

В.О.ПОВГОРОДНИЙ, канд.техн.наук, мл.науч.сотр.,
ИПМаш НАН України, Харків

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Застосування сучасних інформаційних технологій до проектування й створення різних технічних об'єктів нерідко призводить до необхідності кількісного аналізу процесів, що протікають в системах із розподіленими параметрами (у континуальних системах). Замість того, щоб намагатися отримувати аналітичну розв'язку рівняння можна скористатися числовим підходом. Ці питання й розглядаються в даній статті.

The application of the modern technologies to project of the technical objects are necessary to digital analyses in system with distributional parameters (in the coollontitual systems. Instead of algebraial differences are use the digital method of thr boundary elements. These questions are examine in this article.

Применение современных информационных технологий к проектированию и созданию различных технических объектов нередко приводит к необходимости количественного анализа процессов, протекающих в системах с распределенными параметрами (в континуальных системах). Вместо того, чтобы пытаться получить аналитическое решение уравнения для частного вида геометрии и граничных условий, выполним необходимое сведение исходного уравнения в алгебраическую сумму уравнений, чтобы можно было воспользоваться численным подходом. Этот подход, как правило, состоит из следующих этапов: граница Γ разбивается на ряд элементов, внутри которых предполагается, что потенциал и его нормальная производная изменяются в соответствии с выбранными интерполирующими функциями. Эти элементы можно образовать с помощью прямых линий, круговых дуг, парабол и т.п.; используется метод коллокаций, согласно которому для отдельных узловых точек, распределенных внутри каждого элемента, записывается дискретная форма уравнения, связывающего значение потенциала и его нормальных производных в каждом узле; интегралы по каждому элементу вычисляются с помощью одной из схем численного интегрирования; путем наложения заданных граничных условий получается система линейных алгебраических уравнений, решение этой системы уравнений, которое может быть выполнено с помощью прямого или итерационного методов, дает остальные значения неизвестной функции на границе.

При необходимости значения функции в произвольной внутренней точке могут быть найдены по известным значениям на границе с помощью численного интегрирования выражения (). Аналогично, численным интегрированием выражения () можно найти производные функции в произвольной внутренней точке. Приближенные решения граничных уравнений можно использовать вместе с граничными элементами. Практический интерес к этому возникает тогда, когда фундаментальное решение трудно получить или оно слишком громоздкое, чтобы им можно было воспользоваться. Кроме того, при этом уменьшается размерность результирующих матриц, поскольку граничные уз-

лы теперь оказываются связанными не со всеми, а только с соседними узлами.

Информация о распределении в пространстве и изменении во времени температуры, перемещений и деформаций, механических напряжений, скорости и давления жидкости или газа, электрического потенциала, напряженности электрического или магнитного поля и других параметров важна при разработке и оптимизации технологических процессов и рабочих процессов в энергетических установках, при анализе процессов деформирования и динамики конструкций и процессов взаимодействия среды с электромагнитными полями в приборных устройствах. Эта информация может быть получена путем вычислительного эксперимента с использованием математических моделей таких процессов. Эти модели описываются, как правило, дифференциальными уравнениями с частными производными, решение которых может быть проведено методом конечных разностей (МКР) [2]. Но наряду с МКР для количественного анализа таких моделей перспективен метод граничных элементов (МГЭ) [3] или его сочетание с методом конечных элементов (МКЭ) [4]. Для применения МГЭ математическую модель процесса необходимо предварительно привести к форме, содержащей граничные интегральные уравнения с неизвестными распределениями искомых параметров на границе области, в которой протекает рассматриваемый процесс [1]. Такая модификация математической модели позволяет понизить размерность задачи и тем самым дает возможность экономить вычислительные ресурсы. Однако в случае нелинейных процессов неизвестные величины обычно входят не только в интегралы по границе области, но и в интеграл по самой области. В таком случае МГЭ целесообразно сочетать с процедурой последовательных приближений, задаваясь ожидаемым распределением искомых параметров в области и последовательно его уточняя по найденным распределениям этих параметров на ее границе.

