кожному числу  $n$  з множини  $N$  натуральних чисел ставиться у відповідність за деяким законом дійсне число  $x_n$ , то кажуть, що на множині натуральних чисел задана *числова послідовність*  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ . Тобто числовою послідовністю (або просто послідовністю)  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  називається функція

$$x_n = f(n) \tag{1.1}$$

натурального аргументу  $n$ . Коротко послідовність позначається у вигляді  $\{x_n\}$ ,  $n \in N$ . Число  $x_1$  називається першим членом (елементом) послідовності,  $x_n$  – спільним або  $n$ -м членом послідовності.

Частіш за все послідовність задається формулою її спільного члена. Формула (1.1) дозволяє обчислити будь-який член послідовності за його номером  $n$ . Так, рівності

$$u_n = 2n + 3, v_n = \frac{n-1}{n^2}, y_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in N$$

здають відповідні послідовності

$$u_n = \{5, 7, 9, \dots, 2n + 3, \dots\}; v_n = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{n-1}{n^2}, \dots\right\};$$

$$y_n = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right\}.$$

Інший спосіб задання числових послідовностей – рекурентний спосіб. У ньому задається перший елемент послідовності  $x_1$  та правило визначення  $n$ -го елемента за  $(n-1)$ -м:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Таким чином,  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$  і т.д. При такому способі задання послідовності для визначення двадцятого члена потрібно обчислити всі дев'ятнадцять попередніх.

Послідовність  $\{x_n\}$  називається **обмеженою зверху**, якщо існує таке дійсне число  $M$ , що  $\forall n$  виконується нерівність  $x_n \leq M$ , при цьому число  $M$  називається верхньою гранню послідовності. Послідовність  $\{x_n\}$  називається **обмеженою знизу**, якщо існує таке дійсне число  $m$ , що  $\forall n$  виконується нерівність  $x_n \geq m$ , при цьому число  $m$  називається нижньою гранню послідовності. Послідовність  $\{x_n\}$  називається **обмеженою**, якщо вона обмежена зверху і знизу, тобто існує таке дійсне число  $M > 0$ , що для будь-якого  $n \in N$  виконується нерівність  $|x_n| \leq M$ . В іншому випадку послідовність називається **необмеженою**.

Зрозуміло, що обмежена зверху послідовність може мати нескінченну кількість верхніх граней, найменша з них називається точною

верхньою гранню (позначається  $\sup x_n$ ). Обмежена знизу послідовність може мати нескінченну кількість нижніх граней, найбільша з них називається точною нижньою гранню (позначається  $\inf x_n$ ).

Послідовність  $\{x_n\}$  називається **монотонно зростаючою (неспадаючою)**, якщо для  $\forall n$  виконується нерівність  $x_{n+1} > x_n$  ( $x_{n+1} \geq x_n$ ). Послідовність  $\{x_n\}$  називається **монотонно спадаючою (незростаючою)**, якщо для  $\forall n$  виконується нерівність  $x_{n+1} < x_n$  ( $x_{n+1} \leq x_n$ ). Монотонно зростаючі та монотонно спадні послідовності називаються **монотонними**.

Якщо всі елементи послідовності  $\{x_n\}$  дорівнюють одному й тому ж числу  $c$ , то послідовність називають **постійною**.

### 3.2. Границя числової послідовності

Число  $a$  називається **границею послідовності**  $\{x_n\}$ , якщо для будь-якого додатного числа  $\varepsilon$  знайдеться таке натуральне число  $N$ , що для всіх  $n > N$  виконується нерівність  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

У цьому випадку пишуть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  та кажуть, що послідовність  $\{x_n\}$  має границю, що дорівнює числу  $a$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $x$  прямує до нескінченності). Також кажуть, що послідовність  $\{x_n\}$  збігається з  $a$ .

Коротко означення границі можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Послідовності, які мають границею кінцеве число  $a$ , називають також збіжними, послідовності, які не мають кінцевої границі, називають розбіжними.

**Приклад 1.1.** Довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n - 2}{3n} = 2$ .

**Розв'язання.** За означенням число 2 буде границею послідовності  $x_n = \frac{6n - 2}{3n}$ ,  $n \in N$ , якщо для  $\forall \varepsilon > 0$  знайдеться натуральне число  $N$ ,

таке, що для всіх  $n > N$  буде виконуватися нерівність  $\left| \frac{6n - 2}{3n} - 2 \right| < \varepsilon$ ,

відкля  $\left| \frac{6n-2}{3n} - 2 \right| = \left| \frac{6n-2-6n}{3n} \right| = \left| \frac{-2}{3n} \right| = \frac{2}{3n} < \varepsilon$ . Нерівність виконується

для всіх  $n > \frac{2}{3\varepsilon}$ , тобто для всіх  $n > N = \left[ \frac{2}{3\varepsilon} \right]$ , де  $\left[ \frac{2}{3\varepsilon} \right]$  – ціла частина чи-

сла  $\frac{2}{3\varepsilon}$ . Нагадуємо, що цілою частиною числа  $r$  (позначається  $[r]$ ) є

найбільше ціле число, що не перевищує  $r$ . Ми показали, як для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна знайти відповідне значення  $N$ . Треба зауважити, що

число  $N$  залежить від  $\varepsilon$ . Так, якщо  $\varepsilon = \frac{3}{10}$ , то

$$N = \left[ \frac{2}{3 \cdot \frac{3}{10}} \right] = \left[ \frac{20}{9} \right] = \left[ 2 \frac{2}{9} \right] = 2, \quad \text{якщо} \quad \varepsilon = 0,01, \quad \text{то}$$

$$N = \left[ \frac{2}{0,03} \right] = [66,666] = 66. \text{ Тому часто записують } N = N(\varepsilon).$$

З'ясуємо геометричний зміст означення границі послідовності.

Нерівність  $|x_n - a| < \varepsilon$  рівносильна нерівностям  $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$  або  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ , які показують, що елемент  $x_n$  знаходиться в  $\varepsilon$ -околі точки  $a$ .

Тому означення границі послідовності геометрично можна сформулювати так: число  $a$  називається границею послідовності  $\{x_n\}$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon$ -околу точки  $a$  знайдеться таке натуральне число  $N$ , що всі значення  $x_n$ , для яких  $n > N$ , попадуть у  $\varepsilon$ -оکیل точки  $a$ .

Зрозуміло, що чим менше  $\varepsilon$ , тим більше  $N$ , але у всякому разі у середині  $\varepsilon$ -околу точки  $a$  знаходиться нескінченна кількість членів послідовності, а за її межами тільки скінченне їх число.

**Теорема про єдиність границі послідовності.** Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

**Доведення.** Доведення теореми будемо вести від супротивного. Припустимо, що послідовність  $\{x_n\}$  має дві границі, тобто є два числа  $a$

та  $b$ , такі, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  та  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . Нехай  $a < b$ . Виберемо  $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$ ,

тоді  $\varepsilon$ -околиці точок  $a$  та  $b$  не перетинаються. Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то це означає, що знайдеться таке натуральне число  $N_1$ , що всі значення  $x_n$ , для яких  $n > N_1$ , попадуть у  $\varepsilon$ -оکیل точки  $a$ . Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , то це означає, що знайдеться таке натуральне число  $N_2$ , що всі значення  $x_n$ , для яких  $n > N_2$ , попадуть у  $\varepsilon$ -оکیل точки  $b$ . Нехай  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тоді всі значення  $x_n$ , для яких  $n > N$ , мають одночасно попасти як в  $\varepsilon$ -оکیل точки  $b$ , так і в  $\varepsilon$ -оکیل точки  $a$ , що неможливо. Значить, послідовність може мати тільки одну границю. Теорему доведено.

З цієї теореми можна зробити висновок, що постійна послідовність  $x_n = c$ ,  $n \in N$  має границю, що дорівнює числу  $c$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ .

Дійсно, для  $\forall \varepsilon > 0$  при всіх натуральних  $n$  виконується нерівність  $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ .

### 3.3. Граничний перехід у нерівностях

Нехай задані послідовності  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$ .

**Теорема 3.3.1.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  та, починаючи з деякого номера, має місце нерівність  $x_n \leq y_n$ , то  $a \leq b$ .

**Доведення.** Доведення будемо вести від супротивного. Припустимо, що  $a > b$ . З рівнянь  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  та  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  виходить, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке натуральне число  $N(\varepsilon)$ , що при всіх  $n > N(\varepsilon)$  будуть виконуватися нерівності  $|x_n - a| < \varepsilon$  та  $|y_n - b| < \varepsilon$ , тобто

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  та  $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$ . Візьмемо  $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$ . Тоді

$x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{3} = \frac{2a+b}{3}$ , а  $y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{3} = \frac{2b+a}{3}$ . З умови

$x_n \leq y_n$ , виходить, що  $\frac{2a+b}{3} < x_n \leq y_n < \frac{2b+a}{3}$ , відкіля

$2a+b < 2b+a \Rightarrow 2a-a < 2b-b$ , тобто маємо  $a < b$ , що суперечить нашому припущенню  $a > b$ . Тоді справедливо зворотнє твердження  $a \leq b$ , що і треба було довести.

Зауважимо, що зворотнє твердження також є правдивим. Якщо

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , та  $a \leq b$ , то починаючи з деякого номера, має

місце нерівність  $x_n \leq y_n$ .

**Теорема про «зачату» послідовність.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  та починаючи з деякого номера є справедливою нерівність

$x_n \leq z_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

*Доведення.* З умови  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  випливає, що знайдеться таке на-

туральне число  $N_1$ , що для всіх значень  $x_n$ , для яких  $n > N_1$ , виконується нерівність  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ . Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , то це означає, що

знайдеться таке натуральне число  $N_2$ , що для всіх значень  $y_n$ , для яких  $n > N_2$ , виконується нерівність  $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ . Нехай

$N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тоді, для всіх  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$ , для яких  $n > N$ , виконується нерівність  $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$ , або  $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ , тобто

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

### 3.4. Границя монотонної обмеженої послідовності. Число $e$

**Теорема 3.4.1.** Якщо послідовність  $\{x_n\}$  є монотонно зростаючою та обмеженою зверху, то вона має границю, яка дорівнює точній верхній грані, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$ . Якщо послідовність  $\{x_n\}$  є монотонно

спадною та обмеженою знизу, то вона має границю, яка дорівнює точній нижній грані, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$ .

*Доведення.* Доведемо цю теорему для випадка обмеженої зверху та зростаючої послідовності. Нехай  $a$  – точна верхня грань множини значень послідовності  $\{x_n\}$ .

З означення точної верхньої грані випливає, що  $\forall n \in N \ x_n \leq a$  та  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon$ . Послідовність  $\{x_n\}$  є монотонно зростаючою, тому  $\forall n \geq N_\varepsilon \ x_{N_\varepsilon} \leq x_n$ . Тоді для  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$  що  $\forall n \geq N_\varepsilon$  виконується нерівність  $a - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq x_n \leq a$ , тобто  $|x_n - a| < \varepsilon$ . За означенням границі

послідовності маємо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \sup\{x_n\}$ .

Розглянемо застосування цієї теореми на прикладі послідовності

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Вважаючи  $a = 1, b = \frac{1}{n}$  за формулою бінома Ньютона, одержимо:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \binom{n}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \binom{n}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right) \dots \left(\frac{n-(n-1)}{n}\right). \end{aligned}$$

Зробимо у дужках почленне ділення та дістанемо:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

З одержаної рівності випливає, що зі зростанням  $n$  кількість додатних доданків у правій частині зростає, при цьому число  $\frac{1}{n}$  зменшується,

тому вирази  $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots$  зростають. Тоді послідовність

$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$  – зростаюча, при цьому обмежені знизу:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2. \quad (1.3)$$

Покажемо, що вона обмежена зверху. Змінимо кожную дужку у правій частині рівності (1.2) на одиницю, права частина зростає, одержимо нерівність

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Посилимо одержану нерівність, замінимо числа 3, 4, 5, ..., що стоять у знаменниках дробів, числом 2:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Суму в дужках знайдемо за формулою суми членів геометричної прогресії  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$ .

Тобто маємо, що послідовність обмежена зверху:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3. \quad (1.4)$$

Доведено, що послідовність обмежена, при цьому для  $\forall n \in \mathbb{N}$  виконуються нерівності (1.3) та (1.4)

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Отже, на підставі теореми Вейерштрасса послідовність  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , має границю, що позначається літерою  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число  $e$  називається **неперовим числом** (інколи числом Ейлера), воно є ірраціональним, його наближене значення дорівнює  $e = 2,72$  ( $e = 2,7182818284590\dots$ ). Число  $e$  прийнято за основу натуральних логарифмів: логарифм за основою  $e$  називається натуральним логарифмом і позначається  $\ln x$ , тобто  $\ln x = \log_e x$ .

## §4. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

### 4.1. Границя функції у точці

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена в деякому околі точки  $x_0$ , крім, можливо, самої точки  $x_0$ . Сформулюємо два, еквівалентних між собою, означення границі функції у точці.

**Означення 1 («мовою послідовностей», або за Гейне).** Число  $A$  називається **границею функції**  $y = f(x)$  у точці  $x_0$  (або при  $x \rightarrow x_0$ ),

якщо для будь-якої послідовності допустимих значень аргументу  $x_n, n \in N$ , ( $x_n \neq x_0$ ), збіжної з  $x_0$  (тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ), послідовність відповідних значень функції  $f(x_n), n \in N$ , прямує до числа  $A$  (тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ).

У цьому випадку пишуть:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  або  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Геометричний зміст границі функції:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  означає, що для всіх точок  $x$ , досить близьких до точки  $x_0$ , відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від числа  $A$ .

**Означення 2 («мовою  $\varepsilon - \delta$ », або за Коші).** Число  $A$  називається **границею функції**  $y = f(x)$  у **точці**  $x_0$  (або при  $x \rightarrow x_0$ ), якщо для будь-якого додатного  $\varepsilon$  знайдеться таке додатне число  $\delta$ , що для всіх  $x \neq x_0$ , які задовольняють нерівності  $|x - x_0| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Запишемо це означення за допомогою символів

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Геометричний зміст границі функції:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon$ -околу точки  $A$  знайдеться такий  $\delta$ -окіл точки  $x_0$ , що для всіх  $x \neq x_0$  з цього  $\delta$ -околу відповідні значення функції  $f(x)$  належать  $\varepsilon$ -околу точки  $A$ . Іншими словами, точки графіка функції  $y = f(x)$  лежать всередині смуги шириною  $2\varepsilon$ , обмеженої прямими  $y = A + \varepsilon$  та  $y = A - \varepsilon$ . Очевидно, що величина  $\delta$  залежить від вибору  $\varepsilon$ , тому пишуть  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

**Приклад 1.2.** Довести, що  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ .

**Розв'язання.** Візьмемо довільне  $\varepsilon > 0$  та знайдемо таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $|x - 3| < \delta$ , виконується нерівність  $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$ , тобто  $|2x - 6| < \varepsilon$  або  $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Якщо взяти  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , то

для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$ , виконується нерівність  $|(2x-1)-5| < \varepsilon$ . Це означає, що  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-1) = 5$ .

**Приклад 1.3.** Довести, що якщо  $f(x) = c$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

**Розв'язання.** Для  $\forall \varepsilon > 0$  можна взяти  $\forall \delta > 0$ . Тоді при  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \neq x_0$  маємо  $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ . Значить,  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

## 4.2. Однобічні границі

В означенні границі функції  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  не оговорюється, яким чином змінна  $x$  наближається до значення  $x_0$ , вона може залишатися меншою ніж  $x_0$  (тобто наближатися з лівого боку), більшою ніж  $x_0$  (тобто наближатися з правого боку), або коливатися біля точки  $x_0$ . В деяких випадках спосіб наближення  $x$  до значення  $x_0$  може суттєво впливати на значення границі функції, тому вводяться поняття однобічних границь.

Число  $A_1$  називається **лівобічною границею** функції  $y = f(x)$  у точці  $x_0$ , якщо для будь-якого додатного  $\varepsilon$  знайдеться таке додатне число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , що для всіх  $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ , виконується нерівність  $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ . Лівобічна границя записується так:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$ .

Запишемо це означення за допомогою символів

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1.$$

Аналогічно вводиться поняття правобічної границі функції.

Число  $A_2$  називається **правобічною границею** функції  $y = f(x)$  у точці  $x_0$ , якщо для будь-якого додатного  $\varepsilon$  знайдеться таке додатне число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , що для всіх  $x \in (x_0; x_0 + \delta)$  виконується нерівність  $|f(x) - A_2| < \varepsilon$ . Правобічна границя записується так:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$ .

Запишемо це означення за допомогою символів

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2.$$

Лівобічна та правобічна границі функції називаються **однобічними границями**. Зрозуміло, якщо існує  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , існують і обидві

однобічні границі, причому  $A_1 = A_2 = A$ .

Діріхле ввів таке коротке позначення однобічних границь:  $f(x_0 - 0) = A_1$  та  $f(x_0 + 0) = A_2$ .

### 4.3. Границя функції при $x \rightarrow \infty$

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена в проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Число  $A$  називається **границею функції  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$** , якщо для будь-якого додатного  $\varepsilon$  знайдеться таке додатне число  $M = M(\varepsilon) > 0$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $|x| > M$ , виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

За допомогою символів це означення записується так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) > 0 \forall x: |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Якщо  $x \rightarrow +\infty$ , то пишуть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , якщо  $x \rightarrow -\infty$ , то пишуть

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

Геометричний зміст цього означення такий: для  $\forall \varepsilon > 0$  знайдеться  $M > 0$  такий, що при  $x \in (-\infty; -M)$  або  $x \in (M; +\infty)$  відповідні значення функції  $f(x)$  попадають у  $\varepsilon$ -окіл точки  $A$ , тобто точки графіка функції лежать у смузі шириною  $2\varepsilon$ , обмеженою прямими  $y = A + \varepsilon$  та  $y = A - \varepsilon$ .

### 4.4. Нескінченно велика функція (н.в.ф)

Функція  $y = f(x)$  називається **нескінченно великою** при  $x \rightarrow x_0$ , якщо для будь-якого числа  $M > 0$  існує таке число  $\delta = \delta(M) > 0$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x)| > M$ . Записують це так:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  або  $f(x) \rightarrow \infty$  при

$x \rightarrow x_0$ .

За допомогою символів:

$$(\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x: |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| > M) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Наприклад, функція  $y = \frac{1}{x-2}$  н.в.ф. при  $x \rightarrow 2$ .

Якщо  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$  і набуває тільки додатних значень, то пишуть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , якщо тільки від'ємні значення, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

Функція, яка задана на всій числовій прямій, називається нескінченно великою при  $x \rightarrow \infty$ , якщо для будь-якого числа  $M > 0$  існує таке число  $N = N(M) > 0$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $|x| > N$ , виконується нерівність  $|f(x)| > M$ .

За допомогою символів це означення записується так:

$$(\forall M > 0 \exists N > 0 \forall x: |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

Наприклад, функція  $y = 2^x$  є нескінченно великою функцією при  $x \rightarrow \infty$ .

Зауважимо, що якщо аргумент  $x$ , прямуючи до нескінченності, набуває тільки натуральних значень, тобто  $x \in N$ , то відповідна нескінченно велика функція стає нескінченно великою послідовністю. Наприклад, послідовність  $u_n = n^3$ ,  $n \in N$  є нескінченно великою послідовністю. Очевидно, що всяка нескінченно велика функція в околі точки  $x_0$  є необмеженою в цьому околі. Обернене твердження не є правильним: необмежена функція може і не бути нескінченно великою. Наприклад, функція  $y = x \cdot \sin x$  необмежена, але не нескінченно велика при  $x \rightarrow \infty$ .

Однак, якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , де  $A$  – скінченне число, то функція  $f(x)$  є обмеженою в околі точки  $x_0$ .

Дійсно, з означення границі функції випливає, що при  $x \rightarrow x_0$  виконується умова  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Отже, при  $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  функція належить проміжку  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ , а це означає, що функція  $f(x)$  є обмеженою.

## §5. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ

### 5.1. Означення

Функція  $y = f(x)$  називається **нескінченно малою** при  $x \rightarrow x_0$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

За означенням границі функції це означає, що для будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке число  $\delta > 0$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x)| < \varepsilon$ .

Аналогічно вводяться означення нескінченно малих функцій при  $x \rightarrow x_0 + 0$ ;  $x \rightarrow x_0 - 0$ ;  $x \rightarrow +\infty$  та  $x \rightarrow -\infty$ ; у всіх цих випадках  $f(x) \rightarrow 0$ .

Нескінченно малі функції часто називають нескінченно малими величинами або просто нескінченно малими; позначають звичайно малими грецькими буквами  $\alpha, \beta$  та ін.

Прикладами нескінченно малих функцій можуть бути  $y = \arcsin x$  при  $x \rightarrow 0$ ;  $y = (x - 3)^4$  при  $x \rightarrow 3$ ;  $y = \ln(3 - x)$  при  $x \rightarrow 2$ ;  $y = \frac{1}{x + 1}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

### 5.2. Основні теореми про властивості нескінченно малих

**Теорема 5.2.1.** Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

**Доведення.** Нехай  $\alpha(x), \beta(x)$  – нескінченно малі функції при  $x \rightarrow x_0$ . Це означає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ , тобто для будь-якого  $\varepsilon > 0$ , а значить, і для  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ , знайдеться число  $\delta_1 > 0$ , таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta_1$ , виконується нерівність  $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , а також знайдеться число  $\delta_2 > 0$ , таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta_2$ , виконується нерівність  $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Нехай  $\delta$  найменше з чисел  $\delta_1$  та  $\delta_2$ . Тоді для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta$ , виконуються обидві нерівності

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ та } |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ а значить, має місце співвідношення}$$

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$ .

Це означає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$ , тобто  $(\alpha(x) + \beta(x))$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow x_0$ .

Доведення теореми для будь-якого скінченного числа нескінченно малих функцій проводиться аналогічно.

**Теорема 5.2.2.** Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є нескінченно мала функція.

*Доведення.* Нехай функція  $f(x)$  є обмеженою при  $x \rightarrow x_0$ . Тоді існує таке число  $M > 0$ , що  $|f(x)| \leq M$ , для усіх  $x$  з  $\delta_1$ -околу точки  $x_0$ .

Та нехай  $\alpha(x)$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow x_0$ . Тоді для будь-

якого  $\varepsilon > 0$ , а значить, і для  $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ , знайдеться число  $\delta_2 > 0$ , таке, що

для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta_2$ , виконується

$$\text{нерівність } |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Нехай оберемо  $\delta$  таку, що дорівнює найменшому з чисел  $\delta_1$  та  $\delta_2$ . Тоді для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta$ , вико-

нуються обидві нерівності  $|f(x)| \leq M$  та  $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ . Значить,

$$|f(x) \cdot \alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon. \text{ А це означає, що добуток } f(x) \cdot \alpha(x)$$

при  $x \rightarrow x_0$  є нескінченно малою функцією.

*Наслідок 1.* З того, що будь-яка нескінченно мала функція є обмеженою, випливає, що добуток двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

*Наслідок 2.* Добуток нескінченно малої функції на число є нескін-

ченно малою функцією.

**Теорема 5.2.3.** Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, що має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою функцією.

*Доведення.* Нехай  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ . Покажемо, що

$\frac{1}{f(x)}$  – обмежена функція. Візьмемо  $\varepsilon < |a|$ . За означенням границі,

знайдеться  $\delta > 0$ , таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівності  $0 < |x - x_0| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x) - a| < \varepsilon$ . Оскільки  $\varepsilon > |f(x) - a| = |a - f(x)| \geq |a| - |f(x)|$ , то  $|a| - |f(x)| < \varepsilon$ , тобто  $|f(x)| > |a| - \varepsilon$ .

Це означає, що  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|a| - \varepsilon} = M$ , тобто  $\frac{1}{f(x)}$  – обмежена функція.

Функція  $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$  може бути подана у вигляді добутку нескінченно

малої функції  $\alpha(x)$  на обмежену функцію  $\frac{1}{f(x)}$ . Тоді з теореми 5.2.2

випливає, що частка  $\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$  є нескінченно малою функцією.

**Теорема 5.2.4.** Якщо функція  $\alpha(x)$  – нескінченно мала функція, то функція  $\frac{1}{\alpha(x)}$  – нескінченно велика та навпаки.

*Доведення.* Нехай  $\alpha(x)$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow x_0$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$ , тобто  $\left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon} > M$ , де  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ . Це означає, що функція

$\frac{1}{\alpha(x)}$  – нескінченно велика. Зворотнє твердження доводиться аналогічно.

Зауважимо, що доведення теорем були зроблені для випадку  $x \rightarrow x_0$ , але вони залишаються вірними і для  $x \rightarrow \infty$ .

**Теорема 5.2.5.** Для того щоб число  $A$  було границею функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , необхідно і достатньо, щоб функцію  $f(x)$  можна було подати у вигляді суми числа  $A$  та нескінченно малої функції  $\alpha(x)$ , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x).$$

**Доведення.** Доведемо необхідність умови теореми. Нехай  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . Це означає, що  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ , тобто  $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$ . Це означає, що функція  $f(x) - A$  має границю, що дорівнює нулю. Позначимо  $f(x) - A = \alpha(x)$ , тоді  $\alpha(x)$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow x_0$ . Звідси  $f(x) = A + \alpha(x)$ .

Доведемо достатність умови теореми. Нехай  $f(x) - A = \alpha(x)$ , де  $\alpha(x)$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow x_0$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$ . За умови, що  $f(x) - A = \alpha(x)$ , виконується  $\alpha(x) = f(x) - A$ . Одержуємо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ . А це означає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

### 5.3. Основні властивості границь функцій

Нехай при  $x \rightarrow x_0$  функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  мають границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$ , а  $\alpha(x)$  та  $\beta(x)$  – нескінченно малі функції при  $x \rightarrow x_0$ ,  $k = \text{const}$ .

#### Властивості, що пов'язані з арифметичними діями

**Теорема 5.3.1.** Границя алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їхніх границь, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

**Доведення.** За теоремою 5.2.5 можна записати  $f(x) = A + \alpha(x)$  та  $\varphi(x) = B + \beta(x)$ . Звідки випливає, що  $f(x) + \varphi(x) = A + \alpha(x) + B + \beta(x) = (A + B) + (\alpha(x) + \beta(x))$ . За теоремою 5.2.1  $(\alpha(x) + \beta(x))$  є нескінченно

малою. Тому за теоремою 5.2.5  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$ .

У випадку різниці функцій теорема доводиться аналогічно.

З цієї теореми можна зробити дуже важливий висновок.

**Якщо функція має границю  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , то ця границя єдина.**

**Доведення** (від зворотного). Нехай при  $x \rightarrow x_0$  функція має дві границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  та  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$ , тоді за теоремою про границю суми можемо записати  $A - B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x)) = 0$ , звідки  $A = B$ , а це означає, що функція має єдину границю.

**Теорема 5.3.2.** Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їхніх границь, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

**Доведення.** За теоремою 5.2.5 можна записати  $f(x) = A + \alpha(x)$  та  $\varphi(x) = B + \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Звідки випливає, що  $f(x) \cdot \varphi(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = A \cdot B + A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)$ . За теоремами 5.2.1 та 5.2.2  $A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)$  є нескінченно малою функцією. Тому за теоремою 5.2.5  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ .

Зауважимо, що теореми 5.3.1 та 5.3.2 є правдивими для будь-якої кількості функцій. З цих теорем можна зробити такі висновки:

**Висновок 1.** Постійний множник можна виносити за знак границі, тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Доведення.** Дійсно,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Висновок 2.** Границя степеня з натуральним показником дорівнює степеню границі, тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$ .

*Доведення.* Дійсно  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$

**Теорема 5.3.3.** Границя дробу дорівнює частці від ділення границі чисельника на границю знаменника за умови, що границя знаменника відмінна від нуля, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right).$$

*Доведення.* Нехай  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B \neq 0$ . Тоді  $f(x) = A + \alpha(x)$  та  $\varphi(x) = B + \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Звідки випливає, що  $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} =$   
 $= \frac{A}{B} + \left( \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} \right) = \frac{A}{B} + \frac{B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)}{B \cdot (B + \beta(x))}$ . За теоремами про властивості нескінченно малих  $\frac{B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)}{B \cdot (B + \beta(x))}$  є нескінченно малою функцією. Тому  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$ .

Наведені теореми значно полегшують процес обчислення границь функцій.

**Приклад 1.4.** Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 6x + 9}{4x}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 6x + 9}{4x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 6x + 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (4x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 6x + \lim_{x \rightarrow 3} 9}{4 \lim_{x \rightarrow 3} x} = \\ &= \frac{5 \left( \lim_{x \rightarrow 3} x \right)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 3} x + 9}{4 \lim_{x \rightarrow 3} x} = \frac{5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 9}{4 \cdot 3} = \frac{45 - 18 + 9}{12} = 3. \end{aligned}$$

**Приклад 1.5.** Обчислити границю раціонального дробу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m}.$$

**Розв'язання.** Винесемо за дужки найвищі степені многочленів у чисельнику та знаменнику дробу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left( b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right)} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{легко переконатися, що} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right) = a_0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right) = b_0, \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n a_0}{x^m b_0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m, \\ 0, & \text{при } n < m, \\ \infty, & \text{при } n > m. \end{cases}$$

Тобто  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7x + 1}{8x^3 + 4x^2 + 3} = \frac{3}{8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 7x + 1}{5x^2 + 3} = \infty;$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x + 1}{8x^3 + 4x^2 + 3} = 0.$$

### Властивості границь, що виражені нерівностями

**Теорема 5.3.4** (ця теорема аналогічна теоремі про “зажату” послідовність). Якщо в деякому околі точки  $x_0$  функції  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  зв'язані співвідношенням  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$  і при  $x \rightarrow x_0$  функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  мають границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$ , то існує

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

**Доведення.** Виберемо будь-яке  $\varepsilon > 0$ . Тоді з того, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$ , випливає

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\psi(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon;$$

$$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon.$$

Нехай  $\delta(\varepsilon) = \inf(\delta_1(x), \delta_2(x))$ , тобто  $\delta(\varepsilon)$  є найменшим з чисел

$\delta_1(x)$  та  $\delta_2(x)$ . Тоді у  $\delta$ -околі точки  $x_0$  виконуються обидві наведені нерівності, з чого випливає  $A - \varepsilon < \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) < A + \varepsilon$ , або  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ . А це означає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

**Теорема 5.3.5.** Якщо в деякому околі точки  $x_0$  функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  зв'язані співвідношенням  $f(x) \leq \varphi(x)$  і при  $x \rightarrow x_0$  функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  мають границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$ , то  $A \leq B$ .

З метою покращення навичок доведення будь-яких тверджень рекомендуємо читачеві довести цю теорему самостійно. Для цього слід використати означення границі функції за Гейне та відповідні теореми про властивості послідовностей.

При обчисленні границь можуть виникати невизначеності, для обчислення яких треба застосовувати деякі прийоми, терми та перетворення. Знаходження границь у цьому випадку називається розкриттям невизначеності. Існує 7 типів невизначеностей: відношення нескінченно малих, відношення нескінченно великих, добуток нескінченно малої на нескінченно велику, різниця нескінченно великих, нескінченно велика степінь суми одиниць та нескінченно малої, нескінченно мало у нескінченно малої степені, нескінченно велика у нескінченно малої степені. Ці типи невизначеностей умовно позначаються символами:

$$\left| \frac{0}{0} \right|, \left| \frac{\infty}{\infty} \right|, |0 \cdot \infty|, |\infty - \infty|, |1^\infty|, |\infty^0|, |0^0|,$$

де символом 0 позначено нескінченно малу, а символом  $\infty$  нескінченно велику. Символ  $|1^\infty|$  має на увазі  $(1+n.m.)^{n.v.}$ .

## 5.4. Перша особлива границя

Ця границя розкриває невизначеність  $\left| \frac{0}{0} \right|$ .

**Теорема.** Границя відношення синуса до його аргументу дорівнює одиниці, якщо аргумент прямує до нуля, тобто

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Доведення.** Візьмемо коло з радіусом 1, позначимо радіанну міру кута  $MOB$  через  $x$  (рис. 1.14). Нехай  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . З рисунка видно, що

$|AM| = \sin x$ ,  $|BC| = \operatorname{tg} x$ . Очевидно, що  $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\Delta COB}$ .

$$S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}|OB||AM| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}; \quad S_{\text{сектора } MOB} = \frac{1}{2}x \cdot |OB|^2 = \frac{x}{2};$$

$$S_{\Delta COB} = \frac{1}{2}|OB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \quad \text{Звідки одержуємо } \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Поділимо нерівність на  $\frac{\sin x}{2} > 0$ , одержимо  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ , або

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad \text{Оскільки } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

та  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ , то за теоремою 5.3.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \text{Оскільки функція } \frac{\sin x}{x} \text{ є}$$

парною, то все сказане правдиве і для  $\left(-\frac{\pi}{2}\right) < x < 0$ . Слід зауважити, що першій особливій границі відповідає невизначеність вигляду  $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ .

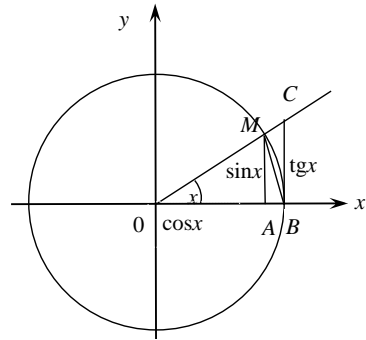


Рис. 1.14

**Приклад 1.6.** Розглянемо декілька прикладів, результати яких згодом будуть широко використовуватися при обчисленні границь функцій.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left| \frac{y = \arcsin x}{x = \sin y} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left| \frac{y = \operatorname{arctg} x}{x = \operatorname{tg} y} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

### 5.5. Друга особлива границя

Ця границя розкриває невизначеність  $\left| 1^\infty \right|$

**Теорема 5.5.1.** Границя функції  $z = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  за умови, що  $x \rightarrow \infty$ , дорівнює числу  $e$ , тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

*Доведення.* У 3.4. було доведено, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Тепер дове-

демо, що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  ( $x \in R$ ). Доведення проведемо в два етапи.

1. Нехай  $x \rightarrow +\infty$ . Будь-яке значення змінної  $x$  укладено між двома додатними числами  $n \leq x < n+1$ , де  $n = [x]$  – ціла частина числа  $x$ .

Звідки випливає  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ , а значить, і  $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$ , тому

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Якщо  $x \rightarrow \infty$ , то і  $n \rightarrow \infty$ , тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

За теоремою 5.3.4 маємо  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

2. Нехай  $x \rightarrow -\infty$ . Зробимо підстановку  $t = -x$ . Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Зауважимо, якщо у формулі другої особливої границі замінити  $\frac{1}{x} = \alpha$  (тоді при  $x \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$ ), то можна одержати інше формулювання цієї границі  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ . Другій особливій границі відповідає невизначеність вигляду  $\|1^\infty\|$ . Обидві формули широко використовуються при обчисленні границь.

**Приклад 1.7.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{4x+1}$ .

**Розв'язання.** При обчисленні цієї границі виникає невизначеність  $\|1^\infty\|$ , що означає, що треба перетворювати вираз таким чином, щоб можна було застосувати формулу другої особливої границі.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{4x+1} &= \|1^\infty\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+3}{x+1} - 1\right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^{4x+1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{зауважимо, що при } x \rightarrow \infty \\ \text{вираз } \frac{2}{x+1} = \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2} \cdot \frac{2}{x+1} \cdot (4x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2} \cdot \frac{2}{x+1} \cdot (4x+1)} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} \cdot (4x+1)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{оскільки } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2(4x+1)}{x+1}\right) = 8, \text{ маємо} \end{array} \right| = \\ &= e^8. \end{aligned}$$

Підкреслимо ще раз, що таку схему обчислення границі функції можна застосовувати тільки у випадку, коли відповідна невизначеність

дорівнює  $\|1^\infty\|$ .

## §6. ЕКВІВАЛЕНТНІ НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ

### 6.1. Порівняння нескінченно малих функцій

Нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою їхнього відношення.

Нехай  $\alpha = \alpha(x)$ ,  $\beta = \beta(x)$  – нескінченно малі функції при  $x \rightarrow x_0$ . Це означає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

Дві нескінченно малі функції називаються **нескінченно малими одного порядку** при  $x \rightarrow x_0$ , якщо при  $x \rightarrow x_0$  границя їхнього відношення дорівнює постійному числу, відмінному від нуля, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \quad (A \in \mathbb{R}).$$

Дві нескінченно малі функції називаються **еквівалентними нескінченно малими** при  $x \rightarrow x_0$ , якщо при  $x \rightarrow x_0$  границя їхнього відношення дорівнює одиниці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

позначається це так:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , або  $\alpha \sim \beta$ .

Нескінченно мала  $\alpha(x)$  називається **нескінченно малою більш високого порядку малості** ніж  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , якщо при  $x \rightarrow x_0$  границя відношення  $\alpha(x)$  до  $\beta(x)$  дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

позначається це так:  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ .

Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ , то кажуть, що нескінченно мала  $\alpha(x)$  є нескінченно малою більш низького порядку малості ніж  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Приклад 1.8.** Порівняти нескінченно малі функції  $\alpha(x) = 3x - 6$  та  $\beta(x) = 4x^2 - 16$  при  $x \rightarrow 2$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{4x^2-16} &= \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{4(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4(x+2)} = \frac{3}{16} \neq 0. \end{aligned}$$

Нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  та  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 2$  є нескінченно малими одного порядку.

**Приклад 1.9.** Порівняти нескінченно малі функції  $\alpha(x) = 3(x-1)^2$  та  $\beta(x) = x^2 - 3x + 2$  при  $x \rightarrow 1$ .

**Розв'язання.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-2)} = 0.$

Нескінченно мала  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow 1$  є нескінченно малою більш високого порядку малості ніж  $\beta(x)$ .

## 6.2. Основні теореми про нескінченно малі

**Теорема 6.2.1.** Границя відношення двох нескінченно малих не зміниться, якщо кожену або одну з них замінити на еквівалентну їй нескінченно малу.

**Доведення.** Нехай  $\alpha(x) \sim \alpha'(x)$  та  $\beta(x) \sim \beta'(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha'(x)}{\alpha'(x)} \cdot \frac{\beta'(x)}{\beta'(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}. \end{aligned}$$

**Теорема 6.2.2.** Границя добутку двох нескінченно малих не зміниться, якщо кожену або одну з них замінити на еквівалентну їй нескінченно малу.

**Доведення.** Нехай  $\alpha(x) \sim \alpha'(x)$  та  $\beta(x) \sim \beta'(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot \alpha'(x) \cdot \beta'(x)}{\alpha'(x) \cdot \beta'(x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha'(x) \beta'(x) = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha'(x) \beta'(x) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha'(x)\beta'(x).$$

**Теорема 6.2.3.** Для того щоб дві нескінченно малі функції були еквівалентними, необхідно та достатньо, щоб їхня різниця була нескінченно малою більш високого порядку малості, ніж кожна з них.

*Доведення.* 1. Доведемо необхідність твердження. Нехай  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0,$$

звідки випливає, що  $(\alpha(x) - \beta(x)) = o(\alpha(x))$ . Аналогічно доводиться, що  $(\alpha(x) - \beta(x)) = o(\beta(x))$ .

2. Доведемо достатність твердження. Нехай  $(\alpha(x) - \beta(x)) = o(\alpha(x))$ , тобто різниця нескінченно малих є нескінченно малою більш високого порядку малості, ніж кожна з них, тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x). \end{aligned}$$

**Теорема 6.2.4.** Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

*Доведення.* Нехай  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$  та  $\alpha(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ , тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + \frac{\beta(x)}{\beta(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 = 0 + 1 = 1, \end{aligned}$$

звідки випливає, що  $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Доданок, який є еквівалентним сумі нескінченно малих, називається головною частиною цієї суми. Процес заміни суми нескінченно малих на їхню головну частину називається відкиданням нескінченно малих більш високого порядку малості.

Виходячи з теореми та результатів прикладу пункту 5.4, можемо

зробити висновок, що при  $x \rightarrow 0$  наступні пари функції будуть еквівалентними  $\sin x \sim x$ ,  $\operatorname{tg} x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ ,  $\operatorname{arctg} x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ .

Знайдемо ще кілька еквівалентних нескінченно малих.

