МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Методичні вказівки до практичних занять
та самостійної підготовки з курсу «Теоретична механіка»
для студентів НТУ «ХПІ»
спеціальностей 131 "Прикладна механіка" та
133 «Галузеве машинобудування»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол № 1 від
25.05.22 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

Кінематика точки. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної підготовки до з курсу «Теоретична механіка» для студентів НТУ «ХПІ» спеціальностей 131 "Прикладна механіка" та 133 «Галузеве машинобудування»/ уклад. Г.О. Аніщенко, Д.В. Лавінський – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – 52 с.

Укладачі Г. О. Аніщенко, Д. В. Лавінський

Рецензент Є. І. Дружинін

Кафедра теоретичної механіки
та опору матеріалів

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для закріплення у студентів знань з теоретичної механіки та їх використання в практичній роботі. В методичних вказівках подано матеріали з теоретичної механіки за розділом «Кінематика точки». Розглянуто загальні положення кінематики, наведено стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, а також варіанти завдань для самостійної роботи. Особливу увагу приділено отриманню студентами навичок і вмінь при розв'язанні практичних задач і самостійній підготовці.

Теоретична механіка – наука, яка вивчає загальні закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл. Вона має велике значення для якісної підготовки інженерних кадрів в різних галузях техніки, оскільки є фундаментальною наукою для багатьох спеціальних технічних дисциплін (опір матеріалів, деталі машин, теорія машин та механізмів тощо). Теоретична механіка побудована на законах Ісаака Ньютона, а також на аксіомах, справедливість яких перевірена багатовіковою практичною діяльністю людини в галузі механіки.

У загальному випадку рух є однією з форм існування матерії. У теоретичній механіці вивчають один з видів руху – механічний рух, тобто зміну положення в просторі одного твердого тіла з плином часу відносно будь-якого іншого тіла. Слід зазначити, що стан спокою є окремим випадком механічного руху, тому в теоретичній механіці вивчають також рівновагу матеріальних об'єктів. Під механічною взаємодією розуміють дії матеріальних тіл один на одного, в результаті яких змінюється характер їх механічного руху або форма. Основною мірою механічної взаємодії тіл є сила, що визначає інтенсивність і напрям цієї взаємодії.

Історично загальний курс теоретичної механіки поділяється на три розділи: «Кінематика», «Статика», «Динаміка».

Статика – розділ механіки, в якому викладають загальне вчення про сили, вивчають методи еквівалентного перетворення систем сил, а також умови рівноваги матеріальних твердих тіл під дією сил.

Кінематика – розділ механіки, в якому вивчають геометричні властивості руху тіл без урахування їх маси і діючих сил.

Динаміка – розділ, в якому вивчають рух матеріальних об'єктів під дією прикладених до них сил.

Підвалини сучасної кінематики були закладені ще в XVI сторіччі Галілео Галілеєм, який першим установив закони вільного падіння та руху тіл, що кинуті під кутом до обрію. Але особливо значний внесок було зроблено Ісаком Ньютоном у його ґрунтовній праці «Математичні начала натуральної філософії» (1687). У ній видатний вчений вперше сформулював свої відомі закони класичної механіки і розробив сучасні математичні підходи щодо визначення швидкостей і пришвидшень точок тіл, які рухаються. Подальші дослідження в цій царині пов'язані з іменами вчених XVII–XX століть – Х.Гюйґенса, Р.Декарта, Ж.Лаґранжа, Ж.Даламбера, М.Остроградського, І.Жуковського та багатьох інших.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИКИ

Кінематика – важливий розділ теоретичної механіки, в якому вивчають геометричні властивості руху матеріальних об'єктів (точки і твердого тіла) без урахування їх інерційних характеристик і діючих сил.

В цьому розділі наповнюються чітким фізичним сенсом такі поняття, як траєкторія, швидкість, пришвидшення, що характеризують рух окремої точки тіла, а також встановлюють зв'язки між ними. При цьому кінематика не цікавиться причинами руху, тобто силами.

Кінематика є вступом до динаміки: без знання головних кінематичних понять і закономірностей неможливе вивчення руху тіл під дією сил. З іншого боку, методи кінематики мають самостійне значення для дослідження рухів механізмів та машин.

Рух в кінематиці розглядають як зміну положення тіла в просторі з часом відносно обраної системи відліку. Система відліку включає тіло відліку (рух тіла завжди вивчають стосовно якого-небудь іншого тіла, яке вважають нерухомим), пов'язану з ним систему координат і годинник для виміру часу. У теоретичній механіці як основну використовують геліоцентричну інерціальну систему відліку, пов'язану з Сонцем. Проте при рішенні багатьох практичних завдань застосовують і систему відліку, пов'язану із Землею.

Рух тіл відбувається з плином часу у просторі. У класичній механіці Галілея–Ньютона простір, в якому вивчають рух тіл, вважають тривимірним, евклідовим, абсолютним, однорідним і ізотропним. Властивості простору не залежать від часу і тіл, які рухаються в цьому просторі, вони однакові в усіх точках і напрямках. Отже, підвалинами, на яких будується кінематика, є аксіоми евклідової геометрії.

Час є скалярною величиною, яка безперервно змінюється, і спрямований від сьогодення до майбутнього. Окрім того, вважається, що плин часу відбувається однаково в усіх рухомих і нерухомих системах відліку. В теоретичній механіці дотримуються поглядів І.Ньютона на час і простір і вважають ці категорії абсолютними.

Треба пам'ятати, що евклідовий простір та абсолютний (універсальний) час лише наближено відображають реальні властивості простору та часу. На початку ХХ століття з'являється релятивістська механіка, яка базується на теорії відносності. А.Ейнштейну (1879–1955) вдалося уточнити класичні поняття часу, простору й узагальнити закони механіки на рухи зі швидкостями, близькими до швидкості світла.

У теорії відносності Ейнштейна властивості простору залежать від матеріальних об’єктів і їх руху, а простір і час пов’язані між собою і розглядаються як єдиний чотиривимірний простір – час. При цьому час залежить від того, в якій системі відліку він змінюється. Поправки і зміни, що вносяться теорією відносності в закони класичної механіки, стають відчутними тільки при великих швидкостях, близьких до швидкості світла, а також для тіл, розміри яких мають порядок атомів. Це вносить украй незначну похибку в розрахунки елементів машин і механізмів, які розглядаються в даному курсі.

Кінематика поділяється на кінематику точки і кінематику твердого тіла. Вивченню кінематики твердого тіла передує розгляд кінематики окремої точки.

Якщо при вивченні руху тіла його формою і розмірами можна нехтувати, то таке тіло ототожнюють з матеріальною точкою, тобто з геометричною точкою, в якій умовно вважається зосередженою вся маса тіла. У інших випадках тіло розглядають як абсолютно тверде, форму і розміри якого приймають незмінними. Абсолютно твердим тілом називають таке тіло, відстань між будь-якими двома точками якого при русі не змінюється.

Основними завданнями кінематики є:

1) встановити закон руху, тобто вказати спосіб визначення положення точки або тіла в просторі у будь-який момент часу стосовно обраної системи відліку;

2) за заданим законом руху визначити усі кінематичні характеристики руху.

Для точки кінематичними характеристиками руху є траєкторія, швидкість і пришвидшення, для абсолютно твердого тіла – кутова швидкість і кутове пришвидшення самого тіла, а також траєкторія, швидкість і пришвидшення будь-якої його точки.

Для вивчення кінематики потрібні знання математики у рамках аналітичної геометрії, математичного аналізу і векторної алгебри.

У даних методичних вказівках містяться стислі теоретичні відомості з розділу "Кінематика точки". Методичні вказівки сприяють розвитку і закріпленню у майбутніх інженерів практичних навичок розв’язання різноманітних завдань кінематики точки.

2. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кінематика точки – це розділ кінематики, в якому досліджують механічний рух матеріальної точки. Поняття матеріальної точки і геометричної точки в кінематиці збігаються, оскільки масу точки не враховують. Тому надалі вживатимемо термін «точка».

Основне завдання кінематики точки полягає в наступному:

1) задати закон руху точки, тобто вказати правило, відповідно до якого можна однозначно визначити положення точки в просторі у будь-який момент часу відносно обраної системи відліку;

2) за заданим законом руху точки визначити усі кінематичні характеристики її руху.

До характеристик руху точки відносять її *траєкторію, швидкість і пришвидшення*. *Траєкторія* точки – безперервна просторова крива, яку точка описує в процесі руху. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то рух точки називають *прямолінійним*, якщо траєкторія точки крива, то – *криволінійним*.

2.1. Способи завдання руху точки

Для вирішення завдань кінематики необхідно, щоб рух, який вивчається, був заданий. Рух вважається заданим, якщо у будь-який момент часу однозначно можна визначити положення точки в просторі відносно заданої системи відліку. Використовують три основні способи завдання руху точки : *векторний, координатний і природний*.

Векторний спосіб. Положення в просторі точки *M*, що рухається, у будь-який момент часу можна визначити за допомогою її радіус-вектора, проведеного з центра *O*, пов’язаного з тілом відліку, в точку *M* (рис. 2.1). При русі точки радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється за величиною і напрямком, отже є функцією часу *t*. Тобто, щоб задати рух векторним способом, необхідно визначити векторну функцію часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{2.1}$$

Залежність (2.1) називається *кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі*. Початок радіус-вектора точки знаходиться в точці *O*, а кінець його переміщується по траєкторії разом з точкою *M*.

Геометричне місце кінців радіус-вектора $\vec{r}$, тобто *годограф* цього вектора, визначає траєкторію руху точки.