Метод граничных элементов (МГЭ) – это метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, появившийся в результате сочетания идей теории потенциала с методами теории аппроксимации. МГЭ, с точки зрения теории аппроксимации, имеет много общих черт с широко известным методом конечных элементов (МКЭ), но отличается от него существенным преимуществом: дискретизация осуществляется, как правило, не внутри области, в которой ищется решение, а на ее границе. Такое упрощение достигается путем точного удовлетворения исходным дифференциальным уравнениям с помощью представлений решения в виде, характерном для теории потенциала. Указанные представления могут быть использованы в рамках МГЭ лишь в том случае, когда известны в явном виде (точно или приближенно) фундаментальные решения (или функции Грина) для рассматриваемых дифференциальных уравнений и исследованы граничные свойства соответствующих потенциалов. Путем предельного перехода на границу в формулах представления решения получают граничные интегральные уравнения (ГИУ), которые являются основным объектом аппроксимации в МГЭ. Этим объясняется еще одно (более раннее) название МГЭ – метод граничных интегральных уравнений. Заметим, что возникающие в теории упругости и в других разделах механики деформируемого твердого тела ГИУ часто явля-

ются сингулярными интегральными уравнениями, методы аппроксимации которых далеко не тривиальны.

Возьмем следующими уравнениями:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{в } \Omega;$$

$$u = \bar{u} \quad \text{на } \Gamma_1;$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{на } \Gamma_2,$$

где u – потенциальная функция, \bar{u} и \bar{q} – заданные значения, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ – контур области Ω , а \bar{n} – единичный внешний нормальный вектор к поверхности Γ .

Применение современных информационных технологий к проектированию и созданию различных технических объектов нередко приводит к необходимости количественного анализа процессов, протекающих в системах с распределенными параметрами (в континуальных системах) [1]. Информация о распределении в пространстве и изменении во времени температуры, перемещений и деформаций, механических напряжений, скорости и давления жидкости или газа, электрического потенциала, напряженности электрического или магнитного поля и других параметров важна при разработке и оптимизации технологических процессов и рабочих процессов в энергетических установках, при анализе процессов деформирования и динамики конструкций и процессов взаимодействия среды с электромагнитными полями в приборных устройствах. Эта информация может быть получена путем вычислительного эксперимента с использованием математических моделей таких процессов.

Эти модели описываются, как правило, дифференциальными уравнениями с частными производными, решение которых может быть проведено методом конечных разностей (МКР) [2]. Но наряду с МКР для количественного анализа таких моделей перспективен метод граничных элементов (МГЭ) [3] или его сочетание с методом конечных элементов (МКЭ) [4]. Для применения МГЭ математическую модель процесса необходимо предварительно привести к форме, содержащей граничные интегральные уравнения с неизвестными распределениями искомых параметров на границе области, в которой протекает рассматриваемый процесс [1]. Такая модификация математической модели позволяет понизить размерность задачи и тем самым дает возможность сэкономить вычислительные ресурсы. Однако в случае нелинейных процессов неизвестные величины обычно входят не только в интегралы по границе области, но и в интеграл по самой области. В таком случае МГЭ целесообразно сочетать с процедурой последовательных приближений, задаваясь ожидаемым распределением искомых параметров в области и последовательно его уточняя по найденным распределениям этих параметров на ее границе.

Рассмотрим возможности МГЭ применительно к анализу некоторых типовых математических моделей. Начнем с достаточно простой, но широко используемой на практике модели установившегося процесса в произвольной по

конфигурации области V с границей F , в котором пространственное распределение некоторой скалярной величины $u(M)$ описывается уравнением Пуассона

$$\nabla^2 u(M) + f(M) = 0, \quad (1)$$

где $f(M)$ – заданная функция положения точки – дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа. Например, если в однородном теле с постоянным коэффициентом теплопроводности λ произведение $\lambda f(M)$ задает распределение объемной мощности энерговыделения, то уравнение (1) описывает установившееся распределение в этом теле температуры $u(M)$. Если же в однородной среде с постоянной диэлектрической проницаемостью ε произведение $\varepsilon f(M)$ характеризует объемную плотность электрических зарядов, то уравнению (1) будет удовлетворять распределение в области V потенциала $u(M)$ электрического поля. Этими примерами далеко не исчерпываются приложения (1) к инженерным задачам. Функция $u(M)$, удовлетворяющая уравнению (1), будет удовлетворять и интегральному соотношению

$$\int_V (\nabla^2 u(M) + f(M)) w(M_0, M) dV(M) = 0. \quad (2)$$

Функцию $w(M_0, M)$ выберем так, чтобы в случае пространственной (трехмерной) задачи она удовлетворяла уравнению