**Приклад 1.10:**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \cdot \ln a} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = t \\ x = \log_a(1+t) \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a} \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a} \cdot \ln a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ x = \ln(1+t) \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} \cdot \frac{\ln(1+(x+1)^m - 1)}{\ln(1+(x+1)^m - 1)} = \\ = \frac{1}{m} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{\ln(1+(x+1)^m - 1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(x+1)^m - 1)}{x} = \left| \begin{array}{l} y = (1+(x+1)^m - 1) \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ = \frac{1}{m} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^m}{x} = \frac{1}{m} \cdot 1 \cdot m = 1.$$

Таким чином, можемо стверджувати, що при  $x \rightarrow 0$  наступні пари функцій будуть еквівалентними:  $\ln(1+x) \sim x$ ,  $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ ,  $e^x - 1 \sim x$ ,  $(1+x)^m - 1 \sim mx$ , де  $m$  належить множині раціональних чисел і може бути дробом, наприклад,  $\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1 \sim \frac{3}{5}x$ .

Слід зазначити, що синус буде еквівалентним своєму аргументу, коли аргумент прямує до нуля, незалежно від того, чи буде аргумент дорівнювати незалежній змінній, чи це буде функція від неї. Все сказане стосується і всіх інших пар еквівалентних функцій.

**Приклад 1.11:**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left| \frac{y=3x}{y \rightarrow 0} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x-2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left| \frac{y=x-2}{y \rightarrow 0} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1.$$

Складемо таблицю еквівалентних нескінченно малих при  $\alpha \rightarrow 0$ . У лівому стовпчику наведені пари еквівалентних функцій, одержані за допомогою першої особливої границі, у правому – за допомогою другої.

I	II
$\sin \alpha \sim \alpha;$ $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha;$ $\arcsin \alpha \sim \alpha;$ $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha;$ $1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}.$	$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha;$ $a^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln a,$ $e^\alpha - 1 \sim \alpha;$ $(1 + \alpha)^m - 1 \sim m\alpha.$

Зазначимо, що аналогічно зрівнянню нескінченно малих можна проводити зрівняння нескінченно великих, та замінювати нескінченно великі на їх асимптотичні рівні. Асимптотично рівними нескінченно великими називають такі величини, границя відношення котрих дорівнює одиниці. Нескінченно великими доданками **нижчих порядків можна нехтувати**.

## §7. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

### 7.1. Неперервність функції в точці

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена в точці  $x = x_0$  та в деякому її околі.

Функція  $y = f(x)$  називається **неперервною в точці**  $x = x_0$ , якщо в цій точці існують обидві однобічні границі цієї функції, ці границі мають скінченне значення, є рівними між собою та дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0). \quad (1.5)$$

Рівність (5.3) називають *умовою неперервності функції в точці*.

Враховуючи, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , рівність (5.3) можна записати так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0) . \quad (1.6)$$

Це означає, що при обчисленні границі неперервної функції можна у функцію замість аргументу  $x$  підставити його граничне значення  $x_0$  (або ще кажуть, що можна поміняти місцями знак границі і знак функції).

Означення неперервної функції можна дати і «мовою  $\varepsilon - \delta$ ». Функція  $y = f(x)$  називається неперервною в точці  $x_0$ , якщо для будь-якого додатного  $\varepsilon$  знайдеться таке додатне число  $\delta$ , що для всіх  $x \neq x_0$ , які задовольняють нерівності  $|x - x_0| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Легко показати, що обидва означення неперервності функції є еквівалентними.

Можна дати ще одне означення неперервності функції, спираючись на поняття приросту функції та аргументу. Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на проміжку  $(a, b)$ , причому  $x \in (a, b); x_0 \in (a, b)$ . При переході від точки  $x$  до точки  $x_0$  аргумент одержує приріст  $\Delta x = x - x_0$ , функція одержує приріст  $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ . Зрозуміло, якщо  $x \rightarrow x_0$ , то  $\Delta x \rightarrow 0$ . Перепишемо (1.6) так:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) &\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0. \end{aligned}$$

Третє означення неперервної функції можна сформулювати так: якщо функція є неперервною в точці  $x_0$ , то нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

**Приклад 1.12.** Довести, що функція  $y = \cos x$  є неперервною для всіх  $x \in R$ .

**Розв'язання.** Знайдемо приріст функції в довільній точці  $x$ .

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \right) = \\ &= \left| \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sim \frac{\Delta x}{2} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

За третім означенням функція  $y = \cos x$  є неперервною.

## 7.2. Класифікація точок розриву

Точка  $x = x_0$  називається **точкою розриву функції**  $y = f(x)$ , якщо в ній не виконується умова неперервності (1.5). Можливі такі випадки:

1. Точка  $x_0$  називається **точкою усувного розриву** (рис. 1.15), якщо функція визначена в околі точки  $x_0$ , але не визначена в самій точці, або визначена, та не є неперервною в цій точці, тобто в цій точці існують обидві однобічні границі цієї функції, ці границі мають скінченне значення, є рівними між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0).$$

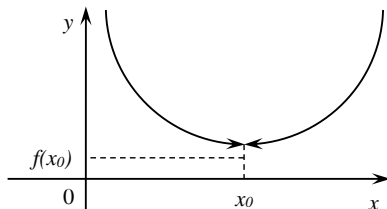


Рис. 1.15

2. Точка  $x_0$  називається **точкою розриву першого роду (стрибком)** якщо, в цій точці існують обидві однобічні границі цієї функції (рис. 1.16), ці границі мають скінченні значення, але вони не є рівними між собою, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A = \text{const}; \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = B = \text{const}; \quad A \neq B.$$

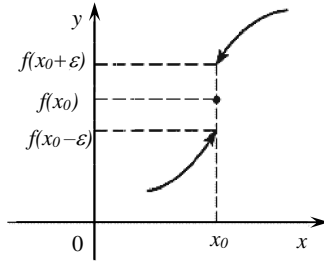


Рис. 1.16

3. Точка  $x_0$  називається **точкою розриву другого роду** (рис. 1.17), якщо в цій точці одна чи обидві однобічні границі функції мають нескінченні значення.

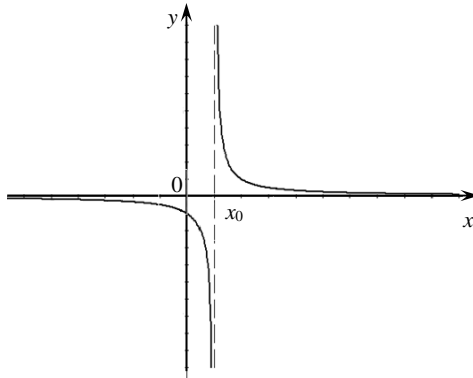


Рис. 1.17

**Приклад 1.13.** Знайти точку розриву функції  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  та класифікувати її.

**Розв'язання.** Функція невизначена в точці  $x = 0$ . Знаходимо обидві однобічні границі

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ліва та права однобічні границі рівні між собою, отже, точка  $x=0$  є точкою усувного розриву. Є можливість усунути розрив шляхом ви-значення функції в точці  $x=0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Наведемо графік функції з точкою розриву (рис. 1.18).

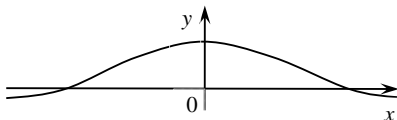


Рис. 1.18

**Приклад 1.14.** Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ x+1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Обидві функції  $x^2$  та  $x+1$  є неперервними при  $x \in \mathbb{R}$ , але у точці  $x=1$  змінюється вираз функції, тому вона може бути точкою розриву. Знаходимо однобічні границі в цій точці.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} x+1 = 2.$$

Однобічні границі мають скінченні значення, але вони не є рівними між собою, тому в точці  $x=1$  функція має розрив першого роду (стрибок, рис. 1.19).

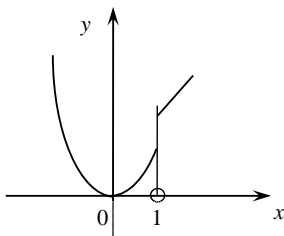


Рис. 1.19

**Приклад 1.15.** Дослідити на неперервність функцію  $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $f(1)$  не існує, то  $x=1$  є точкою розриву функції. Обчислимо односторонні границі функції в точці  $x=1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = \left| x \rightarrow 1-0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-\infty} \rightarrow 0 \right| = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = \left| x \rightarrow 1+0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow \infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\infty} \rightarrow \infty \right| = \infty.$$

Оскільки одна з границь є нескінченною, то  $x=1$  є точкою розриву другого роду (рис. 1.20).

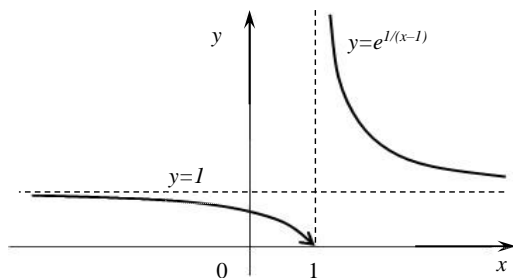


Рис. 1.20

### 7.3. Неперервність функції на інтервалі та на відрізку

Функція називається **неперервною на інтервалі**, якщо вона є неперервною в кожній точці цього інтервалу. Функція  $f(x)$  називається **неперервною на відрізку**  $[a, b]$ , якщо вона неперервна на інтервалі  $(a, b)$ , а в точці  $x=a$  є неперервною справа (тобто  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ), а в точці  $x=b$  є неперервною зліва (тобто  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$ ).

### 7.4. Основні теореми про неперервні функції.

#### Неперервність елементарних функцій

Теореми про неперервні функції є наслідком відповідних теорем про границі.

**Теорема 7.4.1.** Сума, різниця, добуток та частка двох неперервних функцій є неперервною функцією (для частки за винятком тих значень аргументу, у яких дільник дорівнює нулю).

**Теорема 7.4.2.** Нехай функція  $u = \varphi(x)$  неперервна в точці  $x_0$ , а функція  $y = f(u)$  неперервна в точці  $u_0 = \varphi(x_0)$ , тоді складна функція  $f(\varphi(x))$  є неперервною в точці  $x_0$ .

**Теорема 7.4.3.** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна та строго монотонна при  $x \in [a, b]$ , то обернена функція  $u = \varphi(x)$  також буде неперервною та монотонною на відповідному відрізку.

Можна довести, що всі основні елементарні функції є неперервними у всіх точках, де вони визначені. Як відомо, елементарною називають таку функцію, яка може бути одержана з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних дій та суперпозицій. Тому з наведених вище теорем можна зробити висновок, що будь-яка елементарна функція є неперервною в своїй області визначення.

## 7.5. Властивості функцій, що є неперервними на відрізку

Функції, що є неперервними на відрізку, мають декілька важливих властивостей. Сформулюємо їх у вигляді теорем.

**Теорема 7.5.1 (Вейєрштрасса).** Якщо функція є неперервною на відрізку, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значення.

**Теорема 7.5.2.** Якщо функція є неперервною на відрізку, то вона є обмеженою на цьому відрізку

**Теорема 7.5.3 (Больцано-Коші).** Якщо функція  $y = f(x)$  є неперервною на відрізку  $[a, b]$  та на кінцях цього відрізка має нерівні між собою значення  $f(a) = A, f(b) = B$ , то вона приймає на цьому відрізку всіх значень, що лежать між  $A$  та  $B$ .

**Теорема 7.5.4 (Больцано-Коші).** Якщо функція  $y = f(x)$  є неперервною на відрізку  $[a, b]$  та на кінцях цього відрізка набуває значення різних знаків, то існує хоча б одна внутрішня точка  $x = c$  на відрізку  $[a, b]$ , в якій функція дорівнює нулю  $f(c) = 0$ .

**Приклад розв'язання варіанта 31  
з контрольних завдань до розділу 1**

Розглянемо варіант № 31.

**Завдання 1.** Обчислити границю послідовності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 + (3n+2)^3}{(2n-1)^3 - (n+1)^3}.$$

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 + (3n+2)^3}{(2n-1)^3 - (n+1)^3} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{перетворимо вирази, що стоять у} \\ \text{чисельнику та знаменнику дробу за} \\ \text{формулами скороченого множення} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 36n^2 + 54n - 27 + 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8}{8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{35n^3 + 18n^2 + 90n - 19}{7n^3 - 15n^2 + 3n - 2} = \left| \begin{array}{l} \text{скористаємося результатом м} \\ \text{прикладу 1.5} \end{array} \right| = \frac{35}{7} = 5. \end{aligned}$$

**Завдання 2.** Обчислити границю послідовності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+3)!}{(n+1)! (5 + 3n + 2n^2)}.$$

**Розв'язання.** Враховуючи, що  $(n+3)! = (n-1)! \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)$ , а  $(n+1)! = (n-1)! \cdot n(n+1)$ , маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+3)!}{(n+1)! (5 + 3n + 2n^2)} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! (1 + n \cdot (n+1)(n+2)(n+3))}{(n-1)! \cdot n(n+1)(5 + 3n + 2n^2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + n \cdot (n+1)(n+2)(n+3))}{n(n+1)(5 + 3n + 2n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1}{2n^4 + 5n^3 + 8n^2 + 5n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Завдання 3.** Обчислити границю послідовності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2 - 5n^2}{2 + 5 + \dots + (3n-1)}.$$

**Розв'язання.** Перетворимо чисельник дробу за допомогою формул скороченого множення  $(2n+3)^2 - 5n^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 5n^2 = 12n + 9 - n^2$ . Вираз у знаменнику є сумою членів арифметичної прогресії, знайдемо її значення  $2 + 5 + \dots + (3n-1) = \frac{2 + (3n-1)}{2} \cdot n = \frac{3n^2 + n}{2}$ .

Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2 - 5n^2}{2+5+\dots+(3n-1)} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n+9-n^2}{\frac{3n^2+n}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

**Завдання 4.** Обчислити границю функції  $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{x^2+4} - 3^x + x)$ .

**Розв'язання.** Підставимо замість змінної її граничне значення

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{x^2+4} - 3^x + x) = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{2^2+4} - 3^2 + 2) = 2 - 9 + 2 = -5.$$

**Завдання 5.** Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^{10} + x + 2} + 4x^2 \cdot \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[5]{x^7} + \sqrt{9x} \cdot \sqrt[3]{x^6 + x^2} + 3}.$$

**Розв'язання.** Внесемо найвищі степені змінної з-під знака коренів:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^{10} + x + 2} + 4x^2 \cdot \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[5]{x^7} + \sqrt{9x} \cdot \sqrt[3]{x^6 + x^2} + 3} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{10}{4}} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^9} + \frac{2}{x^{10}}} + 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}}{x^{\frac{7}{5}} + 3x^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^6}}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^9} + \frac{2}{x^{10}}} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \right) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^6}} \right) = 1; x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}}; x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{7}{5}} + 3x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Завдання 6.** Обчислити границю функції  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 5x + 6}$ .

**Розв'язання.** Підставимо замість змінної її граничне значення  $x = -2$ :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 5x + 6} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{розкладемо вирази, що стоять у чисельнику} \\ \text{та знаменнику дробу, на множники з метою} \\ \text{виділення множника, що дорівнює нулю} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2) \left( x + \frac{1}{2} \right)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x+1)}{(x+2)(x+3)} = \\
&= \left| \text{скорочуємо чисельник та знаменник на } (x+2), \text{ після скорочення} \right| = \\
&= \left| \text{підставляємо замість змінної її значення } x = -2 \right| = \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x+1)}{(x+3)} = \frac{2 \cdot (-2) + 1}{(-2+3)} = -3.
\end{aligned}$$

**Завдання 7.** Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 + 11x^2 + 18x + 24}{5x^3 + 21x^2 + 6x + 8}.$$

**Розв'язання.**  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 + 11x^2 + 18x + 24}{5x^3 + 21x^2 + 6x + 8} = \left| \frac{0}{0} \right|$

Щоб виділити у чисельнику та знаменнику дробу множник, що дорівнює нулю, поділимо обидва многочлени на  $(x+4)$ .

$$\begin{array}{r}
\frac{2x^3 + 11x^2 + 18x + 24}{2x^3 + 8x^2} \left| \frac{x+4}{2x^2 + 3x + 6} \right.; \quad \frac{5x^3 + 21x^2 + 6x + 8}{5x^3 + 20x^2} \left| \frac{x+4}{5x^2 + x + 2} \right. \\
\hline
\frac{3x^2 + 18x}{3x^2 + 12x} \qquad \qquad \frac{x^2 + 6x}{x^2 + 4x} \\
\hline
\frac{6x + 24}{6x + 24} \qquad \qquad \frac{2x + 8}{2x + 8} \\
\hline
0 \qquad \qquad \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 + 11x^2 + 18x + 24}{5x^3 + 21x^2 + 6x + 8} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(2x^2 + 3x + 6)}{(x+4)(5x^2 + x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(2x^2 + 3x + 6)}{(5x^2 + x + 2)} = \\
&= \left| \text{підставимо } x = -4 \right| = \frac{(2 \cdot 16 + 3 \cdot (-4) + 6)}{(5 \cdot 16 - 4 + 2)} = \left| \frac{26}{78} \right| = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

**Завдання 8.** Обчислити границю функції  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6+2x} - \sqrt[3]{11-3x}}{3x - \sqrt{4+5x^2}}$ .

**Розв'язання.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6+2x} - \sqrt[3]{11-3x}}{3x - \sqrt{4+5x^2}} = \left| \frac{0}{0} \right|$ .

Щоб розкрити невизначеність, помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжені їм вирази.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6+2x} - \sqrt[3]{11-3x}}{3x - \sqrt{4+5x^2}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{6+2x} - \sqrt[3]{11-3x}) \left( \sqrt[3]{(6+2x)^2} + \sqrt[3]{(6+2x)(11-3x)} + \sqrt[3]{(11-3x)^2} \right)}{(3x - \sqrt{4+5x^2}) \left( \sqrt[3]{(6+2x)^2} + \sqrt[3]{(6+2x)(11-3x)} + \sqrt[3]{(11-3x)^2} \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + \sqrt{4+5x^2})(6+2x - 11+3x)}{(3x - \sqrt{4+5x^2})(3x + \sqrt{4+5x^2}) \left( \sqrt[3]{(6+2x)^2} + \sqrt[3]{(6+2x)(11-3x)} + \sqrt[3]{(11-3x)^2} \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + \sqrt{4+5x^2})(5x-5)}{(9x^2 - 4 - 5x^2) \left( \sqrt[3]{(6+2x)^2} + \sqrt[3]{(6+2x)(11-3x)} + \sqrt[3]{(11-3x)^2} \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot (3x + \sqrt{4+5x^2})(x-1)}{4(x^2 - 1) \left( \sqrt[3]{(6+2x)^2} + \sqrt[3]{(6+2x)(11-3x)} + \sqrt[3]{(11-3x)^2} \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot (3x + \sqrt{4+5x^2}) \cdot (x-1)}{4 \cdot (x-1)(x+1) \left( \sqrt[3]{(6+2x)^2} + \sqrt[3]{(6+2x)(11-3x)} + \sqrt[3]{(11-3x)^2} \right)} = \\
 & = \left| \text{скорочуємо дріб, та підставляємо } x = 1 \mid = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + \sqrt{4+5x^2}) \cdot 5}{4 \cdot (x+1) \left( \sqrt[3]{(6+2x)^2} + \sqrt[3]{(6+2x)(11-3x)} + \sqrt[3]{(11-3x)^2} \right)} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}.
 \end{aligned}$$

**Завдання 9.** Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x + 5\pi) \cdot (3^{2x} - 5^{4x})}{\ln \cos x \cdot (\sqrt[5]{1+3x^3} - 1)}$$

**Розв'язання.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x + 5\pi) \cdot (3^{2x} - 5^{4x})}{\ln \cos x \cdot (\sqrt[5]{1+3x^3} - 1)} = \left| \frac{0}{0} \right|$ . Для розкриття не-

значеності будемо використовувати теореми 5.2.1 та 5.2.2, для цього зробимо деякі перетворення множників та знайдемо еквівалентні їм нескінченно малі.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x + 5\pi) \cdot (3^{2x} - 5^{4x})}{\ln \cos x \cdot (\sqrt[5]{1 + 3x^3} - 1)} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(3x + 5\pi) = \operatorname{tg} 3x \sim 3x \\ 3^{2x} - 5^{4x} = 3^{2x} - 1 + 1 - 5^{4x} = (3^{2x} - 1) - (5^{4x} - 1) \sim 2x \ln 3 - 4x \ln 5 \sim x \ln \frac{9}{625} \\ \ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) \sim \ln \left( 1 + \left( -\frac{x^2}{2} \right) \right) \sim \left( -\frac{x^2}{2} \right) \\ \sqrt[5]{1 + 3x^3} - 1 = \left( 1 + 3x^3 \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \sim \frac{1}{5} 3x^3 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot x \cdot \ln \frac{9}{625}}{\left( -\frac{x^2}{2} \right) \left( \frac{3}{5} x^3 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2 \cdot \ln \frac{9}{625}}{\left( -x^2 \right) x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 \cdot \ln \frac{9}{625}}{-x^3} = \infty.$$

**Завдання 10.** Обчислити границі функцій:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 3}{2x^2 + x} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 2x} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}}$ .

**Розв'язання:**

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}}$ . Враховуючи, що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 1} \right) = 1$ , а

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^2 + 1}{2x} \right) = \infty, \text{ маємо } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}} = |1^\infty|.$$

Ця невизначеність відповідає другій особливій границі. Зробимо такі алгебраїчні перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 1} - 1 \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x + 4}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x + 4}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x + 4}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{x^2 - x - 1}{3x + 4} \cdot \frac{3x + 4}{x^2 - x - 1} \cdot \frac{5x^2 + 1}{2x}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{враховуючи, що } \frac{3x + 4}{x^2 - x - 1} \text{ є нескінченно малою при } x \rightarrow \infty, \\ \text{маємо } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x + 4}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{x^2 - x - 1}{3x + 4}} = e \end{array} \right| =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x + 4}{x^2 - x - 1} \cdot \frac{5x^2 + 1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{15x^3 + 20x^2 + 3x + 4}{2x^3 - 2x^2 - 2x}} = e^{\frac{15}{2}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 3}{2x^2 + x} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 3}{2x^2 + x} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 1}{2x}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 2x} \right)^{\frac{5x^2 + 1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 2x} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 1}{2x}} = 3^{+\infty} = \infty.$$

Зверніть увагу, що приклади б) та в) не містять невизначеностей, для їх знаходження використовується правило обчислення границь раціональних дробів.

**Завдання 11.** Обчислити границю функції  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(3x - 6)}{x^2 - 3x + 2}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(3x - 6)}{x^2 - 3x + 2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{Зробимо заміну змінної } y = x - 2 \rightarrow 0, \text{ тоді} \\ 3x - 6 = 3(x - 2) = 3y; \\ x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 1) = y \cdot (y + 1) \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{y(y+1)} = \left| \text{Зробимо заміну на еквівалентні} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{y(y+1)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3}{y+1} = 3.
\end{aligned}$$

**Завдання 12.** Дослідити функцію  $f(x) = \frac{3^x - 9}{\arcsin(x-2)}$  на неперервність.

**Розв'язання.** Функція є невизначеною в точці  $x=2$ . Знаходимо обидві однобічні границі:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3^x - 9}{\arcsin(x-2)} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{9(3^{x-2} - 1)}{\arcsin(x-2)} = \left| y = x-2 \rightarrow 0-0 \right| = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0-0} \frac{9(3^y - 1)}{\arcsin y} = \lim_{y \rightarrow 0-0} \frac{9y \ln 3}{y} = 9 \ln 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3^x - 9}{\arcsin(x-2)} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{9(3^{x-2} - 1)}{\arcsin(x-2)} = \left| y = x-2 \rightarrow 0+0 \right| = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0+0} \frac{9(3^y - 1)}{\arcsin y} = \lim_{y \rightarrow 0+0} \frac{9y \ln 3}{y} = 9 \ln 3.
\end{aligned}$$

Ліва та права однобічні границі рівні між собою, отже, точка  $x=2$  є точкою усувного розриву. Є можливість усунути розрив шляхом визначення функції в точці  $x=2$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 9}{\arcsin(x-2)}, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 9 \ln 3, & \text{якщо } x = 2. \end{cases}$$

**Завдання 13.** Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \leq x < 2, \\ 3-x, & x \geq 2. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Всі функції є неперервними при  $x \in \mathbb{R}$ , але у точках  $x=0$  та  $x=2$  змінюються вирази функції, тому вони можуть бути точками розриву. Знаходимо однобічні границі в точці  $x=0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} x^2 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (x-1)^2 = 1.$$

Однобічні границі мають скінченні значення, але вони не є рівними між собою, тому у точці  $x=0$  функція має розрив першого роду (стрибок). Знаходимо двобічні границі в точці  $x=2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 3-x = 1.$$

Однобічні границі мають скінченні значення, які є рівними між собою, тому у точці  $x=2$  функція є неперервною.

## ВАРІАНТИ ОБОВ'ЯЗКОВОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

**Завдання 1.** Обчислити границі послідовностей

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^2}{(2n+3)^3 - (n-1)^3}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^4 - (3n-1)^4}{n \cdot ((2n+1)^2 + (2n-1)^2)}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+2) - \sqrt{n^4 + 3n^3 + 1}}{n+5}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3 + (n+1)^3}{(2n+1)^3 - (n-1)^3}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^3 - (n-2)^3}{(2n+1)^2 + (n+4)^2}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^4 - (n-1)^4}{(n+3)^3 + (n+4)^3}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (2n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{(n+3)^2}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^2 + (n-1)^3}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(2n+2)^2 + (4n+1)^2}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (2n-1)^3}{n^3 - 5n}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-3)^4}{(n+1)^3 + (2n-1)^3}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) - \sqrt{n^4 + 2n^3 + 1}}{(n+5)}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - (n+1)^4}{n \cdot (n^3 - (n+1)^3)}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (1-n)^3}{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^3 - (n-1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-2)^3}{(2n+1)^2 + (n+2)^2}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-3)^3}{(2n+1)^2 + (n+3)^2}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (3n+2)^2}{(2n-3)^3 - (n-1)^3}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2) - \sqrt{n^4 + 5n^3 - 7}}{n + 15}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^3 + (3n-1)^2}{(2n-3)^3 - (n-4)^3}.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 + (3n+2)^3}{(2n-1)^3 - (n+1)^3}.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-1)^4}{(n+3)^3 + (n+2)^3}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)^4 - (2n-1)^4}{(n+3)^3 + (2n+1)^3}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^4 - (3n-2)^4}{n \cdot ((2n+1)^2 + (2n-1)^2)}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3 + (3n+1)^3}{(2n+2)^3 - (n-1)^3}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)^4 - (2n-1)^4}{n \cdot ((2n+1)^2 + (n-1)^2)}.$$

## Завдання 2. Обчислити границі послідовностей

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)! + (n-2)!}{(n-3)! + (n+2\sqrt{n})!}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n^2 - 1) \cdot ((n-1)! + n!)}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)! + (2n+3)!}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+3)!}{(n-1)! + (n+3)!}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + 2(n+2)!}{n^2(n+1)!}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)! + (n-1)!}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n+2)!}{(n^3 + 1)! \cdot n!}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+2)!}{(n-1)! + 2n^2 n!}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)! - 2(n+2)!}{(n+1)! \cdot ((n+1)! + (n-1)!)}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)! + (n-1)!}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! - (2n-1)!}{(2n)! + (2n+1)!}.$$

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!(2n^2 + n + 1)}$
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)! + (n+2)!}{n!(n+3)}$
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)! + (n+2)!}{n \cdot (n+1)! + (n-1)!}$
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{n! \cdot \sqrt{n} + (n+1)!}$
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)! + (n+3)!}{n \cdot (n+2)! + (n-1)!}$
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)! \cdot (n-1)}$
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n+2)!}{(n^3 + 1) \cdot n!}$
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$
22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)! + (2n+1)!}{(2n)! \cdot (3n-1)}$
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)! + (n-3)!}{(n-4)! \cdot (n+3\sqrt{n})}$
24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)! - (n+1)!}{(2n^3 + 5) \cdot (n-1)!}$
25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+3)!}{(n^2 + 2) \cdot ((n+1)! + n!)}$
26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)! + (n+1)!}{(n-2)! + 2n^2(n-1)!}$
27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! + (3n+2)!}{(3n+1)! \cdot (5n+1)}$
28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)! - 3(n+2)!}{(n+3) \cdot ((n+1)! + (n-1)!)}$
29.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n-3)! + (n+1)!}$
30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! + (3n+2)!}{(3n+1)! \cdot (n-1)}$
31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+3)!}{(n+1)! \cdot (5 + 3n + 2n^2)}$

### Завдання 3. Обчислити границі послідовностей

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} \right)$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{6} + \frac{10}{36} + \dots + \frac{1+3^n}{6^n} \right)$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{3n-1}{n^2} \right)$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n + 5^n}{10^n} \right)$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \cdot n^2}{1 + 2 + \dots + n}$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)} \right)$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{1+2+\dots+n} - \frac{2}{3} \right)$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + 12 + \dots + (5n-3)}$

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$ .
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 2n}{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 2}} \right)$ .
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 7 + \cdots + (3n + 1)}{n\sqrt{25n^2 + 1}}$ .
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 9 + 13 + \cdots + (4n + 1)}{n^2 + 2\sqrt{n}}$ .
13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}{n + 1} - \frac{2n + 1}{2} \right)$ .
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$ .
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{14} + \frac{45}{196} + \cdots + \frac{7^n - 2^n}{14^n} \right)$ .
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}{\sqrt{16n^4 + 1}}$ .
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (4n - 3) - (4n - 1)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \right)$ .
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \cdots + 3n}{n^2 + 4}$ .
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}{n + 3} - n \right)$ .
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$ .
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3)}{n + 1} - \frac{4n + 1}{2} \right)$ .
22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \cdots + \frac{1 + 2^n}{4^n} \right)$ .
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$ .
24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4 + 7 + \cdots + 3n + 1}{n^2} - \frac{5}{2n} \right)$ .
25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-5 - 2 + 1 + \cdots + (3n - 8)}{n} - \frac{3n}{2} \right)$ .
26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 8 + \cdots + (3n + 2)}{(n + 1)^3 - n^3}$ .
27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1)}{n^2 \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)}$ .
28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 1)^2 - 5n^2}{3 + 5 + \cdots + (2n + 1)}$ .

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((3n+1)^2 - 9n^2) \cdot n}{4 + 7 + \dots + (3n+1)}.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2 - 5n^2}{2 + 5 + \dots + (3n-1)}.$$

**Завдання 4.** Обчислити границі функцій

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 7x + 3). \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 7x + 1). \quad 3. \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x^2 + 9} - 2x^2 + 1).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \left( 3 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 3x \right). \quad 5. \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2 + 16} - x^2 + 1). \quad 6. \lim_{x \rightarrow 1} \left( 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 7x \right).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 2x - 3}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \cos(x+1)}{\sqrt{2+x}}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x^2 + 144} - x^2 + 11).$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x + 5). \quad 11. \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2 + 16} - 5x^2 + 9). \quad 12. \lim_{x \rightarrow 1} (5x^3 - 4^x + 3x).$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x + 8}{x^2 - x - 3}. \quad 14. \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{8x + 25} - 2x^2 + 3). \quad 15. \lim_{x \rightarrow 3} \left( 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 3x \right).$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 4} \left( 6 \sin\left(\frac{\pi x}{8}\right) + 2x^2 \right). \quad 17. \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x^2 + 1} - 5^x + 9x). \quad 18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_2(5+x)}{x^2 + x - 3}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -1} (5x^2 + 7x^3 - 9). \quad 20. \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 7x + 3^x). \quad 21. \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt[3]{x^2 + 2} - 3x + 1).$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi x}{4} + 3\pi \right). \quad 23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2(3+x)}{x^2 + 5x - 3}. \quad 24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \arccos(x)}{\sqrt{2+x}}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x - 3}. \quad 26. \lim_{x \rightarrow 2} \left( 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right) - 5x \right). \quad 27. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\log_3(3+6x)}{x^2 - 5x + 3}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - \sqrt{5x+1} - 2x). \quad 29. \lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 - 4^x + 7x). \quad 30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cos(\pi x)}{\sqrt{2+x}}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{x^2 + 4} - 3^x + x).$$

**Завдання 5.** Обчислити границі функцій

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x + 2} + \sqrt[3]{8x^3 - 7x + 12}}{5x + \sqrt[4]{16x^4 + 5x^2 + 3}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 5x^3 + 1} + \sqrt[3]{8x^7 - x}}{5x \cdot \sqrt[4]{x^8 + 3x^2 + 2}}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^2 + 5x + 2} + \sqrt[3]{x^3 - 4x + 1}}{3x + \sqrt[3]{8x^3 + 5x^2 + 3}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3 + 8} + \sqrt[3]{9x^5 - x}}{3\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^8 + x^2 + 6}}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25x^2 + 1} + \sqrt[3]{8x^3 - 7x + 12}}{2x + \sqrt[4]{81x^4 + x^2 + 3}}$
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 + 5x^3 + 1} + \sqrt[3]{8x^8 - x}}{2x \cdot \sqrt[4]{x^8 + 3x^2 + 4}}$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 3} + \sqrt[3]{x^3 - 4x + 1}}{2x + \sqrt[3]{8x^3 + 4x^2 + 1}}$
8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3 + 8} + \sqrt[3]{9x^5 - x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^7 + x^3 + 1}}$
9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{9x^8 + x + 2} + \sqrt[3]{x^5 - x + 2}}{5x + \sqrt[4]{x^7 + 5x^2 + 3}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3 + 8} + \sqrt[3]{8x^7 - x}}{5\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^8 + x^2 + 6}}$
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^8 + x + 2} + \sqrt[6]{x^7 - x + 2}}{\sqrt[8]{x^9} + \sqrt[5]{x^6 + x^2 + 3}}$
12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^8 + x + 2} + \sqrt[4]{x^9 - x}}{5x^2 + \sqrt[5]{x^{11} + x^2 + 3}}$
13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{9x^8 + x + 2} + \sqrt[3]{x^6 - x + 2}}{5x + \sqrt[4]{16x^8 + 5x^2 + 3}}$
14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x^5 + 8} + \sqrt[3]{x^6 - x}}{2\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^8 + x^3 + 1}}$
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^8 + x + 2} + 4x^2 \cdot \sqrt[3]{x - 1}}{\sqrt[3]{x^7} + \sqrt[5]{x^6 + x^2 + 3}}$
16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6 + x + 1} + \sqrt[4]{x^7 - x}}{5x^2 + \sqrt[5]{x^{10} + x^2 + 3}}$
17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^3 - 7x - 2}}{3x + \sqrt[4]{16x^4 + 2x^2 + 1}}$
18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 + x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^7 - x}}{6x \cdot \sqrt[4]{x^8 + x^2 + 2}}$
19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^2 + x + 2} + \sqrt[3]{8x^3 - x + 1}}{x + \sqrt[4]{x^4 + 6x^2 + 3}}$
20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^7 + x^4 + 8} + \sqrt[3]{9x^8 - x}}{3\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^9 + x^2 + 1}}$
21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - x + 9}}{2x + \sqrt[4]{16x^4 + x^2 + 3}}$
22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 + x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^7 - x}}{5x \cdot \sqrt[4]{x^8 + x^3 + 4}}$
23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x - 3} + \sqrt[3]{x^3 - 4x + 1}}{5x + \sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 2}}$
24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3 + 8} + \sqrt[3]{9x^6 - x}}{3x \cdot \sqrt[4]{x^6 + x^3 + 4}}$
25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^9 + x + 2} + \sqrt[3]{x^5 - x + 1}}{2x - \sqrt[4]{x^7 + 5x^2 + 3}}$
26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8 + x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^5 - x}}{\sqrt{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^6 + x^2 + 6}}$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^9 + x + 1} + \sqrt[6]{x^5 - x + 3}}{8\sqrt{x^{11}} + 4\sqrt{x^6 + x^2 + 7}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^8 + x + 2} + 4\sqrt{x^5 - x}}{3x^3 + 5\sqrt{x^6 + x^2 + 1}}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt[4]{9x^8 + x + 2} + \sqrt[3]{x^6 - x + 2}}{5x^2 + 4\sqrt[4]{81x^8 + x^2 + 7}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt[3]{x^6 - x}}{3\sqrt{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^6 + x^3 + 1}}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt[4]{x^{10} + x + 2} + 4x^2 \cdot \sqrt[3]{x - 1}}{5\sqrt{x^7} + \sqrt{9x} \cdot \sqrt[3]{x^6 + x^2 + 3}}$$

**Завдання 6.** Обчислити границі функцій

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 + 8x - 5}{x^2 - 5x + 4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 2x - 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} \quad 5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 13x + 3}{x^2 + 2x - 3} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + x + 15}{x^2 - 2x - 3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 - 3x + 6}{x^2 + 4x - 5} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4x^2 + 2x + 12}{x^2 + x - 6} \quad 9. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3x^2 - 2x + 8}{x^2 + 6x + 8} \quad 11. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{10x^2 + 12x + 2}{x^2 + 7x + 6} \quad 12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x^2 - 18x - 9}{x^2 + 2x - 15}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 13x - 6}{x^2 + 2x - 15} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 3x - 10} \quad 15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 10x + 8}{x^2 + 7x + 10}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 9x + 10}{x^2 + 5x + 6} \quad 17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 4x - 3}{x^2 + 2x - 3} \quad 18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + 3x - 4}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 4x - 5} \quad 20. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 5x - 3} \quad 21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 13x + 4}{x^2 - 3x - 4} \quad 23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 2x - 5}{x^2 + 4x - 5} \quad 24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 2x - 7}{x^2 - 7x + 6}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 7x - 6}{x^2 + 7x + 10} \quad 26. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 15x + 9}{x^2 + 2x - 15} \quad 27. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 4x - 15}{x^2 + 8x + 15}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 4x - 3}{x^2 + x - 2} \quad 29. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 7x + 10} \quad 30. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 3x - 20}{x^2 + 9x + 20}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 5x + 6}$$

**Завдання 7.** Обчислити границі функцій

1.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 4}{3x^3 + 4x^2 - 3x + 2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^3 - x^2 + 11x + 15}{4x^3 + 13x^2 + 5x + 6}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{3x^3 - 5x^2 + 6x - 4}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 8x^2 + 5x - 2}{4x^3 - 7x^2 - 4x + 4}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 - 11x^2 - x - 6}{5x^3 - 13x^2 - 9x + 9}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{6x^3 - 10x^2 - 8}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x - 3}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - 7x^2 + x - 6}{5x^3 - 4x^2 - 9x - 6}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 8x^2 + 7x + 2}{-4x^3 - 2x^2 - x - 3}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{-x^3 + 3x^2 + 12x + 4}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{-2x^3 + 2x^2 + 10x + 6}$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 12}{5x^3 - 12x^2 + 8x - 8}$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^3 - 17x^2 + 7x - 3}{x^3 + 4x^2 - 19x - 6}$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 5x^2 - 4x + 6}{5x^3 - 7x^2 - 8x + 4}$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 11x^2 + 9x - 2}{3x^3 + 2x^2 - 9x + 4}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^3 + x^2 + 11x + 10}{6x^3 + 10x^2 + 3x + 14}$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^3 + 5x^2 + 3x + 5}{6x^3 + 8x^2 - x - 3}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 14x^2 + 20x - 8}{-5x^3 + 12x^2 + 3x - 14}$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 - 5x^2 - 7x + 2}{5x^3 + 8x^2 + 10x + 7}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^3 + x^2 - 15x + 8}{5x^3 - 3x^2 - 5x + 3}$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 13x^2 + 5x + 2}{6x^3 - 8x^2 - x - 14}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 11x^2 + 21x - 18}{2x^3 - x^2 - 21x + 18}$ .
23.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^3 - 15x^2 + 10x - 16}{2x^3 - 9x^2 + 11x - 2}$ .
24.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 - 4x^2 + 7x - 2}{5x^3 - 4x^2 - 5x + 4}$ .
25.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3x^3 - 11x^2 - 9x + 2}{2x^3 + 7x^2 + 10x + 8}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^3 + 7x^2 - 9x + 18}{3x^3 + 11x^2 + 4x - 6}$ .
27.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 3x^2 - 5x + 3}{6x^3 - 7x^2 + 5x - 4}$ .
28.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 5x^2 + 3x - 10}{4x^3 - 14x^2 + 14x - 4}$ .
29.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 7x^2 + 8x - 5}{2x^3 + x^2 - 4x + 1}$ .
30.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 + 5x^2 - x + 10}{6x^3 + 5x^2 - 12x + 4}$ .

$$31. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 + 11x^2 + 18x + 24}{5x^3 + 21x^2 + 6x + 8}.$$