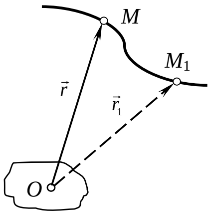


Рисунок 2.1

Координатний спосіб. З тілом відліку пов'язують, наприклад, прямокутну систему декартових координат. У цьому випадку положення точки визначають її координатами (рис. 2.2), які є скалярними функціями часу:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

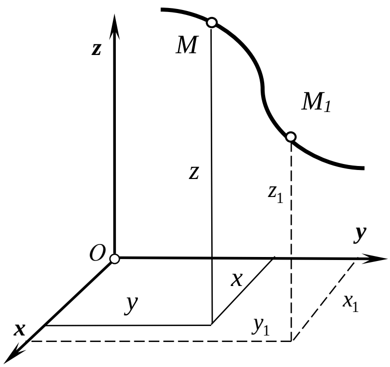


Рисунок 2.2

Рівняння (1.2) називають *рівняннями руху точки в координатній формі*. Як відомо з курсу аналітичної геометрії, ці залежності є одночасно і параметричними рівняннями траєкторії точки. Вилучивши з цих рівнянь параметр – час t, можна отримати рівняння траєкторії руху точки в координатній формі.

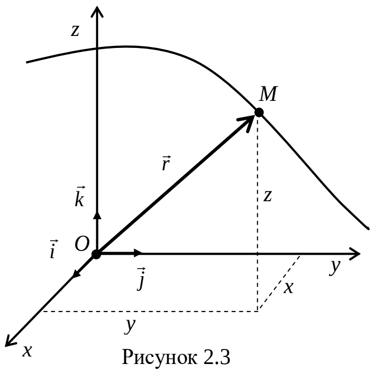


Рисунок 2.3

Між способами завдання руху точки є взаємозв'язок. Так, якщо початок декартової системи координат збігається з нерухомим центром, з якого проводиться радіус-вектор точки при векторному способі вивчення її руху (рис. 2.3), то координати точки M дорівнюють проекціям на відповідні осі радіус-вектора цієї точки:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{2.3}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні орти координатних осей.

Зазначимо, що крім декартової системи координат застосовуються й інші – криволінійні системи координат, зокрема полярні, циліндричні, сферичні тощо.

Порівнюючи розглянуті способи задавання руху точки, можна прийти до таких висновків: перевагою першого є те, що рух у будь-якому випадку описується лише одним рівнянням (2.1), а недоліком – що воно векторне. Тому для розв'язування конкретних задач кінематики найчастіше використовують скалярні рівняння координатного способу в формі (2.2), а в теоретичних дослідженнях для доведення, наприклад, теорем – одним рівнянням векторного способу.

Натуральний спосіб. Цей спосіб використовують в тих випадках, коли заздалегідь відома траєкторія точки (наприклад, траєкторія руху рейкових транспортних засобів). На траєкторії вибирають нерухому точку O (початок відліку), а також додатний і від'ємний напрямки відліку відстаней точки від початку відліку (рис. 2.4). Тоді траєкторію можна розглядати, як криволінійну вісь, а положення M рухомої точки на ній у момент часу t характеризувати дуговою координатою S. Отже, за своїм сенсом S – це взята зі знаком „+" або „-" віддаль від M до початку відліку O.

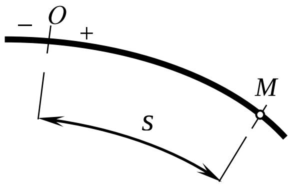
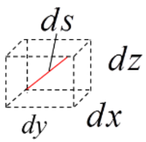


Рисунок 2.4

Отже, положення точки M на траєкторії однозначно визначатиметься залежністю дугової (криволінійної) координати $S = OM$ від часу:

$$S = S(t). \tag{2.4}$$

Рівняння (1.3) визначає *закон руху точки вздовж траєкторії*, але не визначає положення точки у просторі. Зауважимо, що у загальному випадку значення дугової координати S не дорівнює шляху, який пройшла точка. Ці значення збігаються тільки тоді, коли рух точки починається з початку відліку O і відбувається в одному напрямку по незамкненій траєкторії.



Приріст дугової координати $\boldsymbol{dS}$, який дорівнює диференціалу дуги $\boldsymbol{S}$, пов'язаний з диференціалами координат точки $\boldsymbol{dx, dy, dz}$ формулою з курсу диференціальної геометрії:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ ,$$

або

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,\frac{dt}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\ .$$

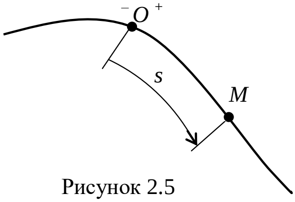


Рисунок 2.5

Інтегруючи вираз в проміжку від t_0=0 до поточного значення t, отримаємо *зв'язок між координатним і природним способами*:

$$S = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt + C\,, \qquad (2.5)$$

де $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – перші похідні від координат точки за часом; C – постійна інтегрування, яка залежить від початкових умов. Якщо початок відліку дугової координати (рис. 2.5) збігається з початковим положенням точки на траєкторії, то у формули (2.5) покладемо C=0.

Знак «+» або «-» перед інтегралом ставлять залежно від напрямку руху точки: якщо точка рухається в бік додатного напрямку відліку дугової координати, то ставлять знак «+», якщо в протилежному напрямку – «-».

Недоліком розглянутого способу задавання руху є те, що треба наперед до розв'язання завдання знати траєкторію точки або мати можливість легко її встановити, а перевагою – наявність лише одного скалярного рівняння руху. Ці чинники і визначають сферу використання природного способу.

Розглянемо декілька прикладів визначення траєкторії точки для випадку її руху на площині.

Приклад 1. Нехай точка рухається за законом $x = 4t^2 - 1,\ \ y = 2t$.

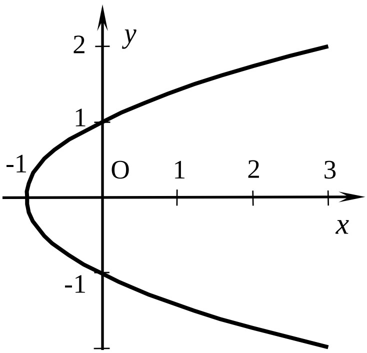


Рисунок 2.6

Треба визначити її траєкторію в координатній формі.

Траєкторія точки задана параметрично. Щоб відшукати її у вигляді залежності між координатами треба виключити час t із рівнянь руху. Найкраще це зробити так: визначити t з другого рівняння і підставити в перше.

Маємо $t=y/2$. Отже, $x=y^2-1$.

Таким чином траєкторією точки, що рухається, є парабола (рис.2.6), гілки якої спрямовані в дотичному напрямі осі x-ів, а вершина розташована в точці (-1;0).

Приклад 2. Точка рухається за законом $x=\cos^2(kt)$, $y=2\sin^2(kt)$. Визначити її траєкторію в координатній формі.

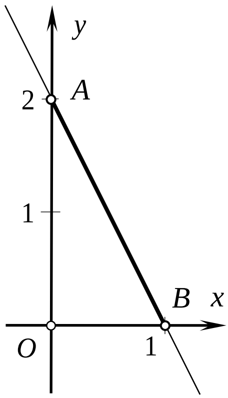


Рисунок 2.7

Для встановлення траєкторії точки в координатній формі запишемо друге рівняння у вигляді

$$\frac{y}{2}=\sin^2(kt)$$

і додамо до першого

$$\frac{y}{2}+x=\sin^2(kt)+\cos^2(kt).$$

Але $\sin^2(kt)+\cos^2(kt)=1$ і отримане рівняння приводиться до вигляду

$$y=-2x+2.$$

Отже, перший висновок, до якого приходимо, це те, що траєкторія точки – пряма лінія. Але тут не все так просто і в аналогічних випадках треба бути дуже уважним. Якщо придивимося до умов задачі, то зрозуміємо, що траєкторією буде не вся пряма, а лише виділена ділянка *AB* (рис. 2.7). Це пояснюється тим, що зі зміною t від $-\infty$ до $+\infty$ значення тригонометричних функцій $\sin^2(kt)$, $\cos^2(kt)$ будуть змінюватися лише в межах від 0 до а +1, отже, і можливі координати точки лежатимуть у певному інтервалі. Так, із рівнянь руху легко встановити, що, наприклад, мінімальне і максимальне значення у координати x буде:

$$x_{\min}=0;\ x_{\max}=1.$$

Ці числа і визначають кінці ділянки *AB* прямої $y=-2x+2$. В межах цієї ділянки і буде рухатися точка.

У розглянутих прикладах рівняння руху були задані наперед. Але на практиці в більшості випадків їх треба встановити, вивчаючи, наприклад, рух тіла, якому належить точка, або тіла, що кінематично з ним пов'язане. Розглянемо один із таких випадків.

Приклад 3. Визначити траєкторію точки *M,* що лежить на середині шатуну *AB* кривошипно-шатунного механізму (рис. 2.8), якщо кут φ між кривошипом *OA* і віссю *Ox* змінюється за законом $\varphi = kt$, а $OA = AB = 2a$ (тут „ a ” і „ k ”– числові параметри).

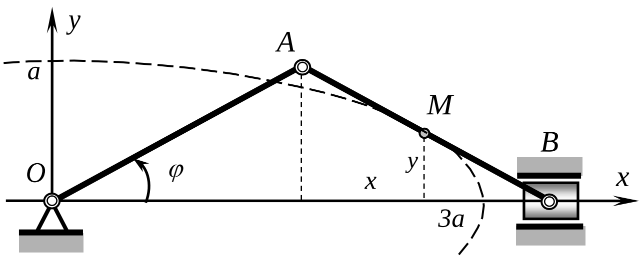


Рис. 2.8

Подамо спочатку координати точки *M*, як функції φ. З рисунка 2.8 маємо

$$x = OA\cdot\cos\varphi + AM\cdot\cos\varphi = 3a\cdot\cos\varphi; \qquad y = MB\cdot\sin\varphi = a\cdot\sin\varphi.$$

Якщо тепер покласти $\varphi = k\cdot t$, то отримаємо закон руху точки *M*

$$x = 3a\cdot\cos(kt); \qquad y = a\cdot\sin(kt).$$

Щоб встановити траєкторію точки *M*, треба виключити час t із цих рівнянь. Для цього запишемо їх у вигляді

$$\frac{x}{3a} = \cos(kt); \qquad \frac{y}{a} = \sin(kt) .$$

Тепер треба піднести ліві й праві частини до другого ступеня і додати одне до одного:

$$\frac{x^2}{(3a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2(kt) + \sin^2(kt).$$

Як відомо із шкільного курсу математики, тригонометричний вираз, що стоїть із правого боку отриманого рівняння, дорівнює одиниці. Отже, рівняння траєкторії точки M має вигляд

$$\frac{x^2}{(3a)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Це еліпс із центром в O . Його мала піввісь дорівнює „ a”, а велика – „$3a$” (на рисунку 2.8 траєкторію показано пунктирною лінією).