$$\nabla^2 w(M_0, M) + 4\pi \delta(M_0, M) = 0, \quad (3)$$

где $\delta(M_0, M)$ – дельта-функция Дирака, равная нулю в любой точке M , не совпадающей с точкой M_0 . При совпадении этих точек дельта-функция неограниченно возрастает, так что для непрерывной функции $f(M)$

$$4\pi \int_V f(M) \delta(M_0, M) dV(M) = \Omega(M_0) f(M_0), \quad (4)$$

причем $\Omega(M_0) = 4\pi$, если точка M_0 лежит на гладком участке границы F ; $\Omega(M_0) = 0$, если (точка M_0 лежит за пределами области V и ее границы F). Если точка M_0 совпадает с угловой точкой границы F области V , то $\Omega(M_0)$ – телесный угол с вершиной в точке M_0 , под которым «видна» из точки M_0 внутренность области V . В случае плоской (двумерной) задачи в уравнении (3) вместо 4π будет множитель 2π , а в уравнении (4) $\Omega(M_0) = 2\pi$, если точка M_0 лежит на гладком участке контура F ; $\Omega(M_0) = 0$, если, и, наконец, $\Omega(M_0)$ равна внутреннему углу между касательными к контуру в точке M_0 , если она является угловой точкой контура. Пусть $r(M_0, M)$ – расстояние между точками M_0 и M . Тогда функции $w(M_0, M) = 1/r(M_0, M)$ (в случае трехмерной задачи) и $w(M_0, M) = -1nr(M_0, M)$ (в случае двумерной задачи) будут удовлетворять уравнению (3), описывая, например, потенциал электрического поля заряда $1/\varepsilon$ или температурное поле источника тепла мощностью $1/\lambda$, помещенных в точке M_0 .

Используя вторую формулу Грина и соотношения (2)-(4), получим граничное интегральное уравнение

$$\Omega(M_0) u(M_0) = \int_V f(M) w(M_0, M) dV(M) + \int_F [q(P) w(M_0, P) - u(P) p(M_0, P)] dF(P), \quad (5)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к границе F в точке P . Правую часть

уравнения (5) можно вычислить, если известны распределения $u(P)$ и $q(P)$ на границей области V . Но корректная постановка задачи может содержать в виде граничных условий в каждой точке информацию либо о значениях $u(P)$, либо о значениях $q(P)$, либо о комбинации их значений, то есть

$$\alpha u(P) + \beta q(P) = g(P), \quad P \in F, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \quad (6)$$

Таким образом, исходная информация о граничных значениях $u(P)$ и $q(P)$ недостаточна для непосредственного использования уравнения (5).

Недостающие граничные значения $u(P)$ и $q(P)$ можно определить приближенно. Для этого на границе области следует выделить N узлов, аппроксимировать распределения $u(P)$ и $q(P)$ через узловых значения $u_n = u(P_n)$ и $q_n = q(P_n)$ и решить относительно неизвестных N узловых значений систему из N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую можно получить из (5) и (6), если в (5) вместо M_0 последовательно полагать P_n . Эта процедура и составляет существо МГЭ (точнее, его прямого варианта), причем (в отличие от МКЭ и МКР) матрица СЛАУ для МГЭ является полностью заполненной. После вычисления всех узловых значений u_n и q_n на границе F из уравнения (5) нетрудно численным интегрированием найти значение $u(M_0)$ в любой внутренней точке области V . Численное интегрирование удобно проводить с использованием процедур МКЭ, представив область V системой конечных элементов. В случае осесимметричной задачи вместо области V достаточно рассматривать половину ее осевого сечения, а вместо границы F – контур этого сечения в координатной плоскости Orz , где r и z – радиальная и осевая координаты цилиндрической системы координат. Тогда задача становится двумерной, а в уравнении (5) $w(M_0, M) = 4K(k)r_*(M_0, M)$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k^2 = 4r(M_0)r(M)/r^2(M_0, M)$ и $r^2_*(M_0, M) = (r(M_0) + r(M))^2 + (z(M_q) - z(M))^2$. Ясно, что в этом случае число N узловых точек на контуре, а значит, и порядок СЛАУ могут нест существенно уменьшены. Если рассматриваемый процесс является нестационарным, то (1) переходит в уравнение вида

$$\nabla^2 u(M, t) + f(M, t) = u(M, t)/a, \quad (7)$$

где точкой над символом обозначена производная по времени t , а параметр a характеризует скорость выравнивания распределения $u(M, t)$ в области при отсутствии внешних воздействий. Для перехода к математической модели нестационарного процесса в форме, содержащей граничное интегральное уравнение, можно использовать функцию источника [4], однако более гибким является подход, связанный с предварительным переходом в уравнении (7) к конечным разностям по времени. Тогда для момента времени t_k в конце k -го интервала получим