**Завдання 8.** Обчислити границі функцій

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{5(x+1)}.$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x(x-1)}).$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4}).$
4.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{6x+1}}{x^2 - x - 12}.$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{5-x^3}) \cdot \sqrt{x^3}.$
6.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{5x-1}}{x^2 - 5x + 6}.$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}).$
8.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1} - 3}.$
9.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{9-x^3} + \sqrt[3]{15-2x^3}}{\sqrt{8-x^2} - x}.$
10.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{15-7x}}{\sqrt{3+x^2} - 2x}.$
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2-3x-x^3} + x).$
12.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x-5} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{5x+1} - 4}.$
13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x^4+3} - \sqrt{x^4-x}).$
14.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+6} - x}.$
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x} - \sqrt{x \cdot (x+1)(x+2)}).$
16.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{5x-4}}{\sqrt{5+x} - 3}.$
17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+3} \cdot (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1}).$
18.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x} - \sqrt[3]{5+3x}}{\sqrt{4+5x^2} - 3x}.$
19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+2x^2+1} - \sqrt{x \cdot (x-1)(x+2)}}{\sqrt{x}}.$
20.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2+4} - \sqrt{5x+6}}{x^2 - 3x + 2}.$
21.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{10+x} + \sqrt[3]{3x-2}}{x^2 - x - 6}.$
22.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x^2 - 2x - 8}.$
23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8x} \cdot (\sqrt[3]{x^2 - 2x + 5} - \sqrt[3]{x^2 + 3x - 1}).$
24.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x+7} - \sqrt{5x+9}}{\sqrt{5+x} + 2x}.$
25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4+3} - \sqrt{x^4-x}}{2x^2+1}.$
26.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3x+10} - 2\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+9} - 1}.$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} \cdot (\sqrt{x^3+8x} - \sqrt{x^3+1}).$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5} - \sqrt{7-x}}{x - \sqrt{5x-6}}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6+2x} - \sqrt[3]{11-3x}}{3x - \sqrt{4+5x^2}}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6+x} - \sqrt[3]{14-3x}}{\sqrt{4+3x^2} - 2x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+4}}{x - \sqrt{4x+5}}.$$

**Завдання 9.** Обчислити границі функцій

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x \cdot (e^{3x} - e^x)}{1 - \cos 5x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \sqrt{x})^2 \cdot (e^{3x} - e^{2x})}{1 - \cos 3x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2 - 3x) \cdot \ln \cos x}{\operatorname{tg}(5x^3 + 2\pi)}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(5x + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{1+x^2} - 1\right)}{\arcsin 2x \cdot (e^{3x^2} - 1)}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x^2 + 2x) \cdot (2^{5x} - 2^{3x})}{(1 - \cos 3x)}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x \cdot (e^{5x} - e^{3x})}{(1 - \cos 2x) \cdot \operatorname{tg} 5x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin \sqrt{x})^2 \cdot (3^{3x} - 2^{2x})}{1 - \cos 5x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2 - 3x) \cdot \ln \cos 2x}{\sin(5x^3 + 2\pi)}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\sqrt[5]{1+x^3} - 1\right)}{\arcsin 5x \cdot (e^{4x^2} - 1)}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x \cdot (2^{5x} - 1)}{\ln(1 + \sin x^2)}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot (\cos 2x - 1)}{2x^2 \cdot (\sqrt[5]{1+3x} - 1)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x \cdot (3^{2x} - 1)}{x \ln(1 + \arcsin x)}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (2^{5x} - 1)}{\ln\left(1 + \sqrt[3]{x^6}\right)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 \sqrt{x} \cdot (e^{3x} - 1)}{(1 - \cos 3x) \cdot \ln(1 + \sqrt{x})}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \sqrt{x})^2 \cdot (2^{3x} - 3^{2x})}{1 - \cos 4x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x \cdot (\cos x - 1)}{2x \cdot (\sqrt[5]{1+3x^2} - 1)}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x + \pi) \cdot (3^{2x} - 1)}{\ln(1 + \arcsin x^3)}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (3^{5x} - 2^{3x})}{\ln\left(1 + 2\sqrt[3]{x^6}\right)}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(6x^2 + x) \cdot (3^{5x} - 5^{3x})}{(1 - \cos 4x)}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \sqrt{x} \cdot (e^{4x} - 1)}{(1 - \cos 2x) \cdot \ln(1 + 5\sqrt{x})}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x \cdot (2^{5x} - e^{3x})}{(1 - \cos 4x) \cdot \operatorname{tg} 5x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2x} \cdot (3^{7x} - 1)}{\ln(1 + \arcsin \sqrt{x^3})}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \sqrt{x})^2 \cdot (2^{3x} - 3^{2x})}{1 - \cos 4x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x \cdot (\cos 2x - 1)}{3x \cdot (\sqrt[5]{1 + x^2} - 1)}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x^2 - 3x) \cdot \ln \cos 2x}{\arcsin(5x^3) \cdot (e^{7x} - 1)}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x + 2\pi) \cdot (5^{2x} - 1)}{\ln(1 + \sin x^3)}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \cdot (\sqrt[5]{1 + 5x^3} - 1)}{\arcsin 3x \cdot (e^{x^2} - 1)}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot (4^{3x} - 3^{2x})}{\ln(1 + x\sqrt{x})}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x^2 + x) \cdot (4^{5x} - 2^{3x})}{(1 - \cos 3x)}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^5 \sqrt{x} \cdot (e^{2x} - 1)}{(1 - \cos x) \cdot \ln(1 + x\sqrt{x})}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x + 5\pi) \cdot (3^{2x} - 5^{4x})}{\ln \cos x \cdot (\sqrt[5]{1 + 3x^3} - 1)}.$$

### Завдання 10. Обчислити границі функцій

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{2+3x}\right)^{7x+6}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{2+x}\right)^{7x+6}; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{2+3x}\right)^{7x+6}.$$

$$2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{1+2x}\right)^{x-3}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{1+x}\right)^{x-3}; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{1+2x}\right)^{x-3}.$$

$$3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+5}\right)^{\frac{5x^2+2}{2x}}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{2x^2+5}\right)^{\frac{5x^2+2}{2x}}; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x^2+2x}\right)^{\frac{5x^2+2}{2x}}.$$

$$4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{2+x}\right)^{2x-3}; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+7}{2+x}\right)^{2x-3}; \quad \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{2+5x}\right)^{2x-3}.$$

$$\begin{array}{l}
5. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 2} \right)^{x+4} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x+4} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3x}{3x^2 + 5x} \right)^{x+4} . \\
6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{4 + 2x} \right)^{2x+13} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{4 + x} \right)^{2x+13} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{4 + 4x} \right)^{2x+13} . \\
7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 3}{2 + 5x} \right)^{3x+5} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 3}{2 + x} \right)^{3x+5} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 3}{2 + 8x} \right)^{3x+5} . \\
8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 7x + 9}{2x^2 + 3x - 2} \right)^{3x+1} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{x^2 + 3x} \right)^{3x+1} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 7x}{4x^2 - 2} \right)^{3x+1} . \\
9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 3}{2 + 5x} \right)^{4x+3} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 3}{2 + 2x} \right)^{4x+3} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 3}{2 + 5x} \right)^{4x+3} . \\
10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 6}{2x + 3x^2} \right)^{2x-3} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 5}{2x + x^2} \right)^{2x-3} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 6}{2x + 3x^2} \right)^{2x-3} . \\
11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3}{2 + 5x + x^3} \right)^{3x^2+5} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 - 3}{5x + x^3} \right)^{3x^2+5} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3}{x + 3x^3} \right)^{3x^2+5} . \\
12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2 + 7}{4x^2 + 2x} \right)^{x-5} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 7}{4x^2 + 2x} \right)^{x-5} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2 + 7}{x^2 + 2x} \right)^{x-5} . \\
13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{2x^2 - 5x} \right)^{2x+1} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 5x} \right)^{2x+1} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x} \right)^{2x+1} . \\
14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3x - 2} \right)^{\frac{3x^2+1}{x}} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3x} \right)^{\frac{3x^2+1}{x}} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2x^2 + 3} \right)^{\frac{3x^2+1}{x}} . \\
15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3}{x^3 + 5x} \right)^{2x^2+3} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 - 3}{x^3 + 5x} \right)^{2x^2+3} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3}{3x^3 + x} \right)^{2x^2+3} . \\
16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x^2 - x}{2x + 7x^2} \right)^{x+1} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x^2 - x}{2x + 5x^2} \right)^{x+1} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x}{2x + 7x^2} \right)^{x+1} .
\end{array}$$

$$17. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{4x + 2x^2 + 5} \right)^{4x+3} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + 5} \right)^{4x+3} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{4x^2 + 5} \right)^{4x+3} .$$

$$18. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 5} \right)^{\frac{3x^2+1}{2x}} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5} \right)^{\frac{3x^2+2}{2x}} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2}{6x^2 + 2x} \right)^{\frac{x^2+2}{2x}} .$$

$$19. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 7x}{3x + x^2} \right)^{4x-3} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 7x}{3x + 2x^2} \right)^{4x-3} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 7x}{3x + x^2} \right)^{4x-3} .$$

$$20. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x - 1} \right)^{x+4} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x+4} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3x}{2x^2 + 5x} \right)^{x+4} .$$

$$21. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{4 + 2x} \right)^{2x+1} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{4 + x} \right)^{2x+8} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 5}{1 + 4x} \right)^{2x+1} .$$

$$22. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 1}{2 + 5x} \right)^{x+5} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 3}{2 + x} \right)^{3x+5} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 3}{2 + x} \right)^{3x+5} .$$

$$23. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 2} \right)^{5x+1} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{x^2 + 3x} \right)^{5x+1} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{6x^2 - 2} \right)^{5x+1} .$$

$$24. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 1}{2 + 3x} \right)^{2x+3} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 1}{2 + 2x} \right)^{2x+3} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 1}{2 + 7x} \right)^{2x+3} .$$

$$25. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 6}{2x + x^2} \right)^{5x-3} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 6}{x + x^2} \right)^{5x-3} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 6}{2x + 3x^2} \right)^{5x-3} .$$

$$26. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3}{2 + 5x + x^3} \right)^{3x^2+5} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 - 3}{5x + x^3} \right)^{3x^2+5} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3}{x + 3x^3} \right)^{3x^2+5} .$$

$$27. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 7}{x^2 + 2x} \right)^{x+4} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 7}{4x^2 + 2x} \right)^{x+4} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 7}{x^2 + 5x} \right)^{x+4} .$$

$$28. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 5x}{3x^2 - x} \right)^{4x+1} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x}{x^2 - 5x} \right)^{4x+1} ; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x}{3x^2 - 5x} \right)^{4x+1} .$$

$$29. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 3x - 2} \right)^{\frac{4x^2+1}{x}} ; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 7}{x^2 + 3x} \right)^{\frac{4x^2+1}{x}} ; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2x^2 + 5} \right)^{\frac{4x^2+1}{x}} .$$

$$30. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 4}{x^3 + x} \right)^{x^2+1} ; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 + 4}{x^3 + x} \right)^{x^2+1} ; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 4}{3x^3 + x} \right)^{x^2+1} .$$

$$31. \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 1} \right)^{\frac{5x^2+1}{2x}} ; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 3}{2x^2 + x} \right)^{\frac{5x^2+1}{2x}} ; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 2x} \right)^{\frac{5x^2+1}{2x}} .$$

### Завдання 11. Обчислити границі функцій

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} . \quad 2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{2}{\cos x}} . \quad 3. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10} .$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x} . \quad 5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) . \quad 6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} .$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2} . \quad 8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg}^3 x} . \quad 9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} .$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 4)}{x^3 - 8} . \quad 11. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x^3) - 3}{x - e} . \quad 12. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)} .$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} . \quad 14. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x-3}} . \quad 15. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4-x}{2} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}} .$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \pi} (\cos 2x)^{1/(\operatorname{tg} 3x \cdot \sin 2x)} . \quad 17. \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} . \quad 18. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{7-x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}} .$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{1/\operatorname{tg}^2 x} . \quad 20. \lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{x/(x-2)} . \quad 21. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{6-x}{x} \right)^{1/\ln(4-x)} .$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \pi} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right)^{1/(x-\pi)} . \quad 23. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\operatorname{tg} x} . \quad 24. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{1/(x-3)} .$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 7x + 6}. \quad 26. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x}. \quad 27. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x + 4^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}. \quad 29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x. \quad 30. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(3x-6)}{x^2 - 3x + 2}.$$

**Завдання 12.** Дослідити функції на неперервність

$$1. f(x) = 2^{\frac{1}{(x-3)}}. \quad 2. f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}. \quad 3. f(x) = \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

$$4. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}. \quad 5. f(x) = \frac{3}{2^x - 1}. \quad 6. f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 2x - 15}.$$

$$7. f(x) = 5^{\frac{1}{(x-3)}} - 1. \quad 8. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}. \quad 9. f(x) = 4^{\frac{1}{(3-x)}}.$$

$$10. f(x) = \frac{x-4}{x^2 - 16}. \quad 11. f(x) = 3^{\frac{x}{(x-1)}}. \quad 12. f(x) = \frac{3^x - 3}{x-1}.$$

$$13. f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}. \quad 14. f(x) = \frac{3x}{2^x - 1}. \quad 15. f(x) = 7^{\frac{x}{(x-5)}} + 1.$$

$$16. f(x) = 3^{\frac{x}{(x-2)}}. \quad 17. f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}. \quad 18. f(x) = 7^{\frac{1}{(x-4)}}.$$

$$19. f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4}. \quad 20. f(x) = \frac{4}{6^x - 1}. \quad 21. f(x) = \frac{x}{(x-2)x}.$$

$$22. f(x) = 6^{\frac{1}{(x-3)}} - 4. \quad 23. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}. \quad 24. f(x) = 5^{\frac{x}{(3-x)}}.$$

$$25. f(x) = \frac{\operatorname{tg}(x-4)}{x^2 - 16}. \quad 26. f(x) = \frac{x}{2^x - 1}. \quad 27. f(x) = \frac{2^x - 2}{x-1}.$$

$$28. f(x) = \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 9}. \quad 29. f(x) = \frac{4x}{5^x - 1}. \quad 30. f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$31. f(x) = \frac{3^x - 9}{\arcsin(x-2)}.$$

**Завдання 13.** Дослідити функції на неперервність

$$1. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < 1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \leq x < 2, \\ -x+4, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leq x < 1, \\ -x+3, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ -(x-1)^2, & 0 \leq x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x < -1, \\ (x+1)^3, & -1 \leq x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 2, \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 2x, & 1 \leq x < 3, \\ x+2, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x < 4, \\ x+3, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ x+2, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2^x, & 0 \leq x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ x^2+2, & 1 < x < 2, \\ -2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} x, & x < -2, \\ 1-x, & -2 \leq x \leq 1, \\ x^2-1, & x > 1. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2-1, & -1 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$31. f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \leq x < 2, \\ 5-x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < -2, \\ x^3, & -2 \leq x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ (x-2)^2, & 1 \leq x < 3, \\ 6-x, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x < 3, \\ 5-x, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0, \\ 4-x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ 1-x, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^3, & 0 \leq x < 2, \\ x+4, & x \geq 2. \end{cases}$$

## Глава 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### §1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

#### 1.1. Похідна. Диференціювання явно заданих функцій

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на проміжку  $X$ . Візьмемо будь-яку точку  $x_0 \in X$  і надамо їй приріст  $\Delta x$ , такий, що  $(x_0 + \Delta x) \in X$ , тоді функція набуває відповідний приріст  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

**Означення.** *Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу спрямує до нуля, якщо ця границя існує:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

*Зауваження.* Якщо  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ , то вважають, що функція має нескінченну похідну в точці  $x_0$ .

Позначають похідні символами  $f'(x)$  або  $y'(x)$ .

**Означення.** *Лівою (правою) похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називають ліву (праву) границі відношень:  $f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$*

$$\text{або } f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Необхідною і достатньою умовою існування  $f'(x_0)$  є існування і збіг  $f'(x_0 + 0)$  і  $f'(x_0 - 0)$ .

Процес знаходження похідної називається диференціюванням.

#### Похідні основних елементарних функцій

Виведемо ці похідні безпосереднім обчисленням.

**Приклад 2.1.** Нехай  $y = x^n$ .

**Розв'язання.**

$$\text{Приріст функції } \Delta y = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = x_0^n \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^n - x_0^n =$$

$$= x_0^n \left( \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^n - 1 \right) \sim x_0^n n \frac{\Delta x}{x_0} = n x_0^{n-1} \Delta x \text{ (при перетвореннях застосовані}$$

еквівалентні співвідношення для нескінченно малих функцій

$$(1 + \alpha)^m - 1 \sim m\alpha, \alpha \rightarrow 0). \text{ Тоді } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n x_0^{n-1} \Delta x}{\Delta x} = n x_0^{n-1}. \text{ Отже,}$$

$$\text{похідна } (x^n)' = n x^{n-1}.$$

**Приклад 2.2.** Нехай  $y = \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ).

**Розв'язання.**

Приріст функції

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \text{ Похідна } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \text{ Дістаємо: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.3.** Нехай  $y = \sin x$ .

**Розв'язання.**

$$\text{Відношення } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \text{ корис-}$$

туючись безперервністю функції  $\cos x$  і першою особливою границею

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ отримуємо } (\sin x)' = \cos x.$$

**Приклад 2.4.** Нехай  $y = \cos x$ .

**Розв'язання.**

$$\text{Маємо: } \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\text{тоді } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Отже, похідна дорівнює:  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**Приклад 2.5.** Нехай  $y = e^x$ .

**Розв'язання.**

Надавши аргументу приріст, знаходимо приріст функції  $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}, \quad \text{тоді} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \\ &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x. \end{aligned}$$

Маємо  $(e^x)' = e^x$ .

**Приклад 2.6.** Нехай  $y = \ln x$ .

**Розв'язання.**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Переходячи до

границі при  $\Delta x \rightarrow 0$  і використовуючи еквівалентність  $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$

при  $\Delta x \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \text{ тобто} \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.7.** Нехай  $y = \log_a x$ ,  $a > 0, a \neq 1$ .

**Розв'язання.**

$$\text{Оскільки } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \text{ то } (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Отже, маємо  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .

### Таблиця похідних основних елементарних функцій

1.  $(C)' = 0$ , де  $C = \text{const}$ .

2.  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \neq 0$ .

3.  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $a > 0$ ;  $(e^x)' = e^x$ .

4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $a > 0$ ;  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

5.  $(\sin x)' = \cos x$ .

6.  $(\cos x)' = -\sin x$ .

7.  $(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

8.  $(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

9.  $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

10.  $(\text{arctg } x)' = -(\text{arcctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .

11.  $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$ .

12.  $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$ .

13.  $(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$ .

14.  $(\text{cth } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$ .

### 1.2. Правила диференціювання функцій

**Теорема 2.2.1.** Нехай  $f(x)$  і  $g(x)$  диференціюються. Тоді:

1)  $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ;

$$2) (f \cdot g)' = f'g + fg';$$

$$3) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ де } g \neq 0.$$

### **Доведення.**

#### **1. Похідні суми (різниці) функцій**

Нехай функції  $f(x), g(x)$  мають в певній точці похідні  $f'(x), g'(x)$  та  $y(x) = f(x) \pm g(x)$ . Надаємо  $x$  приріст  $\Delta x$ , тоді  $f(x)$  та  $g(x)$  отримають прирости  $\Delta f(x)$  і  $\Delta g(x)$  відповідно, отже, їх нові значення  $f(x) + \Delta f(x)$  і  $g(x) + \Delta g(x)$  пов'язані співвідношенням:  $y(x) + \Delta y(x) = (f(x) + \Delta f(x)) \pm (g(x) + \Delta g(x))$ , тобто  $\Delta y = \Delta f \pm \Delta g$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$ . Переходячи до границі, отримуємо:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f' \pm g'$ .

Цей результат поширюється на будь-яке число доданків.

#### **2. Похідна добутку функцій**

У разі добутку двох функцій неважко бачити, що приріст  $y(x) = f(x) \cdot g(x)$  знаходиться з такого співвідношення:

$$y(x) + \Delta y(x) = (f(x) + \Delta f(x)) \cdot (g(x) + \Delta g(x)), \quad \Delta y = \Delta f \cdot g + \Delta g \cdot f.$$

Отже:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g + f \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta x}$ . Останній доданок з огляду на безперервність функцій  $f(x), g(x)$  в границі дорівнює нулю, тоді  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ .

#### **3. Похідна частки**

Доведемо формулу похідної частки двох функцій

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ де } g \neq 0. \text{ При тих же позначеннях, що й вище:}$$

$$y(x) + \Delta y(x) = \frac{f(x) + \Delta f(x)}{g(x) + \Delta g(x)}, \text{ отже } \Delta y = \frac{\Delta f(x)g(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}, \text{ звідки}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g(x)g(x + \Delta x)}. \text{ Спрямовуючи } \Delta x \rightarrow 0, \text{ отримуємо шукану}$$

формулу  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

**Приклад 2.8.** Знайти похідні функцій-  $y = \operatorname{tg}x$  і  $y = \operatorname{ctg}x$ .

**Розв'язання.**

Для знаходження похідної скористаємося формулою частки

$$(\operatorname{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Маємо } (\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Виконавши аналогічні операції, отримаємо формулу

$$(\operatorname{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Цей результат можна отримати інакше:

$$(\operatorname{ctg}x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

### 1.3. Похідна складної функції

**Теорема 2.3.1.** Якщо функція  $y = f(x)$  має похідну в точці  $x_0$ , а функція  $z = g(y)$  має похідну в точці  $y_0 = f(x_0)$ , то складна функція  $z = g(f(x))$  має похідну в точці  $x_0$  яка дорівнює

$$z'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \quad (z'_x = z'_y \cdot y'_x).$$

У процесі доведення використовується безперервність функцій  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$ . Якщо існує похідна  $z'(y)$ , то функція  $\alpha = \frac{\Delta z}{\Delta y} - z'_y$  є нескінченна мала у разі  $\Delta y \rightarrow 0$ . Тоді  $\Delta z = z'_y \cdot \Delta y + \alpha \Delta y$ , розділивши на  $\Delta x$  отримаємо рівність:  $\frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Переходимо до границі при  $\Delta x \rightarrow 0$  і остаточно маємо: похідна в точці  $x_0$   $z'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$  або  $z'_x = z'_y \cdot y'_x$ .

**Приклад 2.9.** Нехай  $y = a^x$ ,  $x \in R$ .

**Розв'язання.**

Оскільки  $a^x = e^{x \ln a}$ , користуючись формулою похідної для складної функції, отримуємо:  $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$ .

Тобто  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ .

#### 1.4. Похідна оберненої функції

Нехай задані функції  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$  і нехай на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  функція має обернену  $t = \varphi^{-1}(x)$ . Тоді можна визначити функцію  $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ , яка називається параметрично заданою.

**Теорема 2.4.1 (похідна оберненої функції).** Нехай функція  $y = f(x)$  зростає (або спадає) і неперервна в деякому околі точки  $x_0$ . Нехай також  $\exists f'(x_0) \neq 0$ . Тоді в деякому околі точки  $y_0 = f(x_0)$  визначена обернена функція  $x = f^{-1}(y)$ , причому  $f^{-1}(y)$  диференційована в точці  $y_0$  і  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ . Більш проста форма запису для довільної

точки  $x$ , в якій виконані умови теореми:  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

Доказ складається з такого ланцюжка міркувань:  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  і  $\Delta x \neq 0$ ,  $\Delta y \neq 0$ , отже,  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ . Якщо тепер перейти до границі  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , отримаємо  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

**Приклад 2.10.** Нехай  $y = \arcsin x$ .

**Розв'язання.**

Обернена їй функція має вигляд  $x = \sin y$ ,  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . На інтер-

валі  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  правильна рівність  $x' = \cos y \neq 0$ .

За правилом диференціювання оберненої функції

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

де перед коренем беремо знак плюс, тому що  $\cos y > 0$ , коли  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$\text{Отже, } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{Аналогічно отримаємо, що } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Цю формулу можна отримати простіше:  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\text{тобто } \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \text{отже, } (\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Знайдемо похідну функції  $y = \operatorname{arctg} x$ . Вона є оберненою до функції  $x = \operatorname{tgy}$ , де  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Тому за правилом диференціювання оберненої функції отримаємо:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tgy})'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{Тобто } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Функції  $\operatorname{arctg} x$  і  $\operatorname{arcctg} x$  зв'язані співвідношенням

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{тобто } \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Диференціюючи цю рівність, знаходимо:

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{Тобто } (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**Приклад 2.11.** Знаходження похідних гіперболічних функцій:

$$y = \operatorname{sh} x, \quad y = \operatorname{ch} x, \quad y = \operatorname{th} x, \quad y = \operatorname{cth} x.$$

**Розв'язання.**

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \text{тобто } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \quad \text{тобто } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \text{тобто}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left( \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - (\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

тобто

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

**Таблиця похідних основних елементарних функцій, якщо  $u$  складна функція**

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \quad \alpha \neq 0.$$

$$2. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad a > 0; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$3. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u', \quad a > 0; \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$4. (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$5. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$6. (\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$7. (\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$8. (\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$9. (\operatorname{arctgu})' = -(\operatorname{arcctgu})' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$10. (\operatorname{shu})' = \operatorname{chu} \cdot u'.$$

$$11. (\operatorname{chu})' = \operatorname{shu} \cdot u'.$$

$$12. (\operatorname{thu})' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$$

$$13. (\operatorname{cthu})' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

**Приклад 2.12.** Знайти похідну функції  $z = \operatorname{arctg}(2^x/x)$ .

*Розв'язання.*

$$z = \operatorname{arctg} y \text{ і } y = \frac{2^x}{x}, \text{ маємо } z'(y) = \frac{1}{1+y^2} \text{ та } y'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2}.$$

$$\text{Тоді отримаємо: } z'(x) = \frac{1}{1+(2^x/x)^2} \cdot \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2} = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2 + 4^x}.$$

Правило диференціювання складної функції справедливе для будь-якого кінцевого числа композицій основних елементарних функцій.

**Приклад 2.13.** Знайти похідну функції  $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}}$ .

*Розв'язання.*

Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, отримаємо:

$$y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \left( \operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x} \right)' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{1}{1+1+\sin^2 x} \times$$

$$\begin{aligned} \times \left( \sqrt{1 + \sin^2 x} \right)' &= \frac{e^{\arctg \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{2 + \sin^2 x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot \left( 1 + \sin^2 x \right)' = \\ &= \frac{e^{\arctg \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{2(2 + \sin^2 x)\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot 2 \sin x (\sin x)' = \frac{e^{\arctg \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{(2 + \sin^2 x)\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot \sin x \cos x. \end{aligned}$$

## §2. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ. ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НЕЯВНО ТА ПАРАМЕТРИЧНО

### 2.1. Логарифмічне диференціювання

Похідна від логарифма функції  $y = f(x)$ , тобто  $(\ln y)' = y'/y$ , називається *логарифмічною похідною*, а операція диференціювання – *логарифмічним диференціюванням*. Застосування логарифмування часто спрощує взяття похідної, а у разі степенево-показникової функції воно необхідне.

**Похідна степенево-показникової функції**  $y = (u(x))^{v(x)}$ .

Застосуємо логарифмічне диференціювання, тобто прологарифмуємо вираз  $\ln y = \ln(u(x))^{v(x)}$ .

Використавши властивості логарифма, маємо:  $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$ .

Знайдемо похідну:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot (\ln(u(x)))'$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)};$$

$$y' = \left( v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \cdot y;$$

$$\text{Остаточо маємо: } y' = \left( v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \cdot (u(x))^{v(x)}.$$

**Приклад 2.14.** Знайти похідну функції  $y = (\sin x)^{(2-x)}$ .

**Розв'язання.**

Логарифмуючи, отримаємо:  $\ln y = (2-x)\ln \sin x$  ( $\sin x > 0$ ). Знаходимо похідні лівої та правої частин рівності:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (-1) \cdot \ln \sin x + (2-x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Тоді  $y' = y \cdot (\ln y)' = (\sin x)^{(2-x)} (-\ln \sin x + (2-x)\operatorname{ctg} x)$ .

**Приклад 2.15.** Знайти похідну функції  $y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$ .

**Розв'язання.**

$$\ln y = \frac{1}{3}(\ln(x+2) + 2\ln(x-1) - 5\ln x).$$

Диференціюючи обидві частини рівності, отримаємо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x} \right) = \frac{10-2x-2x^2}{3x(x+2)(x-1)},$$

$$y' = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{10-2x-2x^2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5-x-x^2}{\sqrt[3]{(x+2)^2 x^8 (x-1)}}.$$

### Задачі для самостійного розв'язання

Знайти похідні зазначених функцій.

1.  $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$ .    2.  $y = \frac{x}{x^2+1}$ .    3.  $y = \frac{1-x^2}{\sqrt{\pi}}$ .    4.  $y = \frac{\sqrt[3]{(1-x^2)(1-2x^3)}}{1-x^2}$ .
5.  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$ .    6.  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .    7.  $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$ .    8.  $y = \sin \frac{1}{x}$ .
9.  $y = \sin(\sin x)$ .    10.  $y = \sin^2(\cos 3x)$ .    11.  $y = \frac{1}{\arcsin x}$ .    12.  $y = \arccos \frac{2x-3}{\sqrt{3}}$ .
13.  $y = \operatorname{arctg} x^2$ .    14.  $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$ .    15.  $y = \ln \arccos 2x$ .    16.  $y = \frac{x}{4^x}$ .
17.  $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$ .    18.  $y = 2^{\ln x}$ .    19.  $y = 3^{\sin x}$ .    20.  $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$ .
21.  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ .    22.  $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$ .    23.  $y = 10^{x+\operatorname{tg} x}$ .    24.  $y = xe^{1-\cos x}$ .
25.  $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$ .    26.  $y = (\sin x)^{\cos x}$ .    27.  $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$ .    28.  $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$ .

29.  $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$ . 30.  $y = \cos^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ .

**2.2. Диференціювання функцій, заданих неявно або параметрично**  
**Функції задані неявно**

Нехай функція  $F(x, y) = 0$  є неявним завданням функції  $y = f(x)$ .

Для знаходження похідної функції  $y = f(x)$  необхідно диференціювати по  $x$  обидві частини рівняння  $F(x, y) = 0$ , потім отримане рівняння розв'язати відносно  $y'_x$ :

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_x = 0,$$

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

**Приклад 2.16.** Знайти  $y'_x$  для функції, яка задана неявно:  
 $xy = \operatorname{arctg}(x/y)$ .

**Розв'язання.**

Диференціюючи по  $x$  обидві частини рівності  $xy = \operatorname{arctg}(x/y)$ , маємо:

$$y + xy' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}; \quad y + xy' = \frac{y - xy'}{x^2 + y^2};$$

$$y' \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} - y,$$

$$y' = \frac{y \left( \frac{1}{x^2 + y^2} - 1 \right)}{x \left( \frac{1}{x^2 + y^2} + 1 \right)} = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 + x^2 + y^2)}.$$

**Функції задані параметрично**

Нехай залежність між аргументом  $x$  та функцією  $y$  задана параметрично у вигляді двох рівнянь

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \text{ де } t \text{ — допоміжна змінна, яка називається } \mathbf{параметром}.$$

Знайдемо похідну  $y'_x$ , припускаючи при цьому, що функції

$x = x(t), y = y(t)$  мають похідні та функція  $x = x(t)$  має обернену  $t = \varphi(x)$ .

За правилом диференціювання оберненої функції маємо  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ .

Функцію  $y = f(x)$ , яка визначається параметричними рівняннями  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$  можна розглядати як складну функцію  $y = y(t)$ , де  $t = \varphi(x)$ .

За правилом диференціювання складної функції маємо  $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ .

Застосовуючи  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ , отримаємо  $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$ , тобто

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Отримана формула дозволяє знаходити похідну  $y'_x$  від функції, заданої параметрично, не знаходячи безпосередньо залежність  $y$  від  $x$ .

**Приклад 2.17.** Знайти  $y'_x$ , якщо  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

**Розв'язання.**

Оскільки  $x'_t = -3a \cos^2 t \cdot \sin t$ ,  $y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$ , тоді  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\operatorname{ctg} t$ .

#### Задачі для самостійного розв'язання

Знайти похідні від  $y$  по  $x$  для неявно заданих функцій.

31.  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ . 32.  $x^y = y^x$ . 33.  $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y)$ .

34.  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ . 35.  $x^4 + y^4 = x^2 y^2$ . 36.  $y = 1 + x e^y$ .

37.  $y = x + \operatorname{arctg} y$ .

Знайти похідні від  $y$  по  $x$  для параметрично заданих функцій.

38.  $x = a \cos^3 \varphi$ ,  $y = b \sin^3 \varphi$ . 39.  $x = a(\varphi - \sin \varphi)$ ,  $y = a(1 - \cos \varphi)$ .

40.  $x = \frac{t+1}{t}$ ,  $y = \frac{t-1}{t}$ . 41.  $x = \frac{1+t^2}{t^2-1}$ ,  $y = \frac{1}{t^2-1}$ . 42.  $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ .

### §3. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

**Означення.** *Похідною другого порядку* від функції  $y = f(x)$  називається похідна від її першої похідної, тобто  $y''(x) = (y'(x))'$ . Відповідно *похідною  $n$ -го порядку* називається похідна від  $(n - 1)$ -ої похідної, тобто

$$y^{(n)}(x) = \left( y^{(n-1)}(x) \right)', n = 2, 3, \dots$$

**Приклад 2.18.** Знайти похідну порядку  $(n)$  від функції  $y = \ln(1+x)$ .

**Розв'язання.**

$$y' = \frac{1}{1+x}, y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, y''' = \frac{2}{(1+x)^3}, y^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}.$$

Продовжуючи диференціювання функції, отримаємо

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Якщо функції  $f(x)$  і  $g(x)$  мають похідні до  $n$ -го порядку включно, то правдива формула Лейбніца:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n)} &= f^{(n)} \cdot g + n \cdot f^{(n-1)} \cdot g' + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot f^{(n-2)} \cdot g'' + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \dots + f \cdot g^{(n)}. \end{aligned}$$

Або

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad \text{де} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad f^{(0)} = f(x),$$

$$g^{(0)} = g(x).$$

**Приклад 2.19.** Знайти похідну 5-го порядку від функції  $y = \sin x \cdot e^{-x}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= \left( \sin x \cdot e^{-x} \right)^{(5)} = (\sin x)^{(5)} \cdot e^{-x} + 5(\sin x)^{(4)} (e^{-x})' + \frac{5 \cdot 4}{2!} (\sin x)^{(3)} (e^{-x})'' + \\ &+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} (\sin x)'' (e^{-x})^{(3)} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} (\sin x)' (e^{-x})^{(4)} + \sin x (e^{-x})^{(5)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Маємо: } (\sin x)' &= \cos x, & (\sin x)'' &= -\sin x, & (\sin x)^{(3)} &= -\cos x, \\ (\sin x)^{(4)} &= \sin x, & (\sin x)^{(5)} &= \cos x, & (e^{-x})' &= -e^{-x}, & (e^{-x})'' &= e^{-x}, \\ (e^{-x})^{(3)} &= -e^{-x}, & (e^{-x})^{(4)} &= e^{-x}, & (e^{-x})^{(5)} &= -e^{-x}. \end{aligned}$$

Підставляючи отримані значення похідних, знаходимо:

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= \cos x \cdot e^{-x} - 5 \sin x \cdot e^{-x} - 10 \cos x \cdot e^{-x} + 10 \sin x \cdot e^{-x} + \\ &+ 5 \cos x \cdot e^{-x} - \sin x \cdot e^{-x} = 4e^{-x}(\sin x - \cos x). \end{aligned}$$

**Приклад 2.20.** Знайти похідну другого порядку від функції  $y = \operatorname{tg}(x + y)$ .

**Розв'язання.**

$$\text{Диференціюючи рівняння по } x, \text{ маємо } y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1 + y').$$

$$\text{Звідси } y' \left( 1 - \frac{1}{\cos^2(x+y)} \right) = \frac{1}{\cos^2(x+y)}, \text{ або}$$

$$-y' \operatorname{tg}^2(x+y) = 1 + \operatorname{tg}^2(x+y).$$

Замінімо  $\operatorname{tg}(x+y)$  на  $y$  із умови:  $y' = -\frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{1}{y^2} - 1$ . Дифере-

нціюючи останнє рівняння по  $x$ , маємо  $y'' = \frac{2}{y^3} \cdot y'$ . Використовуючи

знайдений для  $y'$  вираз, отримаємо  $y'' = -\frac{2}{y^5} (1 + y^2)$ .

Для функції  $y(x)$ , яка задана параметрично,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , похідна другого порядку знаходиться за формулою  $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ , оскільки похідна  $y'_x(t)$  є функцією від  $t$ , що, в свою

чергу, дозволяє застосувати до неї формулу обчислення похідної параметрично заданої функції. Так само похідна порядку  $n$  визначається на-

ступним чином:  $y_x^{(n)} = \frac{(y_x^{(n-1)})'_t}{x'_t}$ .

**Приклад 2.21.** Знайти похідну другого порядку від функції, яка задана параметрично:  $x = \arctg t, y = \ln(1+t^2), t \in (-\infty, +\infty)$ .

**Розв'язання.**

Знайдемо першу похідну:  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{1+t^2} = 2t$ . Тоді

$$y''_x = \frac{2}{1+t^2} = 2(1+t^2).$$

### Задачі для самостійного розв'язання

43.  $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4; f^{(4)}(1) = ?$     44.  $y = x^3 \ln x; y^{(4)} = ?$

45.  $y = \sin^2 x; y^{(n)} = ?$     46.  $y = xe^x; y^{(n)} = ?$     47.  $\rho = a \sin 2\varphi; \frac{d^4 \rho}{d\varphi^4} = ?$

48.  $y = \sin(x+y); y'' = ?$     49.  $s = 1 + te^s; \frac{d^2 s}{dt^2} = ?$

50.  $e^y + xy = e; \text{Знайти } y''(0).$     51.  $x = at^2, y = bt^3; \frac{d^2 x}{dy^2} = ?$

52.  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t; \frac{d^3 y}{dy^3} = ?$     53.  $x = at \cos t, y = at \sin t; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

54. Застосувати формулу Лейбніца для знаходження похідної:  $[(x^2 + 1) \cdot \sin x]^{(20)}$ .

## §4. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ТА МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

**Геометричний зміст похідної:** похідна  $f'(x_0)$  функції є *тангенс кута нахилу дотичної*  $L_K$ , проведеної до графіка функції в точці  $M_0$ , до додатного напрямку осі абсцис  $f'(x_0) = tg \varphi$  (рис. 2.1).

*Рівняння дотичної*  $L_K$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$ :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормаллю до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $M_0$  називається пряма  $L_N$ , що проходить через точку  $M_0$  перпендикулярно дотичній в цій точці. Її рівняння:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Кутом між кривими в їх загальній точці називається кут між дотичними, проведеними до кривих у цій точці.

**Механічний зміст похідної:** Якщо закон руху матеріальної точки описується функцією  $x = x(t)$ , тоді  $x'(t)$  є швидкістю, а  $x''(t)$  – прискорення цієї точки в момент часу  $t$ .

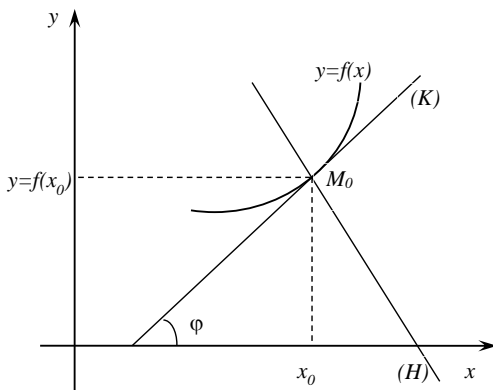


Рис. 2.1

**Приклад 2.22.** Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = e^{1-x^2}$  у точці  $x_0 = -1$ .

**Розв'язання.**

$y = e^{1-x^2}$ ,  $y' = -2xe^{1-x^2}$ . Тоді  $y_0 = f(-1) = e^0 = 1$ ,  $f'(-1) = 2$ . Задаємо рівняння дотичної (K) та нормалі (H) до графіку.

$$L_K: y - 1 = 2(x + 1), \quad L_N: y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{або} \quad L_K: 2x - y + 3 = 0,$$

$$L_N: x + 2y - 1 = 0.$$

**Приклад 2.23.** Записати рівняння дотичної до кривої  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$  у точці  $t_0 = \pi/4$ .

**Розв'язання.**

$$\text{Знайдемо } y'_x = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t}.$$

$$\text{Тоді } y'_x(t_0) = \frac{4 + \pi}{4 - \pi}, \quad y_0 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}, \quad x_0 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} = \left(\frac{4 + \pi}{4 - \pi}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$$

**Приклад 2.24.** Знайти кут, під яким перетинаються криві  $l_1 = \{(x, y): y = (x-2)^2\}$  і  $l_2 = \{(x, y): y = 4x - x^2 + 4\}$ .