2.2. Швидкість точки

Основна задача кінематики точки полягає в тому, щоб, знаючи закон руху точки, визначити основні кінематичні характеристики її руху. Однією з основних кінематичних характеристик руху точки є швидкість точки.

Швидкість точки – це векторна величина, яка характеризує інтенсивність і напрям руху точки в просторі в даний момент часу.

Визначимо швидкість точки за різних способів завдання її руху.

2.2.1. *Визначення швидкості точки за векторного способу завдання її руху*

Розглянемо точку, яка рухається по деякій кривій і у момент часу t перебуває в положенні M, якому відповідає радіус-вектор $\vec{r}$ (рис. 2.9). Треба встановити швидкість точки саме в цю мить.

Через досить малий проміжок часу Δt точка переміститься в нове положення M_1, якому відповідає радіус-вектор $\vec{r}_1=\vec{r}+\Delta\vec{r}$, де $\Delta\vec{r}$ – приріст радіус-вектора $\vec{r}$.

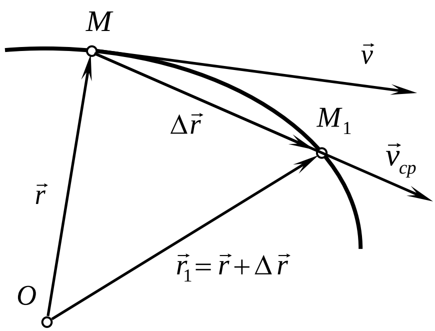


Рисунок 2.9

Замінимо наближено непрямолінійний і нерівномірний рух дугою MM_1 рівномірним і прямолінійним рухом хордою MM_1. Тоді переміщення точки за проміжок часу Δt можна визначити вектором, який буде напрямлений по хорді MM_1: $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$.

Тобто вектор переміщення $\overrightarrow{MM_1}$ є приростом $\Delta\vec{r}$ радіус-вектора $\vec{r}$ точки за проміжок часу Δt .

Введемо поняття про середню швидкість точки за деякий проміжок часу. *Середньою швидкістю точки* називається відношення вектора переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt , за який відбулося це переміщення:

$$\vec{v}_{\text{сер}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} . \tag{2.6}$$

Вектор $\vec{v}_{сер}$ напрямлений за січною MM_1 траєкторії в бік руху точки і лише наближено характеризує швидкість точки в положенні M.

Зрозуміло, що чим менший проміжок Δt , тим точніше середня швидкість характеризуватиме дійсний рух точки. Щоб одержати точне значення швидкості точки в заданий момент часу t слід перейти до границі, до якої прямує $\vec{v}_{сер}$ при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} .$$

Отже, ***вектор швидкості точки в заданий момент часу дорівнює першій похідній за часом від її радіус-вектора***:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} . \tag{2.7}$$

Тут і нижче крапкою над змінною позначатимемо похідну за t .

При прагненні Δt до нуля точка M_1 наближається до точки M, і хорда MM_1 в границі займає положення дотичної до траєкторії. Отже, *вектор швидкості точки $\vec{v}$ прикладений до самої точки і напрямлений за дотичною до траєкторії в бік руху точки*.

Одиниця виміру швидкості в системі СІ є метр за секунду (м / с).

Перейдемо тепер до визначення швидкості точки за координатного способу задавання руху.

2.2.2. Визначення швидкості точки за координатного способу завдання її руху

При координатному способі завдання руху точки її швидкість визначають за проекціями вектору швидкості на осі вибраної системи координат.

Дійсно, якщо точка рухається в системі координат *Oxyz* згідно з рівняннями (2.2), то її радіус-вектор має вигляд $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

За визначенням швидкості відповідно до формули (2.7) маємо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\ , \tag{2.8}$$

де орти осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ не змінюються з часом ні за величиною ні за напрямком, тобто є сталими величинами.

Тепер, розклавши вектор швидкості точки по ортах координатних осей, одержимо

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}\ , \tag{2.9}$$

де v_x, v_y, v_z – проекції вектора швидкості на координатні осі.

Порівнюючи формули (2.8) і (2.9), знаходимо

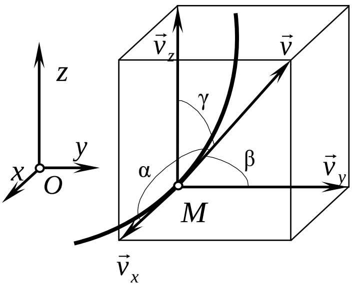
$$\begin{cases} v_x = \dot{x}, \\ v_y = \dot{y}, \\ z_x = \dot{z}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Отже, ***проекції вектора швидкості точки на осі декартової системи координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат***.

За цими проекціями можна визначити модуль вектора швидкості $\vec{v}$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ , \tag{2.11}$$

а також його напрямок за допомогою напрямних косинусів:



$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{v_x}{|\vec{v}|}; \\ \cos\beta = \dfrac{v_y}{|\vec{v}|}; \\ \cos\gamma = \dfrac{v_z}{|\vec{v}|}, \end{cases} \qquad (2.12)$$

Рисунок 2.10

де α, β, γ – кути між напрямком вектора $\vec{v}$ й додатними напрямками осей *Ox*, *Oy*, *Oz*. На рисунку 10 подано розкладення вектора швидкості $\vec{v}$ на складові $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$, $\vec{v}_z$, що напрямлені рівнобіжно осям.

Формули (2.10) – (2.12) аналітично визначають вектор швидкості точки в декартовій системі координат.

Приклад 4. Точка рухається за законом

$$x = 2\sin\frac{\pi}{4}t \text{ м}, \qquad y = -4\cos^2\frac{\pi}{4}t + 3 \text{ м}.$$

Встановити траєкторію точки й для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити її положення в просторі й швидкість.

Щоб встановити траєкторію, піднесемо ліву й праву частини першого рівняння до квадрата й віднімемо від другого рівняння

$$y - x^2 = -4\left(\cos^2\frac{\pi}{4}t + \sin^2\frac{\pi}{4}t\right) + 3.$$

Вираз, що стоїть у дужках, дорівнює одиниці. Отже, остаточно отримуємо таке рівняння траєкторії:

$$y = x^2 - 1.$$

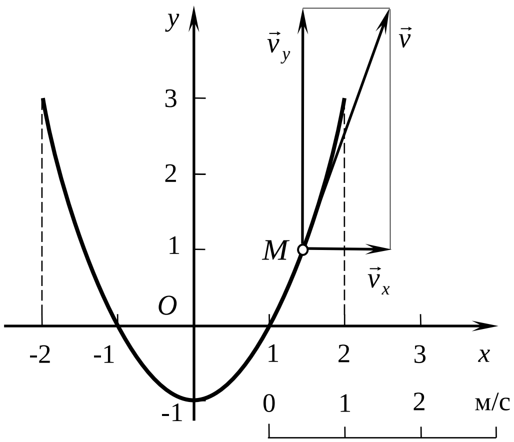


Рисунок 2.11

Синус може змінюватись лише в межах від -1 до +1. Таким чином, мінімальне й максимальне значення абсциси точки, що рухається, будуть такими:

$$x_{\min} = -2 \text{ м}, \qquad x_{\max} = 2 \text{ м}.$$

Аналогічно визначаємо, що

$$y_{\min} = -1 \text{ м}, \qquad y_{\max} = 3 \text{ м}.$$

Отримане рівняння та межі, в яких може рухатися точка, дозволяють накреслити її траєкторію (рис. 2.11).

Визначимо тепер координати точки в момент часу $t = t_1$, які позначатимемо символами x_1, y_1.

Маємо

$$x_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t_1\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \approx 1.414 \text{ м};$$

$$y_1 = -4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}t_1\right) + 3 = -4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 = 1 \text{ м}.$$

Цим координатам відповідає позиція M рухомої точки на траєкторії.

Для визначення швидкості точки скористаймося залежностями (16):

$$v_x = \dot{x} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \text{ м/с};$$

$$v_y = \dot{y} = 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ м/с.}$$

У момент часу $t = t_1$ проекції вектора швидкості на координатні осі та його модуль будуть такими:

$$t = t_1, \quad v_x = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t_1\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11 \text{ м/с};$$

$$v_y = \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t_1\right) = \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \approx 3.14 \text{ м/с};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1.11^2 + 3.14^2} = 3.33 \text{ м/с}.$$

Тепер можна вибрати мірило для швидкостей і накреслити вектор $\vec{v}$ за його складовими $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$. Напрямки цих складових встановлюємо за знаками їх проекцій. Так, наприклад, проекція вектора $\vec{v}_y$ на вісь y-ів – додатне число, а сам він рівнобіжний (паралельний) осі Oy. Отже, $\vec{v}_y$ має бути спрямований у її додатний бік.

2.2.3. Визначення швидкості точки за натурального способу завдання її руху

Будемо вважати, що рух точки задано у натуральній формі, тобто відомі траєкторія та закон руху точки вздовж траєкторії $S = S(t)$. Положенню точки M на траєкторії відповідає радіус-вектор $\vec{r}$ (рис. 2.12), який є функцією дугової координати , тобто $\vec{r} = \vec{r}(S)$. Припустимо, що за час Δt радіус-вектор точки отримав приріст $\Delta\vec{r}$, а координата S – відповідний приріст ΔS.