$$\nabla^2 u_k(M) - u_k(M)/(a\Delta t_k) + f_k(M) = 0,$$

где $u_k(M) = u(M, t_k)$ и $f_k(M) = f(M, t_k) + u(M, t_{k-1})/(a\Delta t_k)$ а в (5) для момента времени t_k надо $w(M_0, M)$ заменить в случае трехмерной задачи на

$$w_k(M_0, M) = \exp\left[-r(M_0, M)/\sqrt{a\Delta t_k}\right]/r(M_0, M)$$

и в случае двумерной задачи на

$$w_k(M_0, M) = -K_0 \left(r(M_0, M) / \sqrt{a \Delta t_k} \right),$$

где символом K_0 обозначена модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Отметим, что на первом интервале времени ($k = 1$) функция $u_0(M)$ является заданным начальным распределением искомой функции в области V .

Наконец, рассмотрим путь использования МГЭ для моделирования нелинейного нестационарного процесса в неоднородной среде, описываемого уравнением

$$\nabla(\lambda(M, u) \nabla u(M, t)) + f(M, u, t) = c(M, u) \dot{u}(M, t), \quad (8)$$

в котором параметры среды λ и c , характеризующие ее свойства проводимости и емкости, зависят не только от положения точки, но и от искомой функции $u(M, t)$. Аппроксимируя в уравнении (8) производную по времени конечными разностями, в конце k -го интервала времени получим

$$\nabla^2 u_k(M) + h_k(M, u_k(M)) = 0,$$

где

$$h_k(M, u_k(M)) = \frac{f_k(M, u_k(M)) - c(M, u_k)(u_k(M) - u_{k-1}(M)) / \Delta t_k + \psi(M, u_k(M))}{\lambda(M, u_k(M))};$$

$$\psi(M, u_k(M)) = \left(\nabla \lambda(M, u_k(M)) + \frac{\partial \lambda(M, u)}{\partial u} \Big|_{u=u_k(M)} \nabla u_k(M) \right) \nabla u_k(M).$$

Тогда для момента времени t_k будет справедливо уравнение (5), но в интеграл по области V вместо $f(M)$ будет входить функция $h_k(M, u_k(M))$, зависящая от искомого распределения $u_k(M) = u(M, t_k)$, что, казалось бы, лишает смысла применение МГЭ в случае нелинейного процесса. Однако сочетание процедуры МГЭ с последовательными приближениями на каждом интервале времени позволяет использовать положительные стороны МГЭ, связанные с понижением размерности задачи. Более того, благодаря полностью заполненной матрице СЛАУ для определения неизвестных граничных значений $u_k(P)$ и, влияние изменения значений искомых величин распространяется на каждой итерации сразу на всю область, что при условии сходимости последовательных приближений существенно сокращает общее число итераций. Во всех рассмотренных случаях существенным моментом для применения МГЭ была возможность в представляющем математическую модель дифференциальном уравнении выделить в явном виде дифференциальный оператор Лапласа. Это позволяет даже при моделировании нелинейного нестационарного процесса построить достаточно простой алгоритм последовательных приближений, базирующийся на использовании удовлетворяющей уравнению (3) функции $w(M_0, M)$. Отметим, что в общем случае искомая функция, описывающая процесс в континуальной системе, может быть векторной или тензорной, как, например, при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния конструкций [5]. Тогда для применения МГЭ исходную математическую модель необходимо преобразовать к форме, содержащей систему граничных интегральных уравнений, число которых должно совпадать с числом

координатных функций, представляющих искомую векторную или тензорную функцию. В этом случае функция $w(M_0, M)$ также будет векторной или тензорной, удовлетворяющей, как правило, уравнению с более сложным, чем в (3) дифференциальным оператором [4], [5].

Решим самую простую задачу. Тонкостенные конструкции наилучшим образом отвечают требованиям экономичности при обеспечении надлежащих прочности и жесткости. Этим объясняется их широкое применение в различных областях техники – машиностроении, строительстве, авиации и т.д. Расчет тонкостенных систем методами теории оболочек сложен и далеко не всегда оправдан. Теории расчета тонкостенных стержней, созданные В.З.Власовым [2], А.А.Уманским [4], и развитые целым рядом их учеников и последователей упрощают задачу, но и здесь возникают проблемы при расчете сложных несимметричных систем. Весьма эффективным оказывается использование численных методов.