**Розв'язання.**

Знайдемо точки перетину кривих  $l_1$  і  $l_2$ . З рівності  $(x-2)^2 = 4x - x^2 + 4$  знаходимо точки перетину  $M_1(0,4)$ ,  $M_2(4,4)$ . Обчислимо кутові коефіцієнти  $k_1$  та  $k_2$  дотичних до кривих  $l_1$  і  $l_2$  у точці  $M_1$ .

$$y = (x-2)^2 \Rightarrow y' = 2(x-2) \Rightarrow k_{1,1} = -4,$$

$$y = 4x - x^2 + 4 \Rightarrow y' = 4 - 2x \Rightarrow k_{2,1} = 4.$$

Кут  $\varphi_1$  між дотичними визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_{1,1} - k_{2,1}}{1 + k_{1,1}k_{2,1}} \Rightarrow \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}. \text{ У точці } M_2 \text{ маємо відповідно}$$

$$k_{1,2} = 4 \text{ і } k_{2,2} = -4. \text{ Тоді } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{8}{15} \text{ і } \varphi_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{8}{15}\right).$$

**Приклад 2.25.** Тіло вагою  $m=4$  рухається прямолінійно за законом  $x = t^2 + t + 1$ . Визначити кінетичну енергію тіла у момент часу  $t = 5$ .

**Розв'язання.**

Знайдемо швидкість  $V(t)$  у момент часу  $t = 5$ :  $V(t) = x'_t = 2t + 1$ ,  $V(5) = 11$ .

$$\text{Тоді кінетична енергія } \frac{mV^2}{2} = 4 \cdot \frac{121}{2} = 242.$$

### Задачі для самостійного розв'язання

55. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи  $y = x^3$  дорівнює 3?

56. При якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих  $y = x^2$  і  $y = x^3$  паралельні?

57. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії  $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$  у точці з абсцисою  $x = 2a$ .

58. Скласти рівняння дотичної до лінії  $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$  у точці з абсцисою  $x = 3$ .

59. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до лінії  $x = 2 \cos t$ ,  $y = \sin t$  у точці  $(1, -\sqrt{3}/2)$ .

60. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії  $x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1$ ,  $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$ , якщо  $t = \pi/4$ .

У наступних завданнях знайти кути, під якими перетинаються лінії.

61.  $y = \frac{x+1}{x+2}$  і  $y = \frac{x^2 + 4x + 8}{16}$ . 62.  $x^2 + y^2 = 8ax$  і  $y^2 = \frac{x}{2a-x}$ .

63.  $y = x^2$  і  $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \cos t \\ y = \frac{5}{4} \sin t \end{cases}$ .

64. Сторона квадрата зростає зі швидкістю  $V$ . Яка швидкість зміни периметра і площі квадрата в той момент, коли його сторона дорівнює  $a$ ?

## §5. ДИФЕРЕНЦІАЛ

### 5.1. Диференціал. Основні формули

Функція  $y = f(x)$  називається *диференційованою в точці*  $x_0$ , якщо її приріст  $\Delta y$  в цій точці може бути подано у вигляді  $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , де  $A$  – стала, не залежна від  $\Delta x$ , а  $\alpha(\Delta x)$  – нескінченно мала величина при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Необхідною і достатньою умовою диференційованості функції в точці є існування похідної функції в даній точці, при цьому правдива рівність  $A = f'(x_0)$ .

**Означення.** Диференціалом функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називається головна лінійна відносно  $\Delta x$  частина приросту функції в точці  $x_0$ , яка позначається символом  $dy$  і дорівнює:

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

Для лінійної функції  $y = x$  приріст аргументу  $\Delta x$  збігається з приростом функції  $\Delta y$  і  $dy = dx = x'\Delta x$ , тобто для незалежної змінної приріст збігається з диференціалом  $\Delta x = dx$ . Тому для диференціала функції існує також форма запису:

$$dy = y'(x)dx, \text{ або } dy = f'(x)dx.$$

З такої форми запису диференціала випливає ще одне означення похідної  $y'(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ .

### Основні формули

Користуючись формулою  $dy = f'(x)dx$  і знаючи похідні основних елементарних функцій, легко отримати їх диференціали. Маємо:

$$1. d(C) = 0, C = const$$

$$2. d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

$$3. d(a^x) = a^x \ln a dx$$

$$4. d(e^x) = e^x dx$$

$$5. d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$$

$$6. d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

$$7. d(\sin x) = \cos x dx$$

$$8. d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$9. d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$10. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$11. d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$14. d(\operatorname{arctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$15. d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx$$

$$16. d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx$$

$$17. d(thx) = \frac{dx}{ch^2 x}$$

$$18. d(cthx) = -\frac{dx}{sh^2 x}$$

### Властивості диференціала

Нехай  $f(x)$  і  $g(x)$  диференціюються. Тоді правдиві рівності:

1.  $d(cf) = c \cdot df$ ,  $C$  – стала.
2.  $d(f \pm g) = df \pm dg$ .
3.  $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$ .
4.  $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ , ( $g \neq 0$ ).

5. Нехай  $z(x) = z(y(x))$  складна функція, утворена композицією диференційованих функцій  $z = z(y)$  і  $y = y(x)$ . Тоді  $dz = z'_y \cdot dy = z'_x dx$ . Ці рівності виражають властивість інваріантності форми першого диференціала (від латинського: «invar» – незмінний).

### 5.2. Геометричний зміст диференціала

Відповідно до рис. 2.2, геометричним змістом диференціала  $dy$  функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0 \in$  *приріст ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці  $M_0(x_0, y_0)$* , якщо приріст аргументу дорівнює  $\Delta x$ .

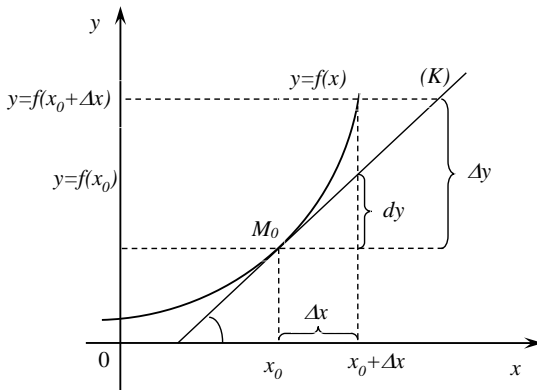


Рис. 2.2

При  $\Delta x \rightarrow 0$  значення приросту функції наближується до значення диференціала, тобто  $\Delta y \approx dy$ , і диференціал можна застосовувати для наближених обчислень значення функції в околі точки  $x_0$  за формулою:

$$y(x) = y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta y \approx y(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Крім цього, диференціал застосовується в теорії наближених обчислень для оцінки найбільшої похибки обчислення функції при заданій похибці аргументу.

Нехай величина « $x$ » визначена з точністю (абсолютною похибкою) « $\pm \Delta x$ », тобто « $x \pm \Delta x$ ». Потрібно знайти найбільшу абсолютну похибку функції  $y = f(x)$ .

У цьому випадку отримуємо: абсолютна похибка  $y = f(x)$  не перевищує за модулем  $|\Delta y| \leq |f'(x)| \cdot |\Delta x|$ , тобто справжня величина « $y$ » належить проміжку  $(y - \Delta y, y + \Delta y)$ .

**Приклад 2.26.** Знайти диференціал функції  $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$ .

**Розв'язання.**

Перепишемо функцію у вигляді  $y = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ .

Знайдемо  $y'$ :  $y' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x$ . Тоді  $dy = \operatorname{arctg} x \cdot dx$ .

Формула  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$  застосовується в наближених обчисленнях.

**Приклад 2.27.** Обчислити наближено  $\sqrt[3]{26,97}$ .

**Розв'язання.**

Для наближеного обчислення застосуємо формулу  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ .

Виберемо точку  $x_0$  і приріст  $\Delta x$  так, щоб  $\sqrt[3]{x_0}$  можна було легко обчислити, а  $\Delta x$  було мале в порівнянні з  $x_0$ . Нехай  $x_0 = 27$ ,  $\Delta x = -0,03$ . Для функції  $f(x) = y = \sqrt[3]{x}$  маємо:  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ,  $f(27) = 3$ ,

$$f'(27) = \frac{1}{27}. \text{ Тоді } \sqrt[3]{26,97} \approx \sqrt[3]{26,97} \approx 3 - \frac{0,03}{27} \approx 3 - 0,001 = 2,999.$$

### 5.3. Диференціали вищих порядків

*Диференціалом другого порядку* функції  $y = f(x)$  називається диференціал першого диференціала функції  $f(x)$ , він позначається символами  $d^2y$  або  $d^2f$  і обчислюється за виразом:

$$d^2y = d(dy) = d(y'(x)dx) = (y'(x)dx)' dx = y''(x)(dx)^2, \text{ остаточно} \\ d^2y = f''(x)dx^2.$$

Відповідно *диференціал  $n$ -ого порядку*

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Зауваження.** Диференціали 2-го і більш високих порядків складних функцій *не мають властивості інваріантності*. Наприклад, нехай  $y = f(x(t))$ , тоді диференціал 1-го порядку дорівнює  $dy = f'_x(x) \cdot x'_t(t)dt$ , диференціал 2-го порядку:

$$d^2y = (f'_x(x) \cdot x'_t(t)dt)'_t dt = f''_{xx}(x) \cdot (x'_t(t))^2 (dt)^2 + f'_{xx}(x) \cdot x''_t(t)(dt)^2.$$

#### Задачі для самостійного розв'язання

Знайти диференціал функції:

65.  $(x^2 + 4x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{x})$ .      66.  $\operatorname{tg}^2 x$ .

67.  $\sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arctg} x)^2$ .      68.  $2^{-1/\cos x}$ .

69. Виразити диференціал складної функції через незалежну змінну і її диференціал:  $Z = \operatorname{arctg} V$ ,  $V = \frac{1}{\operatorname{tg} S}$ .

Знайти диференціали таких неявно заданих функцій:

70.  $y = x + \operatorname{arctg} y$ .      71.  $\cos(xy) = x$ .

72. Знайти наближене значення приросту функції  $y = \sin x$  при зміні від  $30^\circ$  до  $30^\circ 1'$ . Чому дорівнює  $\sin 30^\circ 1'$ ?

73. Обчислити наближено: а)  $\arcsin 0,05$ ; б)  $\operatorname{arctg} 1,04$ ; в)  $\ln 1,2$ .

74. Обчислити наближено:  $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$ .

## §6. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

### 6.1. Дослідження функцій за допомогою похідних

**Теорема Ферма.** Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на проміжку  $(a, b)$  і набуває в точці  $x = c \in (a, b)$  найбільшого чи найменшого значення. Тоді якщо в точці  $x = c$  існує похідна, то вона дорівнює нулю  $f'(c) = 0$ .

*Доведення.*

Нехай функція  $y = f(x)$  досягає у точці  $x = c$  найбільшого значення. Тоді  $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ , або  $\Delta y = f(x) - f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ ,  $(c + \Delta x) \in (a, b)$ . Очевидно маємо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0, \text{ якщо } \Delta x > 0,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0, \text{ якщо } \Delta x < 0, \Delta x = x - c.$$

Переходячи до границі, знайдемо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(c) \leq 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(c) \leq 0.$$

Отже, похідна  $f'(c)$  за умовою теореми існує, тоді  $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$ , що можливо тільки в разі, коли  $f'(c) = 0$ . Аналогічно доводиться, якщо функція досягає в точці  $c$  найменшого значення.

**Геометричний зміст теореми Ферма:** якщо в точці  $x_0$  функція  $f(x)$  диференціюється і має найбільше або найменше значення, тоді в

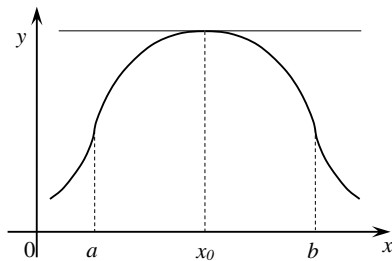


Рис. 2.3

точці  $(x_0, f(x_0))$  дотична до графіка функції  $f(x)$  паралельна осі  $Ox$  (рис. 2.3).

**Теорема Ролля.** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , диференційована на інтервалі  $(a, b)$ , а у кінцях відрізка набуває рівних значень  $f(a) = f(b)$ , то існує принаймні одна точка  $x = c$ ,

$c \in (a, b)$ , в якій  $f'(c) = 0$ .

**Доведення.**

Якщо функція неперервна на відрізку  $[a, b]$ , то вона досягає на ньому своїх найменшого  $m$  та найбільшого  $M$  значень. Якщо  $m = M$ , то функція  $f(x)$  стала та її похідна в довільній точці дорівнює нулю. Теорема в цьому випадку правдива. Нехай  $m \neq M$ . Оскільки  $f(a) = f(b)$ , тоді принаймні одне з чисел  $m$  або  $M$  відмінне від  $f(a)$ . Нехай  $M \neq f(a)$ , тобто найбільше значення досягається у внутрішній точці відрізка:  $M = f(c)$ ,  $c \in (a, b)$ . В точці  $x = c$  функція досягає найбільшого значення та існує похідна  $f'(c)$ , тоді за теоремою Ферма  $f'(c) = 0$ .

**Наслідок.** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ , диференційована на  $(a, b)$  та  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то  $f(a) \neq f(b)$ .

*Доведення* (від супротивного)

Нехай  $f(a) = f(b)$ , тоді за теоремою Ролля  $\exists c \in (a, b)$ , в якій  $f'(c) = 0$ , що суперечить умові наслідку.

**Геометричний зміст теорема Ролля:** якщо функція неперервна на відрізку  $[a, b]$ , диференційована на проміжку  $(a, b)$  і на кінцях відрізка набуває однакових значень, то графік функції має принаймні одну точку  $(c, f(c))$ , в якій дотична паралельна осі ОХ (рис. 2.4).

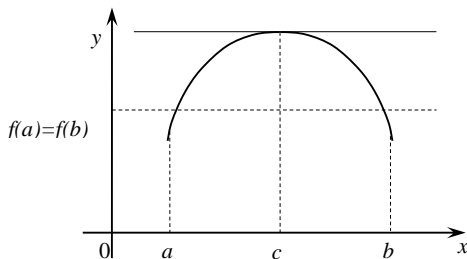


Рис. 2.4

**Приклад 2.28.** Функція  $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$  на кінцях відрізка  $[0, 4]$  набуває рівних значень  $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$ . Чи справедлива для цієї функції теорема Ролля на відрізку  $[0, 4]$ ?

**Розв'язання.**

Знайдемо  $f'(x) = \left( \sqrt[3]{(x-2)^2} \right)' = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$ . При  $x = 2$ ,

$f'(2)$  не існує. Порушено другу умову теореми Ролля, і не існує точки, в якій похідна дорівнює нулю.

**Теорема Лагранжа.** Нехай функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і диференційована на інтервалі  $(a, b)$ , тоді існує принаймні одна точка  $c \in (a, b)$ , така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Доведення.** Розглянемо на відрізку  $[a, b]$  допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Очевидно, що функція  $F(x)$  задовольняє всім вимогам теореми Ролля: неперервність на відрізку  $[a, b]$  має місце як різниця двох неперервних функцій  $f(x)$  та  $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ , функція диференційована на інтервалі  $(a, b)$ , причому  $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  і на кінцях відрізка  $F(a) = F(b) = 0$ . Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка  $c \in (a, b)$  така, що  $F'(c) = 0$ , тобто  $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ .

Звідси  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , що й потрібно було довести.

**Геометричний зміст теореми Лагранжа:** Серед усіх дотичних

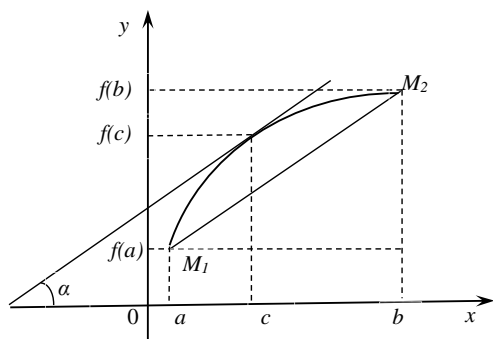


Рис. 2.5

до графіка функцій  $y = f(x)$  знайдеться принаймні одна, паралельна січній  $M_1M_2$ , яка проходить через точки  $M_1(a, f(a))$  та  $M_2(b, f(b))$ .

Величина  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  є кутовим коефіцієнтом січної  $M_1M_2$ , а  $f'(c)$  — кутовим

коефіцієнтом дотичної до графіка, проведеної в точці  $(c, f(c))$ . Ці коефіцієнти рівні між собою, отже, дотична і січна  $M_1M_2$  дійсно паралельні (рис. 2.5).

**Зауваження:**

1. Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, якщо  $f(a) = f(b)$ .

2. Рівність  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ ,  $c \in (a, b)$  називається **формулою Лагранжа** або **формулою кінцевих приростів**.

**Приклад 2.29.** Перевірити виконання умов теореми Лагранжа для функції  $f(x) = x - x^3$  на відрізку  $[-2; 1]$  і знайти відповідне проміжне значення  $c$ .

**Розв'язання.**

Функція  $f(x) = x - x^3$  неперервна та диференційована для будь-яких значень  $x$ , отже,  $f'(x) = 1 - 3x^2$ . За формулою Лагранжа маємо

$$f(1) - f(-2) = f'(c)[1 - (-2)]$$

$$0 - 6 = f'(c) \cdot 3$$

$$f'(c) = -2.$$

Отже,  $1 - 3c^2 = -2$ ; звідки  $c = \pm 1$ , інтервалу  $(-2; 1)$  належить тільки значення  $c = -1$ .

**Теорема Коші.** Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  неперервні на відрізку  $[a, b]$  і диференційовані на інтервалі  $(a, b)$ , причому  $g'(x) \neq 0$  в усіх точках  $x \in (a, b)$ . Тоді існує принаймні одна точка  $c \in (a, b)$ , така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Доведення.**

Складемо допоміжну функцію  $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ , де  $\lambda$  – деякий множник. Підберемо його так, щоб функція  $F(x)$  задовольняла умовам теореми Ролля, тобто щоб  $F(a) = F(b)$ , оскільки всі решти умови виконуються. Виконуючи останню вимогу, отримаємо  $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$ , або  $\lambda(g(a) - g(b)) = f(b) - f(a)$ . Відповідно висновку теореми Ролля  $g(a) - g(b) \neq 0$ , тому множник  $\lambda$  існує

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \lambda$ . Отже, функція  $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$  задовольняє умовам теореми Ролля, тобто  $F'(c) = 0$ , або  $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$ , звідки маємо  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , що і потрібно було довести.

**Приклад 2.30.** Перевірити справедливість формули Коші для функцій  $f(x) = x^3$  і  $\varphi(x) = x^2 + 1$  на відрізку  $[1, 2]$ .

**Розв'язання.**

Функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  неперервні та диференційовані при всіх значеннях  $x$ . Похідні цих функцій дорівнюють відповідно  $f'(x) = 3x^2$  і  $\varphi'(x) = 2x$ . На відрізку  $[1, 2]$   $\varphi'(x) \neq 0$ ;  $\varphi(1) = 2$ ,  $\varphi(2) = 5$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 8$ .

Тоді між двома значеннями  $a = 1$  і  $b = 2$  існує значення  $x = c$ , що задовольняє рівності  $\frac{f(2)-f(1)}{\varphi(2)-\varphi(1)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ , тобто

$$\frac{8-1}{5-2} = \frac{3c^2}{2c}, \quad \frac{7}{3} = \frac{3c}{2}, \quad c \neq 0, \quad c = \frac{14}{9}.$$

## 6.2. Правила Лопіталю. Розкриття невизначеностей різних видів

Розглянемо спосіб розкриття невизначеностей виду  $\frac{0}{0}$  та  $\frac{\infty}{\infty}$ , який зоснований на застосуванні похідних.

**Теорема 2.11.1. (Правило Лопіталю розкриття невизначеностей виду  $\frac{0}{0}$ ).** Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  неперервні та диференційовані в околі точки  $x_0$  і обертаються в нуль в цій точці:  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Нехай  $g'(x) \neq 0$  в околі точки  $x_0$ . Якщо існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (скінченна або нескінченна), тоді існує і границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , причому  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Доведення.**

Застосуємо до функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  теорему Коші для відрізка  $[x_0, x]$  який належить околу точки  $x_0$ . Тоді  $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , де

$c \in (x_0, x)$ . Враховуючи, що  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , отримаємо  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

Враховуючи, що при  $x \rightarrow x_0$  величина  $c$  також прямує до  $x_0$ , перейдемо

до границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

Отже, якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ , тоді і  $\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l$ . Тому  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ .

Коротко отриману формулу читають так: **границя відношення двох нескінченно малих дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує.**

**Зауваження:**

1. Теорема 2.11.1 правильна і в разі, коли функції  $f(x)$  і  $g(x)$  не визначені при  $x = x_0$ , але  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . Досить покласти  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  та  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

2. Теорема 2.11.1 правильна і в разі, коли  $x \rightarrow \infty$ . Дійсно, поклавши  $x = \frac{1}{z}$ , отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{z}\right)\right)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. Якщо похідні  $f'(x)$  і  $g'(x)$  задовольняють тим же умовам, що і функції  $f(x)$  і  $g(x)$ , тоді теорему 2.4 можна застосувати ще раз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ і т.д.}$$

**Приклад 2.31.** Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

**Приклад 2.32.** Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{-\sin x + x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{-\cos x + 1} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

Теорема дає можливість розкривати невизначеність виду  $\frac{0}{0}$ . Сформулюємо без доведення теорему про розкриття невизначеності виду  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Теорема 2.11.2 (Правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду  $\frac{\infty}{\infty}$ ).** Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  неперервні та диференційовані в околі точки  $x_0$  (крім, може бути, самої точки  $x_0$ ), в цьому околі

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty, g'(x) \neq 0$ . Якщо існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Приклад 2.33.** Обчислити  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

**Приклад 2.34.** Обчислити  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^2 5x}{5 \cos^2 3x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 10x}{1 + \cos 6x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-10 \sin 10x}{-6 \sin 6x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10 \cos 10x}{6 \cos 6x} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

### Розкриття невизначеностей різних видів

Правило Лопітала застосовується для розкриття невизначеностей виду  $\frac{0}{0}$  та  $\frac{\infty}{\infty}$ , які називають *основними*. Невизначеності виду  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  зводяться до двох основних видів шляхом тотожних перетворень.

1. Нехай  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $g(x) \rightarrow \infty$ , коли  $x \rightarrow x_0$ . Тоді виконуються такі перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \|0 \cdot \infty\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \left( \text{або } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \right).$$

**Приклад 2.35.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} = \|0 \cdot \infty\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

2. Нехай  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $g(x) \rightarrow \infty$ , коли  $x \rightarrow x_0$ . Тоді виконуються такі перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \|\infty - \infty\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)} \frac{1}{f(x)}} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

**Приклад 2.36.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \|\infty - \infty\| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - 1 + 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Нехай або  $f(x) \rightarrow 1$  і  $g(x) \rightarrow \infty$ , або  $f(x) \rightarrow \infty$  і  $g(x) \rightarrow 0$ , або  $f(x) \rightarrow 0$  і  $g(x) \rightarrow 0$ , коли  $x \rightarrow x_0$ . Для знаходження граници виду

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} \text{ зручно спочатку прологарифмувати вираз } A = f(x)^{g(x)}.$$

**Приклад 2.37.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( e^x + x \right)^{\frac{1}{x}}$ .

**Розв'язання.**

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^x + x \right)^{\frac{1}{x}} = \left\| 1^\infty \right\|$$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(e^x + x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2, \quad A = e^2.$$

Розв'язання можна оформити коротше, якщо скористатися формулою  $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}.$$

**Приклад 2.38.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \left\| 1^\infty \right\| = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos 2x} = e^A,$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{2x \cos 2x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 2x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos^2 2x} = -2.$$

Відповідь:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ .

### 6.3. Зростання та спадання функцій. Екстремуми

Одним із застосувань похідної є її використання до дослідження функції та побудови її графіка.

**Теорема (необхідна та достатня умови зростання (спадання) функції).** Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована на інтервалі  $(a, b)$ , тоді:

1) якщо функція  $y = f(x)$  зростає (спадає) на  $(a, b)$ , то на цьому інтервалі її похідна невід'ємна (неодатна), тобто якщо  $f(x) \uparrow$  ( $f(x) \downarrow$ ) для  $\forall x \in (a, b)$ , то  $f'(x) \geq 0$ , ( $f'(x) \leq 0$ ) для  $\forall x \in (a, b)$ ;

2) якщо похідна  $f'(x)$  на інтервалі  $(a, b)$  додатна (від'ємна), тоді функція  $y = f(x)$  на  $(a, b)$  зростає (спадає), тобто якщо  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) для  $\forall x \in (a, b)$ , то  $f(x) \uparrow$  ( $f(x) \downarrow$ ) для  $\forall x \in (a, b)$ .

#### Доведення.

1. *Необхідність.* Нехай  $y = f(x)$  зростає на  $(a, b)$ . Треба довести, що  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

Якщо  $f(x)$  зростає на  $(a, b)$ , тоді знак  $\Delta x$  та відповідний йому приріст  $\Delta f(x)$  збігаються.

$$\Rightarrow \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0, \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall \Delta x$$

(за умови, що  $x + \Delta x \in (a, b)$ ).

$$\text{Але тоді } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Аналогічно доводиться, що якщо  $y = f(x)$  спадає на  $(a, b)$ , тоді  $f'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

2. *Достатність.* Нехай  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . Необхідно довести, що  $f(x)$  зростає на  $(a, b)$ .

Нехай  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $x_1 < x_2$ . Розглянемо різницю  $f(x_2) - f(x_1)$ . За теоремою Лагранжа, існує точка  $c \in (x_1; x_2)$ , така, що

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Якщо  $f'(c) > 0$  і  $x_2 - x_1 > 0$ , отримаємо:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Отже,  $f(x)$  зростає на інтервалі  $(a; b)$ .

Аналогічно доводиться, якщо  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in (a; b)$ , тоді  $y = f(x)$  спадає на  $(a; b)$ .

### Екстремуми функції

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на множині  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$ ,  $x_0$  – внутрішня точка  $X$  (тобто існує деякий окіл точки  $x_0$ , який цілком знаходиться в множині  $X$ ).

Точка  $x_0$  називається **точкою максимуму функції**  $f(x)$ , якщо існує такий  $\delta$ -окіл  $U(x_0; \delta)$  точки  $x_0$ , що  $f(x) < f(x_0)$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ . Значення функції в точці максимуму називається **максимумом функції**.

Точка  $x_0$  називається **точкою мінімуму функції**  $f(x)$ , якщо існує такий  $\delta$ -окіл  $U(x_0; \delta)$  точки  $x_0$ , що  $f(x) > f(x_0)$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ . Значення функції в точці мінімуму називається **мінімумом функції**.

Точки мінімуму і максимуму функції називаються її **точками екстремуму**. Мінімуми і максимуми функції називаються її **екстремумами**.

Зауважимо, що поняття екстремуму – це локальне поняття, визначене в околі точки екстремуму. Функція може мати кінцеву кількість екстремумів, або безліч екстремумів, або зовсім не мати екстремумів на своїй області визначення.

Для знаходження екстремумів застосовують необхідні та достатні умови існування екстремумів. Необхідні умови впливають з теореми Ферма і допомагають визначити точки, в яких *може існувати екстремум* (але не обов'язкове існує).

**Необхідні умови існування екстремуму.** Якщо функція  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  має локальний екстремум і диференційована в цій точці, то похідна в  $x_0$  дорівнює нулю:  $f'(x_0) = 0$ .

Точки, в яких похідна функції  $f(x)$  дорівнює нулю, називаються **стаціонарними точками функції  $f(x)$** .

Очевидно, що не будь-яка стаціонарна точка функції є її точкою екстремуму. Наприклад, функція  $y = x^3$  має стаціонарну точку  $x_0 = 0$ , яка не є її точкою екстремуму. Для функції, диференційованої у точці  $x_0$ , правдива така теорема.

**Теорема (перша достатня умова екстремуму функції).** Нехай  $x_0$  – внутрішня точка області визначення функції  $f(x)$ ,  $f(x)$  неперервна в околі точки  $x_0$  і диференційована в деякому її околі, за винятком, можливо, самої точки  $x_0$ . Якщо при переході через точку  $x_0$  похідна функції  $f(x)$  змінює знак, тоді  $x_0$  є точкою екстремуму. При цьому, якщо похідна змінює знак з плюса на мінус, тоді  $x_0$  – точка максимуму, якщо з мінуса на плюс – тоді  $x_0$  – точка мінімуму.

**Доведення.**

Нехай, наприклад, при переході через точку  $x_0$  похідна  $f'(x)$  змінює знак з плюса на мінус.

За формулою Лагранжа для будь якої точки  $x$  з деякого околу  $U(x_0; \delta)$  точки  $x_0$  правдива рівність

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

де  $c$  – деяка точка, яка лежить між  $x$  і  $x_0$ . Використовуючи цю рівність, визначимо знак  $f(x) - f(x_0)$ . Маємо:

- 1) якщо  $x < x_0$ , тоді  $f'(c) > 0$ ,  $x - x_0 < 0$   
і  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0$ ;
- 2) якщо  $x > x_0$ , тоді  $f'(c) < 0$ ,  $x - x_0 > 0$   
і  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0$ .

Таким чином, для будь-якої точки  $x$  з деякого околу  $U(x_0; \delta)$  точки  $x_0$  виконується рівність

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

і, отже, точка  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f(x)$ .

Аналогічно доводимо, що якщо при переході через точку  $x_0$  похідна  $f'(x)$  змінює знак з мінуса на плюс, тоді точка  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f(x)$ .

**Зауваження.** З теореми випливає, що точками екстремуму можуть бути не тільки стаціонарні точки, але і точки, в яких функція не має похідної (точки розриву похідної), але функція існує. Такі точки називають точками *гострого екстремуму*.

**Друге формулювання необхідних умов існування екстремуму.** Якщо функція  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  має локальний екстремум, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Стаціонарні точки функції  $f(x)$  і точки, в яких похідна функції  $f(x)$  не існує, називаються **критичними точками I роду (критичними точками за першою похідною)**.

Критична точка може бути точкою екстремуму, а може і не бути. Але ні в якій іншій точці, окрім критичної, екстремум не може існувати. Таким чином, необхідні умови дозволяють знайти точки, «підозрілі на екстремум», а потім за допомогою достатніх умов з'ясувати, є в цих точках екстремуми або нема.

**Приклад 2.39.** Знайти екстремуми функції  $y = x^2 \cdot e^{-x}$ .

**Розв'язання.**

1) Знайдемо область визначення функції:

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

2) Знайдемо похідну функції та її критичні точки:

$$y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = (2x - x^2) \cdot e^{-x};$$

$$y' = 0: 2x - x^2 = 0, \Rightarrow x = 0, x = 2;$$

$y' \neq 0$ : таких точок немає.

3) Визначаємо знак  $y'$  (рис. 2.6):



Рис. 2.6

Таким чином,

$$\begin{aligned}x &= 0 - \text{точка мінімуму функції } y = x^2 \cdot e^{-x}, \\x &= 2 - \text{точка максимуму функції } y = x^2 \cdot e^{-x}, \\y_{\min} &= y(0) = 0, \quad y_{\max} = y(2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0,54.\end{aligned}$$

Якщо функція  $f(x)$   $n$  разів диференційована у критичній точці  $x_0$ , тоді правдива така теорема.

**Теорема (друга достатня умова екстремуму функції).** Нехай  $x_0$  – внутрішня точка області визначення функції  $f(x)$ , і  $f(x)$   $n$  разів диференційована в точці  $x_0$ , причому

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тоді:

- 1) якщо  $n$  – парне і  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , тоді  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f(x)$ ;
- 2) якщо  $n$  – парне і  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , тоді  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f(x)$ ;
- 3) якщо  $n$  – непарне, тоді  $x_0$  не є точкою екстремуму функції  $f(x)$ .

#### 6.4. Найбільше та найменше значення функції

Відомо, що функція  $f(x)$ , неперервна в замкнутому проміжку  $[a, b]$ , досягає в цьому проміжку найбільшого та найменшого значень. Цих значень функція може набути або во внутрішній точці  $x_0$  відрізка  $[a, b]$ , або на границі відрізка, тобто при  $x_0 = a$  або  $x_0 = b$ . Якщо  $x_0 \in [a, b]$ , тоді точку  $x_0$  треба знаходити серед критичних точок даної функції.

Отримаємо таке правило знаходження найбільшого та найменшого значень функції на  $[a, b]$ :

- 1) знайти критичні точки функції на інтервалі  $(a, b)$ ;
- 2) обчислити значення функції в критичних точках;

3) обчислити значення функції на кінцях відрізка, тобто в точках  $x = a$  та  $x = b$ ;

4) серед усіх знайдених значень функції на кінцях відрізка обрати найбільше та найменше.

**Зауваження:**

1. Якщо функція  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  має лише одну критичну точку і вона є точкою максимуму (мінімуму), тоді в цій точці функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

2. Якщо функція  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  не має критичних точок, тоді це означає, що на ньому функція монотонно зростає або спадає. Отже, свого найбільшого значення ( $M$ ) функція набуває на одному кінці на відрізку, а найменше ( $m$ ) – на другому.

**Приклад 2.40.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$  на відрізку  $[-1, 1]$ .

**Розв'язання.**

1. Знайдемо стаціонарні точки функції, які належать відрізку  $[-1, 1]$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 3;$$

$$f'(x) = 0; \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6},$$

тобто  $x_1 = 3 \notin [-1, 1]$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3} \in [-1, 1]$ .

Отже, маємо єдину стаціонарну точку, яка належить відрізку  $[-1, 1]$  –  $x = -\frac{1}{3}$ .

2. Обчислимо значення функції в точці  $x = -\frac{1}{3}$ :

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + 1 + 1 = \frac{41}{27}.$$

3. Знайдемо значення функції на кінцях відрізка  $x = -1$  та  $x = 1$ :

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 3(-1) + 1 = -1 - 4 + 3 + 1 = -1;$$

$$f(1) = (1)^3 - 4(1)^2 - 3(1) + 1 = 1 - 4 - 3 + 1 = -5.$$

4. Серед отриманих значень функції обрати найбільше та найменше значення:

$$y_{\text{найбільше}} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{41}{27}; \quad y_{\text{найменше}} = y(1) = -5.$$

Обчислення найбільшого і найменшого значень функції широко застосовується при розв'язанні практичних задач математики, фізики, хімії, економіки та інших.

Розглянемо одну з таких задач.

**Приклад 2.41.** З квадратного листа бляхи зі стороною  $a$ , вирізаючи по кутах рівні квадрати і згинаючи края, скласти коробку найбільшої місткості.

**Розв'язання.**

Позначимо сторону вирізуваного квадрата через  $x$ , тоді об'єм  $v(x)$  коробки буде виражатися за формулою:  $v(x) = x(a - 2x)^2$ , де  $x$  змінюється в проміжку  $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ . Таким чином, задача зводиться до обчислення найбільшого значення функції  $v(x) = x(a - 2x)^2$  в проміжку  $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ .

Знайдемо критичні точки  $v(x)$ , які належать проміжку  $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ :

$v'(x) = (a - 2x)^2 + x2(a - 2x)(-2) = (a - 2x)(a - 2x - 4x) = (a - 2x)(a - 6x)$ ,

звідки робимо висновок, що єдиною критичною точкою між  $0$  і  $\frac{a}{2}$  є стаціонарна точка  $x = \frac{a}{6}$  (ми її отримуємо, прирівнюючи похідну до нуля).

Знайдемо тепер значення  $v(x)$  на кінцях проміжку та в критичній точці. Маємо:  $v(0) = 0$ ,  $v\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ ,  $v\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6}\left(a - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a}{6} \cdot \frac{4a^2}{9} = \frac{2}{27}a^3$ .

Отже, найбільшого значення функція досягає при  $x = \frac{a}{6}$ . Також

можна було б переконатися, що  $x = \frac{a}{6}$  є точкою максимуму функції.

### 6.5. Умови опуклості й угнутості функції

Графік функції  $y = f(x)$  називають *опуклим (угнутим) у точці*  $x_0$ , якщо існує такий  $\delta$ -окіл  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  цієї точки, що при всіх  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ( $x \neq x_0$ ) графік функції  $f(x)$  розташований нижче (вище) від дотичної до графіка в точці  $(x_0, f(x_0))$  (рис. 2.7 а,б). Іноді опуклий графік називають опуклим уверх, а угнутий – опуклим униз.

Точка графіка неперервної функції  $y = f(x)$ , що відокремлює його частини різної опуклості, називається *точкою перегину*.

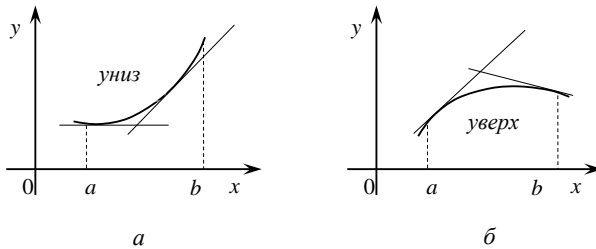


Рис. 2.7

#### Теорема 2.6 (достатні умови опуклості й угнутості функції).

Нехай функція  $y = f(x)$  має в точці  $x_0$  неперервну другу похідну  $f''(x)$ . Тоді, якщо  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ), то графік функції є угнутим (опуклим) у точці  $x_0$ .

#### Доведення.

Нехай  $f''(x_0) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Візьмемо на графіку функції довільну точку  $M$  з абсцисою  $x_0 \in (a, b)$  та проведемо дотичну через  $M$ . Покажемо що графік функції знаходиться нижче цієї дотичної. Для цього порівняємо у точці  $x \in (a, b)$  ординату  $y$  кривої  $y = f(x)$  з ординатою  $y_{\text{дот}}$  її дотичної. Рівняння дотичної:

$$y_{\text{дом}} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

тобто  $y_{\text{дом}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

$$\text{Тоді } y - y_{\text{дом}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

За теоремою Лагранжа,  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ ,

де  $c$  знаходиться між  $x_0$  та  $x$ . Тому

$$y - y_{\text{дом}} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \text{ тобто}$$

$$y - y_{\text{дом}} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Різницю  $f'(c) - f'(x_0)$  знову перетворимо за формулою Лагранжа:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0), \text{ де } c_1 \text{ знаходиться між } x_0 \text{ та } c. \text{ Та-$$

ким чином, отримаємо  $y - y_{\text{дом}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$ .

Дослідимо цю рівність:

1) якщо  $x < x_0$ ,  $x - x_0 < 0$ ,  $c - x_0 < 0$  та  $f''(c_1) < 0$ . Отже,  $y - y_{\text{дом}} < 0$ , тобто  $y < y_{\text{дом}}$ ;

2) якщо  $x > x_0$ ,  $x - x_0 > 0$ ,  $c - x_0 > 0$  та  $f''(c_1) > 0$ . Отже,  $y - y_{\text{дом}} < 0$ , тобто  $y < y_{\text{дом}}$ .

Отже, доведено, що у всіх точках інтервалу ордината дотичної більше ординати графіка, тобто графік функції опуклий. Аналогічно доводиться, що при  $f''(x) > 0$  графік угнутий.

Також, як і для пошуку екстремальних точок, існують необхідні умови, за допомогою яких визначаються точки, в яких може бути перегин графіка функції. Ці точки називають критичними точками другого роду.

**Необхідні умови існування точок перегину графіка функції.**

Якщо графік функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  має перегин, то друга похідна функції в цій точці дорівнює нулю або не існує.

У критичних точках другого роду перегин графіка може бути, а може не бути. Але ні в яких інших точках, відмінних від критичних 2-го роду, перегину графіка бути не може. Щоб установити, чи є критична точка точкою перегину, застосовують достатні умови.

**Теорема 2.7 (достатня умова існування точки перегину графіка функції).** Якщо друга похідна  $f''(x)$  при переході через точку  $x_0$ , в якій вона рівна нулю або не існує, змінює знак, тоді точка графіка з абс-

цисою  $x_0$  є точкою перегину.

**Доведення.**

Нехай  $f''(x_0) < 0$  при  $x < x_0$  і  $f''(x_0) > 0$  при  $x > x_0$ . Це означає, що зліва від  $x = x_0$  графік опуклий, а справа – угнутий. Отже, точка  $(x_0, f(x_0))$  графіка функції є точкою перегину.