Оскільки дугова координата є функцією часу, то радіус-вектор $\vec{r}$ буде складною функцією часу $\vec{r} = \vec{r}\left(S\right) = \vec{r}\left[S(t)\right]$. Тому формулу для визначення швидкості точки (2.7) подамо у вигляді:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dS}. \qquad (2.13)$$

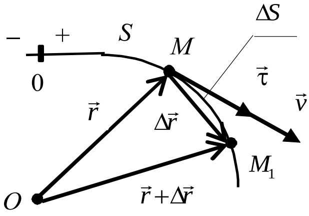


Рисунок 2.12

Розглянемо вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$. Як відомо з диференціальної геометрії, границя відношення дуги ΔS до хорди MM_1, що її стягує, за модулем дорівнює одиниці

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \right| = 1,$$

а граничне положення січної MM_1 збігається з дотичною до кривої в точці M, тому

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau}, \qquad (2.14)$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до кривої, напрямлений в бік зростання дугової координати S.

З урахуванням (2.14) формулу (2.13) можна записати у вигляді

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau} = \dot{S} \vec{\tau}. \qquad (2.15)$$

Таким чином, за натурального способу завдання руху точки вектор її швидкості визначається за формулою

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}, \qquad (2.16)$$

де скалярну величину v_τ називають *алгебраїчним* (*чисельним*) *значенням швидкості точки* або просто швидкістю.

$$v_\tau = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \qquad (2.17)$$

Насправді за своєю сутністю $v = v_\tau$ дорівнює проекції вектора швидкості $\vec{v}$ на вісь, що спрямована за дотичною до траєкторії в бік, заданий ортом $\vec{\tau}$ (рис. 2.13). Знак алгебраїчної швидкості визначає напрямок руху точки: якщо $v_\tau = \dot{s} > 0$, то точка рухається в напрямку зростання дугової координати S і напрям вектора швидкості збігається з напрямком орта $\vec{\tau}$ ($\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{\tau}$). Якщо $v_\tau = \dot{s} < 0$ – точка рухається в напрямку спадання дугової координати і вектор швидкості протилежний до напрямку орта $\vec{\tau}$ ($\vec{v} \downarrow\uparrow \vec{\tau}$). Модуль (величина) швидкості $v = |v_\tau| = |\dot{S}|$. На рис. 2.13 точка O_1 означає центр кривини траєкторії, а ρ – радіус кривини в точці M.

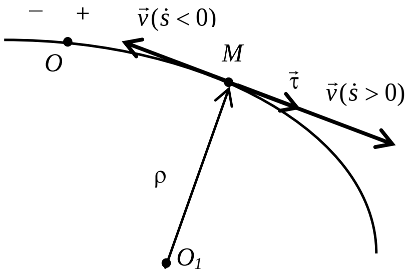


Рисунок 2.13

Таким чином, залежності (2.16) і (2.17) дозволяють визначити швидкість точки за величиною й напрямком.

Розглянемо приклад на визначення швидкості точки за природного способу задавання руху.

Приклад 5. Точка рухається дугою кола радіуса R = 0.5 м за законом, м

$$s = \frac{\pi}{2} R \cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right) .$$

Встановити її швидкість у момент часу $t_1 = 1/2$ с. Початок відліку на траєкторії, а також додатний і від'ємний напрямки руху показані на рис. 2.14.

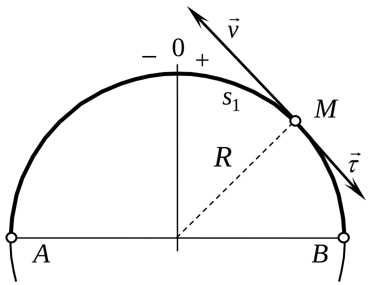


Рисунок 2.14

Функція косинус може змінюватися лише в межах від –1 до +1.

Звідси встановлюємо мінімальне й максимальне значення дугової координати: $s_{\min} = -\dfrac{\pi}{2}R$ м, $s_{\max} = \dfrac{\pi}{2}R$ м.

Цим значенням відповідають позиції *A* і *B* на траєкторії. Отже, точка рухається в межах виділеної дуги *AB*.

У момент часу $t = t_1$ дугова координата точки, яку позначатимемо символом s_1, буде

$$s_1 = \frac{\pi}{2} R \cos\left(\frac{2\pi}{3} t_1\right) = \frac{\pi R}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi R}{4} \text{ м}.$$

Дугу завдовжки s_1 відкладаємо від початку відліку в бік збільшення дугових координат і тим самим встановлюємо позицію *M* рухомої точки на траєкторії в момент часу $t = t_1$.

Щоб визначити швидкість точки, скористаймося залежністю (2.17)

$$v = v_\tau = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} t\right) .$$

У момент часу $t = t_1$ проекція вектора швидкості на напрямок $\vec{\tau}$, яку позначатимемо символом v_1, буде

$$v_1 = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} t_1\right) = -\frac{\pi^2}{3 \cdot 2} \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \approx -1.42 \quad \text{м/с}.$$

Таким чином, у момент часу $t = t_1$ точка зі швидкістю 1.42 м/с рухалася в бік зменшення дугових координат, що й показано на рис. 2.14.

2.3. Пришвидшення точки

У загальному випадку швидкість точки зазвичай не залишається сталою і з часом може змінюватися як за величиною, так і за спрямованістю в просторі. Тому в механіці використовується ще одна кінематична міра руху точки, а саме – пришвидшення, яке характеризує зміну с плином часу швидкості точки в даній системі відліку.

Дамо більш точне визначення цього терміну. *Пришвидшення точки* є векторною мірою швидкості зміни вектора її швидкості за модулем і напрямком.

У відповідності до трьох способів завдання руху розглянемо й три способи визначення пришвидшення.

2.3.1. Визначення пришвидшення точки за векторного способу завдання її руху

Нехай точка, що рухається, в момент часу t, опинилася на позиції M траєкторії (рис. 2.15) і мала швидкість $\vec{v}$. За малий проміжок часу Δt точка вона перемістилася на позицію M_1, а швидкість стала $\vec{v}_1$. Вектор швидкості за цей проміжок часу отримав приріст на величину $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$.

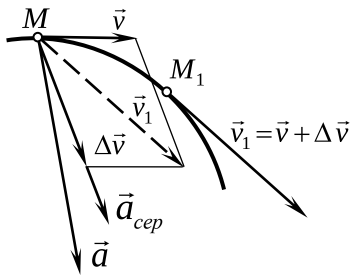


Рисунок 2.15

Щоб побудувати вектор $\Delta\vec{v}$, відкладемо від точки M вектор $\vec{v}_1$ і побудуємо рівнобіжник (паралелограм), діагоналлю якого є $\vec{v}_1$, а одним із боків – $\vec{v}$. Тоді, очевидно, другим боком рівнобіжника й буде вектор $\Delta\vec{v}$. Зауважимо, що він завжди спрямований у бік угнутості траєкторії.

Середнім пришвидшенням точки називають відношення приросту вектора швидкості $\Delta\vec{v}$ до відповідного проміжку часу Δt

$$\vec{a}_{\text{сер}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (2.18)$$

З формули (2.18) видно, що як і $\Delta\vec{v}$, цей вектор напрямлений у бік угнутості траєкторії . Вектор $\vec{a}_{\text{сер}}$ лише наближено характеризує пришвидшення рухомої точки в положенні *M*. Точне значення пришвидшення точки дістанемо як межу, до якої прямує $\vec{a}_{\text{сер}}$ за умови, що відповідний проміжок часу прямує до нуля ($\Delta t \to 0$):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \qquad (2.19)$$

Звідси, з урахуванням залежності (2.7), маємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \qquad (2.20)$$

або, використовуючи запис похідних за І. Ньютоном,

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \qquad (2.21)$$

Отже, ***вектор пришвидшення точки дорівнює першій похідній за часом від вектора її швидкості, або другій похідній від її радіуса-вектора.***

Вектор $\vec{a}_{\text{сер}}$ належить площині, яка утворюється векторами $\vec{v}$ і $\vec{v}_1$. Коли $\Delta t \to 0$ і точка M_1 наближається до точки M, ця площина набуває свого межового положення, яке називають ***стичною площиною кривої*** в точці M.

Отже, в загальному випадку ***вектор пришвидшення прикладений до точки, лежить у стичній площині й спрямований у бік угнутості траєкторії*** (див. рис. 2.15)**.**

У разі, коли траєкторія є пласкою кривою, то прилегла площина збігається з площиною кривої.

Розмірністю пришвидшення в системі СІ є м / с^2 .

2.3.2. Визначення пришвидшення точки за координатного способу завдання її руху

При координатному способі завдання руху точки її пришвидшення визначають за проекціями вектору пришвидшення на осі нерухомої декартової системи координат.

Нехай рух точки задано координатним способом, тобто рівняннями: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$.

Надамо вектор швидкості точки у вигляді $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Тоді на підставі формули (2.20) й враховуючи, що орти $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = \overrightarrow{\text{const}}$, маємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \ . \qquad (2.22)$$

Тепер, розклавши вектор пришвидшення точки по ортах координатних осей, одержимо

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} \ , \qquad (2.23)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора пришвидшення на координатні осі. Порівнюючи формули (2.22) і (2.23), знаходимо проекції пришвидшення:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z \ , \qquad (2.24)$$

або з урахуванням формул (2.10)

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \ . \qquad (2.25)$$

Отже, ***проекції вектора пришвидшення на координатні осі дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій вектора швидкості або другим похідним від відповідних координат точки.***

Формули аналітичної геометрії дозволяють за відомими проекціями вектора обчислити його модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ , \qquad (2.26)$$

а також його напрямок за допомогою напрямних косинусів (рис. 2.16):

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}; \\ \cos\beta_1 = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}; \\ \cos\gamma_1 = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}, \end{cases} \qquad (2.27)$$

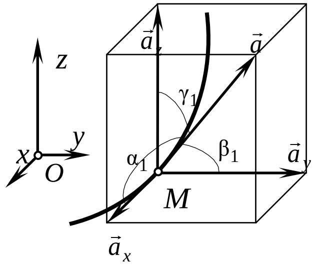


Рисунок 2.16

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути між напрямком вектора $\vec{a}$ й додатними напрямками осей *Ox*, *Oy*, *Oz*. На рис. 2.16 подано розкладення вектора пришвидшення $\vec{a}$ на складові $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$, що напрямлені рівнобіжно осям.