В качестве объекта исследования выбрана двутавровая балка, имеющая составленное из трех прямоугольников поперечное сечение (рис. 1).

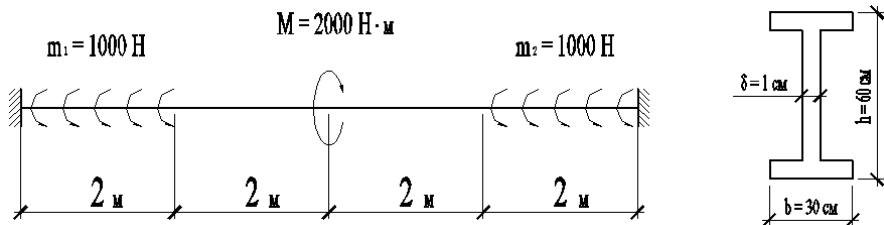


Рисунок 1

Расчет по методу граничных элементов

Уравнение стесненного кручения тонкостенного стержня имеет вид [2]

$$\theta^4(x) - k^2 \theta(x) = \frac{m(x)}{EI_w}, \quad (9)$$

где k – изгибно-крутильная характеристика поперечного сечения

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_w}}; \quad (10)$$

EI_w – секториальная жесткость; GI_d – жесткость при чистом кручении; θ – угол закручивания.

Уравнение (1) дополняется начальными параметрами:

– кинематические:

$GI_d \theta(0)$ – угол закручивания в масштабе жесткости; $GI_d \theta'(0)$ – производная угла закручивания (имеет механический смысл крутящего момента);

– статические:

$B_w(0) = -GI_d \theta''(0)$ – бимомент; $M_w(0) = -GI_d \theta'''(0)$ – изгибно-крутящий момент. (11)

Отметим, что при стесненном кручении кинематический параметр $\theta'(0)$ имеет механический смысл статической величины – крутящего момента, а статические параметры $B_w(x)$ и $M_w(x)$ не определяются из уравнений статики.

Уравнение (1) и начальные условия (3) образуют задачу Коши стесненного кручения тонкостенного стержня. По стандартному алгоритму ее решение удобно представить в матричной форме [1]

$$\begin{matrix} GI_d\theta(x) \\ GI_d\theta'(x) \\ B_w(x) \\ M_w(x) \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ & 1 & A_{23} & -A_{13} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ & & A_{33} & A_{33} \end{matrix} \begin{matrix} GI_d\theta(0) \\ GI_d\theta'(0) \\ B_w(0) \\ M_w(0) \end{matrix} + \begin{matrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \\ -B_{13}(x) \\ -B_{41}(x) \end{matrix}, \quad (12)$$

где фундаментальные ортонормированные функции и слагаемые от внешней нагрузки имеют вид

$$A_{13} = \operatorname{ch} kx - 1; \quad A_{14} = \frac{\operatorname{sh}kx - kx}{k}; \quad A_{33} = \operatorname{ch} kx; \quad A_{34} = \frac{\operatorname{sh}kx}{k};$$

$$B_{11} = M \times A_{14}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{13}(x - a_B)_+ + m[A_{15}(x - a_H) - A_{15}(x - a_K)_+];$$

$$B_{21} = M \times A_{13}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{23}(x - a_B)_+ + m[A_{14}(x - a_H)_+ - A_{14}(x - a_K)_+]; \quad (13)$$

$$B_{31} = M \times A_{34}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{33}(x - a_B)_+ + m[A_{13}(x - a_H)_+ - A_{13}(x - a_K)_+] \div k^2;$$

$$B_{41} = M \times A_{33}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{23}(x - a_B)_+ + m[A_{34}(x - a_H)_+ - A_{34}(x - a_K)_+ - A_{34}(x - a_K)_+];$$

$$A_{15} = \frac{\operatorname{ch}kx - H(x)}{k^2} - \frac{x^2}{2};$$

M – сосредоточенный крутящий момент; B_w – сосредоточенный бимомент; m – распределенный крутящий момент; a_M, a_B, a_H, a_K – координаты внешней нагрузки.