Аналогічно доводимо, якщо  $f''(x_0) > 0$  при  $x < x_0$  і  $f''(x_0) < 0$  при  $x > x_0$ , тоді точка  $(x_0, f(x_0))$  – точка перегину графіка функції  $y = f(x)$ .

**Приклад 2.42.** Знайти інтервали опуклості (угнутості) графіка функції  $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1$ .

**Розв'язання.**

Знайдемо другу похідну функції:

$$y' = \frac{x^2}{2} - 2x + 3; \quad y'' = x - 2.$$

Знаходимо точки, в яких друга похідна дорівнює нулю, для цього розв'яжемо рівняння  $y''(x) = 0$ :

$$y'' = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

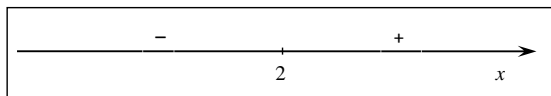


Рис. 2.8

На проміжку  $(-\infty; 2)$  друга похідна  $y''(x) < 0$ , тоді на цьому проміжку функція опукла; з огляду на те, що на проміжку  $(2; +\infty)$  друга похідна  $y''(x) > 0$  – функція угнута. Оскільки при переході через точку друга похідна змінює знак (рис. 2.8), тоді ця точка є точкою перегину графіка функції.

## 6.6. Асимптоти

*Асимптотою* кривої називається пряма, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує до нуля при необмеженому віддаленні від початку координат цієї точки до кривої.

Асимптота може бути *вертикальною, похилою (частковим випадком похилої асимптоти є горизонтальна асимптота)*.

Пряма  $x = a$  є *вертикальною асимптотою* графіка функції  $y = f(x)$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ , або  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , або  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . Вертикальні асимптоти можуть існувати в точках розриву функції, тобто в точках, в яких функція не існує. Для визначення цих асимптот обчислюємо односторонні границі точок розриву функції.

Наприклад, крива  $y = \frac{3}{x+4}$  має вертикальну асимптоту  $x = -4$ , тому що  $\lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{3}{x+4} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{3}{x+4} = +\infty$ .

### Обчислення похилих асимптот

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b.$$

Знайдемо  $k$  і  $b$ .

Нехай  $M(x, y)$  – довільна точка кривої  $y = f(x)$ . За формулою відстані від точки до прямої  $\left( d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$  знаходимо відстань від точки  $M(x, y)$  до прямої  $d = \frac{|kx - y + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ .

Умова  $d \rightarrow 0$  буде виконуватися лише тоді, коли чисельник дробу прямує до нуля, тобто  $\lim_{x \rightarrow \infty} (kx - y + b) = 0$ .

Звідси випливає, що  $kx - y + b = \alpha$ , де  $\alpha = \alpha(x)$  нескінченно мала:  $\alpha \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Розділимо обидві частини рівності  $y = b + kx - \alpha$  на  $x$ , переходячи до границі при  $x \rightarrow \infty$ , отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x} \right).$$

Оскільки  $\frac{b}{x} \rightarrow 0$  і  $\frac{\alpha}{x} \rightarrow 0$ , тоді  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ .

З умови знаходимо  $b$ :  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$ .

Таким чином, параметри *похилої асимптоти*  $y = kx + b$  обчислюються як границі  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$ .

Якщо хоча б одна з границь не існує або дорівнює нескінченності, тоді крива похилої асимптоти немає.

Зокрема, якщо  $k = 0$ , тоді  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Маємо  $y = b$  – *рівняння горизонтальної асимптоти*.

**Зауваження.** Асимптоти графіка функції  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  і  $x \rightarrow -\infty$  можуть бути різними. Тому при знаходженні границь слід окремо розглядати випадок, коли  $x \rightarrow +\infty$  і коли  $x \rightarrow -\infty$ .

**Приклад 2.43.** Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x}$ .

**Розв'язання.**

$$D(y) : (-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x} = \infty; \quad x = 0 \text{ – вертикальна асимптота;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left( 2x + 3 - \frac{4}{x} \right) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left( 2x + 3 - \frac{4}{x} \right) = -\infty;$$

$$y = kx + b; \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2} = 2;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3x - 4}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4 - 2x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{x} = 3;$$

$y = 2x + 3$  – похила асимптота.

## 6.7. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка

При дослідженні графіка функції в цілому рекомендується схема:

1. Знайти область визначення функції  $D(y)$ .
2. Перевірити функцію на парність і непарність.

3. Знайти точки перетину з осями координат (якщо це можливо).
4. Дослідити точки розриву, встановити наявність вертикальних та похилих або горизонтальних асимптот, записати їх рівняння.
5. Знайти похідну, критичні точки, проміжки монотонності та екстремуми функції.
6. Знайти другу похідну, її критичні точки, проміжки опуклості й угнутості та точки перетину графіка функції.
7. Побудувати графік функції, враховуючи проведене дослідження.

**Приклад 2.44.** Дослідити функцію  $y = \frac{x^2}{x+1}$  і побудувати її гра-

фік.

**Розв'язання.**

1.  $D(y): x \in R/\{-1\}$ .

2.  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x+1} = -\frac{x^2}{x-1}$  функція ні парна, ні непарна.

3.  $\frac{x^2}{x+1} = 0; x = 0; (0;0)$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{x+1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2}{x+1} = +\infty; x = -1$  точка розриву функції

2-го роду,  $x = -1$  – вертикальна асимптота (рис. 2.9).

$$y = kx + b; k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = -1.$$

$y = x - 1$  – похила асимптота (рис. 2.9).

5.  $y' = \left( \frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; y' = 0; \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0;$

$$x^2 + 2x = 0; x_1 = 0; x_2 = -2.$$

$y(x)$	$y(x) \uparrow$	$y_{\max} = -4$	$y(x) \downarrow$	$\exists y(x)$	$y(x) \downarrow$	$y_{\min} = 0$	$y(x) \uparrow$
$y'(x)$	$y'(x) > 0$	$y'(x) = 0$	$y'(x) < 0$	$\exists y'(x)$	$y'(x) < 0$	$y'(x) = 0$	$y'(x) > 0$
$x$	$(-\infty; -2)$	$x_{\max} = -2$	$(-2; -1)$	$x \neq -1$	$(-1; 0)$	$x_{\min} = 0$	$(0; +\infty)$

$$6. y'' = \left( \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x+1)((x^2 + 2x) + 1 - x^2 - 2x)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}; y'' = 0; \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0$$

Опуклість графіка	∩ вгору	розрив	∪ униз
$y''(x)$	$y''(x) < 0$	$\exists y''(x)$	$y''(x) > 0$
$x$	$(-\infty; -1)$	$x \neq -1$	$(-1; +\infty)$

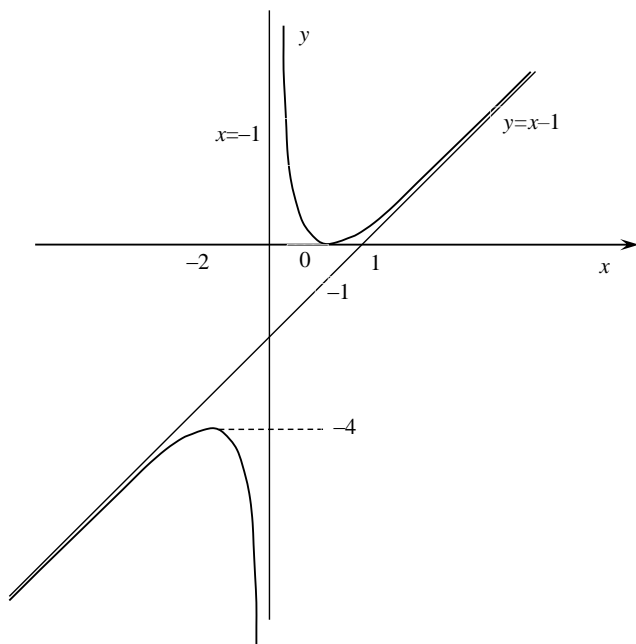


Рис. 2.9

## §7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

### 7.1. Формула Тейлора

Розглянемо одну з найважливіших формул диференціального числення, яка широко застосовується при дослідженні функцій і наближених обчислень.

Нехай функція  $y = f(x)$  є многочлен  $P_n(x)$  степеня  $n$ :

$$y = f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Перетворимо цей многочлен також в многочлен степеня  $n$  щодо різниці  $(x - x_0)$ , де  $x_0$  – довільне число, тобто подамо  $P_n(x)$  у вигляді

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n. \quad (2.1)$$

Для знаходження коефіцієнтів  $A_0, A_1, \dots, A_n$  продиференціюємо  $n$  разів рівність (2.1):

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P'''_n(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)A_n(x - x_0)^{n-3},$$

$$\dots \dots \dots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1A_n.$$

Підставляючи  $x = x_0$  в отримані рівності і рівність (2.1), маємо:

$$P_n(x_0) = A_0, \quad \text{тобто } A_0 = P_n(x_0),$$

$$P'_n(x_0) = A_1, \quad \text{тобто } A_1 = \frac{P'_n(x_0)}{1!},$$

$$P''_n(x_0) = 2A_2, \quad \text{тобто } A_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2!},$$

$$P'''_n(x_0) = 2 \cdot 3A_3, \quad \text{тобто } A_3 = \frac{P'''_n(x_0)}{3!},$$

$$\dots \dots \dots$$
$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1A_n, \quad \text{тобто } A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Підставляючи знайдені значення  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в рівність (2.1), отримаємо розкладання многочлена  $P_n(x)$   $n$ -го степеня за степенями  $(x - x_0)$ :

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (2.2)$$

**Означення.** Формула (2.2) називається *формулою Тейлора* для многочлена  $P_n(x)$  степеня  $n$ .

**Приклад 2.45.** Розкласти многочлен  $P(x) = -3x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x + 5$  за степенями  $(x+1)$ .

**Розв'язання.**

У цьому прикладі  $x_0 = -1$ , знайдемо похідні

$$P'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 2x - 2, \quad P''(x_0) = -36x^2 + 24x + 2,$$

$$P'''(x) = -72x + 24, \quad P^{(4)}(x) = -72.$$

Тому  $P(-1) = -3 - 4 + 1 + 2 + 5 = 1$ ,  $P'(-1) = 12 + 12 - 2 - 2 = 20$ ,

$$P''(-1) = -36 - 24 + 2 = -58, \quad P'''(-1) = 72 + 24 = 96, \quad P^{(4)}(-1) = -72.$$

Отже,

$$P(x) = 1 + \frac{20}{1!}(x+1) + \frac{-58}{2!}(x+1)^2 + \frac{96}{3!}(x+1)^3 + \frac{-72}{4!}(x+1)^4,$$

тобто

$$-3x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x + 5 = 1 + 20(x+1) - 29(x+1)^2 + 16(x+1)^3 - 3(x+1)^4.$$

## 7.2. Формула Тейлора для довільної функції

Розглянемо функцію  $y = f(x)$ . Формула Тейлора дозволяє, при певних умовах, наближено подати функцію  $f(x)$  у вигляді многочлена і дати оцінку похибки цього наближення.

**Теорема 2.8.** Якщо функція  $f(x)$  визначена в деякому околі точки  $x_0$  і має в ній похідні до  $(n+1)$ -го порядку включно, тоді для будь-якого  $x$  з цього околу знайдеться точка  $c \in (x_0; x)$  така, що правдива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (c = x_0 + \theta(x-x_0), 0 < \theta < 1). \quad (2.3)$$

**Означення.** Формула (2.3) називається формулою Тейлора для функції  $f(x)$ . Цю формулу можна записати у вигляді

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

$$\text{де } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

називається **многочленом Тейлора**, а  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  називається **залишковим членом формули Тейлора**, який записано у формі Лагранжа.

$R_n(x)$  є похибка наближеної рівності  $f(x) \approx P_n(x)$ . Таким чином, формула Тейлора дає можливість замінити функцію  $y = f(x)$  многочленом  $y = P_n(x)$  з відповідним степенем точності, яка дорівнює значенню залишкового члена  $R_n(x)$ .

**Означення.** Коли  $x_0 = 0$ , отримаємо окремий випадок формули Тейлора – **формулу Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де  $c$  знаходиться між 0 та  $x$  ( $c = \theta \cdot x, 0 < \theta < 1$ ).

Наведемо розкладання за формулою Маклорена деяких елементарних функцій:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

де  $o(x^n)$  - це оцінка похибки у формі Пеано, тобто похибка є малою більшого порядку малості, ніж  $x^n$ .

**Приклад розв'язання контрольного завдання до розділу 2**

**Завдання 1.** Знайти похідну складної функції

**1.1.**  $y = \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{3+x^3}}$ ;  $y'(1) = ?$

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{3+x^3}} \right)' = \left\| \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right\| = \\ &= \frac{\left( \sqrt{2+x^2} \right)' \cdot \sqrt[3]{3+x^3} - \sqrt{2+x^2} \cdot \left( \sqrt[3]{3+x^3} \right)'}{\left( \sqrt[3]{3+x^3} \right)^2} = \\ &= \left\| \left( \sqrt{2+x^2} \right)' = \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \right\| = \\ &= \left\| \left( \sqrt[3]{3+x^3} \right)' = \frac{3x^2}{3(3+x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^2}{(3+x^3)^{\frac{2}{3}}} \right\| = \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cdot \sqrt[3]{3+x^3} - \sqrt{2+x^2} \cdot \frac{x^2}{(3+x^3)^{\frac{2}{3}}}}{\left( \sqrt[3]{3+x^3} \right)^2} = \\ &= \frac{x \cdot \sqrt[3]{3+x^3} (3+x^3)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{2+x^2} \sqrt{2+x^2} \cdot x^2}{\sqrt{2+x^2} \left( \sqrt[3]{3+x^3} \right)^4} = \\ &= \frac{x \cdot (3+x^3) - (2+x^2) \cdot x^2}{\sqrt{2+x^2} \left( \sqrt[3]{3+x^3} \right)^4} = \frac{3x + x^4 - 2x^2 - x^4}{\sqrt{2+x^2} \left( \sqrt[3]{3+x^3} \right)^4} = \frac{3x - 2x^2}{\sqrt[3]{3+x^3} \sqrt{2+x^2} (3+x^3)}. \\ y'(1) &= \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2}{\sqrt[3]{3+1^3} \sqrt{2+1^2} (3+1^3)} = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$1.2. y = x \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$y' = \left(x \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \left\| \begin{array}{l} (uv)' = u'v + uv' \\ (\sin z)' = \cos z \cdot z' \\ z' = \left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)' = \frac{1}{x} \end{array} \right\| = =$$

$$= x' \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x \left(\sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{x} =$$

$$= \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$1.3. y = 2^{\arcsin^2 3x}.$$

$$y' = \left(2^{\arcsin^2 3x}\right)' = \left\| \begin{array}{l} (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \\ (u^n)' = nu^{n-1}u' \\ (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \end{array} \right\| =$$

$$= 2^{\arcsin^2 3x} \ln 2 \cdot 2 \arcsin 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 = \frac{6 \cdot 2^{\arcsin^2 3x} \ln 2 \cdot \arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

$$1.4. y = 2x \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}.$$

$$y' = \left(2x \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}\right)' = \left\| \begin{array}{l} (uv)' = u'v + uv' \\ (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \\ (u^n)' = nu^{n-1}u' \\ (\sin u)' = \cos u \cdot u' \end{array} \right\| = 2x' \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x} +$$

$$+ 2x (\operatorname{arctg} \sqrt{\sin x})' = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x} + 2x \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x} + \frac{x \cos x}{(1 + \sin x) \sqrt{\sin x}}.$$

$$\mathbf{1.5.} \quad y = \frac{1}{3} \ln \cos \frac{x-1}{x}.$$

$$y' = \left( \frac{1}{3} \ln \cos \frac{x-1}{x} \right)' = \left\| \begin{array}{l} (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot u' \\ (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \\ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x-1}{x}} \left( -\sin \frac{x-1}{x} \right) \cdot \frac{(x-1)'x - (x-1)x'}{x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{x-1}{x} \left( \frac{x-x+1}{x^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{3x^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x-1}{x}$$

$$\mathbf{1.6.} \quad y = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^4 \left( \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right)$$

$$y' = \left( \frac{2}{3} \operatorname{tg}^4 \left( \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right) \right)' = \left\| \begin{array}{l} (u^n)' = nu^{n-1}u' \\ (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{2}{3} 4 \operatorname{tg}^3 \left( \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right)} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{20}{9} \operatorname{tg}^3 \left( \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right) \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\mathbf{1.7.} \quad y = \left( \frac{1}{2} - x \right) \arccos \sqrt{x}$$

$$y' = \left( \left( \frac{1}{2} - x \right) \arccos \sqrt{x} \right)' = \left\| \begin{array}{l} (uv)' = u'v + uv' \\ (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \\ (u^n)' = nu^{n-1}u' \end{array} \right\| =$$

$$= \left( \frac{1}{2} - x \right)' \arccos \sqrt{x} + \left( \frac{1}{2} - x \right) (\arccos \sqrt{x})' =$$

$$= -\arccos \sqrt{x} + \left( \frac{1}{2} - x \right) \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\mathbf{1.8.} \quad y = 10^{5 \log_2 3x}$$

$$y' = \left( 10^{5 \log_2 3x} \right)' = \left\| \begin{array}{l} (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \\ (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \end{array} \right\| = 10^{5 \log_2 3x} \cdot \ln 10 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3x \ln 2} \cdot 3 =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^{5 \log_2 3x} \cdot \ln 10}{x \ln 2}.$$

$$\mathbf{1.9.} \quad y = \frac{3}{e^{\operatorname{arctg} 2x}} = 3 \cdot e^{-\operatorname{arctg} 2x}$$

$$y' = \left( 3 \cdot e^{-\operatorname{arctg} 2x} \right)' = \left\| \begin{array}{l} (e^u)' = e^u \cdot u' \\ (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \end{array} \right\| = 3 \cdot e^{-\operatorname{arctg} 2x} \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 =$$

$$= \frac{6}{(1+4x^2)e^{\operatorname{arctg} 2x}}$$

$$\mathbf{1.10.} \quad y = \sqrt{\operatorname{ctg} 4x} \cdot a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \left( \sqrt{\operatorname{ctg} 4x} \cdot a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} \right)' = \left\| \begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ (\operatorname{ctg} u)' &= -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u' \\ (a^u)' &= a^u \ln a \cdot u' \end{aligned} \right\| = \\
&= \left( \sqrt{\operatorname{ctg} 4x} \right)' \cdot a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} + \sqrt{\operatorname{ctg} 4x} \cdot \left( a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} \right)' = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 4x} \right) \cdot 4 \cdot a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} + \sqrt{\operatorname{ctg} 4x} \cdot a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} \cdot \frac{\ln a}{2\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 4x} \right) \cdot 4 = \\
&= -\frac{2a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}}{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x} \sin^2 4x} - \frac{2a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} \cdot \ln a}{\sin^2 4x} = -\frac{2a^{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}}{\sin^2 4x} \left( \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}} + \ln a \right).
\end{aligned}$$

**1.11.**  $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{2x}}.$

$$\begin{aligned}
y' &= \left( \sqrt[3]{x + \sqrt{2x}} \right)' = \left\| (u^n)' = nu^{n-1}u' \right\| = \frac{1}{3}(x + \sqrt{2x})^{-\frac{2}{3}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 \right) = \\
&= \frac{1 + \sqrt{2x}}{3\sqrt[3]{(x + \sqrt{2x})^2} \sqrt{2x}}.
\end{aligned}$$

**1.12.**  $y = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5).$

$$\begin{aligned}
y' &= \left( \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5) \right)' = \left\| \begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ (u^n)' &= nu^{n-1}u' \\ (\cos u)' &= -\sin u \cdot u' \end{aligned} \right\| = \\
&= \frac{1}{15} \left( (\cos^3 x)' (3 \cos^2 x - 5) + \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)' \right) = \\
&= \frac{1}{15} \left( 3 \cos^2 x (-\sin x) (3 \cos^2 x - 5) + \cos^3 x \cdot 6 \cos x (-\sin x) \right) = \\
&= -\frac{3}{15} \cos^2 x \sin x (3 \cos^2 x - 5 + 2 \cos^2 x) = -\cos^2 x \sin x (\cos^2 x - 1) = \cos^2 x \sin^3 x.
\end{aligned}$$

$$1.13. y = x^4(a - 2x^3)^2$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^4(a - 2x^3)^2\right)' = \left\| \begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ (u^n)' &= nu^{n-1}u' \end{aligned} \right\| = (x^4)'(a - 2x^3)^2 + x^4((a - 2x^3)^2)' = \\ &= 4x^3(a - 2x^3)^2 + x^4 \cdot 2(a - 2x^3)(-6x^2) = 4x^3(a - 2x^3)((a - 2x^3) - 3x^3) = \\ &= 4x^3(a - 2x^3)(a - 5x^3) \end{aligned}$$

$$1.14. y = \frac{10}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 \frac{3}{x}}} = 10 \operatorname{tg}^{-\frac{3}{4}} \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(10 \operatorname{tg}^{-\frac{3}{4}} \frac{3}{x}\right)' = \left\| \begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ (\operatorname{tg} u)' &= \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \end{aligned} \right\| = 10 \left(-\frac{3}{4} \operatorname{tg}^{-\frac{7}{4}} \frac{3}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{3}{x}} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) = \\ &= \frac{45}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^{\frac{7}{4}} \frac{3}{x} \cdot \cos^2 \frac{3}{x} \cdot x^2} \end{aligned}$$

$$1.15. y = \frac{1}{\sqrt{6}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}x}\right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}x}\right)\right)' = \left\| (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \right\| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{a}x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{b}{a}x}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{6}\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{b}{a}x}} \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

$$1.16. y = \arcsin 3x \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x}$$

$$y' = \left( \arcsin 3x \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x} \right) = \left\| \begin{array}{l} (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw' \\ (\arcsin a)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \\ (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \\ (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x} + \arcsin 3x \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot 5^{-x} + \arcsin 3x \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x} \ln 5 \cdot (-1)$$

**Завдання 2.** Знайти  $\frac{dy}{dx}$ .

**Розв'язання.**

2.1.  $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{3^x}$

$$\ln y = \ln(\operatorname{ctg} 3x)^{3^x}$$

$$\ln y = 3^x \ln(\operatorname{ctg} 3x)$$

$$\frac{1}{y} y' = (3^x)' \ln(\operatorname{ctg} 3x) + 3^x (\ln(\operatorname{ctg} 3x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = 3^x \ln 3 \ln(\operatorname{ctg} 3x) + 3^x \frac{1}{\operatorname{ctg} 3x} \left( -\frac{1}{\sin^2 3x} \right) \cdot 3$$

$$y' = \left( 3^x \ln 3 \ln(\operatorname{ctg} 3x) - \frac{3^{x+1}}{\operatorname{cos} 3x \sin 3x} \right) y$$

$$y' = \left( 3^x \ln 3 \ln(\operatorname{ctg} 3x) - \frac{3^{x+1}}{\operatorname{cos} 3x \sin 3x} \right) (\operatorname{ctg} 3x)^{3^x}$$

2.2.  $y = \frac{\sqrt[3]{(4-x)^2} \cdot (3x^2 + 5)^4}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}$

$$\ln y = \ln \left( \frac{\sqrt[3]{(4-x)^2} \cdot (3x^2 + 5)^4}{\sqrt[5]{(1+x)^2}} \right)$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{(4-x)^2} + \ln(3x^2 + 5)^4 - \ln \sqrt[5]{(1+x)^2}$$

$$\ln y = \frac{2}{3} \ln(4-x) + 4 \ln(3x^2 + 5) - \frac{2}{5} \ln(1+x)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4-x} (-1) + \frac{4 \cdot 6x}{3x^2 + 5} - \frac{2}{5(1+x)}$$

$$y' = \left( \frac{-2}{3(4-x)} + \frac{24x}{3x^2 + 5} - \frac{2}{5(1+x)} \right) y$$

$$y' = \left( \frac{-2}{3(4-x)} + \frac{24x}{3x^2 + 5} - \frac{2}{5(1+x)} \right) \frac{\sqrt[3]{(4-x)^2} \cdot (3x^2 + 5)^4}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}$$

2.3.  $x^5 - 3x^3y^2 + 2y^5 - 5x^2 + 10xy - 90 = 0$

$$5x^4 - 3(3x^2y^2 + x^3 \cdot 2yy') + 10y^4 y' - 10x + 10y + 10xy' = 0$$

$$5x^4 - 9x^2y^2 - 6x^3yy' + 10y^4 y' - 10x + 10y + 10xy' = 0$$

$$y'(-6x^3y + 10y^4 + 10x) = 9x^2y^2 + 10x - 10y - 5x^4$$

$$y' = \frac{9x^2y^2 + 10x - 10y - 5x^4}{-6x^3y + 10y^4 + 10x}$$

2.4. 
$$\begin{cases} x = \ln \frac{1-t}{1+t} \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$x'_t = \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{(1-t)'(1+t) - (1-t)(1+t)'}{(1+t)^2} = \frac{-1(1+t) - 1+t}{(1-t)(1+t)} =$$

$$= \frac{-1-t-1+t}{1-t^2} = \frac{-2}{1-t^2}$$

$$y'_t = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} (-2t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{-2}{1-t^2}} = \frac{t(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}$$

**Завдання 3.** Показати, що функція  $y = x\sqrt{1-x^2}$  задовольняє рівнянню  $yy' = x - 2x^3$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned}
 y' &= \left( x\sqrt{1-x^2} \right)' = x'\sqrt{1-x^2} + x \left( \sqrt{1-x^2} \right)' = \sqrt{1-x^2} + x \left( \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) = \\
 &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

Підставимо  $y$  і  $y'$  у рівняння:

$$x\sqrt{1-x^2} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x-2x^3,$$

маємо  $x-2x^3 = x-2x^3$ , тобто показано, що функція задовольняє рівнянню.

**Завдання 4.** Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

**Розв'язання.**

**а)**  $y = e^{-x}(\cos 2x - 6\sin 2x),$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= -e^{-x}(\cos 2x - 6\sin 2x) + e^{-x}(-2\sin 2x - 12\cos 2x) = \\
 &= e^{-x}(-\cos 2x + 6\sin 2x - 2\sin 2x - 12\cos 2x) = e^{-x}(4\sin 2x - 13\cos 2x). \\
 \frac{d^2y}{dx^2} &= -e^{-x}(4\sin 2x - 13\cos 2x) + e^{-x}(26\sin 2x + 8\cos 2x) = \\
 &= e^{-x}(13\cos 2x - 4\sin 2x + 26\sin 2x + 8\cos 2x) = e^{-x}(22\sin 2x + 21\cos 2x).
 \end{aligned}$$

**б)**  $\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$

$$x'_t = -2\cos t \sin t = -\sin 2t,$$

$$y'_t = 2\operatorname{tg} t \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\operatorname{tg} t \frac{1}{\cos^2 t}}{-2\cos t \sin t} = \frac{\sin t}{\cos^4 t \sin t} = \frac{1}{\cos^4 t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

$$x''_t = (-\sin 2t)' = -2\cos 2t,$$

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{2\cos t \cos^3 t + 2\sin t 3\cos^2 t \sin t}{(\cos^3 t)^2} = \frac{2\cos^2 t (\cos^2 t + 3\sin^2 t)}{\cos^6 t} = \\
&= \frac{2(\cos^2 t + 3\sin^2 t)}{\cos^4 t}. \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{2(\cos^2 t + 3\sin^2 t)(-2\cos t \sin t) - (-2\cos 2t) \frac{2\sin t}{\cos^3 t}}{\cos^4 t (-\sin 2t)^3} = \\
&= \frac{-4\sin t (\cos^2 t + 3\sin^2 t) + 4\cos 2t \sin t}{-\sin^3 2t \cos^3 t} = \\
&= \frac{-4\sin t (\cos^2 t + 3\sin^2 t) + 4(\cos^2 t + \sin^2 t) \sin t}{-\sin^3 2t \cos^3 t} = \\
&= \frac{-4\sin t \cos^2 t - 12\sin^3 t + 4\cos^2 t \sin t + 4\sin^3 t}{-\sin^3 2t \cos^3 t} = \frac{-8\sin^3 t}{-8\sin^3 t \cos^6 t} = \frac{1}{\cos^6 t}.
\end{aligned}$$

**в)**  $a \sin^2(x+y) = b$ ,

Знайдемо першу похідну:  $2a \sin(x+y) \cos(x+y) (1+y') = 0$ , звідки маємо  $(1+y') = 0$  та  $y' = -1$ , тоді  $y'' = 0$ .

**Завдання 5. а)** Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + x$ , яка паралельна прямій  $y = x - 3$ .

**Розв'язання.**

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) - \text{дотична},$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) - \text{нормаль}.$$

Похідна від функції  $y' = 2x + 1$ , тоді  $f'(x_0) = 2x_0 + 1$ , кутовий коефіцієнт прямої  $y = x - 3$  дорівнює 1, дотична паралельна прямій, тому  $f'(x_0) = 1$ . Маємо рівняння для визначення точки  $x_0$ :  $2x_0 + 1 = 1$ , відкіля  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = y(0) = 0$ . Записуємо *рівняння дотичної*  $y = x$  та *рівняння нормалі*  $y = -x$ .

**б)** Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої  $\begin{cases} x = \frac{t+t^3}{t^2-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$

у точці, яка відповідає значенню параметра  $t = 2$ .

**Розв'язання.**

$$x_0 = \frac{2+8}{3} = \frac{10}{3}, \quad y_0 = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3}.$$

$$x'_t = \frac{(1+3t^2)(t^2-1) - (t+t^3)2t}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2+3t^4-1-3t^2-2t^2-2t^4}{(t^2-1)^2} = \frac{t^4-4t^2-1}{(t^2-1)^2},$$

$$y'_t = \frac{t^2-1-t2t}{(t^2-1)^2} = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}}{\frac{t^4-4t^2-1}{(t^2-1)^2}} = -\frac{1+t^2}{t^4-4t^2-1}.$$

$$y'_x(2) = -\frac{1+4}{16-16-1} = -\frac{5}{1} = -5$$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$  – дотична,

$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$  – нормаль.

$$y - \frac{2}{3} = -5\left(x - \frac{10}{3}\right) \text{ або } y = -5x + \frac{52}{3} \text{ – рівняння дотичної,}$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{1}{5}\left(x - \frac{10}{3}\right) \text{ або } y = \frac{1}{5}x \text{ – рівняння нормалі.}$$

**Завдання 6.** Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x^4/4 - 6x^3 + 7$  на відріжку  $[16; 20]$ .

**Розв'язання.**

Найменше та найбільше значення досягаються або у стаціонарних точках, або на границях відрізка. Знайдемо стаціонарні точки:

$$y' = x^3 - 18x^2, \quad x^3 - 18x^2 = 0, \quad x^3(x-18) = 0, \text{ стаціонарні точки } x = 0 \text{ та}$$

$x = 18$ . Але  $x = 0 \notin [16; 20]$ , тому обчислюємо значення функції у точках:

$$y(16) = 16484 - 24576 + 7 = -8085,$$

$$y(18) = 26244 - 34992 + 7 = -8741, \text{ – найменше значення функції;}$$

$$y(20) = 40000 - 48000 + 7 = -7993. \text{ – найбільше значення функції.}$$

**Завдання 7.** Обчислити границі за правилом Лопітала.

**Розв'язання.**

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} = - \frac{0}{1} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \left\| 0 \cdot \infty \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-2}} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 e^{\frac{1}{x}}}{2x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = \left\| 0 \cdot \infty \right\| = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{(-1)x^{-2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

**Завдання 8.** Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

$$\text{а) } y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**Розв'язання.**

$$1. x \in (-\infty; \infty).$$

$$2. y(-x) = -x \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -y(x) \text{ – непарна.}$$

3. Неперіодична.

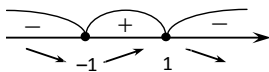
$$4. y = kx + b; k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x} = 0.$$

$y = 0$  – горизонтальна асимптота.

$$5. y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \left( -\frac{2x}{2} \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2).$$

$$y' = 0, \quad e^{\frac{x^2}{2}}(1-x^2) = 0, \quad 1-x^2 = 0, \\ x = \pm 1.$$



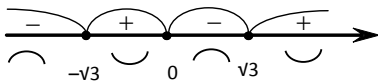
$$y_{\min} = y(-1) = -e^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{e}}{e}.$$

$$y_{\max} = y(1) = e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}.$$

$$6. \quad y'' = \left[ e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2) \right]' = e^{\frac{-x^2}{2}} \left( -\frac{2x}{2} \right) (1-x^2) + (-2x)e^{\frac{-x^2}{2}} = \\ = -xe^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2+2) = -xe^{\frac{-x^2}{2}}(3-x^2).$$

$$y'' = 0, \quad -xe^{\frac{-x^2}{2}}(3-x^2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \text{ - точки перегибу графіка функції,}$$



$$y(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}e^{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = -\frac{\sqrt{3e^3}}{e^3}.$$

$$y(\sqrt{3}) = \sqrt{3}e^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{\sqrt{3e^3}}{e^3}.$$

$$y(0) = 0.$$

$$7. \quad O_x: \quad y = 0, \quad x = 0.$$

$$O_y: \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Графік функції наведено на рис. 2.10.

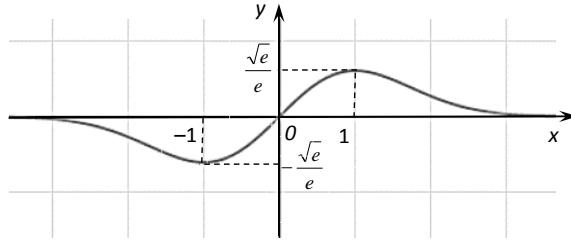


Рис. 2.10

$$\text{б) } y = \frac{3}{(x-8)^2}$$

**Розв'язання.**

1.  $x \in (-\infty; 8) \cup (8; -\infty)$

2.  $y(-x) = \frac{3}{(-x-8)^2} = \frac{3}{(x+8)^2}$  – загального вигляду

3. Неперіодична.

4.  $\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8-0} \frac{3}{(x-8)^2} = \left\| \frac{3}{(8-0-8)^2} \right\| = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8+0} \frac{3}{(x-8)^2} = \left\| \frac{3}{(8+0-8)^2} \right\| = \infty$$

$x=8$  – вертикальна асимптота.

$$y = kx + b; \quad k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3}{(x-8)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x(x-8)^2} = 0,$$

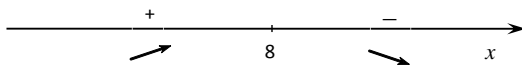
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{3}{(x-8)^2} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{(x-8)^2} = 0.$$

$y = 0$  – горизонтальна асимптота.

5.  $y' = \left[ \frac{3}{(x-8)^2} \right]' = \frac{3 \cdot (-2)}{(x-8)^3} = -\frac{6}{(x-8)^3}$

$$y' = 0, \quad -\frac{6}{(x-8)^3} \neq 0,$$

$$x \neq 8.$$

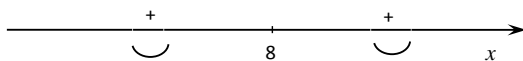


екстремумів немає.

$$y'' = \left[ -\frac{6}{(x-8)^3} \right]' = \frac{18}{(x-8)^4}$$

$$y'' = 0, \quad \frac{18}{(x-8)^4} \neq 0,$$

$x \neq 8$ . Точок перегину графіка функції немає.



6. Точок перетину з осями немає.

Графік наведено на рис. 2.11.

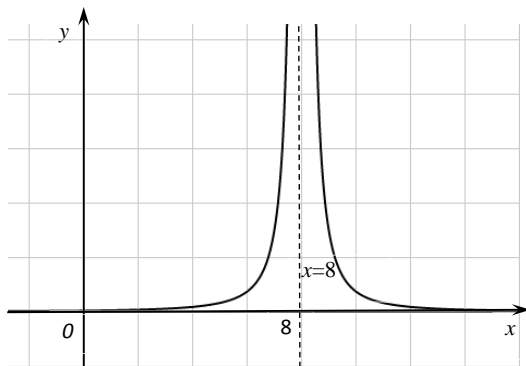


Рис. 2.11

## ВАРІАНТИ ОBOB'ЯЗKOBOTO ДOМАШНЬOГО ЗAВДAННЯ

### Варіант 1

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{x^2 - 7x + 3}{(x-1)^2}; \quad y' \left( \frac{1}{2} \right) = ?$$

$$1.9. y = e^{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2x}}$$

$$1.2. y = \sqrt[3]{4x} - \frac{5}{\sqrt{x}} - \ln 5$$

$$1.10. y = \arccos \left( \ln \frac{1}{x^2} \right)$$

$$1.3. y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 5x$$

$$1.11. y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$1.4. y = e^{-x} \arcsin x$$

$$1.12. y = \sqrt{\frac{3 \sin 2x - 2 \cos x}{5}}$$

$$1.5. y = -\frac{1}{60(1-3 \cos x)^2}$$

$$1.13. y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$1.6. y = \frac{1}{5^{x^2}}$$

$$1.14. y = x^4 (a - 2x^3)^2$$

$$1.7. y = \ln^2 (\sqrt{1+e^x} - 1)$$

$$1.15. y = 5 \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$1.8. y = 2^{\operatorname{arctg} x^3}$$

$$1.16. y = x^2 e^x \sin x$$

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ : 2.1.  $y = \sqrt[3]{x}$ ;

$$2.3. \operatorname{arctg}(x+y) = x;$$

$$2.2. y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}; \quad 2.4. \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

3. Показати, що функція  $y = xe^{-x}$  задовольняє рівнянню  $xy' = (1-x)y$ .

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ : а)  $y = \frac{1}{4}x^2(2 \ln x - 3)$ ; б)  $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases}$ ; в)  $y = 1 + xe^y$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 4x + 3$ , яка паралельна прямій  $y = -4x - 4$ ; б) знайти координати точки перетину двох дотичних, які побудовані до графіка функції  $y = \sin 3x$ : перша у точці

з абсцисою  $x = \frac{\pi}{18}$ , друга у точці з абсцисою  $x = \frac{5\pi}{18}$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$  на відрізку  $[0; 3]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а)  $y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}$ ; б)  $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$ .

### Варіант 2

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$ ;  $y'(1) = ?$

1.10.  $y = \arccos \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

1.2.  $y = -\frac{1}{20} \cos(5x^2)$

1.11.  $y = \frac{1}{10} e^{-x} (-\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x)$

1.3.  $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

1.12.  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}^3 \frac{x}{\sqrt{2}}$

1.4.  $y = 3^{\operatorname{ctg}^2 \frac{1}{x}}$

1.13.  $y = \frac{1}{3} \frac{1}{\log_3 2x}$

1.5.  $y = \arcsin^2(\ln x)$

1.14.  $y = \frac{\sin 7x^2}{2}$

1.6.  $y = \sqrt{e^{\sin 2x}}$

1.15.  $y = \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \frac{b^2}{2}$

1.7.  $y = 3x^5(4 - x^2)^3$

1.16.  $y = \sqrt{x}(e^x - 1) \ln x$ .

1.8.  $y = \frac{1}{\operatorname{arccotg}^2(4x^2 - 1)}$

1.9.  $y = \operatorname{Intg}^2 3x$

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ :

2.1.  $y = x^{\sin x}$ ;

2.3.  $\operatorname{tg} y = xy$ ;

2.2.  $y = x^3 \sqrt{\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$  задовольняє рівнянню  $xy' = (1 - x^2)y$ .

4. Знайти  $y''(x)$ : а)  $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ ;

$$\text{б) } \begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad \text{в) } x^4 - xy + y^4 = 1.$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 2x - 3$ , яка паралельна прямій  $y = 2x + 2$ ; б) до параболи  $y = 4x - x^2$  у точці з абсцисою  $x_0 = 3$  проведена дотична. Знайти точку перетину цієї дотичної з віссю  $OX$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = 3x/(x^2 + 1)$  на відрізьку  $[0;5]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$ ;

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}.$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$ ; б)  $y = \frac{x^3}{x^3 + 1}$ .