Формули (2.25) – (2.27) аналітично визначають вектор пришвидшення точки в декартовій системі координат.

Використання отриманих залежностей проілюструємо на двох прикладах.

Приклад 6. Визначити траєкторію точки, що рухається за законом, м

$$x = t^2 , \qquad y = \frac{2}{t^2} .$$

Для моменту часу $t_1 = 1$ с встановити її положення на траєкторії, швидкість і пришвидшення.

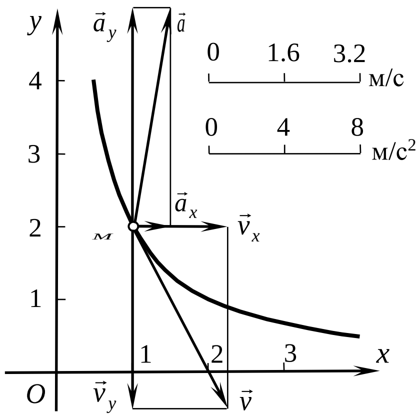


Рисунок 2.17

Спочатку встановимо траєкторію точки в координатній формі, для чого з рівнянь руху виключимо параметр t. Для цього підставимо t^2 із першого рівняння в друге:

$$y = \frac{2}{x} .$$

Отже, траєкторія – це гіпербола. У момент часу $t_1 = 1\ c$ точка перебуватиме на позиції M траєкторії (рис. 2.17), що має координати

$$x\big|_{t=t_1} = 1\ \text{м}, \quad y\big|_{t=t_1} = 2\ \text{м}\ .$$

Рух задано в координатній формі. Тому спочатку визначимо проекції вектора швидкості точки на координатні осі:

$$v_x = \dot{x} = 2t\ , \quad v_y = \dot{y} = -\frac{4}{t^3}\ .$$

Коли $t = t_1$, маємо

$$v_x = 2t_1 = 2\ \text{м/с}, \quad v_y = -\frac{4}{t_1^3} = -4\ \text{м/с},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \approx 4.47\ \text{м/с}.$$

Пришвидшення визначаємо за допомогою залежностей (2.24)

$$a_x = \dot{v}_x = 2\ \text{м/с}^2, \quad a_y = \dot{v}_y = \frac{12}{t^4}\ \text{м/с}^2.$$

Із цих залежностей випливає, що у заданий момент часу

$$t = t_1\ , \quad a_x = 2\ \text{м/с}^2, \quad a_y = \frac{12}{t_1^4} = 12\ \text{м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} \approx 12.2\ \text{м/с}^2.$$

Тепер вибираємо мірила для швидкостей і пришвидшень і за проекціями v_x, v_y, a_x, a_y будуємо вектори $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$, $\vec{v}$, $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}$. Під час побудови треба пам'ятати, що в разі, коли проекція додатна, то відповідну складову треба напрямляти в додатний бік осі. У протилежному випадку – у від'ємний.

2.3.3. Визначення пришвидшення точки за натурального способу завдання її руху. Дотичне і нормальне пришвидшення

При натуральному способі завдання руху з точкою, що рухається, пов'язують *натуральну систему координат* $M\tau nb$ (рис. 2.18). Ця система має початок в рухомій точці *M*, а отже, рухається разом з нею. Так званий *натуральний тригранник* складається з трьох взаємно перпендикулярних площин, що перетинаються: 1 – *стична площина*, 2 – *нормальна площина* і 3 – *спрямна площина*. Лінії перетину площин утворюють праву прямокутну систему координатних осей: $M\tau$, Mn і Mb. Першу вісь $M\tau$ називають дотичною віссю і спрямовують за дотичною до траєкторії від точки в бік збільшення дугової координати *S*, її напрямок визначає орт $\vec{\tau}$. Другу вісь Mn називають головною нормаллю і спрямовують за нормаллю до дотичної в бік угнутості траєкторії, її напрямок визначає орт $\vec{n}$. Третя вісь Mb, так звана бінормаль, складає з осями $M\tau$ і Mn праву систему координат. Її напрямок визначає орт $\vec{b}$.

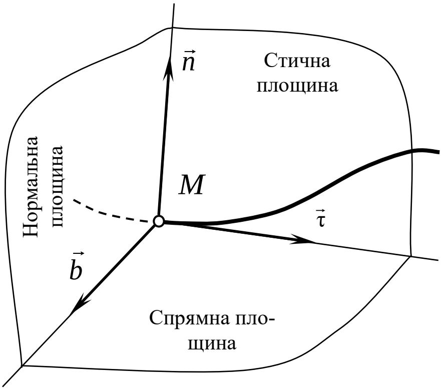


Рисунок 2.18

За натурального способу завдання руху точки її пришвидшення визначають за проекціями цього вектора на осі рухомої натуральної системи координат $M\tau nb$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n + \vec{a}_b .$$

Але, як було встановлено раніше, вектор пришвидшення точки лежить у стичній площині, й тому його проекція на бінормаль дорівнює нулю:

$$\vec{a}_b = 0 .$$

Таким чином, вектор пришвидшення точки буде складатися лише з двох складових:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \,, \tag{2.28}$$

де проекцію вектора пришвидшення на дотичну вісь $\vec{a}_\tau$ називають *тангенціальним,* або *дотичним пришвидшенням*; проекцію вектора пришвидшення на головну нормаль $\vec{a}_n$ називають *нормальним* або *доцентровим* пришвидшенням.

Для визначення $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ скористаємося формулами (2.20) і (2.15):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(v_\tau \vec{\tau}\right)}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} \,. \tag{2.29}$$

Перший доданок є вектором, який напрямлений по дотичній до траєкторії, тобто це вектор дотичного пришвидшення точки:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} = \ddot{S}\,\vec{\tau} \,. \tag{2.30}$$

Значення й напрямок другого доданку залежіть від похідної $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$, зміст якої треба встановити. Як відомо з курсу аналітичної геометрії, похідна від вектора постійного модуля, яким є орт $\vec{\tau}$, по скалярному аргументу t, є вектор, який перпендикулярний $\vec{\tau}$ й дорівнює добутку модуля цього вектора на похідну кута його повороту φ за часом:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\vec{\tau}\right| \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{n} \,, \tag{2.31}$$

де $\left|\vec{\tau}\right| = 1$, $\vec{n}$ – орт головної нормалі (рис. 2.19).

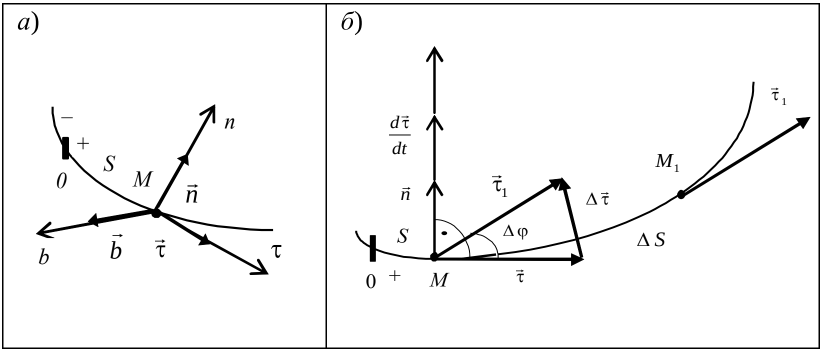


Рисунок 2.19

Похідну $\frac{d\varphi}{dt}$ перепишемо таким чином:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dS}{dS} = \frac{dS}{dt}\frac{d\varphi}{ds}.$$

Як відомо з диференційної геометрії, границя відношення кута суміжності $\Delta\varphi$ до приросту дугової координати ΔS при $\Delta S \to 0$ дорівнює кривині кривої, тобто:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = K, \qquad (2.32)$$

де *K – кривина траєкторії* в даній точці.

У загальному випадку кривина кривої K не є сталою величиною, вона змінюється від точки до точки. Величина ρ, обернена до кривини у даній точці *M*, називається *радіусом кривини кривої* у даній точці. Тобто, $K = \frac{1}{\rho}$. Нагадаємо, що для прямої лінії $\rho=\infty$, а для кола радіуса *R*, $\rho=R$.

Таким чином, другий доданок формули (2.29) набуває вигляду

$$v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v_\tau \left|\vec{\tau}\right| \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{n} = v_\tau \frac{dS}{dt}\frac{d\varphi}{ds}\vec{n} = v_\tau \frac{dS}{dt}\frac{1}{\rho}\vec{n} = \frac{v_\tau^2}{\rho}\vec{n},$$

тобто він є вектором, який напрямлений по головній нормалі до траєкторії, тобто це вектор нормального пришвидшення точки:

$$\vec{a}_n = \frac{v_\tau^2}{\rho}\vec{n} = \frac{\dot{S}^2}{\rho}\vec{n}\,. \tag{2.33}$$

Отже, ***повне пришвидшення точки дорівнює векторній сумі дотичного та нормального пришвидшень***:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,, \tag{2.34}$$

$$\text{де}\quad \vec{a}_\tau = a_\tau\,\vec{\tau}\,,\qquad a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{S}; \tag{2.35}$$

$$\vec{a}_n = a_n\,\vec{n}\,,\quad a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{\dot{S}^2}{\rho}\,. \tag{2.36}$$

Дотичне пришвидшення точки дорівнює першій похідній за часом від алгебраїчного значення швидкості або другій похідній від дугової координати й напрямлене за дотичною до траєкторії (рис. 2.20).