Для определения неизвестных начальных параметров в уравнении (13) составляется и решается система линейных алгебраических уравнений по схеме (при $x = l$)

$$Y(l) = A(l) \times X(0) + B(l) \rightarrow A(l) \times X(0) - Y(l) = -B(l) \rightarrow A_*(l) \times X_*(l, 0) = -B(l); \quad (14)$$

Из уравнения (6) определяются неизвестные начальные параметры, а напряженное деформированное состояние во всех внутренних точках стержня определяется по уравнению (4).

Рассмотрим на примере (рис. 1) расчетные соотношения по МГЭ [1]:

$$\begin{matrix} GI_d\theta(x) \\ GI_d\theta'(x) \\ B_w(x) \\ M_w(x) \end{matrix} = \begin{matrix} & & -A_{13} & -A_{14} \\ & & -A_{23} & -A_{13} \\ -1 & & A_{33} & A_{34} \\ & -1 & A_{23} & A_{23} \end{matrix} \begin{matrix} B_w^{0-1}(l) \\ M_w^{0-1}(l) \\ B_w^{0-1}(0) \\ M_w^{0-1}(0) \end{matrix} = \begin{matrix} -B_{11}^{0-1}(l) \\ -B_{21}^{0-1}(l) \\ B_{31}^{0-1}(l) \\ B_{41}^{0-1}(l) \end{matrix}, \quad (15)$$

Для практической реализации (7) использована среда MATLAB. Определено НДС рассматриваемой конструкции, которое представлено на рис.2 в виде эпюр углов закручивания $GI_d\theta(x)$, крутящих моментов $GI_d\theta'(x)$, бимоментов $B_w(x)$ и изгибно-крутящих моментов $M_w(x)$.

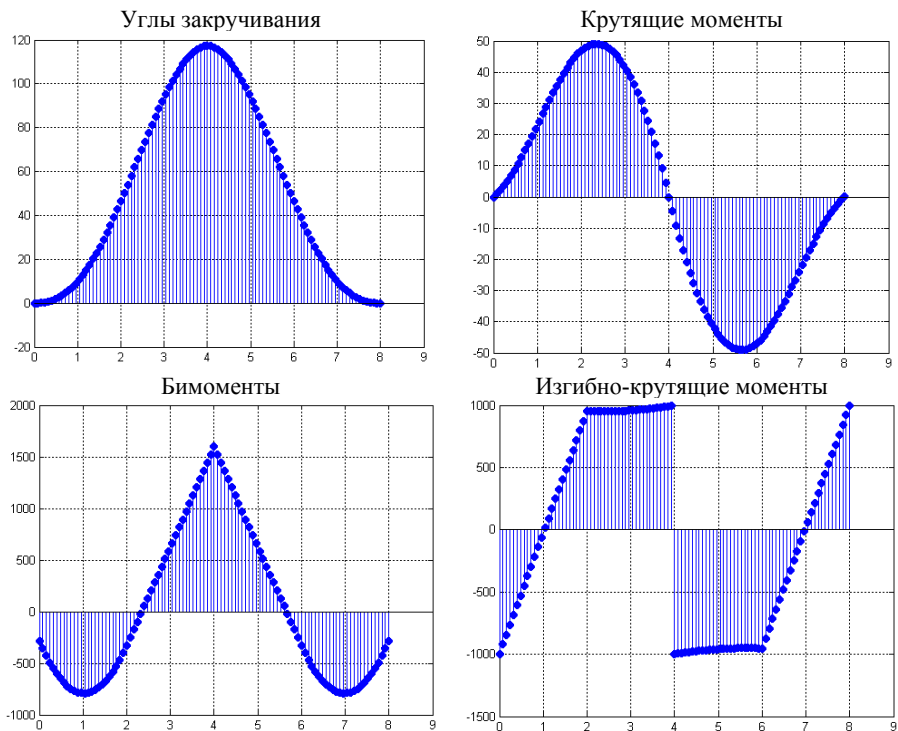


Рисунок 2

Выводы. В таблице представлены бимоменты, крутящие моменты и углы закручивания, вычисленные для ряда сечений стержня обоими численными методами. Заметим, однако, что при решении МГЭ пришлось решать 4 алгебраических уравнения, в то время как решение этой же задачи, например МКЭ, потребовало решения 160 алгебраических уравнений.

Список литературы: 1. Баженов В.А., Даценко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика специальный курс применение метода граничных элементов. – Одесса, «Астропринт», 2004. – 285 с. 2. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 568 с. 3. Уманский А.А. Строительная механика самолета. – М.: Государственное научно-техническое издательство ОБОРОНГИЗ, 1961. – 529 с.

Поступила в редакцию 15.08.2009