### Варіант 3

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. \quad y = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}; \quad y'(2) = ?$$

$$1.9. \quad y = \arccotg^4(e^{-x^2})$$

$$1.2. \quad y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$$

$$1.10. \quad y = (3b + 2x)\sqrt{bx - x^2}$$

$$1.3. \quad y = \tg^3 \sqrt{4x - 1}$$

$$1.11. \quad y = \frac{\text{ctg}^2 x - 1}{3}$$

$$1.4. \quad y = \sqrt[3]{\arcsin \frac{1}{x}}$$

$$1.12. \quad y = \log_3^2(1 - 7x)$$

$$1.5. \quad y = (1 - \arccos 5x)^2$$

$$1.13. \quad y = \sqrt{2e^{-x} - 2^x + 1}$$

$$1.6. \quad y = -\frac{\sin x}{5 \cos^3 x}$$

$$1.14. \quad y = \frac{2}{5(3x^2 - 7)^3}$$

$$1.7. \quad y = \frac{1}{4}x^3(8 - 3x)^5$$

$$1.15. \quad y = 3a^2 \arctg \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

$$1.8. \quad y = 9^{\arctg \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$1.16. \quad y = x^2 \sin \frac{x}{2} \cos x.$$

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ : 2.1.  $y = (\arctg x)^x$ ;

$$2.3. \quad a \cos^2(x + y) = b;$$

$$2.2. y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}; \quad 2.4. \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

3. Показати, що функція  $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$  задовольняє рівнянню  $xy' = y(y \ln x - 1)$ .

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ :

$$а) y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x; \quad б) \begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}; \quad в) \sqrt{x^2 + y^2} = a e^{\arctg \frac{y}{x}}$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 5x + 4$ , яка паралельна прямій  $y = 3x + 1$ ; б) знайти координати точки перетину двох дотичних, які побудовані до графіка функції  $y = \frac{3x+1}{2x-1}$  у точках з абсцисами  $x = -1$  та  $x = 3$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (2x-1)/(x-1)^2$  на відріжку  $[-1/2; 0]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = (x+1)^2(x-2)^4$ ; б)  $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ .

#### Варіант 4

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{1-x-x^3}{(1-x^3)^2}; \quad y'(0) = ?$$

$$1.5. y = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$$

$$1.2. y = \frac{1}{3}(5 \cos^4 x - 7)$$

$$1.6. y = \frac{1}{2} \sin x^2 - \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$1.3. y = 2 \arctg \sqrt{\sin x}$$

$$1.7. y = e^{-(x^2+7x-5)}$$

$$1.4. y = 6^{\cos^2 \frac{1}{x}}$$

$$1.8. y = \sqrt[4]{\frac{1}{\sin 2x}}$$

$$1.9. y = \frac{1}{2} \operatorname{Intg} \frac{x}{3} - 7$$

$$1.13. y = x \sin \left( \ln x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1.10. y = -\operatorname{arctg}^2(\ln x)$$

$$1.14. y = \frac{1}{\ln^2 3x}$$

$$1.11. y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+1}$$

$$1.15. y = \sqrt{xe^x + x}$$

$$1.12. y = \left( x - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arcsin} \sqrt{x}$$

$$1.16. y = \frac{1}{x} 2^x \ln x.$$

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ : 2.1.  $y = (1 + 1/x)^x$ ; 2.3.  $e^x = x + y$ ;

2.2.  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$ ; 2.4.  $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$  задовольняє рівнянню

$$y = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3.$$

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ : а)  $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$ ; б)  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases}$ ;

в)  $y = x + \operatorname{arctg} y$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 6x + 8$ , яка паралельна прямій  $y = 2x + 3$ ; б) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = e^{1-x^2}$  в точках перетину з прямою  $y = 1$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (x + 2)e^{1-k}$  на відріжку  $[-2; 2]$ .

7. Обчислити за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{1 - 4^x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{tg} x - \frac{1}{x - \pi/2} \right)$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = 3x - x^3$ ; б)  $y = \frac{(a-x)^3}{a-2x}$ .

### Варіант 5

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}; y'\left(\frac{1}{4}\right) = ?$$

$$1.2. y = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$1.3. y = 2\cos^3 \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\sin \frac{x^2}{2}$$

$$1.4. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{2}$$

$$1.5. y = \frac{1}{4}\ln^2(1 + \sin x)$$

$$1.6. y = \sqrt[5]{\operatorname{tg} \frac{1}{x^4 - 1}}$$

$$1.7. y = \frac{x^3 \sqrt{3x - x^2}}{3}$$

$$1.8. y = \arccos^3(e^{-x})$$

$$1.9. y = \frac{1}{\operatorname{ctg}(1 - x^2)^3}$$

$$1.10. y = \log_3 \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

$$1.11. y = e^{2x} \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

$$1.12. y = \arcsin 2^{(1-x)}$$

$$1.13. y = e^{-x} - \sin(e^{-x})\cos(e^{-x})$$

$$1.14. y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

$$1.15. y = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$1.16. y = \sqrt[3]{xe^{-x}} \operatorname{tg} x.$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\sin x)^{\cos x}$ ;

2.3.  $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ;

2.2.  $y = \sqrt{\frac{x(x-2)}{x-1}}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \\ y = a(\sin t - \cos t) \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $xy - \ln y = 1$  задовольняє рівнянню  $y^2 + (xy - 1)y' = 0$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ ; б)  $\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$ ; в)  $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + 2x - 3$ , яка паралельна прямій  $y = 4x - 1$ ; б) з'ясувати, в якій точці дотична до параболи  $y = x^2 - 7x + 3$  паралельна прямій  $5x + y - 3 = 0$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$  на відріжку  $[-1; 3/2]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

$$\text{а) } y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}; \quad \text{б) } y = \frac{x}{x^3 + 2}.$$

### Варіант 6

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{5x^3 - 7x + 1}{4 + 3x^2 - x^3}; \quad y'(-1) = ? \quad 1.9. y = \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3} \right) \left( 4x\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x} \right)$$

$$1.2. y = e^{\arcsin 2x}$$

$$1.10. y = \ln^4 \sin 2x$$

$$1.3. y = \sqrt[3]{1 + 2 \operatorname{tg} x}$$

$$1.11. y = a \cos^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$1.4. y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$$

$$1.12. y = \frac{1}{\operatorname{arctg} 2x^2}$$

$$1.5. y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$1.13. y = xe^{1-\cos x}$$

$$1.6. y = \operatorname{ctg}^4 \sqrt{1 + \frac{x}{2}}$$

$$1.14. y = \sqrt[11]{7 + 5\sqrt{x^9}}$$

$$1.7. y = 9^{2x-x^2}$$

$$1.15. y = \operatorname{tg}^2 \left( \ln \frac{x}{2} \right)$$

$$1.8. y = \log_3(x^2 - 1)$$

$$1.16. y = \sqrt{x+1} \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = x^{x^2}$ ;

$$2.3. \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2};$$

$$2.2. y = \sqrt[3]{x^2} \frac{1-x}{1+x} \sin^3 x \cos^2 x; \quad 2.4. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}.$$

3. Показати, що функція  $y = ae^{-\sin x} + \sin x - 1$  задовольняє рівнянню

$$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

4. Знайти  $y''(x)$ :

$$\text{а) } y = \sin \ln x + \cos \ln x; \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}; \quad \text{в) } y = \operatorname{tg}(x + y).$$

5. а) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої:  $y = -x^2 - 2x + 3$ ,

яка паралельна прямій  $y = 2x + 1$ ; б) знайти точки, в яких дотична до кривої  $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$  паралельна осі абсцис.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x^3/(x^2 - x + 1)$  на відрізку  $[-1; 1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin x}$ ;                      б)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x^2 e^{-x^2}$ ;                      б)  $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$ .

### Варіант 7

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ ;  $y'(a) = ?$

1.9.  $y = \sqrt[3]{1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

1.2.  $y = \sin 2^x$

1.10.  $y = (1 - 2\sqrt{x})^4$

1.3.  $y = \ln \arccos \frac{1}{x+1}$

1.11.  $y = \frac{1}{18} \sin^6 3x - \frac{1}{24} \sin^8 3x$

1.4.  $y = x^3 \operatorname{arctg} x^3$

1.12.  $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x}$

1.5.  $y = \cos \frac{\arcsin x}{2}$

1.13.  $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$

1.6.  $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$

1.14.  $y = x 10^{\sqrt{x}}$

1.7.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}$

1.15.  $y = x^3 \sin 2x \cos x$

1.8.  $y = \lg(x - \cos x)$

1.16.  $y = \frac{e^x \cos x}{x^2}$ .

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\cos x)^{\sin 2x}$ ;                      2.3.  $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$ ;

2.2.  $y = (x - 1) \sqrt[5]{(x + 1)^2 (x - 2)^3}$ ;                      2.4.  $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1 - t} \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $y = \ln \frac{1}{1 + x}$  задовольняє рівнянню  $xy' + 1 = e^y$ .

3. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ :

а)  $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ ; б)  $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$ ; в)  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ .

4. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 2x - 3$ , яка паралельна прямій  $y = -4x + 2$ ; б) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої

$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases} \text{ у точці } (2, 2).$$

5. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = ((x+1)/x)^3$  на відрізку  $[1;2]$ .

6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а)  $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}$ ; б)  $y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$ .

### Варіант 8

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$ ;  $y' \left( \frac{1}{4} \right) = ?$

1.8.  $y = 3^{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}}$

1.2.  $y = \cos^2 \left( \sin \frac{x}{3} \right)$

1.9.  $y = \frac{1}{\arcsin(1/x)}$

1.3.  $y = e^{-x} \left( \frac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{b} \right)$

1.10.  $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{3x^2}$

1.4.  $y = \ln \arccos \frac{x}{2}$

1.11.  $y = x^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{x^5 + a}$

1.5.  $y = \sin \frac{\arccos x}{2}$

1.12.  $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

1.6.  $y = \log_2 \sqrt[3]{1 - x^2}$

1.13.  $y = \left( \frac{a}{b} \right)^x \left( \frac{b}{x} \right)^a$

1.7.  $y = \sqrt{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$

$$1.14. y = \frac{1}{5} \sin^2 x \cos \frac{x}{2}$$

$$1.16. y = (2-x)^2 \sin x \cos 2x.$$

$$1.15. y = \frac{3}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$2. \text{ Знайти } \frac{dy}{dx}: \quad 2.1. y = x^{e^x};$$

$$2.3. y = \operatorname{tg}(x+y);$$

$$2.2. y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}};$$

$$2.4. \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}.$$

3. Показати, що функція  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$  задовольняє рівнянню

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ :

$$a) y = \ln \sqrt[3]{1+x^2} + \frac{1-x}{\sqrt{3}}; \quad б) \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}; \quad в) x + y = e^{x-y}.$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 4x + 3$ , яка паралельна прямій  $y = 6x - 6$ ; б) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y^4 = 4x^4 + 6xy$  у точці  $(1, 2)$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = \sqrt{x-x^3}$  на відрізьку  $[-2; 2]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 4x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - 1) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = e^{2x-x^2}$ ; б)  $y = \frac{x^2-5}{x-3}$ .

### Варіант 9

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^4 + 1}; \quad y'(-2) = ?$$

$$1.2. y = (x^2 + 1) \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

$$1.3. y = \sqrt{3e^{-\frac{x}{2}} + 3^x} - 2$$

$$1.4. y = \ln \arcsin^2 x$$

$$1.5. y = \left(3 - \sin \frac{x}{3}\right)^3$$

$$1.6. y = \cos^2 \frac{1}{x}$$

$$1.7. y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arccotg}(4x-1)}}$$

$$1.8. y = 2^{\arccos x}$$

$$1.9. y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$1.10. y = x\sqrt{1-x^2}$$

$$1.11. y = \log_5 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$1.12. y = \operatorname{ctg}^2(\arccos \sqrt{x})$$

$$1.13. y = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x})$$

$$1.14. y = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

$$1.15. y = x^5 \sqrt[4]{a + \frac{b}{x^3}}$$

$$1.16. y = \frac{(x^3 - 1)e^{-x}}{\operatorname{tg} x}$$

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ : 2.1.  $y = \sqrt{x} \sqrt[3]{x}$ ;

2.3.  $y - 0.3 \sin y = x$ ;

$$2.2. y = \sqrt[4]{\frac{(x+2)(x-1)^3}{x^5}}; \quad 2.4. \begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

3. Показати, що функція  $x = \frac{1+t}{t^3}$ ,  $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}$  задовольняє рівнянню

$$xy'^3 = 1 + y'$$

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x$ ; б)  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ ; в)  $e^{x-2} + xy - 3y - 2 = 0$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 6x + 8$ , яка паралельна прямій  $y = -4x + 2$ ; б) з'ясувати, в якій точці кривої

$$y^2 = 2x^3 \text{ дотична перпендикулярна до прямої } 4x - 3y + 2 = 0.$$

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = 4 - e^{-x^2}$  на відрізку  $[0;1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 5^x}{2x - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = \frac{1}{x^2 + 3}$ ; б)  $y = \frac{1}{x} + 4x^2$ .

### Варіант 10

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ ;  $y'(2) = ?$

1.9.  $y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$

1.2.  $y = 2^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

1.10.  $y = \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

1.3.  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}$

1.11.  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$

1.4.  $y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)$

1.12.  $y = \operatorname{arccctg}^5 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

1.5.  $y = \frac{1}{\sin^2 2x}$

1.13.  $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

1.6.  $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{3}$

1.14.  $y = \frac{1}{e^{2x} + 1}$

1.7.  $y = \sqrt{1-x^2} \arccos x$

1.15.  $y = \sqrt[5]{x} \log_2 x$

1.8.  $y = \ln \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$

1.16.  $y = \frac{e^x}{\ln x(x-1)}$ .

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ : 2.1.  $y = x^{2^x}$ ;

2.3.  $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$ ;

2.2.  $y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}}$ ; 2.4.  $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin 2t + 2 \cos 2t \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}$ ,  $y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}$  задовольняє рівнянню

$$yy' = 2xy'^2 + 1.$$

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ :

а)  $y = (\arcsin x)^2 + \frac{x-1}{2}$ ; б)  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ ; в)  $y = x + \ln y$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + 2x - 3$ ,

яка паралельна прямій  $y = 2x - 2$ ; б) який кут утворює з віссю абсцис дотична до параболи  $y = x^2 - 3x + 5$ , яка побудована у точці з ординатою  $y = 3$ ? Записати рівняння цієї дотичної та нормалі.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (x^3 + 4)/x^2$  на відрізку  $[1;2]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2 - 3x + 2} \right).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x^3 - 3x^2$ ; б)  $y = \frac{e^x}{x}$ .

### Варіант 11

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}; \quad y' \left( -\frac{1}{2} \right) = ?$$

$$1.9. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$1.2. y = \sqrt[3]{xe^{2x}}$$

$$1.10. y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{3} + \frac{2}{\operatorname{ctg} 3x}$$

$$1.3. y = \operatorname{arctg}^3 \frac{3}{x^3}$$

$$1.11. y = \sqrt[4]{1 - e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$1.4. y = \log_{\frac{1}{3}} \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$1.12. y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$1.5. y = \frac{1}{\arccos(\operatorname{tg} x)}$$

$$1.13. y = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$1.6. y = 4^{\frac{\cos^2 1}{x^2}}$$

$$1.14. y = \operatorname{ctg}^8 2^{-x}$$

$$1.7. y = \sqrt[5]{\operatorname{arcsin} \frac{1}{e^x}}$$

$$1.15. y = \frac{1}{3(5 - 3\sin 2x)^3}$$

$$1.8. y = \ln \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$1.16. y = x^3 \operatorname{arctg} x e^{-x}.$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = x^{\ln x}$ ;

$$2.3. 2^x + 2^y = 2^{x+y};$$

$$2.2. y = \frac{(x+1)^{3^4} \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}};$$

$$2.4. \begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}} \\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}} \end{cases}.$$

3. Показати, що функція  $x = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$ ,  $y = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$  задовольняє рівнянню  $yy' - x = 0$ .

4. Знайти  $y''(x)$ : а)  $y = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x - x^2}$ ;

$$\text{б) } \begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^3; \end{cases} \quad \text{в) } \ln y + \frac{x}{y} = C.$$

5. а) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + 8x - 9$ , яка паралельна прямій  $y = 6x$ ; б) на кривій  $y = x^2 - 3x + 5$  знайти точки, в яких дотична перпендикулярна до прямої  $y = -\frac{x}{9}$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = xe^x$  на відрізку  $[-2; 1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-2x}.$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = \ln(x^2 + 1)$ ; б)  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

### Варіант 12

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. \quad y = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}; \quad y' \left( -\frac{1}{2} \right) = ?$$

$$1.7. \quad y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Intg} 3x}}$$

$$1.2. \quad y = \sqrt[7]{3x + 5} (1 - e^x)$$

$$1.8. \quad y = \log_5 \left( 1 - 8x - \frac{3}{x} \right)$$

$$1.3. \quad y = \cos^2 \left( \frac{4}{x^2} \right)$$

$$1.9. \quad y = \operatorname{ctg}^2 2x + 5 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$$

$$1.4. \quad y = 2^{\arccos \frac{1}{x}}$$

$$1.10. \quad y = e^{-x^2 + 4}$$

$$1.5. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x + 3}}{5}$$

$$1.11. \quad y = \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$1.6. \quad y = \frac{1}{\sin^3 e^{2x}}$$

$$1.12. \quad y = \operatorname{tg}^3 3^{-x}$$

$$1.13. y = \left( \frac{1}{\arccos(3x^2 - 8)} \right)$$

$$1.16. y = \sqrt[3]{x} e^{\frac{1}{x}} \sin x.$$

$$1.14. y = \frac{e^{\sin \pi}}{\ln \arctg 3x}$$

$$1.15. y = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}}$$

$$2. \text{ Знайти } y'(x): \quad 2.1. y = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}};$$

$$2.3. e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0;$$

$$2.2. y = \frac{x^2 \sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \sqrt[5]{5x-1}}; \quad 2.4. \begin{cases} x = a \left( \operatorname{Intg} \frac{t}{2} + \cos t - \sin t \right) \\ y = a (\sin t + \cos t) \end{cases}$$

3. Показати, що функція  $y = (x^2 + 1)(e^x + c)$  задовольняє рівнянню

$$y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = e^x(x^2 + 1).$$

4. Знайти  $y''(x)$ :

$$а) y = \ln \arcsin x + \frac{1}{2} \ln^2 x + \arcsin \ln x; \quad б) \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{2t} \end{cases}; \quad в) \arctg(x + y) = x.$$

5. а) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 5x + 4$ , яка паралельна прямій  $y = -x - 2$ ; б) знайти кутовий коефіцієнт дотичної

до кривої  $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$  у точці  $M(2, -1)$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (x - 2)e^x$  на відріжку  $[-2; 1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}}.$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

$$а) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}; \quad б) y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

### Варіант 13

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}; y' \left( -\frac{1}{2} \right) = ?$$

$$1.2. y = \sin(\sin x)$$

$$1.3. y = (1 + \arcsin^2 x)^4$$

$$1.4. y = ae^{-b^2 x^2}$$

$$1.5. y = \sqrt[3]{1 + 2^{-x}}$$

$$1.6. y = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{3x}}$$

$$1.7. y = \log_7(x^2 - 5x)$$

$$1.8. y = 3x^3 \arccos \frac{x}{3}$$

$$1.9. y = \operatorname{arccctg} \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

$$1.10. y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$$

$$1.11. y = 5^{\frac{1}{x-1}}$$

$$1.12. y = \ln \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$1.13. y = \cos \frac{\arcsin x}{2}$$

$$1.14. y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$1.15. y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{3 - x}$$

$$1.16. y = e^x \sin \cos^2 x.$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = x^{\arcsin x}$ ; 2.3.  $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$ ;

$$2.2. y = \frac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}; 2.4. \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^t \cos t \end{cases}.$$

3. Показати, що функція  $y = \frac{x - e^{-x^2}}{2x^2}$  задовольняє рівнянню

$$xy' + 2y = e^{-x^2} + \frac{1}{2x}.$$

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ :

$$\text{а) } y = \frac{1}{3} \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}; \quad \text{в) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = -x^2 - 2x + 3$ , яка паралельна прямій  $y = 4x - 3$ ; б) знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої  $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$  у точці  $M(-2, 3)$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (x - 1)e^{-x}$  на відрізку  $[0; 3]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталія:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$ ; б)  $y = \frac{5x^2 + 2x - 1}{x^2}$ .

### Варіант 14

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{1-x^2-x^4}{1+x^2+x^4}; \quad y'(1) = ?$$

$$1.9. y = \sqrt[3]{2 \operatorname{arctg} \left( \frac{3x-8}{4} \right)}$$

$$1.2. y = \sqrt[8]{7-3\sqrt[4]{x^7}}$$

$$1.10. y = \ln \operatorname{tg}^2 3x$$

$$1.3. y = \operatorname{arctg}^2 \frac{2x-1}{\sqrt{5}}$$

$$1.11. y = \cos^2 \left( \frac{3}{x} \right)$$

$$1.4. y = e^{\frac{x}{\ln x}}$$

$$1.12. y = 10^{1+\lg^4 3x}$$

$$1.5. y = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$1.13. y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$$

$$1.14. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1.6. y = a^{\sin^3 x}$$

$$1.15. y = 5 \operatorname{tg} \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$$

$$1.7. y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{3}{x-2}}$$

$$1.16. y = e^{\frac{x}{2}} \operatorname{tg} x \sqrt{x}.$$

$$1.8. y = \log_4 \left( 2 - \frac{1}{x} \right)$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$ ;

$$2.3. x \sin y + y \sin x = 0;$$

$$2.2. y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}; \quad 2.4. \begin{cases} y = \left( \frac{2}{3} \sqrt{t} + 1 \right) t \\ x = \sqrt{t} e^{\sqrt{t}} \end{cases}.$$

3. Показати, що функція  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  задовольняє рівнянню

$$(x-y)y' - x - y = 0.$$

4. Знайти  $y''(x)$ :

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2+1} - \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}; \quad \text{в) } y^2 = x + \ln \frac{y}{x}.$$

5. а) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 8x - 9$ , яка паралельна прямій  $y = -6x$ ; б) у точках перетину прямої  $x - y + 1 = 0$  та параболи  $y = x^2 - 4x + 5$  побудовані нормалі до параболи. Записати рівняння цих нормалей.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x/(9 - x^2)$  на відріжку  $[-2; 2]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x \cdot e^{-x}$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$ .

### Варіант 15

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{x^5}{(1-x)^3}$ ;  $y'(2) = ?$

1.9.  $y = \frac{1}{\sin^2 \frac{3}{x-1}}$

1.2.  $y = \frac{2}{3} x^2 \sqrt[3]{6x-7}$

1.10.  $y = \sqrt[5]{\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{3}}$

1.3.  $y = \frac{2-x}{\pi} \cos[\pi(x+3)]$

1.11.  $y = \sqrt[3]{x \arcsin \sqrt{x}}$

1.4.  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

1.12.  $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$

1.5.  $y = \operatorname{ctg}^3\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$

1.13.  $y = \operatorname{arctg}\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1.6.  $y = 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

1.14.  $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$

1.7.  $y = \sqrt{\frac{\arccos \frac{3x-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}}$

1.15.  $y = \log_6(3x^2 - 2)$

1.8.  $y = 10^{1-\sin^2 3x}$

1.16.  $y = \sqrt{x-1} \cdot \ln x \cdot \operatorname{arctg} x$ .

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ : 2.1.  $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{x^2}$ ; 2.3.  $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$ ;

2.2.  $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{2x+5} \sqrt[5]{(1-4x)^3}}$ ; 2.4.  $\begin{cases} x = k \sin t - \sin kt \\ y = k \cos t + \cos kt \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $y = \frac{1}{x \ln Cx}$  задовольняє рівнянню  $xy' + y = -xy^2$ .

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ :

а)  $y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} x$ ; б)  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = ae^{\frac{t}{\sqrt{2}}} + be^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \end{cases}$ ; в)  $ye^y = e^{x+1}$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + 8x - 9$ , яка паралельна прямій  $y = -2x + 1$ ; б) показати, що дотичні до гіперболи  $y = \frac{x-4}{x-2}$  у точках її перетину з осями координат паралельні між собою.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (1 + \ln x)/x$  на відріжку  $[1/e; e]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x - \ln(x+1)$ ; б)  $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$ .

### Варіант 16

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2$ ;  $y' \left( \frac{1}{3} \right) = ?$

1.7.  $y = \operatorname{tg}^3 e^{-\frac{1}{x}}$

1.2.  $y = \frac{2}{\arcsin x}$

1.8.  $y = \arccos \frac{1}{3x^2}$

1.3.  $y = \sqrt[3]{1 + 2\operatorname{tg} \frac{x}{4}}$

1.9.  $y = \frac{1}{\operatorname{ctg}^4(2^{-x})}$

1.4.  $y = (1 + \cos^2 2x)^3$

1.10.  $y = 4^{\operatorname{arctg} x^2}$

1.5.  $y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

1.11.  $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \left( \sin \frac{2x}{\sqrt{x^3 - 7}} \right)$

1.6.  $y = x \cdot e^{1 - \cos x}$

1.12.  $y = 3x^5 \sqrt[3]{4x^5 + 2}$

1.13.  $y = \sin^2(\cos 3x)$

1.15.  $y = \log_3(4 - 3x^2)$

1.14.  $y = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

1.16.  $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$ .

2. Знайти  $\frac{dy}{dx}$ : 2.1.  $y = (1+x)^{\frac{3}{x}}$ ;

2.3.  $x + \sqrt{xy} + y = a$ ;

2.2.  $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+4}}}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = e^{-t^2} \\ y = \operatorname{arctg}(2t+1) \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $y = x + Ce^y$  задовольняє рівнянню  $(x - y + 1)y' = 1$ .

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ :

а)  $y = -\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x$ ; б)  $\begin{cases} x = at \operatorname{cost} \\ y = at \operatorname{sint} \end{cases}$ ; в)  $y = e^{-\frac{x}{y}}$ .

5. а) записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = -x^2 + 4x$ , яка паралельна прямій  $y = 2x$ ; б) записати рівняння такої нормалі до параболи  $y = x^2 - 6x + 6$ , яка перпендикулярна прямій, яка з'єднує початок координат з вершиною параболи.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = e^{4x-x^2}$  на відрізьку  $[1;3]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin 3x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а)  $y = (x-1)^2(x-2)^2$ ; б)  $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$ .

### Варіант 17

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$ ;  $y'(2) = ?$

1.3.  $y = \ln(\sqrt{e^x - 1} + 1)$

1.4.  $y = \sqrt[3]{\sin x + \sqrt{\sin x}}$

1.2.  $y = \frac{1}{5^{x^2}}$

1.5.  $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{3}{x}$

$$1.6. y = -\frac{1}{16} \cos(3x^3) - \frac{1}{8} \cos^2 x$$

$$1.7. y = \sqrt{e^{ax} + 1}$$

$$1.8. y = \sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot a^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

$$1.9. y = 4a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

$$1.10. y = \frac{1}{\arccos\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}$$

$$1.11. y = \log_3(x^2 - \operatorname{ctg} x)$$

$$1.12. y = \sqrt{\operatorname{arcctg} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}}$$

$$1.13. y = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$1.14. y = \frac{1}{10} e^{-x} (3 \sin 3x - \cos 3x)$$

$$1.15. y = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{5}}} + \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$$

$$1.16. y = \operatorname{tg} 2x (\sqrt{x} + 1) e^x.$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$ ; 2.3.  $y = \frac{x\sqrt{1+x^2} \sin x}{\operatorname{arctg} 2x}$ ;

2.2.  $\begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = b \sin^3 t; \end{cases}$  2.4.  $x^4 - 6x^2 y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$ .

3. Показати, що функція  $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x)$  задовольняє рівнянню  $(1+e^x)yy' = e^x$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $y = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}$ ; б)  $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}$ ,  $y = \frac{1}{t^2-1}$ ; в)  $x^y = y^x$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 5x + 4$ , яка паралельна прямій  $y = -3x - 1$ ; б) записати рівняння нормалі до графіка функції  $y = -\sqrt{x+2}$  в точці перетину з бісектрисою першого координатного кута.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (x^5 - 8)/x^4$  на відрізку  $[-3; -1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побуду-

вати графіки: а)  $y = \frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$ ; б)  $y = (x+1)\ln^2(x+1)$ .

### Варіант 18

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ ;  $y'(-\frac{1}{2}) = ?$

1.10.  $y = \sqrt{x^2+a^2} \arcsin \frac{x}{2}$

1.2.  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} e^{-x}$

1.11.  $y = \frac{1}{\sin(x-\sin x)}$

1.3.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}$

1.12.  $y = e^{\frac{1}{\ln(3+2x-x^2)}}$

1.4.  $y = 2\sqrt{x^2-1} + \sin^2 \frac{\pi}{4}$

1.13.  $y = \frac{1}{\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$

1.5.  $y = \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$

1.14.  $y = \sqrt{\ln x+1} + \ln(\sqrt{x}+1)$

1.6.  $y = \arcsin\left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

1.15.  $y = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

1.7.  $y = \log_4 \arccos 2x$

1.16.  $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

1.8.  $y = \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}}$

1.9.  $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}^3 \frac{3x-8}{\sqrt{5}}$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = 3x^{\sqrt[3]{x}}$ ;

2.3.  $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = a$ ;

2.2.  $y = \sqrt[4]{\frac{(2-x)(x+1)^2}{\sqrt[4]{8+x^2}}}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = \arcsin(t^2-1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $y = x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$  задовольняє рівнянню  $x^2 - 3y^2 = -2xyy'$ .

4. Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ : а)  $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x})$ ; б)  $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$ ; в)  $y^2 = \frac{x-y}{x+y}$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = -x^2 - 2x + 3$ ,

яка паралельна прямій  $y = -2x - 2$ ; б) у яких точках кривої  $x = t - 1$ ,  $y = t^3 - 12t + 1$  дотична паралельна прямій  $9x + y + 3 = 0$ ?

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (e^{2x} + 1)/e^x$  на відріжку  $[-1; 2]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталія:

а)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x} - 2}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-3x}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; б)  $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$ .

### Варіант 19

1. Знайти похідну складної функції

1.1  $y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}$ ;  $y'(1) = ?$

1.9  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}} \operatorname{ctg} \frac{x+3}{5}$

1.2  $y = \ln^5(\operatorname{tg} 3x)$

1.10  $y = \log_8 \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$

1.3  $y = \sqrt[3]{\sin^2 \frac{1}{x}}$

1.11  $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \left( \frac{a}{x} + \frac{x}{b} + \frac{a}{b} \right)$

1.4  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

1.12  $y = \cos^2(\sin 2x)$

1.5  $y = 5^{\frac{1}{\cos 2x}}$

1.13  $y = \frac{1}{\ln \operatorname{arccos} \frac{1}{x}}$

1.6  $y = \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} \right)^3$

1.14  $y = \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x}$

1.7  $y = \frac{1}{\operatorname{arccos}(\operatorname{ctg} x)}$

1.15  $y = \ln \cos(x^3 + 1)$

1.8  $y = e^{\sqrt{\operatorname{arctg}^{\frac{3}{4}} x}}$

1.16  $y = \frac{\left( 1 + \frac{1}{x} \right) \operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x}$ .

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = \left( \frac{x}{a} \right)^{ax}$ ;

2.3.  $y = \cos(x + y)$ ;

2.2.  $y = (x-2)^4 \sqrt{(x+3)^2 \sqrt[3]{x-1}}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = 1 + e^{at} \\ y = at + e^{-at} \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $x^2 = 1/(y + Cy^2)$  задовольняє рівнянню  $y = \left(\frac{1}{2}x^3 y - x\right)y'$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$ ; б)  $x = \frac{at^2}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}$ ; в)  $\ln x + e^{-\frac{y}{x}}$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 2x - 3$ , яка паралельна прямій  $y = 6x + 3$ ; б) знайти кут між дотичними до еліпса  $x = 2\cos t$ ,  $y = 3\sin t$  у точках, де  $t = \pi/6$  і  $t = \pi/3$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x \ln x$  на відрізку  $[1/e^2; 1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{3^x - 4^x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - \frac{16}{3}$ ; б)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

### Варіант 20

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{1-x-x^3}{(x^3+1)^2}$ ;  $y'\left(\frac{1}{3}\right) = ?$

1.8.  $y = \frac{1}{\arcsin^2 \frac{x}{3}}$

1.2.  $y = \log_{\frac{1}{2}}(3-8x^2)$

1.9.  $y = \operatorname{ctg}^5 \frac{x-1}{\sqrt{2}}$

1.3.  $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$

1.10.  $y = \sqrt[3]{\arccos\left(\frac{5}{x+1}\right)}$

1.4.  $y = 2^{\sqrt{\frac{x}{2}}}$

1.5.  $y = \left( \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}} \right) e^{-x}$

1.11.  $y = 4 \sqrt{\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{1+e^{\frac{x}{2}}}}$

1.6.  $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$

1.12.  $y = \frac{1}{\cos^2 4x} - \frac{1}{3} \cos^2 4x$

1.7.  $y = \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{2}$

$$1.13. y = \frac{1-x^2}{2} \cdot \sin x$$

$$1.16. y = \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{3x}}{\cos x}.$$

$$1.14. y = \sqrt{x} - \arctg \sqrt{x}$$

$$1.15. y = \sin^2 \sqrt{\frac{1}{1-x}}$$

$$2. \text{ Знайти } y'(x): \quad 2.1. y = (\arccos 2x)^{\frac{1}{x}}; \quad 2.3. (x+y)^3 = 27(x-y);$$

$$2.2. y = \frac{x}{\sqrt[5]{(x-5)^3} \sqrt[4]{(3x+1)^2}}; \quad 2.4. \begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}.$$

$$3. \text{ Показати, що функція } \begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases} \text{ задовольняє рівнянню}$$

$$y = y'^2 + 2y'^3.$$

$$4. \text{ Знайти } y''(x):$$

$$а) y = x \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right); \quad б) \begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; \quad в) (x+y)^3 = 15(x-y).$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 6x + 8$ , яка паралельна прямій  $y = 6x + 1$ ; б) на колі  $x^2 + y^2 = 25$  знайти точки, де дотична паралельна прямій  $3x + 4y - 12 = 0$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x^3 e^{x+1}$  на відріжку  $[-4; 0]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \sqrt{x}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2 - 4x + 3} \right).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = (x+2)(x-2)^3$ ; б)  $y = \frac{2-x^3}{2x}$ .

### Варіант 21

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{4+x^4}{4-x^4}; \quad y'(-1) = ?$$

$$1.2. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2\left(\sin \frac{x}{2}\right)$$

$$1.3. y = \ln \sin e^{\frac{1}{x}}$$

$$1.4. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}$$

$$1.5. \quad y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^2}}$$

$$1.6. \quad y = \operatorname{arcsin} \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$1.7. \quad y = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$1.8. \quad y = \log \frac{1}{4} \left( \frac{10}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)$$

$$1.9. \quad y = \frac{1}{\operatorname{arctg}^4 2x}$$

$$1.10. \quad y = \frac{1}{3^{4x}}$$

$$1.11. \quad y = \arccos^2 \frac{\sqrt{3}x-1}{2}$$

$$1.12. \quad y = \sqrt{e^{\frac{2}{x^3}}}$$

$$1.13. \quad y = (x^5 + 3) \left( \ln(x^5 + 3) - 1 \right)$$

$$1.14. \quad y = \operatorname{tg} \left( \frac{e^{2\sin x}}{4} \right)$$

$$1.15. \quad y = 3 \ln \log_2 \operatorname{tg} x$$

$$1.16. \quad y = \frac{(2-x^2) \cos x}{e^{3x}}$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\ln x)^x$ ;

2.3.  $ye^y = e^{x+1}$ ;

2.2.  $y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1} \cos x}{(\arccos x)^3}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = (1+t)/t^3 \\ y = \frac{3}{t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $\frac{1}{y} \ln x + \frac{1}{2} y^2 = C$  задовольняє рівнянню

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \ln x) y' = 0.$$

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $y = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} + \frac{4}{3} \operatorname{ctg} x$ ; б)  $\begin{cases} x = at \cos t \\ y = at \sin t \end{cases}$ ; в)  $(x+y)^3 = 15(x-y)$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + 2x - 3$ , яка паралельна прямій  $y = -4x + 2$ ; б) знайти рівняння дотичної та нормалі до астроїди  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  у точці, де  $t = \pi/4$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x^2 - 2x + 2/(x-1)$  на відрізку  $[-3; 0,5]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталля:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{arctg} x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{tg} \frac{x}{3} \right)$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x^3(x-1)^2$ ; б)  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ .

### Варіант 22

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{2+x+x^2}{1-x+x^5}$ ;  $y'(1) = ?$

1.9.  $y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\arccos \frac{1}{x}}$

1.2.  $y = \frac{\cos^4 x}{\sin x}$

1.10.  $y = \frac{\sqrt{5}}{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}$

1.3.  $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$

1.11.  $y = \operatorname{arccctg} \ln \frac{2x+1}{3}$

1.4.  $y = \arcsin \sqrt{1 - 2^x}$

1.12.  $y = \log_9(3 + \sqrt{1+x})$

1.5.  $y = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3}$

1.13.  $y = \ln^2 \frac{x-1}{x+1}$

1.6.  $y = \operatorname{tg}^5 \frac{x}{5}$

1.14.  $y = 8^{\left(\frac{x-2}{2-x}\right)}$

1.7.  $y = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \cos x$

1.15.  $y = \sin(\cos^2 3x)$

1.8.  $y = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$

1.16.  $y = \frac{\sqrt{1+x^2} \cos x}{\sin 2x}$ .

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ ;

2.3.  $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ;

2.2.  $y = \frac{x e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $y = -\frac{C - x^4}{4(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$  задовольняє рівнянню

$$(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} y' + (x^3 + 3xy \sqrt{x^2 - 1}) = 0.$$

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $y = \frac{m}{2} \ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$ ; б)  $\begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \arccos 2t \end{cases}$ ; в)  $y - 0.5 \sin y = x$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 4x + 3$ , яка паралельна прямій  $y = 4x + 4$ ; б) на кривій  $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$

знайти такі точки, де дотична паралельна осі  $OX$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$  на відрізьку  $[-4/5; 3]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 100} \frac{\sqrt{x} - 10}{\sin(x - 100)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x \ln x$ ; б)  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ .

### Варіант 23

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. \quad y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}; \quad y' \left( \frac{1}{3} \right) = ?$$

$$1.10. \quad y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}}$$

$$1.2. \quad y = 2 \left( e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)$$

$$1.11. \quad y = (4x^2 + 1) \operatorname{arctg} 2x$$

$$1.3. \quad y = \ln(1 + a^{-2x})$$

$$1.12. \quad y = \frac{1}{5} e^{-\cos^4 5x}$$

$$1.4. \quad y = \arccos^2 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$1.13. \quad y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$$

$$1.5. \quad y = \frac{1}{\sin^3 \left( \operatorname{tg} \frac{x}{3} \right)}$$

$$1.14. \quad y = \frac{1}{\ln \operatorname{arctg} \frac{3}{x}}$$

$$1.6. \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

$$1.15. \quad y = \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$1.7. \quad y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 \frac{3}{x-1}}$$

$$1.16. \quad y = \frac{(1-x)3^x}{\operatorname{arctg} 2x}.$$

$$1.8. \quad y = \log_5(\arcsin 3x)$$

$$1.9. \quad y = 2^{-\frac{x}{a}} \sin \frac{x}{a}$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{x^3}$ ;

$$2.3. \quad x^4 + y^4 = x^2 y^2;$$

$$2.2. \quad y = \frac{e^{2x} \sin(x/2) \cos^3 x}{\sqrt{x-1}}; \quad 2.4. \quad \begin{cases} x = a(e^t - e^{-t})/2 \\ y = b(e^t + e^{-t})/2 \end{cases}$$

3. Показати, що функція  $\begin{cases} x = \ln t - \arcsin t + C \\ y = t - \sqrt{1-t^2} \end{cases}$  задовольняє рівнянню

$$y = y' + \sqrt{1-y^2}.$$

4. Знайти  $y''(x)$ : а)  $y = 3b^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$ ;

б)  $x = \ln t$ ,  $y = 1/(1-t)$ ; в)  $e^x - e^y = y - x$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = -x^2 - 2x + 3$ , яка паралельна прямій  $y = -6x + 4$ ; б) знайти рівняння тієї дотичної до параболи  $y^2 = 20x$ , яка утворює кут  $45^\circ$  з віссю  $OX$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = e^{6x-x^2}$  на відрізку  $[-3;3]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{5}{x}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x + e^{-x}$ ; б)  $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ .

### Варіант 24

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^3+x+1}}$ ;  $y'(1) = ?$

1.8.  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} \frac{x}{4}}}$

1.2.  $y = \operatorname{arccose}^{-x}$

1.9.  $y = e^{\frac{1}{\sin^3(\sqrt{5})}}$

1.3.  $y = \sqrt[4]{x^2+3} \sin \frac{x}{3}$

1.10.  $y = \operatorname{arctg}^2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)$

1.4.  $y = \ln a \log_a x$

1.11.  $y = 2\sqrt[3]{x} - 4 \ln(3 + \sqrt[3]{x})$

1.5.  $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{3}}}$

1.12.  $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x^2-1}{3}}$

1.6.  $y = \log_3(\cos 3x - 1)$

1.13.  $y = ae^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}$

1.7.  $y = 4^{\operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}+5}}$

1.14.  $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

$$1.15. y = \frac{1}{\ln^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}$$

$$1.16. y = \frac{\sin 3x \cos 2x}{\sqrt[3]{x+1}}$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = \sqrt[3]{\cos 2x}$ ; 2.3.  $x - y = \arcsin x - \arcsin y$ ;

$$2.2. y = \frac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}; \quad 2.4. \begin{cases} x = 2^{-t} \\ y = 2^{2t} \end{cases}$$

3. Показати, що функція  $x = Ce^y - \frac{1}{2}(\sin y + \cos y)$  задовольняє рівнянню  $y'(x + \sin y) = 1$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

$$\text{а) } y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \arccos \frac{x}{a}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}; \quad \text{в) } 2y \ln y = x.$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 5x + 4$ , яка паралельна прямій  $y = x + 3$ ; б) в якій точці дотична до параболи  $y = x^2$  утворює з прямою  $3x - y + 1 = 0$  кут  $45^\circ$ ?

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = \frac{\ln x}{x}$  на відрізку  $[1; 4]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{5^x - 4^x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = \frac{4x}{4 + x^2}$ ; б)  $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$ .

### Варіант 25

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{(\sqrt{x} + 2)^2}; \quad y'(1) = ?$$

$$1.4. y = \sin(\cos(1/x^2))$$

$$1.5. y = \lg^3 x^2$$

$$1.2. y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$$

$$1.6. y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln(x - 2\sqrt{6})^3$$

$$1.3. y = \frac{\ln 3 \sin x}{3^x}$$

$$1.7. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$1.8. \quad y = \frac{a^2}{2} \arcsin^2 \frac{x}{a}$$

$$1.13. \quad y = 2^{\frac{\cos \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}$$

$$1.9. \quad y = \left( \operatorname{ctg}^3 \left( e^{-\frac{x}{2}} \right) \right)^{-1}$$

$$1.14. \quad y = \left( \operatorname{arctg} \sqrt{x - (x^2/5)} \right)^{-1}$$

$$1.10. \quad y = \sqrt{\arccos(\cos^2 x)}$$

$$1.15. \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(x^3/3)}}$$

$$1.11. \quad y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2}$$

$$1.16. \quad y = \frac{1}{2} e^{\sin x} \cos x \sqrt{x}.$$

$$1.12. \quad y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\arcsin x)^{3/2}$ ; 2.3.  $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - 3\sqrt{\frac{y}{x}} = 0$ ;

2.2.  $y = \frac{e^{-x}(x+3)^8}{\sqrt{6x+1}\sin x}$ ; 2.4.  $x = \frac{1}{t+1}, y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$ .

3. Показати, що функція  $x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$  задовольняє рівнянню  $x + yy' = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$ .

4. Знайти  $y''(x)$ : а)  $y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{1-x^2}$ ;

б)  $x = \frac{a \sin t}{1 + b \cos t}, y = \frac{c \cos t}{1 + b \cos t}$ ; в)  $y = \cos(x + y)$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + 8x - 9$ , яка паралельна прямій  $y = 4x$ ; б) при якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих  $y = x^2$  та  $y = x^3$  паралельні?

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$  на відрізку  $[-3; 1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побуду-

вати графіки: а)  $y = (x+1)(x-2)^2$ ; б)  $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x-10}$ .

### Варіант 26

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x+1)^2}$ ;  $y'(2) = ?$

1.9.  $y = \frac{3}{\operatorname{arctg}^3\left(\frac{x^2-1}{3}\right)}$

1.2.  $y = 3x^3 \arccos \frac{1}{x}$

1.10.  $y = x \ln(x + \sqrt{3+x^2})$

1.3.  $y = \sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4}}$

1.11.  $y = x + \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$

1.4.  $y = \lg(1-3x-x^2)$

1.12.  $y = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(e^{5x} \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

1.5.  $y = 5^{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}}$

1.6.  $y = 1 - \frac{1}{x^3} e^{\frac{4}{\sqrt{x}}-1}$

1.13.  $y = \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$

1.7.  $y = \sin(e^{-2x}) \cos(e^{-3x})$

1.14.  $y = 4 \log_4 \log_2 \operatorname{ctg} x$

1.8.  $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$

1.15.  $y = \frac{\sqrt[4]{xe^{7x}}}{\cos 8x}$

1.16.  $y = \frac{1}{2} e^{\sin x} \cos x \sqrt{x}$ .

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\sin \sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$ ; 2.3.  $y^2 e^x + e^y (x+1) = x^2 + y^2$ ;

2.2.  $y = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 1(1-x)^3}}{(5x^2 + 1)^2}$ ; 2.4.  $\begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^2} \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right) \end{cases}$

3. Показати, що функція  $y = \frac{\sin x}{x}$  задовольняє рівнянню  $xy' + y = \cos x$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $y = (2x+3) \ln^2 x$ ; б)  $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$ ; в)  $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 2x - 3$ , яка паралельна прямій  $y = 4x - 1$ ; б) скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  у точці, яка відповідає значенню параметра  $t = \frac{\pi}{3}$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$  на відрізку  $[-1; 2]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ ;    б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{2}{x}$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = x^2 e^{-x}$ ;    б)  $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ .

### Варіант 27

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{4(x^2 + 1)^2}{\sqrt{5-x}}$ ;  $y'(1) = ?$

1.2.  $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{2}}$

1.3.  $y = -e^{-3x} \operatorname{arcsin}(e^{3x})$

1.4.  $y = \ln \frac{1 + 2\sqrt{-x - x^2}}{2x+1} 8$

1.5.  $y = 4 \left( \operatorname{arcsin}^3 \left( \frac{3}{\sqrt{x+1}} \right) \right)^{-1}$

1.6.  $y = 6x \cdot 5^{\frac{4}{x^3}}$

1.7.  $y = -\frac{1}{5 \operatorname{tg}^4(1+3x^2)}$

1.8.  $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

1.9.  $y = \sqrt[5]{x + \cos^3(3x^2)}$

1.10.  $y = \sin^2 \frac{4}{x^3}$

1.11.  $y = \frac{\sqrt{\operatorname{arccos}^3 \sqrt{7x}}}{2}$

1.12.  $y = 3^{\frac{x}{a}} \operatorname{ctg} \frac{a}{x}$

1.13.  $y = 2\sqrt{x+1} - 4 \log_2(2 + \sqrt{x})$

1.14.  $y = \operatorname{arccotg} \frac{1+x}{1-x}$

1.15.  $y = \left( 4x - x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^3$

1.16.  $y = \arccos 2x \cdot e^{-8x \sqrt[3]{x}}$ .

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\cos x)^{5e^x}$ ;    2.2.  $(x+y)^2 + 2xy = x^3 - y^3$ ;

$$2.3. y = \frac{x^2 \arcsin^3 3x}{e^{2x} \sqrt[6]{4-x^2}}; \quad 2.4. \begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

3. Показати, що функція  $y = -\sqrt{\frac{2}{x^2}} - 1$  задовольняє рівнянню

$$1 + y^2 + xy y' = 0.$$

4. Знайти  $y''(x)$ :

$$\text{а) } y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}; \quad \text{в) } y = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} y - x.$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 6x + 8$ , яка паралельна прямій  $y = 4x + 1$ ; б) знайти рівняння дотичних до гіперболи  $xy = 4$  у точках  $x_1 = 1$  і  $x_4 = -4$  та знайти кут між дотичними.

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = (3-x)e^{-x}$  на відрізку  $[0;5]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{x}-2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = (x-3)\sqrt{x}$ ; б)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

### Варіант 28

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}; \quad y' \left( \frac{1}{4} \right) = ?$$

$$1.7. y = \lg^3 \frac{3}{x^4}$$

$$1.2. y = \frac{\ln 5 \cos 4x}{x^2}$$

$$1.8. y = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \operatorname{arctg} 2x$$

$$1.3. y = \sqrt[3]{x+1} \cdot e^{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$1.9. y = \arcsin^2(\operatorname{ctg} x)$$

$$1.4. y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \operatorname{arctg}^2 \frac{\sqrt{7}}{2x^2+3}$$

$$1.10. y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$$

$$1.5. y = \operatorname{Intg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

$$1.11. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}}{x}$$

$$1.6. y = (2-x^2) \cos 2x + 2x \sin x$$

$$1.12. y = 2^{\sqrt[3]{x}}$$

$$1.13. \quad y = \sin \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$$

$$1.16. \quad y = \sqrt{x} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{tg} 2x.$$

$$1.14. \quad y = \frac{2 + 3x^2}{x^4} \sqrt{1 - x^2}$$

$$1.15. \quad y = \sin[\sin(\sin x)]$$

$$2. \quad \text{Знайти } y'(x): \quad 2.1. \quad y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}; \quad 2.3. \quad \sin(xy) + 3\cos(x + y) = 3;$$

$$2.2. \quad y = \frac{5e^{-6x}(7-x)^5}{\sqrt[3]{(2+x)^2}}; \quad 2.4. \quad \begin{cases} x = \arcsin \sqrt{1-t^2} \\ y = (\operatorname{arccost})^2 \end{cases}.$$

3. Показати, що функція  $y = \frac{x}{x-1} + x^2$  задовольняє рівнянню  $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

$$\text{а) } y = e^{1-2x} \sin(2+3x); \quad \text{б) } \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}; \quad \text{в) } x - y = e^{x+y}.$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 - 4x + 3$ , яка паралельна прямій  $y = 2x + 4$ ; б) скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої  $\begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1 \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}$  у точці, яка відповідає значенню параметра  $t = \frac{\pi}{4}$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = \sqrt{3}/2 + \cos x$  на відріжку  $[0; \pi/2]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а)  $y = (x+1)\ln(x+1)$ ; б)  $y = \frac{16-x^3}{x}$ .

### Варіант 29

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \sqrt[3]{\frac{2x}{1-x^2}}; y' \left( \frac{1}{2} \right) = ?$$

$$1.2. y = 7^{3x - \frac{5}{\sqrt{x}}}$$

$$1.3. y = \frac{6}{\arccos 3x^4}$$

$$1.4. y = \arcsin^3 \frac{2x-x^3}{1-3x^2}$$

$$1.5. y = \frac{\cos^3 x}{\cos x^3}$$

$$1.6. y = \frac{1}{1-a} \ln \frac{1+ax}{1-ax}$$

$$1.7. y = \left( \frac{a}{b} \right)^x \cdot \left( \frac{b}{x} \right)^a$$

$$1.8. y = x \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)$$

$$1.9. y = 3 \arccos \sqrt[3]{5x}$$

$$1.10. y = -\frac{(1+x)^2}{4} \sin 3x$$

$$1.11. y = \frac{3}{\sqrt[3]{\arctg^4 \frac{1-x}{2}}}$$

$$1.12. y = \ln \left( \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right)$$

$$1.13. y = e^{\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}}$$

$$1.14. y = \log_2^3 \sqrt{3x}$$

$$1.15. y = \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{1}{x^2} \right)^2$$

$$1.16. y = e^{\sin x} \cos 3x \sqrt[3]{x}.$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (x+5)^{\frac{1}{3}e^{-x}}$ ;

2.3.  $\operatorname{ctg} \frac{y}{x} - y - x = 0$ ;

2.2.  $y = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{3-x} \cdot (2x+1)^3}{\sqrt{(1+x)^2}}}$ ;

2.4.  $\begin{cases} x = \arctg e^{\frac{t}{2}} \\ y = \sqrt{e^t + 1} \end{cases}$ .

3. Показати, що функція  $y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}$  задовольняє рівнянню  $\ln x + y^3 - 3xy^2 y' = 0$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

а)  $y = (4x+3)2^{-x}$ ; б)  $\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$ ; в)  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{6}$ .

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + 8x - 9$ , яка паралельна прямій  $y = 2x + 1$ ; б) в якій точці параболи  $y = x^2 - 2x + 5$  треба провести дотичну, щоб вона була перпендикулярна до бісектриси першого координатного кута?

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = 108x - x^4$  на відрізку  $[-1; 4]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ;   б)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \operatorname{ctg} \pi(x-1)$ .

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а)  $y = (1+x^2)e^{-x^2}$ ;   б)  $y = \frac{x}{x^2-4}$ .

### Варіант 30

1. Знайти похідну складної функції:

1.1.  $y = \frac{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}}{(\sqrt{x} + 2)^3}$ ;  $y'(2) = ?$

1.10.  $y = \left( \operatorname{tg}^2 \left( e^{-\frac{x}{3}} \right) \right)^{-1}$

1.2.  $y = \frac{1}{3} \ln^3 \frac{x}{3} + \frac{1}{5} \ln^5 x$

1.11.  $y = \frac{5+2x^3}{x^3} \sqrt{3+x^2}$

1.3.  $y = \frac{\ln 4 \cos x}{4^x}$

1.12.  $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3x^3-1}$

1.4.  $y = \cos(\sin(1/x^3))$

1.13.  $y = 5^{\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{2x}}}{4}}$

1.5.  $y = \lg^5 x^6$

1.14.  $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{3x - (x^5/5)}}$

1.6.  $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{tg}(x - 2\sqrt{6})^2$

1.7.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

1.15.  $y = \left( \cos \frac{x^4}{4} \right)^{\frac{1}{4}}$

1.8.  $y = \frac{a^2}{2} \operatorname{arccos}^2 \frac{x}{a}$

1.16.  $y = \frac{1}{3} e^{\cos x} \sin x \sqrt{2x}$ .

1.9.  $y = \sqrt{\operatorname{arcsin}(\cos^2 x)}$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\operatorname{arcsin} x)^{x/2}$ ;   2.3.  $\frac{y}{x} + a^{\frac{y}{x}} - 4\sqrt{\frac{y}{x}} = 0$ ;

2.2.  $y = \frac{e^{-x}(3x+3)^8}{\sqrt{4x+1} \cos x}$ ;   2.4.  $x = \frac{1}{2t+1}$ ,  $y = \left( \frac{2t}{2t+1} \right)^2$ .

3. Показати, що функція  $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$  задовольняє рівнянню

$$x + yy' = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}.$$

4. Знайти  $y''(x)$ : а)  $y = 3x^2 \operatorname{arccos} x + (2x^2 + 2)\sqrt{1-x^2}$ ;

$$\text{б) } x = \frac{\sin t}{1 + \cos t}, y = \frac{\cos t}{1 + \cos t}; \quad \text{в) } y = \sin(3x + y^2).$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = 3x^2 + 6x - 9$ , яка паралельна прямій  $y = 4x$ ; б) при якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих  $y = x^2$  та  $y = x^3$  паралельні?

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = 4x^4 - 12x^3 + 2$  на відрізку  $[-2; 1]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - x}{x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

$$\text{а) } y = (x+1)(x-2); \quad \text{б) } y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}.$$

### Варіант 31

1. Знайти похідну складної функції:

$$1.1. y = \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{3+x^3}}; \quad y'(1) = ?$$

$$1.9. y = \frac{3}{e^{\arctg 2x}}$$

$$1.2. y = x \sin \left( \ln x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1.10. y = \sqrt{\text{ctg} 4x} \cdot a^{\sqrt{\text{ctg} 4x}}$$

$$1.11. y = \sqrt[3]{x + \sqrt{2x}}$$

$$1.3. y = 2^{\arcsin^2 3x}$$

$$1.12. y = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)$$

$$1.4. y = 2x \arctg \sqrt{\sin x}$$

$$1.13. y = x^4 (a - 2x^3)^2$$

$$1.5. y = \frac{1}{3} \ln \cos \frac{x-1}{x}$$

$$1.14. y = \frac{10}{\sqrt[4]{\text{tg}^3 \frac{3}{x}}}$$

$$1.6. y = \frac{2}{3} \text{tg}^4 \left( \frac{5 \text{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right)$$

$$1.15. y = \frac{1}{\sqrt{6}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{b}{a} x} \right)$$

$$1.7. y = \left( \frac{1}{2} - x \right) \arccos \sqrt{x}$$

$$1.16. y = \arcsin 3x \frac{1}{x} 5^{-x}$$

$$1.8. y = 10^{5 \log_2 3x}$$

2. Знайти  $y'(x)$ : 2.1.  $y = (\text{ctg} 3x)^{3^x}$ ;

$$2.2. y = \frac{\sqrt[3]{(4-x)^2} \cdot (3x^2 + 5)^4}{\sqrt[5]{(1+x)^2}};$$

$$2.3. x^5 - 3x^3y^2 + 2y^5 - 5x^2 + 10xy - 90 = 0; 2.4. \begin{cases} x = \ln \frac{1-t}{1+t} \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}.$$

3. Показати, що функція  $y = x\sqrt{1-x^2}$  задовольняє рівнянню  $yy' = x - 2x^3$ .

4. Знайти  $y''(x)$ :

$$\text{а) } y = e^{-x}(\cos 2x - 6\sin 2x); \quad \text{б) } \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}; \quad \text{в) } a \sin^2(x+y) = b.$$

5. а) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої  $y = x^2 + x$ , яка паралельна прямій  $y = x - 3$ ; б) скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої  $x = \frac{t+t^3}{t^2-1}$ ,  $y = \frac{t}{t^2-1}$  у точці, яка відповідає значенню параметра  $t = 2$ .

6. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x^4/4 - 6x^3 + 7$  на відріжку  $[16; 20]$ .

7. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

8. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

$$\text{а) } y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \text{б) } y = \frac{3}{(x-8)^2}.$$

## Зразки варіантів контрольних робіт з теми «Теорія границь»

### Варіант 1

#### Завдання базового рівня

Обчислити границі:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! + (2n-1)!}{(2n)!(2n+1)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^5 x^3 + 21x^2 + x - 8}{x^4 + 9x^2 + 4x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (1 - \cos x)}{2x^4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^3 - 10x^2 - x + 4}{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

7. Дослідити точку розриву функції:  $y = \arctg \frac{1}{1-x}$ .

#### Завдання підвищеного рівня

8. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$ .

9. Дослідити точки розриву функції:  $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1+x}}}$ .

### Варіант 2

#### Завдання базового рівня

Обчислити границі:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{6n + 1} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16x^2 - 1} + 2\sqrt[3]{x^3 + 3x}}{\sqrt[3]{4x^2 + 1} + \sqrt[5]{x^2 - 3x^4}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\sin x} - 1)}{\ln(1 + \operatorname{tg} 4x)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 7x^2 - 5x + 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}$$

7. Дослідити точку розриву функції:  $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$ .

### Завдання підвищеного рівня

8. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{2\sin x} - e^{\sin 2x}}{4(\pi^2 - x^2)}$ .
9. Дослідити точки розриву функції:  $y = \frac{1}{2 - \frac{1}{1-x}}$ .

### Варіант 3

#### Завдання базового рівня

Обчислити границі:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 7^n}{3^n + 7^{n-1}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3 + 4x + 5} - \sqrt{x^3 - 1})$
3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{9x^2 - 6x + 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 2x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$
7. Дослідити точку розриву функції:  $y = \frac{x}{2^{x^2} - 1}$ .

#### Завдання підвищеного рівня

8. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin \frac{x-3}{4}}{3^{x^2-8} - 3}$ .
9. Дослідити точки розриву функції:  $y = \frac{\frac{1}{3^x} + 1}{\frac{1}{3^x} - 3}$ .

### Варіант 4

#### Завдання базового рівня

Обчислити границі:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{3n^2 + 10} - \sqrt{3n^2})$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 5x + 10}{8x^4 - 2x + 21}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin^2 2x)}{e^{\sin^2 x} - 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4 - 3}{x^4 + 2x + 1} \right)^{\frac{3x^2 - 1}{3}}$$

7. Дослідити точку розриву функції:  $y = \frac{x^2}{2x^2 - 1}$

### Завдання підвищеного рівня

8. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( 2 - \frac{x}{5} \right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{5}}$ .

9. Дослідити точки розриву функції:  $y = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right)$ .

**Зразки варіантів контрольних робіт  
з теми «Диференціювання функції однієї змінної»**

**Варіант 1**

**Завдання базового рівня**

1. Знайти другу похідну  $y''(x)$  функції  $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ .
2. Знайти першу похідну  $y'(x)$  степенево-показникової функції

$$y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^{\ln x}.$$

3. Знайти похідну  $y'(x)$  функції, заданої неявно:

$$y \sin x - \cos(x-y) = 0.$$

4. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції, заданої параметрично рівняннями  $y = \frac{3t}{t^2+1}$ ;  $x = \frac{3t^2}{t^2+1}$ , в точці  $M(x_0, y_0)$ , що відповідає значенню параметра  $t = 2$ .

**Завдання підвищеного рівня**

5. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення виразу  $(0,98)^3 - 3(0,98)^2 + 2 \cdot 0,98 + 8$ .
6. Задано функцію  $y = (1-x^2)\cos 3x$ . Застосувавши формулу Лейбніца, обчислити четверту похідну функції в точці  $y^{(4)}|_{x=0}$ .

**Варіант 2**

**Завдання базового рівня**

1. Знайти другу похідну  $y''(x)$  функції  $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ .
2. Знайти першу похідну  $y'(x)$  степенево-показникової функції  $y = x^{2+x}\sqrt{\cos x}$ .
3. Знайти похідну  $y'(x)$  функції, заданої неявно:  $y^3 = \arctg \frac{y}{x}$ .
4. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції, заданої параметрично рівняннями  $y = e^{\sin 2t}$ ,  $x = \cos \frac{t}{2}$ , в точці  $M(x_0, y_0)$ ,

що відповідає значенню параметра  $t = \frac{\pi}{2}$ .

### Завдання підвищеного рівня

1. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення виразу  $\sqrt[4]{1,08} + 3 \cdot \sqrt{1,08} + 4 \cdot 1,08$ .
2. Задано функцію  $y = x^2 \ln 3x$ . Застосувавши формулу Лейбніца, обчислити четверту похідну функції в точці  $y^{(4)}|_{x=1}$ .

### Варіант 3

#### Завдання базового рівня

1. Знайти другу похідну  $y''(x)$  функції  $y = x^2 \cos(\ln x)$ .
2. За допомогою прийому логарифмічного диференціювання знайти першу похідну  $y'(x)$  функції  $\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^3(x-3)^5}}$ .
3. Знайти похідну  $y'(x)$  функції, заданої неявно:  $2^x = e^{y^2} + 2y^2$ .
4. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = \ln(1 + x^2 + 2x)$  в точці  $M(0,0)$ .

#### Завдання підвищеного рівня

5. Знайти другу похідну  $y''(x)$  для функції, що задана параметрично рівняннями:  $y = \frac{1+t^2}{t}$ ,  $x = \frac{1}{t}$ .
6. Задано функцію  $y = e^{-2(x+1)} \cdot x^3$ . Застосувавши формулу Лейбніца, обчислити четверту похідну функції в точці  $y^{(4)}|_{x=-1}$ .

### Варіант 4

#### Завдання базового рівня

1. Знайти другу похідну  $y''(x)$  функції  $y = tg(\sqrt{x})$ .
2. За допомогою прийому логарифмічного диференціювання знайти першу похідну  $y'(x)$  функції  $\sqrt[3]{\frac{(x+3)\sin^2 x}{tg^5 x}}$ .

3. Знайти першу похідну  $y'(x)$  функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} y = \sin^2 t \\ x = \cos^2 t \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $y'(x)$  в точці  $M(0,1/2)$  функції, заданої неявно:

$$x^3 + \ln 2y = xe^{2x}.$$

**Завдання підвищеного рівня**

5. Знайти точки, в яких дотичні до графіка функції  $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$  паралельні прямої  $6x - y + 2 = 0$ . Записати рівняння цих дотичних та відповідних нормалей.

6. Записати диференціал третього порядку  $d^3y$  функції

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2x - 1)^2 \text{ в точці } x = 0$$

**Зразки варіантів контрольних робіт з теми**  
**«Дослідження функцій за допомогою похідних»**  
**Варіант 1**

**Завдання базового рівня**

1. Обчислити границі за правилом Лопіталя:  
а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2 - x - 6} \right)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$ .
2. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = \sin 2x - x$  на відрізку  $\left[ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$ .
3. Дослідити асимптоти кривої  $y = \frac{3x+5}{x-4}$ .
4. Дослідити точки перегину та вказати проміжки опуклості і угнутості графіка функції  $y = x^3 - 3x^2$ .

**Завдання підвищеного рівня**

5. Провести повне дослідження функції  $y = x - \operatorname{arctg} x$  та побудувати її графік.
6. Розкласти за формулою Маклорена функцію  $y = \ln(1+x)$ .

**Варіант 2**

**Завдання базового рівня**

1. Обчислити границі за правилом Лопіталя:  
а)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x}$ .
2. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = x - 2\sqrt{x}$  на відрізку  $[0, 4]$ .
3. Дослідити асимптоти кривої  $y = 5^{-x} + x$ .
4. Дослідити функцію  $y = \ln x + x^3$  на екстремум, вказати проміжки зростання та спадання функції.

**Завдання підвищеного рівня**

5. Провести повне дослідження функції  $y = \frac{x}{x^2 + 3}$  та побудувати її графік.
6. Розкласти за формулою Маклорена функцію  $y = e^{-x}$ .

### Варіант 3

#### Завдання базового рівня

1. Обчислити границю за правилом Лопітала:
  - а)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg \frac{\pi x}{2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$ .
2. Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = \sin 2x + 2$  на відрізку  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
3. Дослідити асимптоти кривої  $y = 2x + \operatorname{arctg} x$ .
4. Дослідити проміжки опуклості та угнутості графіка функції  $y = 2 \ln(x+2) + x^2$  і вказати точки перегину.

#### Завдання підвищеного рівня

5. Провести повне дослідження функції  $y = \frac{4x}{4+x^2}$  та побудувати її графік.
6. Розкласти за формулою Тейлора за степенями  $(x-x_0)$  багаточлен  $P_4(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 17$ , якщо  $x_0 = -2$ .

### Варіант 4

#### Завдання базового рівня

1. Обчислити границю за правилом Лопітала:
  - а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$ .
2. Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$  на відрізку  $[0; 3]$ .
3. Дослідити асимптоти кривої  $y = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 6}$ .
4. Дослідити функцію  $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$  на екстремум, вказати проміжки зростання та спадання функції.

**Завдання підвищеного рівня**

5. Провести повне дослідження функції  $y=e^{-x}+x$  та побудувати її графік.
6. Розкласти за формулою Тейлора за степенями  $(x-x_0)$  багаточлен  $P_6(x)=x^6-16x^3+64$ , якщо  $x_0=2$ .

**Варіанти тестових завдань до глави 1**  
**«Границі та неперервність функції однієї змінної»**

**Тестове завдання 1**

1. Зобразити схематично графік функції  $y = 3^x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Навести правила, за якими утворюються послідовності арифметичної та геометричної прогресій. Обчислити  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 5^n}{3^n + 5^{n-1}}$ .
3. Навести означення границі функції в точці на мові послідовностей (означення за Гейне).
4. За яких умов функція має в точці усунений розрив?
5. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$ .

**Тестове завдання 2**

1. Зобразити схематично графік функції  $y = x^2 + x - 2$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Сформулювати теореми щодо граничного переходу в нерівностях для числових послідовностей.
3. Яка функція при  $x \rightarrow x_0$  (або при  $x \rightarrow \infty$ ) називається: а) нескінченно малою; б) нескінченно великою?
4. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 - 1)^2}$ .
5. Дослідити та класифікувати точки розриву функції:  $y = \arctg \frac{1}{1-x}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}$ .

**Тестове завдання 3**

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \cos x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Дати означення границі числової послідовності. Навести приклад.

3. Який порядок малості має: а) добуток двох нескінченно малих у точці функцій; б) різниця двох еквівалентних нескінченно малих у точці функцій? Якій функції еквівалентна при  $x \rightarrow 0$  функція  $\alpha(x) = \sin 2x - x^2 + 5x^3$ ?

4. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^4 + x^3 - 3x^2 + 2}{4x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 7}$ .

5. Дослідити та класифікувати точки розриву функції  $y = e^{\frac{1}{x}}$ .

6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 8x + 15}$ .

#### Тестове завдання 4

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \arccos x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.

2. Сформулювати теореми про границі алгебраїчної суми, добутку та частки функцій в точці, в якій функції мають кінцеві границі.

3. Записати висновки з другої особливої границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ?; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = ?$$

4. Який розрив функції в точці називається розривом першого роду? Дати означення.

5. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$ .

6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x-2}\right)^{x+2}$ .

#### Тестове завдання 5

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \log_{1/2} x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.

2. Дати означення числа «e» як границі послідовності, сформулювати теорему щодо збіжності цієї послідовності.

3. Записати висновки з другої особливої границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = ?; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = ?$$

4. Який розрив функції в точці називається розривом 2 роду? Дати означення.

5. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$ .

6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^{x+4}$ .

### Тестове завдання 6

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \operatorname{tg} x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.

2. Обчислити границю послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n} - \sqrt{(n^2 + 2) \cdot n})$ .

3. Сформулювати теореми про використання еквівалентних нескінченно малих для обчислення границь.

4. Записати другу теорему Вейерштрасса про неперервні функції (про досягнення точних граней).

5. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{2x^2 + 1}$ .

6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{\sqrt[3]{3x-1} - 2}$ .

### Тестове завдання 7

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \operatorname{arctg} x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.

2. Сформулювати теорему про необхідні та достатні умови існування границі функції в точці.

3. Записати другу особливу границю (при  $x \rightarrow \infty$  і при  $x \rightarrow 0$ ).

4. Записати першу теорему Вейерштрасса про неперервні функції (про обмеженість функції).

5. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + 5x^3 - 2}{x^4 + 5x + 1}$ .

6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x + 5\pi)}{e^{3x} - 1}$ .

### Тестове завдання 8

1. Зобразити схематично графік функції  $y = (1/2)^x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Дати означення збіжної послідовності та обчислити  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)! + n!}{n \cdot (n-1)!}$ .
3. Записати висновки з першої особливої границі:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = ?$ ;

4. Записати визначення неперервності функції в точці та на інтервалі.
5. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 1}{6x^3 - 5x + 1}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 + 3x + 4} - 3}{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}$ .

### Тестове завдання 9

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \operatorname{ctg} x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Дати означення спадної та незростаючої послідовностей. Обчислити границю послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 10} - \sqrt{3n^2}}{n}$ .
3. Записати, чому еквівалентні при  $x \rightarrow 0$  функцій:  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\sqrt[n]{1+x} - 1$ ,  $a^x - 1$ .
4. Сформулювати другу теорему Больцано-Коші для неперервних функцій (про значення функції).
5. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$ .

### Тестове завдання 10

1. Зобразити схематично графік функції  $y = e^x$ . Позначити характерні

точки, навести область визначення та область значення функції.

2. Обчислити границю послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n} - \sqrt{(n^2 + 2) \cdot n})$ .
3. Дати означення границі функції на нескінченності.
4. Дати означення неперервності функції на інтервалі та на відрізку.
5. Дослідити та класифікувати точки розриву функції  $y = \frac{3x}{x+2}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x-3}$ .

### Тестове завдання 11

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \arcsin x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Дати означення нескінченно великої у точці функції та сформулювати теорему о зв'язку її з оберненою у цій точці функцією.
3. Обчислити границю числової послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! + (2n-1)!}{(2n)!(2n+1)}$ .
4. Які співвідношення еквівалентності при  $x \rightarrow 0$  мають функції  $\log_a(1+x)$ ,  $e^x - 1$ ?
5. Дослідити та класифікувати точки розриву функції  $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 7x^2 - 5x + 3}$ .

### Тестове завдання 12

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \arctg x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Дати означення нескінченно малої у точці функції та сформулювати теорему про суму і різницю нескінченно малих функцій.
3. Записати висновки з другої важливої границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = ?$$

4. Записати усі типи невизначених виразів (за допомогою умовних позначень «0», « $\infty$ »).

5. Дослідити та класифікувати точки розриву функції  $y = 5^{\frac{x}{1+x}}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^{x+4}$ .

### Тестове завдання 13

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \log_2 x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Сформулювати теорему Вейерштрасса про збіжність монотонної послідовності.
3. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ .
4. Навести означення лівобічної та правобічної границі функції в точці.
5. Дослідити та класифікувати точки розриву функції:  $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sqrt[5]{1+3x} - 1}$ .

### Тестове завдання 14

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \sin x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Яка послідовність називається обмеженою знизу? Обмеженою зверху? Обмеженою? Навести означення.
3. Записати першу особливу границю. Яку невизначеність вона розкриває?
4. Записати, чому еквівалентні при  $x \rightarrow 0$  функції:  $\arcsin x$ ,  $1 - \cos x$ ,  $(1+x)^n - 1$ .
5. Дослідити та класифікувати точки розриву функції:  $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$ .
6. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{2x}$ .

### Тестове завдання 15

1. Зобразити схематично графік функції  $y = \ln x$ . Позначити характерні точки, навести область визначення та область значення функції.
2. Навести означення еквівалентних нескінченно малих у точці функцій та функцій одного порядку малості.
3. Навести означення границі функції в точці за Коші (на мові « $\varepsilon - \sigma$ »).

4. За яких умов функція має в точці усувний розрив?

5. Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ .

6. Обчислити  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x-2}\right)^{x+2}$ .

**Варіанти тестових завдань до глави 2**  
**«Диференціальне числення функції однієї змінної»**

**Тестове завдання 1**

1. Сформулювати правила обчислення похідних  $(UV)'$  і  $\left(\frac{U}{V}\right)'$  та висновки з правил  $(CU)'$ ,  $\left(\frac{C}{V}\right)'$ ;  $\left(\frac{U}{C}\right)'$ .
2. Знайти похідну  $y'(x)$ , якщо  $y = \arctg^2 \sqrt{x}$ .
3. Задано функцію  $y = x^2 \sin 2x$ . Обчислити другу похідну в точці  $y''|_{x=\frac{\pi}{2}}$ .
4. Сформулювати теорему Ферма.
5. Знайти екстремум функції  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ .
6. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln 5x}$ .

**Тестове завдання 2**

1. Дати означення похідної функції  $y = f(x)$  та її фізичний зміст.
2. Знайти похідну  $y'(x)$  функції  $\begin{cases} y = \arcsin \sqrt{t} \\ x = \arccos \sqrt{1-t} \end{cases}$ , заданої параметрично.
3. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = xe^{\frac{x-2}{2}}$  в точці з абсцисою  $x = 2$ .
4. Сформулювати теорему Ролля.
5. Дослідити проміжки опуклості і угнутості графіка функції  $y = (x-1)^2(x+2)$ .
6. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \sin x}$ .

**Тестове завдання 3**

1. Записати правила обчислення похідних від постійної величини  $C$ , від алгебраїчної суми двох функцій, від суми функції і  $C$  та від добу-

тку  $C$  на функцію:  $(C)'$ ;  $(U \pm V)'$ ;  $(U \pm C)'$ ;  $(CU)'$ .

2. Знайти похідну  $y'(x)$  для функції  $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} 2t \\ x = \ln(1 + 4t^2) \end{cases}$ , заданої параметрично.
3. Задано функцію  $y = e^{\frac{x-1}{2}} \cdot x^3$ . Обчислити другу похідну в точці  $y''|_{x=1}$ .
4. Сформулювати теорему Лагранжа (формула кінцевих приростів).
5. Визначити найбільше і найменше значення функції  $y = x - 2\sqrt{x}$  на відрізку  $[0, 9]$ .
6. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

#### Тестове завдання 4

1. Сформулювати геометричний зміст похідної, навести відповідний рисунок.
2. Знайти похідну  $y'(x)$ , якщо  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
3. Обчислити наближено за допомогою першого диференціала значення функції  $y = x^3(\ln x + 1)$  в точці  $x = 1,05$ .
4. Сформулювати теорему Коші (формула узагальнених кінцевих приростів).
5. Дослідити проміжки опуклості і угнутості графіка функції  $y = e^{-2x^2}$ .
6. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ .

#### Тестове завдання 5

1. Сформулювати правило диференціювання складної функції. Навести приклад.
2. Знайти похідну  $y'(x)$  функції, заданої параметрично  $\begin{cases} y = \frac{3t^2}{t^2 + 1} \\ x = \ln(t^2 + 1) \end{cases}$ .

- Для функції  $y = (1 - x^2)\cos 3x$  обчислити другу похідну в точці  $y''|_{x=0}$ .
- Сформулювати теорему Лопітала.
- Знайти екстремум функції  $y = xe^x$ .
- Знайти похилі асимптоти графіка функції  $y = x + 2\operatorname{arctg}x$ .

#### Тестове завдання 6

- Навести означення диференціала функції. Який геометричний зміст має диференціал?
- Знайти  $y'(x)$  функції, заданої неявно рівнянням:  $\arccos y + \arcsin x = 0$ .
- Задано функцію  $y = x^3 \cdot 5^{2x}$ . Обчислити другу похідну в точці  $y''|_{x=1}$ .
- Записати формулу Тейлора для полінома (розкладення багаточлена за степенями  $(x - x_0)$ ).
- Знайти екстремум функції  $y = \ln(x + 2) - x$ .
- Дослідити асимптоти графіка функції  $y = \frac{2x}{x + 1}$ .

#### Тестове завдання 7

- Як розрізняються між собою приріст функції  $\Delta y$  і диференціал  $dy$ ? Сформулювати і показати на рисунку.
- Знайти похідну  $y'(x)$ , якщо функція  $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2(\sqrt{x})}$ .
- Обчислити другу похідну в точці  $y''|_{x=0}$  функції  $y = e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2x - 1)^2$ .
- Сформулювати ознаку монотонності функції (ознака зростання або спадання функції на проміжку  $x \in X$ ).
- Визначити найбільше і найменше значення функції  $y = \sin 2x + 2$  на відрізку  $[-\pi/2, \pi/2]$ .
- Обчислити за допомогою правила Лопітала границю  $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{1/\ln x}$ .

#### Тестове завдання 8

- Сформулювати правило диференціювання функції, заданої параметрично. Навести приклад.
- Знайти  $y'(x)$ , якщо  $y = x \cos(\ln x)$ .

3. Наблизити функцію  $y = e^{-2x}$  поліномом третього степеня за формулою Маклорена.
4. Сформулювати необхідну та достатню (перша форма) умови існування екстремуму.
5. Знайти екстремуми функції  $y = 2\arctg x - x$ .
6. Знайти похилі асимптоти графіка функції  $y = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 6}$ .

### Тестове завдання 9

1. Сформулювати правило диференціювання зворотної функції. Записати похідні функцій  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctg x$ ,  $y = \operatorname{arccctg} x$ .
2. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = \sqrt{5 - x^2}$  в точці з абсцисою  $x = 2$ .
3. Задано функцію  $y = x^2 \sin 3x$ . Обчислити другу похідну в точці  $y''|_{x=\frac{\pi}{3}}$ .
4. Сформулювати достатню ознаку існування екстремуму (друга форма).
5. Дослідити на екстремум функцію  $y = (x^2 - 3)e^x$ .
6. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границю функції:  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ .

### Тестове завдання 10

1. Сформулювати властивості диференціала  $d(U(x)V(x))$ ;  $d\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)$ ;  $d(CU(x))$ .
2. За допомогою логарифмічного диференціювання знайти похідну функції  $y = (\arctg x)^x$  та обчислити її значення у точці  $x = 1$ .
3. Функцію  $y = e^{\frac{x+1}{2}} \cdot x^2$  наблизити поліномом третього степеня в околі точки  $x_0 = -1$  (застосувати розкладення функції за формулою Тейлора за степенями  $(x + 1)$ ).
4. Сформулювати умови опуклості (угнутості) графіка функції на проміжку.

- Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ .
- Знайти найбільше і найменше значення функції  $y = \cos x - 2$  на відрізку  $[-\pi/3, \pi/3]$ .

### Тестове завдання 11

- Записати похідні для степеневі, показові і логарифмічної функцій:  
 $x^a, a^x, e^x, \ln x, \log_a x$ .
- Знайти  $y'(x)$  для функції, заданої параметрично  $\begin{cases} y = 3(t \sin t - \cos t) \\ x = 3(\sin t + t \cos t) \end{cases}$ .
- Розкласти поліном  $P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 1$  за степенями  $(x-1)$  (застосувати формулу Тейлора для розвинення багаточлена у точці  $x_0=1$ ).
- Сформулювати необхідну і достатню умови існування точок перегигну графіка функції.
- Дослідити проміжки монотонності і знайти екстремуми функції  $y = x - 2\arctg x$ .
- Обчислити за допомогою правила Лопіталя границю  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$ .