Нормальне пришвидшення точки дорівнює квадрату чисельного значення її швидкості, поділеного на радіус кривини траєкторії. Напрямлений вектор $\vec{a}_n$ *вздовж головної нормалі в бік угнутості траєкторії і лежить у стичній площині* (рис. 2.20).

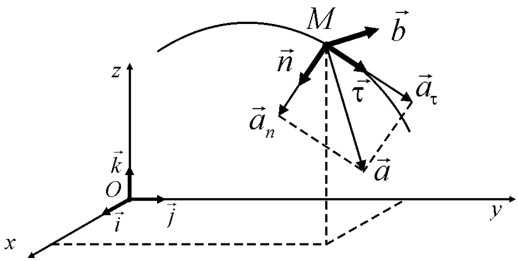


Рисунок 2.20

Як випливає з формули (2.35), *дотичне пришвидшення характеризує зміну швидкості точки за величиною*.

Напрям дотичного пришвидшення $\vec{a}_\tau$ залежить від похідної $\dot{v}_\tau$. Якщо знак похідної співпадає зі знаком алгебраїчної величини швидкості v_τ, то вектор $\vec{a}_\tau$ збігається за напрямком з вектором швидкості $\vec{v}$ (рис. 2.21, *а*) і рух точки буде пришвидшеним. У разі, коли знаки похідної $\dot{v}_\tau$ і алгебраїчної величини швидкості v_τ різні, то вектор $\vec{a}_\tau$ напрямляється протилежно до вектора $\vec{v}$ (рис. 2.21, б) і рух точки буде сповільненим.

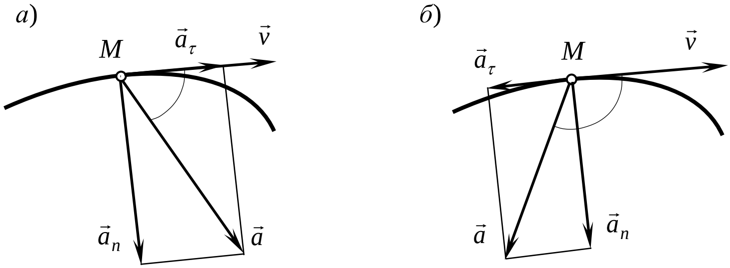


Рисунок 2.21

Тобто дотичне пришвидшення $\vec{a}_\tau$ напрямлене за дотичною до траєкторії в бік руху точки, якщо цей рух є пришвидшеним (алгебраїчне значення швидкості точки з часом зростає), й у протилежний бік, якщо рух точки є уповільненим (алгебраїчне значення швидкості точки з часом зменшується).

Скалярний множник у формулі (2.36) є додатним, тому вектор *нормального пришвидшення* $\vec{a}_n$ завжди напрямляється по головній нормалі до центра кривини і *характеризує зміну швидкості точки за напрямком*.

Оскільки вектори $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ перпендикулярні один до одного, то модуль повного пришвидшення дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{v}_\tau)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \qquad (2.\ 37)$$

Вектор повного пришвидшення $\vec{a}$ напрямляється по діагоналі прямокутника, побудованого на сторонах $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ (рис. 2.22).

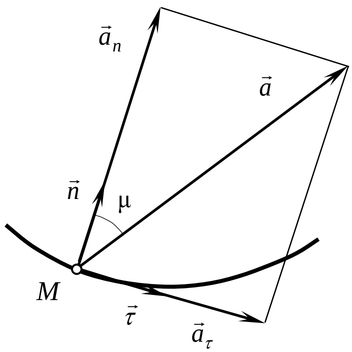


Рисунок 2.22

Повне пришвидшення відхиляється від головної нормалі на кут μ . Із рис. 2.22 видно, що

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{a_\tau}{a_n}, \qquad (2.38)$$

де $-\frac{\pi}{2} \le \mu \le \frac{\pi}{2}$. За додатного μ вектор $\vec{a}$ відхиляється від нормалі в напрямку орта $\vec{\tau}$, а за від'ємного – в протилежний бік.

Приклад 7. Встановити пришвидшення точки в момент часу $t_1 = 1/2$ с, якщо вона рухається дугою кола радіуса $R = 1/2$ м за законом, розглянутим у прикладі 5.

Траєкторія точки, її місцезнаходження й швидкість у заданий момент часу були встановлені у прикладі 5 і наведені на рис. 2.14. Було показано, що швидкість точки змінюється за законом

$$v = v_\tau = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} t\right).$$

Встановимо її пришвидшення. Для цього скористаймося залежностями (2.35), (2.36).

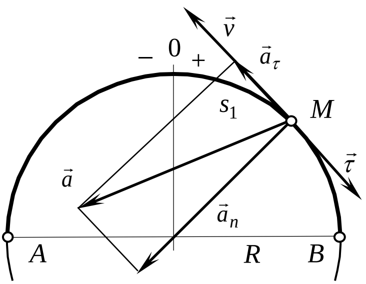


Рисунок 2.23

Дотичне пришвидшення

$$a_\tau = \dot{v} = -\frac{2\pi^3 R}{9}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \text{ м/с}^2.$$

Доцентрове пришвидшення:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\pi^4 R}{9}\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \text{ м/с}^2.$$

У заданий момент часу $t = t_1$:

$$a_\tau = -\frac{2\pi^3 R}{9}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t_1\right) = -\frac{2\pi^3}{9\cdot 2}\cos\left(\frac{2\pi}{3\cdot 2}\right) \approx -1.72 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = \frac{\pi^4 R}{9}\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}t_1\right) = \frac{\pi^4}{9\cdot 2}\sin^2\left(\frac{2\pi}{3\cdot 2}\right) \approx 4.06 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx \sqrt{1.72^2 + 4.06^2} \approx 4.41 \text{ м/с}^2.$$

Для наочності зобразимо вектори $\vec{a}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n$. Для цього зробимо відповідні добудови на рис. 2.14. Остаточний результат наведено на рис. 2.23. Перед побудовою векторів для них було вибране зручне мірило (на рисунку не показане). Проекція дотичного пришвидшення на напрямок орта $\vec{\tau}$ є від'ємною величиною. Отже, вектор $\vec{a}_\tau$ спрямований у бік зменшення дугових координат, як і вектор $\vec{v}$, а це означає, що рух точки пришвидшений.

Вектор $\vec{a}_n$ напрямлений вздовж нормалі до $\vec{a}_\tau$ в бік угнутості траєкторії. Лежить $\vec{a}_n$ у прилеглій площині, що збігається з площиною, в якій рухається точка.

2.3.4. *Визначення дотичного й нормального пришвидшень за координатного способу задавання руху точки*

Щоб визначити дотичне (тангенціальне) пришвидшення точки у разі, коли рух задано координатним способом, скористаймося формулами (2.35) й (2.11):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2v_x\dot{v}_x + 2v_y\dot{v}_y + 2v_z\dot{v}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Якщо тепер врахувати залежності (2.24), то остаточно знайдемо

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v} \quad . \qquad (2.39)$$

Зазвичай цю формулу використовують для визначення дотичного пришвидшення в конкретний момент часу.

Перейдемо до визначення нормального пришвидшення a_n .

За координатного способу задавання руху точки для обчислення повного пришвидшення використовують формулу

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Тому, якщо відомі величини a й a_τ , то для визначення a_n найкраще скористатися залежністю (2.36)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

Звідси маємо

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ . \qquad (2.40)$$

Таким чином, користуючись формулами (2.39), (2.40), можна завжди визначити дотичне (тангенціальне) a_τ і нормальне (доцентрове) a_n пришвидшення точки, якщо її рух задано координатним способом.

Приклад 8. З гармати здійснюється постріл під кутом α_0 з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ по нерухомій цілі (рис. 2.24). Рух снаряда відбувається у вертикальній площині згідно з рівняннями: $x = 300\,t$, м; $y = 400\,t - 5t^2$, м, де t – час, с.

Приймаємо снаряд за матеріальну точку. Матеріальна точка здійснює рух у вертикальній площині над поверхнею Землі під дією сили тяжіння без урахування опору. Подібна задача виникає при стрільбі. Урахування опору повітря вносить суттєві зміни у розв'язок задач. Тому задача, яка розглядається, носить навчальний характер, а метою її розв'язку є закріплення знань та умінь щодо використання їх при постановці та розв'язанні конкретних задач.

Необхідно визначити:

– траєкторію, швидкість і пришвидшення снаряда в початковий і кінцевий моменти часу;

– висоту підйому снаряда над рівнем горизонту H і дальність пострілу L;

– радіус кривини траєкторії в її початковій, кінцевій и найвищій точках.

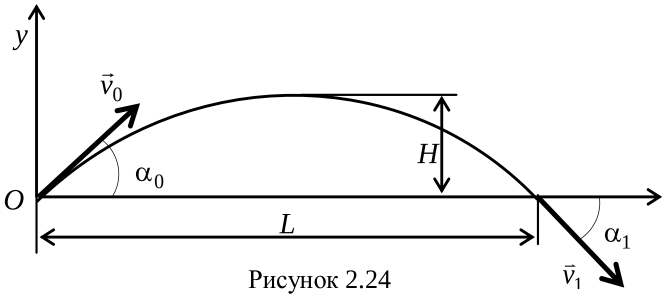


Рисунок 2.24

Знайдемо рівняння траєкторії, виключивши з рівняння руху $y = 400\,t - 5t^2$ (м) час t. Спочатку з рівняння $x = 300\,t$ визначимо $t = \dfrac{x}{300}$, а потім отримаємо рівняння траєкторії в наступному вигляді:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{18000}x^2 .$$

Отже, траєкторією снаряда в координатах x і y є парабола.