### Тестове завдання 12

- Записати похідні для функцій  $y = \sin x, y = \cos x$ . Вивести похідні для функцій  $y = \tg x$  і  $y = \ctg x$ .
- Знайти похідну  $y'(x)$  функції, що задана неявно  $\arctg(xy) - x = 0$ .
- Знайти  $y'(x)$  для функції, заданої параметрично:  $x = \frac{2 \ln t}{t}, y = \frac{1+t}{t}$ .
- Означення асимптот функції на нескінченності. Сформулювати правило обчислення похилих асимптот.
- Розкласти поліном  $P_3(x) = 2x^3 - 3x + 4$  за степенями  $(x+1)$  (застосувати формулу Тейлора для розвинення багаточлена у точці  $x_0 = -1$ ).
- Дослідити проміжки монотонності функції  $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ .

### Тестове завдання № 13

- Записати рівняння дотичною та нормалі до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $M$  з абсцисою  $x_0$ .

- Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції  $y = x + \operatorname{tg}3x$  в точці  $x = 0,09$ .
- Знайти похідну  $y'(x)$  функції  $\begin{cases} y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ x = \operatorname{arctg}t \end{cases}$ , заданої параметрично.
- Записати формулу Тейлора для функції  $y = f(x)$ .
- Дослідити вертикальну асимптоту графіка функції  $y = xe^{\frac{1}{x}}$ .
- Знайти найменше і найбільше значення функції  $\sqrt[3]{x^2 - 1}$  на відрізку  $[-3, 1]$ .

#### Тестове завдання 14

- Сформулювати правило логарифмічного диференціювання показово-степеневі функції  $y = U^V$ , де  $U = U(x)$ ,  $V = V(x)$ .
- Записати рівняння дотичною та нормалі до графіка функції  $y = \ln(2 - x^2)$  в точці з абсцисою  $x_0 = -1$ .
- Задано функцію  $y = x^{3^{2x}}$ . Обчислити другу похідну в точці  $y''|_{x=0}$ .
- Записати формулу Тейлора для функції  $y = f(x)$  у випадку, коли  $x_0 = 0$  (формула Маклорена).
- Визначити похилі асимптоти графіка функції  $y = x + 2\operatorname{arctg}x$ .
- Знайти найменше і найбільше значення функції  $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$  на відрізку  $[-1, 3]$ .

#### Тестове завдання 15

- Сформулювати властивості диференціала  $d(U(x)+C)$ ;  $d(CU(x))$ ;  $d(U(x)\pm V(x))$ .
- Обчислити наближено за допомогою першого диференціала значення функції  $y = \frac{x+1+\operatorname{arctg}x}{x+2}$  в точці  $x = 0,1$ .
- Знайти  $y'(x)$  для функції, заданої параметрично  $\begin{cases} y = 2(t \sin t + \cos t) \\ x = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ .

4. Означення похідних та диференціалів вищих порядків.
5. Знайти проміжки опуклості і угнутості графіка функції  $y = xe^{-x}$ .
6. Обчислити за допомогою правила Лопіталя границю  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{5}{3+\ln x}}$ .

## ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

### Вступ до математичного аналізу

1. Числові проміжки, окіл точки, числові множини.
2. Означення функції, графік функції. Властивості функцій: область визначення, область значень, парність-непарність, зростання та спадання.
3. Складна функція. Прямі і зворотні функції, їх графіки.
4. Основні елементарних функцій, їх властивості та графіки.

### Числові послідовності та їх границі

1. Числова послідовність, її завдання, основні означення (обмеженість, зростання та спадання), зображення на числовій осі.
2. Границя послідовності, збіжні послідовності, теорема про єдність границі.
3. Теореми про граничні переходи в нерівностях для послідовностей.
4. Теорема Вейерштрасса про збіжність монотонної послідовності. Число « $\epsilon$ ».

### Границя функції однієї змінної

1. Границя функції в точці (визначення за Гейне і за Коші). Односторонні границі функції (визначення за Коші). Границя функції на нескінченності.
2. Нескінченно малі та нескінченно великі у точці (на нескінченності) функції: означення, зв'язок між ними.
3. Теореми про властивості нескінченно малих функцій. Необхідна та достатня умова існування границі функції в точці.
4. Основні властивості границь функцій.
5. Теорема про граничний перехід у нерівностях.
6. Границя дрібно-раціональної функції в точці та на нескінченності.
7. Перша особлива границя. Висновки з неї.
8. Друга особлива границя. Висновки з неї.
9. Порівняння нескінченно малих функцій, порядок нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі функції.
10. Теореми про еквівалентні нескінченно малі функції.
11. Застосування теорем про нескінченно малі функції до обчислення границь. Таблиця нескінченно малих.

### **Неперервність функцій**

1. Неперервність функції в точці (різні види визначень). Неперервність функції на проміжку. Точки розриву функції і їх класифікація.
2. Теореми щодо основних властивостей неперервних функцій.
3. Теореми про неперервні функції: перша та друга теореми Коші та перша і друга теореми Вейерштрасса.

### **Похідна функції**

1. Похідна. Односторонні похідні. Умови існування похідної.
2. Виведення похідних елементарних функцій. Таблиця похідних.
3. Правила диференціювання суми, добутку і частки двох функцій.
4. Теореми про похідні складної і оберненої функцій.
5. Похідні функції, що задана неявно, та функції, що задана параметрично.
6. Логарифмічне диференціювання, похідні степеневих-показових функцій.
7. Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца.
8. Геометричний та фізичний зміст похідної.
9. Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в заданій точці.

### **Диференціал функції**

1. Диференціал функції. Диференціал незалежної змінної.
2. Диференціали основних елементарних функцій.
3. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала 1 порядку.
4. Геометричний зміст диференціала, застосування диференціала для наближених обчислень.
5. Диференціали вищих порядків.

### **Дослідження функцій за допомогою похідних**

1. Теореми Ферма, Ролля. Геометричний зміст теорем.
2. Теорема Лагранжа (формула кінцевих приростів), геометричний зміст.
3. Теорема Коші (формула узагальнених кінцевих приростів).
4. Правило Лопітала для випадку невизначеності типу  $|0/0|$ , застосування правила для інших видів невизначеностей.
5. Формула Тейлора для багаточлена та для функції. Формула Маклорена.

6. Розкладання основних елементарних функцій за формулою Маклорена.
7. Ознака монотонності функції. Локальні екстремуми. Необхідні умови існування екстремуму. Поняття стаціонарних і критичних точок.
8. Достатня умова існування екстремуму (перша форма). Друга форма достатніх умов існування екстремуму.
9. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.
10. Означення опуклості (угнутості) графіка функції. Умови опуклості (угнутості) графіка на проміжку. Критичні точки 2 роду і точки перегину графіка функції. Необхідна та достатня умови існування точок перегину.
11. Асимптоти графіка функції (вертикальні, похилі, горизонтальні). Правила обчислення асимптот.
12. Схема загального дослідження функції та побудова графіка.

## ДОДАТКИ

### Додаток 1

#### Основні формули елементарної математики

<b>Закони арифметики</b>	
Комутативний	$a + b = b + a; ab = ba$
Асоціативний	$(a + b) + c = a + (b + c); (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Дистрибутивний	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
<b>Дії з дробами</b>	
Рівність дробів	$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ , якщо $mq = pn$
Основна властивість дробу	$\frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{a \cdot n}$ , $a \neq 0$
Додавання та віднімання дробів	$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$ ; $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$
Множення та ділення дробів	$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$ ; $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$
Окремі випадки	$\frac{m}{n} \pm a = \frac{m \pm na}{n}$ ; $\frac{m}{n} \cdot a = \frac{ma}{n}$ ; $\frac{m}{n} : a = \frac{m}{na}$ ; $a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}$
<b>Модуль числа</b>	
Означення	$ a  = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$
Геометричний зміст	Відстань на числовій осі від точки 0 до точки $a$ або від точки 0 до точки $-a$

Продовження додатка 1

<p>Основні властивості</p>	$ ab  =  a  b ; \quad \left  \frac{a}{b} \right  = \left  \frac{a}{b} \right ;$ $ a \pm b  \leq  a  +  b ;$ $\sqrt{a^2} =  a ; \quad  a ^2 = a^2$
<p><b>Тотожні перетворення алгебраїчних виразів</b></p>	
<p>Дії із степенями  <math>a &gt; 0, b &gt; 0,</math>  <math>x, y \in R</math></p>	$a^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad a^{-1} = \frac{1}{a};$ $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy};$ $a^x b^x = (ab)^x; \quad \frac{a^x}{b^x} = \left( \frac{a}{b} \right)^x; \quad \left( \frac{a}{b} \right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x};$ $a^{x+y} = a^x a^y; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
<p>Дії з коренями</p>	$\frac{m}{n} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ якщо } \begin{cases} a \geq 0, n, m \in N \\ a > 0, n \in N, m \in \{-N\}; \\ a \in R, a \neq 0, n = 2k + 1 \end{cases}$ ${}^{2n}\sqrt{a^{2n}} =  a ; \quad {}^{2n+1}\sqrt{a^{2n+1}} = a; \quad {}^{2n+1}\sqrt{-a} = -{}^{2n+1}\sqrt{a};$ ${}^{2n}\sqrt{a \cdot b} = {}^{2n}\sqrt{ a } \cdot {}^{2n}\sqrt{ b }, \quad a \cdot b \geq 0;$ ${}^{2n+1}\sqrt{a \cdot b} = {}^{2n+1}\sqrt{a} \cdot {}^{2n+1}\sqrt{b}, \quad a, b \in R$
<p>Дії з арифметичними коренями  <math>a \geq 0, b \geq 0</math></p>	$\left( \sqrt[n]{a} \right)^m = \left( a^m \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad a \neq 0;$ $\sqrt[n]{\sqrt{a}} = \sqrt[nm]{a}; \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0.$
<p><b>Формули скороченого множення</b></p>	
<p>Різниця квадратів</p>	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
<p>Квадрат суми (різниці)</p>	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Продовження додатка 1

Сума (різниця) кубів	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$																																										
Куб суми (різниці)	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$																																										
Біном Ньютона, де $C_n^k$ – біноміальні коефіцієнти	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k =$ $= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n,$ $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad k = \overline{1, n} \text{ та}$ $n - \text{факторіал дорівнює: } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$																																										
Трикутник Паскаля для визначення біноміальних коефіцієнтів	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: right;">n = 0</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: right;">n = 1</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: right;">n = 2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: right;">n = 3</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: right;">n = 4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: right;">n = 5</td></tr> </table>							n = 0							n = 1							n = 2							n = 3							n = 4							n = 5
						n = 0																																					
						n = 1																																					
						n = 2																																					
						n = 3																																					
						n = 4																																					
						n = 5																																					
Виділення повного квадрата двохчлена з квадратного трьохчлена	$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad a \neq 0$																																										
<b>Розв'язання алгебраїчних рівнянь</b>																																											
Лінійне рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}, \text{ якщо } a \neq 0;$ <p>якщо <math>a = 0, b = 0</math>, то <math>\forall x \in \mathbb{R}</math>;</p> <p>якщо <math>a = 0, b \neq 0</math>, то <math>x \in \emptyset</math></p>																																										
Повне квадратичне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Має два різних кореня <math>x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}</math>, якщо дискримінант <math>D = b^2 - 4ac &gt; 0</math>;</li> <li>2) має два однакових кореня <math>x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}</math>, якщо <math>D = 0</math>;</li> <li>3) не має дійсних коренів <math>x_{1,2} \in \emptyset</math>, якщо <math>D &lt; 0</math></li> </ol>																																										

Продовження додатка 1

Зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$	$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad p^2 - 4q \geq 0$
Зведене квадратне рівняння з парним другим коефіцієнтом	$x^2 + 2sx + q = 0,$ $x_{1,2} = -s \pm \sqrt{s^2 - q}, \quad s^2 - q \geq 0$
Розкладення квадратичного трьохчлена на множники	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$ $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$
Теорема Вієта для зведеного квадратичного рівняння $x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$ де $x_1, x_2$ – корені рівняння
Теорема Вієта для повного квадратичного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$ де $x_1, x_2$ – корені рівняння
<b>Логарифми</b>	
Означення логарифма за основою $a$	$\log_a b = c, \text{ якщо } a^c = b$ ( $a > 0, a \neq 1, b > 0$ )
Основна логарифмічна тотожність	$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$
Десятковий логарифм	$\lg b = \log_{10} b, \quad b > 0$
Натуральний логарифм	$\ln b = \log_e b, \quad b > 0, \text{ де число } e \approx 2,71828\dots$
Властивості логарифма ( $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$ )	$\log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0;$ $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$ $\log_a b^k = k \log_a b, \quad k \in \mathbb{R};$ $\log_a a^k = k; \quad \log_a \frac{1}{a} = \log_a a^{-1} = -1$

Продовження додатка 1

<p>Окремі випадки (<math>a &gt; 0, a \neq 1, b &gt; 0,</math> <math>n \in N, m \in N</math>)</p>	$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b;$ $\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \log_a b;$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
<p>Перехід від однієї основи до іншої (<math>a &gt; 0,</math> <math>a \neq 1, b &gt; 0, c &gt; 0,</math> <math>c \neq 1</math>)</p>	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$ $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b;$ $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b, k \neq 0$
<p>Перехід до десяткового та натурального логарифмів</p>	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a};$ $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$
<p>Перехід від десяткового логарифма до натурального та навпаки</p>	$\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10};$ $\ln b = \frac{\lg b}{\lg e};$ $\ln 10 \approx 2,3026, \quad \lg e \approx 0,43429$

**Основні формули тригонометрії**

<p>Основна тригонометрична тотожність</p>	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
<p>Основні тригонометричні співвідношення</p>	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n;$ $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \quad n \in Z;$ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$

Продовження додатка 1

<p>Основні тригонометричні співвідношення</p>	$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi, \quad n \in \mathbb{Z};$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi, \quad n \in \mathbb{Z};$ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad x \neq \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$
<p>Формули додавання</p>	$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$ $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$ $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$ $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$ $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y},$ $x, y, (x + y) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y},$ $x, y, (x - y) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y - 1}{\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y},$ $x, y, (x + y) \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y + 1}{\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y},$ $x, y, (x - y) \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
<p>Формули подвійного кута</p>	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg}x}$

Продовження додатка 1

<p>Формули зниження степеня</p>	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$ $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$
<p>Формули перетворення суми тригонометричних виразів до добутку</p>	$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$ $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2};$ $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$ $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
<p>Формули перетворення добутку тригонометричних функцій до суми</p>	$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y);$ $2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y);$ $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$
<p>Парність (непарність) функцій</p>	$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{— непарна};$ $\cos(-x) = \cos x \quad \text{— парна};$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \text{— непарна};$ $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \quad \text{— непарна}$
<p>Періодичність функцій</p>	$\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \quad T = 2\pi;$ $\cos(x + 2\pi n) = \cos x, \quad T = 2\pi;$ $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x, \quad T = \pi;$ $\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x, \quad T = \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$
<p>Формула допоміжного кута</p>	$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi),$ $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Продовження додатка 1

<i>Формули зведення</i>							
$x$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Значення тригонометричних функцій деяких кутів		$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
	0	0	1	0	-
	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
	$\pi/2$	1	0	-	0
	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
	$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
	$\pi$	0	-1	0	-

<b>Обернені тригонометричні функції</b>	
Функції	Властивості
$y = \arcsin x$	$x \in [-1; 1]; y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \sin y = x;$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
$y = \arccos x$	$x \in [-1; 1]; y \in [0; \pi]; \cos y = x;$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
$y = \operatorname{arctg} x$	$x \in [-\infty; \infty]; y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \operatorname{tg} y = x;$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

Продовження додатка 1

$y = \text{arcctg}x$	$x \in [-\infty; \infty]; y \in (0; \pi); \text{ctg}y = x;$ $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$					
<b>Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями</b>						
$\sin(\arcsin x) = x;$ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2};$ $\sin(\text{arctg}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$ $\sin(\text{arcctg}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\arccos x) = x;$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2};$ $\cos(\text{arctg}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$ $\cos(\text{arcctg}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$					
$\text{tg}(\text{arctg}x) = x;$ $\text{tg}(\text{arcctg}x) = \frac{1}{x};$ $\text{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$ $\text{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\text{ctg}(\text{arcctg}x) = x;$ $\text{ctg}(\text{arctg}x) = \frac{1}{x};$ $\text{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$ $\text{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$					
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$ $\text{arctg}x + \text{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$	$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\pi/2; \pi/2];$ $\arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi];$ $\text{arctg}(\text{tg}x) = x, x \in (-\pi/2; \pi/2);$ $\text{arcctg}(\text{ctg}x) = x, x \in (0; \pi)$					
Значення обернених тригонометрич- них функцій деяких чисел	$x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$x$	$\text{arctg}x$	$\text{arcctg}x$
	1	$\pi/2$	0			
	$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\pi/6$
	$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\pi/4$	1	$\pi/4$	$\pi/4$
	1/2	$\pi/6$	$\pi/3$	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\pi/3$
	0	0	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$
	$-1/2$	$-\pi/6$	$2\pi/3$	$-1/\sqrt{3}$	$-\pi/6$	$2\pi/3$
	$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$	$3\pi/4$	-1	$-\pi/4$	$3\pi/4$
	$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$	$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$	$5\pi/6$
-1	$-\pi/2$	$\pi$				

Закінчення додатка 1

<i><b>Найпростіші тригонометричні рівняння</b></i>	
$\sin x = a,  a  \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a,  a  \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, \quad a \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a, \quad a \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
<i>Окремі випадки тригонометричних рівнянь</i>	
$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$	$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$
$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$	$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$
$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$	$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$
$\operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

## Додаток 2

### Основні формули вступу до математичного аналізу та теорії границь

Факторіал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n); \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$
Арифметична послідовність	$x_n = x_{n-1} + d = x_1 + (n-1)d,$ <p style="text-align: center;"><i>де <math>d</math> – різниця послідовності;</i></p> $S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n = \frac{2x_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$
Сума натуральних чисел	$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Геометрична послідовність	$x_n = x_{n-1} \cdot q = x_1 q^{(n-1)},$ <p style="text-align: center;"><i>де <math>q</math> – знаменник послідовності;</i></p> $S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}$
Границя геометричної послідовності	$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_1 q^{n-1} = \begin{cases} 0, &  q  < 1; \\ \infty \Leftrightarrow (\exists), &  q  \geq 1 \end{cases}$
Границя суми геометричної послідовності	$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \frac{x_1}{1-q}, &  q  < 1; \\ \infty \Leftrightarrow (\exists), &  q  \geq 1 \end{cases}$
Означення числа $e \approx 2,71828$	$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
Види невизначеностей	$\left  \frac{0}{0} \right , \left  \frac{\infty}{\infty} \right ,  0 \cdot \infty ,  \infty - \infty ,  1^\infty ,  \infty^0 ,  0^0 $
Границі експоненти	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
Границі показникових функцій	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad a > 1;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad 0 < a < 1$
Границі натурального логарифма	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$
Границі логарифмічних функцій	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty, \quad a > 1;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty, \quad 0 < a < 1$

Продовження додатка 2

Границі тангенса	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0 + k\pi} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0 + k\pi} \operatorname{tg} x = -\infty, k \in \mathbb{Z}$
Границі котангенса	$\lim_{x \rightarrow 0 + k\pi} \operatorname{ctg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \pi - 0 + k\pi} \operatorname{ctg} x = -\infty, k \in \mathbb{Z}$
Границі арктангенса та арккотангенса	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = +\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2};$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = \pi, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = 0$
Багаточлен (поліном) степені $n$	$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$
Властивість коренів багаточлена	Якщо $x_0$ – корінь полінома, тобто $P_n(x_0) = 0$ , то $P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x) = (x - x_0)(\tilde{a}_0 x^{n-1} + \tilde{a}_1 x^{n-2} + \dots + \tilde{a}_{n-1})$
Дробово-раціональна функція	$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m}$ , де $P_n(x), Q_m(x)$ – поліноми степенів $n$ та $m$ відповідно
Границя дробово-раціональної функції на нескінченності	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left  \frac{\infty}{\infty} \right  = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n a_0}{x^m b_0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m, \\ 0, & \text{при } n < m, \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$
Границя дробово-раціональної функції у точці	Якщо $P_n(x_0) = A, Q_m(x_0) = B$ , то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{B}$ ; якщо $P_n(x_0) = 0, Q_m(x_0) = B$ , то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$ ; якщо $P_n(x_0) = A, Q_m(x_0) = 0$ , то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty$ ; якщо $P_n(x_0) = 0, Q_m(x_0) = 0$ , то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left  \frac{0}{0} \right  = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)P_{n-1}(x)}{(x - x_0)Q_{m-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}$

Продовження додатка 2

Розкриття невичинченостi иррацiонального виразу доповненням до рiзницi квадратiв	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{\varphi(x)} = \left  \frac{0}{0} \right  = \left  \frac{(\sqrt{f} - \sqrt{g})(\sqrt{f} + \sqrt{g})}{\varphi(x)(\sqrt{f} + \sqrt{g})} \right  =$ $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{\varphi(x)(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})}$
Розкриття невичинченостi иррацiонального виразу доповненням до рiзницi кубiв	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{g(x)}}{\varphi(x)} = \left  \frac{0}{0} \right  =$ $= \left  \frac{(\sqrt[3]{f} - \sqrt[3]{g})(\sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{f} \cdot \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{g^2})}{\varphi(x)(\sqrt[3]{f^2} + \sqrt[3]{f} \cdot \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{g^2})} \right  =$ $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{\varphi(x)(\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g^2(x)})}$
Перша особлива границя	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left  \frac{0}{0} \right  = 1$
Висновки з першої особливої границі	<p>1) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1</math>;      3) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1</math>;</p> <p>2) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1</math>;      4) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1</math>.</p>
Друга особлива границя	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =  1^\infty  = e \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} =  1^\infty  = e$
Слiдства з другої особливої границі	<p>1) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1</math>;      3) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1</math>;</p> <p>2) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}</math>;      4) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a</math>;</p> <p>5) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu, \quad \mu \in R</math></p>
Зв'язок між нескiнченно малими та нескiнченно великими	<p>Якщо <math>\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha(x) = 0</math>, то <math>\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty</math> i навпаки,</p> <p>якщо <math>\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} y(x) = \infty</math>, то <math>\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{1}{y(x)} = 0</math></p>
Еквiвалентнi нескiнченно малi	<p>Якщо <math>\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left  \frac{0}{0} \right  = 1</math>, то <math>\alpha(x) \sim \beta(x)</math></p>



Закінчення додатка 2

Усунений розрив функції в точці	$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0) \text{ або}$ $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \text{ а } f(x_0) \text{ не існує}$
Розрив першого роду типу «стрибок»	$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A = \text{const}; \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = B = \text{const}; A \neq B$
Розрив другого роду, нескінченний	$\text{або } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty, \text{ або обидві}$ <p style="text-align: center;">границі дорівнюють нескінченності</p>

### Додаток 3

#### Основні формули до глави «Диференціальне числення функції однієї змінної»

Приріст функції $y = f(x)$	$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$ де $\Delta x$ – приріст аргументу
Похідна функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$	$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
Геометричний зміст похідної в точці $x = x_0$	Проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, f(x_0))$ . Тоді $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , де $\alpha$ – кут між дотичною та додатним напрямком осі $OX$
Механічний зміст похідної в точці $t = t_0$	Якщо $x = x(t)$ – закон руху точки, то $x'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} =$ $= V(t_0)$ – миттєва швидкість руху точки в момент часу $t_0$
Ліва похідна функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$	$y'_- = y'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta x = x - x_0 < 0$
Права похідна функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$	$y'_+ = y'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta x = x - x_0 > 0$
Необхідна та достатня умова існування похідної функції в точці	Якщо в точці існують ліва та права похідні і $y'(x_0 - 0) = y'(x_0 + 0)$ , то в цій точці існує похідна $y'(x_0)$
Основні правила диференціювання функцій $U = U(x), V = V(x),$ $C = \text{const}$	$C' = 0, \quad x' = 1, \quad (Cx)' = C$ $(U \pm V)' = U' \pm V' \Rightarrow (U \pm C)' = U'$ $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V' \Rightarrow (CU)' = CU'$ $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2} \Rightarrow \left(\frac{U}{C}\right)' = \frac{U'}{C}, \quad \left(\frac{C}{V}\right)' = -\frac{CV'}{V^2}$

Продовження додатка 3

Похідна складної функції $y = U(V(x))$	$y' = (U(V(x)))' = U'(V) \cdot V'(x)$
Похідна функції лінійного аргументу $y = f(ax + b)$	Якщо $(f(x))' = \varphi(x)$ , то $y' = (f(ax + b))' = a\varphi(ax + b)$
<b>Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій</b>	
<p>1) <math>(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}</math>, <math>\alpha \neq 0</math>, окремі випадки:  <math>(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}</math>, <math>(\sqrt[m]{x^m})' = \frac{m}{p} x^{\frac{m}{p}-1}</math>, <math>(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}</math>, <math>(\frac{1}{x^m})' = -mx^{-m-1}</math>;</p> <p>2) <math>(e^x)' = e^x</math>, <math>(a^x)' = a^x \ln a</math>, <math>a &gt; 0</math>;</p> <p>3) <math>(\ln x)' = \frac{1}{x}</math>, <math>(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}</math>, <math>a &gt; 0</math>;</p> <p>4) <math>(\sin x)' = \cos x</math>;</p> <p>5) <math>(\cos x)' = -\sin x</math>;</p> <p>6) <math>(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}</math>;</p> <p>7) <math>(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}</math>;</p> <p>8) <math>(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math>;</p> <p>9) <math>(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math>;</p> <p>10) <math>(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}</math>;</p> <p>11) <math>(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}</math>;</p> <p>12) <math>(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x</math> – похідна синуса гіперболічного;</p> <p>13) <math>(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x</math> – похідна косинуса гіперболічного;</p> <p>14) <math>(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}</math> – похідна тангенса гіперболічного;</p> <p>15) <math>(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}</math> – похідна котангенса гіперболічного</p>	

Продовження додатка 3

<p>Похідна степеневопоказникової функції <math>y = U(x)^{V(x)}</math></p>	$\ln y = V \ln U,$ $y'(x) = (U(x)^{V(x)})' = U^V \left( V' \ln U + \frac{V}{U} U' \right)$
<p>Логарифмічне диференціювання функції вигляду <math>y = \frac{\sqrt[q]{U^p} \cdot \sqrt[n]{V^k}}{\sqrt[m]{W^r}}</math></p>	$\ln y = \frac{p}{q} \ln U + \frac{k}{n} \ln V - \frac{r}{m} \ln W, \quad (\ln y)' = \frac{y'}{y},$ $y' = \frac{\sqrt[q]{U^p} \cdot \sqrt[n]{V^k}}{\sqrt[m]{W^r}} \left( \frac{p}{qU} U' + \frac{k}{nV} V' - \frac{r}{mW} W' \right)$
<p>Похідна оберненої функції <math>y = 1/f(x)</math></p>	$y' = (f^{-1}(x))' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
<p>Похідна функції, заданої параметрично</p>	<p>Якщо <math>\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}</math>, то <math>y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}</math></p>
<p>Похідні вищих порядків</p>	$y'' = (y'(x))',$ $y''' = (y''(x))', \dots, y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'$
<p>Правила обчислення похідних вищих порядків</p>	$(CU(x))^{(n)} = CU^{(n)};$ $(U(x) \pm V(x))^{(n)} = U^{(n)} \pm V^{(n)};$ $(U(x) \pm C)^{(n)} = U^{(n)}$
<p>Формула Лейбніца (похідні вищого порядку добутку функцій)</p>	$(U(x) \cdot V(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k U^{(n-k)} V^{(k)}, \text{ де}$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (U(x))^{(0)} = 1 \quad (V(x))^{(0)} = 1$ <p>Окремі випадки:</p> $(U(x) \cdot V(x))'' = U'' \cdot V + 2U' \cdot V' + V'' \cdot U$ $(UV)^{(3)} = U'''V + 3U''V' + 3U'V'' + VU'''$

Продовження додатка 3

<p>Похідні вищих порядків деяких елементарних функцій</p>	$\begin{cases} (x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}, & k < n, \\ (x^n)^{(n)} = n!, & k = n, \\ (x^n)^{(k)} = 0, & k > n \end{cases}$ $(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a;$ $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^n}, \quad (\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^n \ln a};$ $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right),$ $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$
<p>Друга похідна функції, заданої параметрично <math>x = x(t), y = y(t)</math></p>	$y''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$
<p>Диференціал функції</p>	$dy = f'(x_0) \Delta x, \text{ або } dy = f'(x_0) dx$
<p>Геометричний зміст диференціалу функції <math>y = y(x)</math> в точці <math>x = x_0</math></p>	<p>Диференціал дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці <math>M(x_0, y(x_0))</math>, при прирості аргументу <math>\Delta x</math></p>
<p>Властивості диференціала функцій <math>U = U(x), V = V(x), C = \text{const}</math></p>	$d(CU) = CdU; \quad d(U \pm C) = dU;$ $d(aU + b) = adU;$ $d(U \pm V) = dU \pm dV;$ $d(U \cdot V) = VdU + UdV; \quad d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}$
<p>Інваріантність форми першого диференціала</p>	<p>Якщо <math>z(x) = z(y(x))</math>, то</p> $dz = z'(y)dy = z'(y)y'(x)dx = z'(x)dx$
<p>Диференціали другого та вищих порядків</p>	$d^2 y(x) = d(dy) = y''(dx)^2 = y'' dx^2,$ $d^n y(x) = d(d^{n-1} y) = y^{(n)}(dx)^n = y^{(n)} dx^n$

Продовження додатка 3

Наближені обчислення за допомогою диференціала	$y(x) = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$
Рівнянні дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ , де $y_0 = f(x_0)$ ; якщо $f'(x_0) = 0$ , то $y = y_0$ , тобто дотична паралельна осі $OX$
Рівнянні нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ , де $y_0 = f(x_0)$ ; якщо $f'(x_0) = 0$ , то $x = x_0$ , тобто нормаль паралельна осі $OY$
Правило Лопітала розкриття невизначеностей виду $\left \frac{0}{0}\right $ або $\left \frac{\infty}{\infty}\right $	$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \left  \left  \frac{0}{0} \right , \left  \frac{\infty}{\infty} \right  \right  = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Розкриття невизначеностей вигляду $ 1^\infty $ , $ \infty^0 $ , $ 0^0 $	$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)^{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^A$ , де $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) \ln f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{(\ln f(x))'}{g'(x)}$
Необхідні та достатні умови зростання та спадання функції на проміжку $X$	Якщо $y'(x) > 0$ для $\forall x \in X$ , то $y = f(x)$ зростає; якщо $y'(x) < 0$ для $\forall x \in X$ , то $y = f(x)$ спадає, і навпаки: якщо $f(x)$ зростає, то $y'(x) > 0$ , якщо $f(x)$ спадає, то $y'(x) < 0$
Означення локального екстремуму функції	Якщо в околі точки $x_0$ приріст функції $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$ не змінює знак, то в цій точці функція має локальний екстремум.

Продовження додатка 3

Означення локального мінімуму функції	Якщо $\Delta y > 0$ для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , то $x_0 = x_{\min}$ та $y_{\min} = y(x_{\min})$
Означення локального максимуму функції	Якщо $\Delta y < 0$ для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , то $x_0 = x_{\max}$ та $y_{\max} = y(x_{\max})$
Необхідна умова існування екстремуму функції	Якщо в точці $x = x_0$ існує локальний екстремум, то похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує: $y'(x_0) = 0$ або $\nexists y'(x_0)$
Стаціонарні точки функції	Це множина точок, в яких похідна функції дорівнює нулю
Критичні точки функції	Множина стаціонарних точок, доповнена точками, в яких похідна функції не існує
Достатня умова існування екстремуму функції (перша форма)	Нехай функція існує в критичній точці і при переході через критичну точку похідна змінює знак, тоді в точці існує екстремум. Якщо $y' > 0$ для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $y' < 0$ для $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , то $x_0 = x_{\max}$ , $y_{\max} = y(x_{\max})$ . Якщо $y' < 0$ для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , і $y' > 0$ для $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , то $x_0 = x_{\min}$ , $y_{\min} = y(x_{\min})$
Друга форма достатніх умов існування екстремуму	Якщо в стаціонарній точці $y''(x_0) > 0$ , то в цій точці функція досягає мінімуму; якщо $y''(x_0) < 0$ , то в точці максимум, коли $y''(x_0) = 0$ , нічого стверджувати не можна
Умови опуклості та угнутості графіка функції на проміжку X	Якщо $y''(x) > 0$ для $\forall x \in X$ , то графік функції опуклий униз (опуклий) на проміжку X; якщо $y''(x) < 0$ для $\forall x \in X$ , то графік функції опуклий вверх (угнутий) на проміжку X
Критичні точки 2 роду	Точки, в яких $y''(x) = 0$ або не існує

Продовження додатка 3

Точки перегину графіка функції	Точки, в яких опуклість графіка функції змінюється на угнутість або навпаки
Необхідна умова існування точки перегину	Якщо графік функції має в точці $x_0$ перегін, то $y''(x_0) = 0$ або не існує $y''(x_0)$
Достатня умова існування перегину графіка	Нехай функція існує в критичній точці і при переході через неї друга похідна змінює знак, тоді це точка перегину графіка функції
Достатня умова існування екстремуму або точки перегину (третя форма)	Нехай в точці $x_0$ існує не менш, ніж $n$ похідних, та перші $(n - 1)$ похідні дорівнюють нулю в $x_0$ , тобто $y'(x_0) = y''(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ , а $y^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Тоді, якщо $n = 2k - 1$ , то в точці перегін графіка, якщо ж $n = 2k$ , то в точці екстремум, причому максимум при $y^{(2k)}(x_0) < 0$ та мінімум при $y^{(2k)}(x_0) > 0$
Рівняння похилих та горизонтальних асимптот графіка функції	$y = kx + b$ , де $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$ ; $y = \tilde{k}x + \tilde{b}$ , де $\tilde{k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , $\tilde{b} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$ ; якщо $k = 0$ ( $\tilde{k} = 0$ ), то маємо горизонтальну асимптоту $y = b$ ( $y = \tilde{b}$ )
Вертикальні асимптоти	$x = x_0$ – точки розриву функції 2 роду
Формула Тейлора для багаточлена або розкладення многочлена за степенями $(x - x_0)$	Якщо $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ , то $P_n(x) = P_n(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

Закінчення додатка 3

<p>Формула Тейлора для функції або розкладення функції за степенями <math>(x - x_0)</math></p>	$y(x) = y(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x),$ <p>де <math>R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)</math> – залишок у формі Піано</p>
<p>Формула Маклорена або розкладення функції за степенями <math>x</math></p>	$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x),$ <p>де <math>R_{n+1}(x) = o(x^n)</math> – залишок у формі Піано</p>
<p><b>Таблиця розвинення деяких функцій за степенями <math>x</math></b></p>	
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$ $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$	

## Список літератури

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный. – М., 2009.
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986.
3. Шипачев В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – М., 2005.
4. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1973.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1972.
6. Рябушко А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 1 / А. П. Рябушко, В. В. Бархотов, В. В. Державец, И. Е. Юреть. – Минск : Высш. шк., 1991.
7. Лунгу К. Н. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – М., 2010.
8. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов / Л. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1983.
9. Вища математика в прикладах та задачах. Т. 1 : навч. посіб. / за ред. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2009.
10. Смышляева Т. В. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Индивидуальные задания. / Т. В. Смышляева. Пермь, ПГТУ, 2007.

## Зміст

Вступ .....	3
Глава 1. Вступ до математичного аналізу. Границі та неперервність функції однієї змінної .....	5
§1. Множини .....	5
1.1. Логічні символи .....	5
1.2. Множини. Основні поняття .....	5
1.3. Числові множини. Множина дійсних чисел .....	6
1.4. Числові проміжки. Окіл точки .....	7
§2. Функції .....	8
2.1. Поняття функції. Графік функції. Способи завдання функцій ...	8
2.2. Основні властивості функцій .....	9
2.3. Обернена функція .....	10
2.4. Складна функція .....	11
2.5. Основні елементарні функції та їхні графіки .....	11
§3. Послідовності .....	17
3.1. Числова послідовність .....	17
3.2. Границя числової послідовності .....	19
3.3. Граничний перехід у нерівностях .....	21
3.4. Границя монотонної обмеженої послідовності. Число $e$ .....	22
§4. Границя функції .....	24
4.1. Границя функції у точці .....	24
4.2. Однобічні границі .....	26
4.3. Границя функції при $x \rightarrow \infty$ .....	27
4.4. Нескінченно велика функція (н.в.ф) .....	27
§5. Нескінченно малі функції .....	29
5.1. Визначення .....	29
5.2. Основні теореми про властивості нескінченно малих .....	29
5.3. Основні властивості границь функцій .....	32
5.4. Перша особлива границя .....	36
5.5. Друга особлива границя .....	38
§6. Еквівалентні нескінченно малі функції .....	40
6.1. Порівняння нескінченно малих функцій .....	40
6.2. Основні теореми про нескінченно малі .....	41

§7. Неперервність функцій .....	44
7.1. Неперервність функції в точці .....	44
7.2. Класифікація точок розриву .....	46
7.3. Неперервність функції на інтервалі та на відрізку .....	49
7.4. Основні теореми про неперервні функції. Неперервність елементарних функцій .....	49
7.5. Властивості функцій, що є неперервними на відрізку .....	50
Приклад розв'язання варіанта 31 з контрольних завдань до розділу 1...	51
Варіанти обов'язкового домашнього завдання .....	58
Глава 2. Диференціальне числення функції однієї змінної .....	75
§1. Похідна функції .....	75
1.1. Похідна. Диференціювання явно заданих функцій .....	75
1.2. Правила диференціювання функцій .....	78
1.3. Похідна складної функції .....	80
1.4. Похідна оберненої функції .....	81
§2. Логарифмічне диференціювання. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично .....	85
2.1. Логарифмічне диференціювання .....	85
2.2. Диференціювання функцій, заданих неявно або параметрично .....	87
§3. Похідні вищих порядків .....	89
§4. Геометричний та механічний зміст похідної .....	91
§5. Диференціал .....	94
5.1. Диференціал. Основні формули .....	94
5.2. Геометричний зміст диференціала .....	96
5.3. Диференціали вищих порядків .....	98
§6. Дослідження функцій за допомогою похідних .....	99
6.1. Дослідження функцій за допомогою похідних .....	99
6.2. Правила Лопітала. Розкриття невизначеностей різних видів .....	103
6.3. Зростання та спадання функцій. Екстремуми .....	108
6.4. Найбільше та найменше значення функції .....	112
6.5. Умови опуклості й угнутості функції .....	115
6.6. Асимптоти .....	117

6.7. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка.....	119
§7. Формула Тейлора .....	122
7.1. Формула Тейлора .....	122
7.2. Формула Тейлора для довільної функції .....	123
Приклад розв'язання контрольного завдання до розділу 2 .....	125
Варіанти обов'язкового домашнього завдання .....	140
Зразки варіантів контрольних робіт з теми «Теорія границь» .....	179
Зразки варіантів контрольних робіт з теми «Диференціювання функції однієї змінної» .....	182
Зразки варіантів контрольних робіт з теми «Дослідження функцій за допомогою похідних» .....	185
Варіанти тестових завдань до глави 1 «Границі та неперервність функції однієї змінної» .....	188
Варіанти тестових завдань до глави 2 «Диференціальне числення функції однієї змінної» .....	195
Питання до іспиту з вищої математики .....	202
ДОДАТКИ .....	205
Додаток 1. Основні формули елементарної математики .....	205
Додаток 2. Основні формули вступу до математичного аналізу та теорії границь .....	215
Додаток 3. Основні формули до глави «диференціальне числення функції однієї змінної» .....	220
Список літератури .....	228

Навчальне видання

**Стислий курс вищої математики  
Частина II**

**Математичний аналіз.  
Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної.**

Навчальний посібник  
для студентів технічних університетів

ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна  
ОДИНЦОВА Олена Володимирівна  
КИРИЛЛОВА Наталія Олександрівна  
ЛЮБИЦЬКА Катерина Ігорівна

Роботу до видання рекомендував проф. Д. В. Бреславський

Редактор О.С. Самініна

Підп. до друку 01.11.2021. Формат 60x84/16.

Друк цифровий.

Ум. друк. арк. – 13,5. Наклад 100 пр. Зам. №01-11.

Видавництво та друк

ФОП Іванченко І. С.

пр. Тракторобудівників, 89-а/62, м.Харків, 61135.

Тел.: +38 (050/093) 40-243-50.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів  
видавничої продукції серія ДК №4388 від 15.08.2012 р.

[www.monograf.com.ua](http://www.monograf.com.ua)