Визначимо проекції швидкості і пришвидшення снаряда на координатні осі:

$$v_x = \dot{x} = 300 \text{ м/с}; \; v_y = \dot{y} = 400 - 10t \text{ м/с}; \; a_x = \ddot{x} = 0; \; a_y = \ddot{y} = -10 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо їх значення в початковий момент часу $t = 0$:

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ м/с} ;$$

$$a_0 = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-10)^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Висоту підйому снаряда над рівнем горизонту можна визначити, досліджуючи на екстремум функцію $y(t)$ по змінній t. Це означає, що з точки зору кінематики проекція швидкості точки на вісь y в момент часу, який розглядається, повинна дорівнювати нулю. Тоді $\dot{y} = 400 - 10\tau_1 = 0$, де τ_1 – час підйому снаряда на максимальну висоту, $\tau_1 = 40$ с. Підставляючи дане значення часу в вираз для y, отримаємо:

$$y_{\max} = H = y(40) = 8000 \text{ м} = 8 \text{ км}.$$

Дальність пострілу визначимо з умови, що в момент падіння снаряда функція $y(t)$ приймає нульове значення

$$y(\tau_2) = 400\tau_2 - 5\tau_2^2 = 0 ,$$

де τ_2 – час польоту снаряда. Корінь квадратного рівняння, який відповідає падінню снаряда на землю, $\tau_2 = 80$ с, звідки дальність польоту

$$x_{\max} = x(80) = 24 \text{ км}.$$

Знаючи час польоту снаряда, можна визначити його швидкість і пришвидшення в кінці польоту. Підставляючи час τ_2 у вираз для проекції швидкості снаряда на вісь *y*, отримаємо $v_{1y} = -400$ м/с. Проекції швидкості і пришвидшення на вісь *x* не залежать від часу і є сталими під час всього польоту. Таким чином, снаряд рухається зі сталим пришвидшенням, яке дорівнює 10 м/с^2 і напрямлене вертикально донизу, а його швидкість в кінці польоту дорівнює за модулем швидкості в початковій момент часу $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_0| = 500$ м/с і складає з віссю *x* однакові кути $|\alpha_1| = |\alpha_0|$.

Для визначення радіуса кривини перейдемо до кінематичних характеристик руху снаряду в натуральній системі відліку.

Спочатку знайдемо дотичне пришвидшення за формулою

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{|\vec{v}|},$$

а потім визначимо його для початкового моменту часу

$$a_{0\tau} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{|\vec{v}|} = \frac{300 \cdot 0 + 400 \cdot (-10)}{500} = -8 \text{ м/с}^2$$

і для кінцевого

$$a_{1\tau} = \frac{300 \cdot 0 + (-400) \cdot (-10)}{500} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Далі підрахуємо нормальне пришвидшення за формулою $a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_\tau|^2}$, а потім і $a_{0n} = a_{1n} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ м/с^2. Оскільки радіус кривини траєкторії входить до формули $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, то

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{500^2}{6} = 41.667 \text{ км.}$$

Радіус кривини траєкторії на початку і в кінці польоту однакові. В найвищій точці траєкторії

$$a_\tau = \frac{300 \cdot 0 + 0 \cdot (-10)}{500} = 0; \;\; a_n = 10 \text{ м/с}^2; \;\; |\vec{v}| = 300 \text{ м/с}; \;\; \rho = \frac{300^2}{10} = 9 \text{ км.}$$

Траєкторія точки і вектори швидкості та пришвидшення у характерні моменти часу схематично наведені на рис. 2.25.

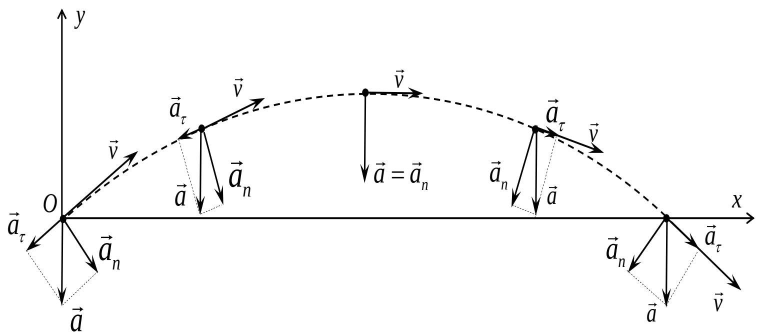


Рисунок 2.25

Як випливає з наведеного прикладу, рівняння руху точки містять в собі всі необхідні дані щодо дослідження характеристик її руху в будь-який момент часу.

3. ОКРЕМІ ВИПАДКИ РУХУ ТОЧКИ

Рівномірний рух точки. При рівномірному русі швидкість точки з часом не змінюється, тобто $|\vec{v}| = \text{const}$ або $v = \dot{s} = \text{const}$. При цьому дотичне прискорення $a_\tau = \dot{v} = 0$, а нормальне прискорення a_n дорівнює нулю тільки при прямолінійному русі точки або при криволінійному русі в точках перегину траєкторії.

Щоб встановити закон зміни з часом дугової координати S, проінтегруємо співвідношення

$$v = \frac{dS}{dt} = \text{const} = v_0 ,$$

де v_0 – швидкість точки на момент початку руху, яка при рівномірному русі не змінюється з часом. Звідси отримаємо

$$S = S_0 + v_0 t ,$$

де S_0 – значення дугової координати S в початковий момент часу $t_0 = 0$.

Отже, при криволінійному русі точки

$$S = S_0 + v_0 t; \quad a_\tau = \dot{v} = 0; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \tag{3.1}$$

при прямолінійному русі, наприклад, вздовж осі x

$$x = x_0 + v_0 t; \quad a_\tau = \ddot{x} = 0; \quad a_n = 0; \quad \rho = \infty. \tag{3.2}$$

Рівнозмінний рух точки. При рівнозмінному русі дотичне пришвидшення точки є сталою величиною, тобто $a_\tau = \dot{v} = \ddot{s} = \text{const}$. Він може бути як пришвидшеним, так і уповільненим.

Закони змінення алгебраїчної швидкості точки та її дугової координати отримаємо за допомогою інтегрування наступних співвідношень:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const}\,, \quad \text{звідси } v = v_0 + a_\tau t\,,$$

$$v = \frac{dS}{dt} = v_0 + a_\tau t, \quad \text{звідси } S = S_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}\,,$$

де v_0, S_0 – початкові значення алгебраїчної швидкості й дугової координати.

Отже, при криволінійному русі

$$v = v_0 + a_\tau t; \quad S = S_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \tag{3.3}$$

при прямолінійному русі

$$v = v_0 + a_\tau t; \quad x = x_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}; \quad a_\tau = \dot{v} = \ddot{x}; \quad a_n = 0. \tag{3.4}$$

Для деяких окремих випадків зручно мати ще одну залежність. Щоб її отримати, знайдемо t з першої формули залежностей (3.3)

$$t = \frac{v - v_0}{a_\tau}\,, \tag{3.5}$$

і внесемо його до другої формули, звідки знайдемо

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,a_\tau}. \tag{3.6}$$

Використання отриманих формул розглянемо на прикладі.

Приклад 9. Потяг почав гальмувати на ділянці шляху з радіусом кривини R = 1000 м (дуга кола). За 30 с його швидкість зменшилася від v_0 = 72 км /г до v_1 = 36 км /г. Встановити гальмівний шлях потягу та його пришвидшення a_0 і a_1 на початку ділянки ($t = t_0 = 0$) й наприкінці ($t = t_1$ = 30 с), якщо рух рівнозмінний.

Спочатку переведемо розмірності швидкостей потягу в систему СІ, тобто до м /с:

$$v_0 = 20 \text{ м /с}\,, \qquad v_1 = 10 \text{ м /с}\,.$$

Підставимо в формулу (3.3) час t_1. Цьому моментові відповідає швидкість v_1. Тому одночасно замінимо й v на v_1 і перетворимо формулу до вигляду

$$a_\tau = \frac{v_1 - v_0}{t_1},$$

що дозволить встановити дотичне пришвидшення потягу

$$a_\tau = \frac{10-20}{30} = -\frac{1}{3} \quad \text{м /с}^2.$$

Знак “ – ” говорить про те, що рух уповільнений.

Тепер із залежності (3.1) можна встановити гальмівний шлях

$$S = v_0 t_1 + a_\tau \frac{t_1^2}{2} = 20 \cdot 30 - \frac{1}{3}\frac{30^2}{2} = 450 \text{ м.}$$

Визначимо нормальне пришвидшення на початку руху a_{n0} і наприкінці a_{n1}

$$a_{n0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{20^2}{1000} = 0.4 \quad \text{м /с}^2, \qquad a_{n1} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{10^2}{1000} = 0.1 \quad \text{м /с}^2.$$

Тепер, за допомогою формули (3.6) можна обчислити повні пришвидшення a_0 , a_1 на початку та наприкінці відліку часу:

$$a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n0}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0.4^2} \approx 0.521 \text{ м/с},$$

$$a_1 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0.1^2} \approx 0.348 \text{ м/с}$$

і, тим самим, розв’язати задачу.

Питання для самоконтролю

1. Що таке закон руху точки?
2. Які існують способи задавання руху точки?
3. У чому полягає векторний спосіб задавання руху точки?
4. Що треба зробити, щоб задати рух координатним способом?
5. Що таке природний спосіб задавання руху точки?
6. Як пов’язані між собою векторний і координатний способи задавання руху точки?
7. Як можна знайти швидкість точки за векторного способу задавання її руху?
8. Як спрямований відносно траєкторії вектор швидкості точки?
9. Як можна визначити модуль і напрямок вектора швидкості точки за координатного способу задавання руху?
10. Як визначають швидкість точки за природного способу задавання руху?
11. Що таке чисельне або алгебраїчне значення швидкості точки?
12. Що таке пришвидшення точки?
13. Як спрямований відносно траєкторії точки вектор її пришвидшення?
14. Як визначають пришвидшення точки за векторного способу задавання руху?
15. Як можна визначити пришвидшення точки, якщо її рух задано координатним способом?
16. Як можна знайти тангенціальне або дотичне та нормальне або доцентрове пришвидшення та як вони мають бути спрямовані відносно траєкторії?
17. Які зміни у векторі швидкості точки пов’язані з дотичним та доцентровим пришвидшеннями?

4. ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З КІНЕМАТИКИ ТОЧКИ

За поданими в таблиці рівняннями руху визначте траєкторію точки й накресліть її. Для заданого моменту часу t_1 покажіть положення рухомої точки на траєкторії, встановіть швидкість точки, дотичне, доцентрове й повне пришвидшення. Побудуйте ці вектори. Знайдіть радіус кривини траєкторії. Варіанти самостійних робіт вказує викладач.

Таблиця – Варіанти самостійних робіт

Номер варіанта	Рівняння руху		Час t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$4\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)+2$	$4\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	1
2	$-\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right)+3$	$\sin\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right)-1$	1
3	$2\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	$-3\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)+4$	1
4	$3t^2+2$	$-4t$	0,5
5	$3t^2-t+1$	$5t^2-\dfrac{5t}{3}-2$	1
6	$7\sin\left(\dfrac{\pi t^2}{6}\right)+3$	$2-7\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{6}\right)$	1
7	$-4\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	$-2\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)-3$	1
8	$-4t^2+1$	$-3t$	0,5
9	$5\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$	$-5\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)-3$	1
10	$5\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right)$	$-5\sin\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right)$	1

Продовження таблиці

Номер варіанта	Рівняння руху		Час t_1, с
11	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi\ \ t}{3}\right)$	1
12	$3t$	$4t^2+1$	0,5
13	$7\sin^2\left(\frac{\pi\ \ t}{6}\right)-5$	$-7\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	1
14	$1+3\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+3$	1
15	$-5t^2-4$	$3t$	1
16	$2-3t-6t^2$	$3-\frac{3t}{2}-3t^2$	0
17	$6\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)-2$	$6\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+3$	1
18	$7t^2-3$	$5t$	0,25
19	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+\frac{5t}{3}$	1
20	$-4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)-1$	$-4\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
21	$-6t$	$2t^2-4$	1
22	$8\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)+2$	$-8\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)-7$	1
23	$-3-9\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	$-9\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+5$	1
24	$-4t^2+1$	$-3t$	1

Приклад виконання завдання

Точка рухається за законом

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1 \quad \text{м}, \qquad y = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \text{м}.$$

Встановимо спочатку її траєкторію.

Щоб виключити параметр t з рівнянь руху, перетворимо їх до вигляду

$$\frac{x-1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\,t\right), \qquad \frac{y}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\,t\right)$$

і піднесемо ліві й праві частини до квадрата. Після цього додамо отримані залежності й скористаймося відомою формулою:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

В результаті прийдемо до рівняння

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Отже, траєкторія – еліпс із центром в точці (1;0). Мала піввісь еліпса дорівнює 2 м, а велика – 4 м (рис. 4.1).

Встановимо положення M_0, M_1, M_2 рухомої точки в моменти часу $(t_0,\ t_1,\ t_2) = (0,\ 1,\ 2)$ с. Для цього послідовно підставимо t_0, t_1, t_2 в рівняння руху, а обчислені координати точки позначимо нижніми індексами 0, 1, 2:

$$x_0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t_0\right) + 1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}0\right) + 1 = 1 \quad \text{м},$$

$$y_0 = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t_0\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}0\right) = 4 \quad \text{м};$$

$$x_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t_1\right) + 1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}1\right) + 1 = 2 \quad \text{м},$$

$$y_1 = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t_1\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}1\right) \approx 3.46 \quad \text{м};$$

$$x_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t_2\right) + 1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}2\right) + 1 \approx 2.73 \quad \text{м},$$

$$y_2 = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t_2\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}2\right) = 2 \quad \text{м}.$$

За знайденими координатами точок M_0, M_1, M_2 робимо відповідні позначки на траєкторії (див. рис. 4.1).

Визначаємо проекції вектора швидкості на осі координат

$$v_x = \frac{d}{dt}\,x(t) = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \frac{\text{м}}{\text{с}}, \qquad v_y = \frac{d}{dt}\,y(t) = -\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

У заданий момент часу проекції вектора швидкості $\vec{v}$ на осі координат і його модуль дорівнюють

$$t_1 = 1\text{с}, \qquad v_x = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t_1\right) = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}1\right) \approx 0.907 \quad \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_y = -\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t_1\right) = -\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}1\right) \approx -1.047 \quad \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0.907^2 + (-1.047)^2} \approx 1.385 \quad \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для визначення вектора пришвидшення точки шукаємо його проекції на координатні осі

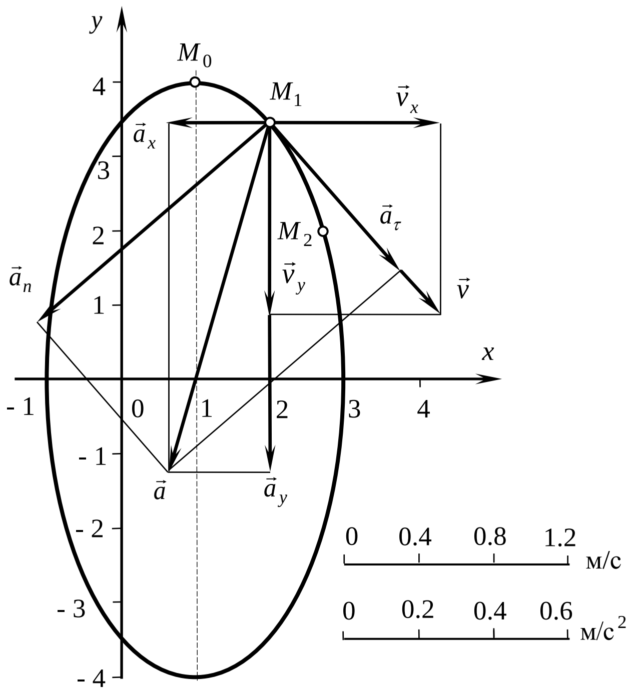


Рисунок 4.1.

$$a_x = \frac{d\,v_x}{d\,t} = -\,\frac{\pi^2}{18}\,\sin\!\left(\frac{\pi}{6}\,t\right); \qquad a_y = \frac{d\,v_y}{d\,t} = -\,\frac{\pi^2}{9}\,\cos\!\left(\frac{\pi}{6}\,t\right).$$

У заданий момент часу $t_1 = 1$ с проекції вектора пришвидшення та його модуль дорівнюють

$$a_x = -\frac{\pi^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{6}t_1\right) = -\frac{\pi^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{6}1\right) \approx -0.274 \quad \text{м/с}^2;$$

$$a_y = -\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}t_1\right) = -\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}1\right) \approx -0.95 \quad \text{м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.274)^2 + (-0.95)^2} \approx 0.988 \quad \text{м/с}^2.$$

Для визначення модуля дотичного пришвидшення використовуємо формулу

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}.$$

Коли $t_1 = 1\ c$, маємо

$$a_\tau = \frac{0.907\cdot(-0.274) + (-1.047)\cdot(-0.95)}{1.385} \approx 0.538 \quad \text{м/с}^2.$$

Нормальне пришвидшення у заданий момент часу

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{0.988^2 - 0.538^2} \approx 0.829 \quad \text{м/с}^2.$$

Радіус кривини траєкторії у тому її місці, де в момент часу $t_1 = 1$ с перебувала рухома точка

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1.385^2}{0.829} = 2.314 \quad \text{м}.$$

Вектор $\vec{v}$ будуємо за його складовими $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$. Для цього вибираємо відповідне мірило. Вектор $\vec{v}$ мусить бути спрямований за дотичною до траєкторії, що є критерієм правильності отриманого результату.

Пришвидшення $\vec{a}$ визначаємо як за складовими $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, так і за складовими $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, чим контролюємо правильність обчислень. Побудови цих векторів ведемо з використанням вже іншого мірила для пришвидшень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.*Кузьо І. В.* Теоретична механіка : навч. посібник / *І. В. Кузьо, Я. А. Зінько, Т.-Н. М. Ванькович* та ін.; за ред. *І. В. Кузьо* – Харків: Фоліо, 2015.– 780 с.

2. *Векерик В. І.* Теоретична механіка: навч. посібник / *В. І. Векерик, Д. І. Ільчишина, К. Г. Левчук, І. В. Цідило, Л. М. Шальда* – Івано-Франківськ: Факел, 2006.– 459 с.

3. *Павловський М. А.* Теоретична механіка : підручник. 2-е вид. / *М. А. Павловський* – Київ: Техніка, 2004. – 512 с.

4. *Смерека І. П.* Теоретична механіка : навч. посібник. Серія «Дистанційне навчання» – №25 / *І. П. Смерека, І. В. Кузьо, Т. В. Придиба, А. Я. Зінько* – Львів: НУ «Львівська політехніка», 2004. – 228 с.

5.Аніщенко, Г.О. Комп’ютерний практикум. Лабораторні роботи з теоретичної механіки : навч. посібник / *Г. О. Аніщенко, О. К. Морачковський*. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 104 с.

6. *Апостолюк О.С.* Теоретична механіка: збірник задач / *О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина* та ін.; за ред. *М.А. Павловського*. – Київ: Техніка, 2007.- 400 с.

7. *Векерик В. І.* Тестові завдання та короткі задачі з теоретичної механіки. Статика : навч. посібник / *В. І. Векерик, Л. М. Рижков, К.Г. Левчук, І. В. Цідило, М. В. Лисканич.* – Івано-Франківськ: Факел, 2006. – 231 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної підготовки
з курсу «Теоретична механіка»
для студентів НТУ «ХПІ»
спеціальностей 131 «Прикладна механіка»
та 133 «Галузеве машинобудування

УКЛАДАЧІ АНІЩЕНКО Галина Оттівна
ЛАВІНСЬКИЙ Денис Володимирович

Відповідальний за випуск Д.В. Лавінський
Роботу до друку рекомендував Д.В. Бреславський
Редактор О. І. Шпільова

План 2022р. п. 7
Підп. до друку Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso–друк. Гарнітура Таймс. Ум.-друк. арк. _____
Наклад 100 прим. Зам. № ______. Ціна договірна.

Видавничий центр «НТУ ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Самостійне електронне видання