

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт
з курсу «Цифрова обробка сигналів»

ЦИФРОВІ ФІЛЬТРИ

для студентів спеціальностей:

174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

172 Телекомунікації та радіотехніка

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 12.10.2023 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2023

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт «Цифрові фільтри» з курсу «Цифрова обробка сигналів» для студентів спеціальностей 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка, 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології, 172 Телекомунікації та радіотехніка / уклад. А. В. Івашко, Д. О. Лунін. – Х.: НТУ «ХПІ». – 40 с.

Укладачі:

А. В. Івашко

Д. О. Лунін

Кафедра автоматики та управління в технічних системах

Рецензент Д. А. Гапон

Кафедра автоматизації та кібербезпеки енергосистем

ЗМІСТ

Перелік скорочень	4
Вступ.....	5
Лабораторна робота №1. Комп'ютерний розрахунок і дослідження цифрових СІХ-фільтрів	6
Лабораторна робота №2. Комп'ютерний розрахунок і дослідження цифрових НІХ-фільтрів	17
Лабораторна робота №3. Дослідження методів цифрового спектрального аналізу.....	29
Список рекомендованої літератури.....	39

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

- ЦОС – цифрова обробка сигналів;
ІХ – імпульсна характеристика;
СІХ – скінченна імпульсна характеристика;
НІХ – нескінченна імпульсна характеристика;
ЧХ – частотна характеристика;
ДЧХ – дійсна частотна характеристика;
УЧХ – уявна частотна характеристика;
АЧХ – амплітудно–частотна характеристика;
ФЧХ – фазочастотна характеристика;
ПФ – перетворення Фур’є;
ДПФ – дискретне перетворення Фур’є;
ШПФ – швидке перетворення Фур’є;
ПХ – передавальна характеристика;
ФНЧ – фільтр низьких частот;
ФВЧ – фільтр верхніх частот;
СФ – смуговий фільтр;
РФ – режекторний фільтр;
ЛРУ – лінійні різницеві рівняння;
АКФ – автокореляційна функція;
АР – авторегресія;
КС – ковзне середнє;
АРКС – авторегресія – ковзне середнє.

ВСТУП

Методи та алгоритми цифрової обробки сигналів (ЦОС) знаходять все ширше застосування в різних галузях промислової та побутової техніки. Переваги пристроїв ЦОС, що визначають таке бурхливе використання цифрових методів в електронних приладах та системах визначаються, в основному, можливістю їх реалізації на базі мікроелектронних, зокрема мікропроцесорних технологій та спеціалізованих великих інтегральних схем. Це забезпечує мініатюрні розміри пристроїв ЦОС, знижене енергоспоживання, високу надійність, стабільність характеристик, зручність автоматизованого проектування, налагодження та діагностики таких пристроїв. Тому вивчення основ теорії та застосування ЦОС фахівцями в галузі автоматики, обчислювальної техніки, зв'язку, промислової та побутової електроніки є вельми актуальним.

Методичні вказівки призначені для вивчення основ цифрової обробки сигналів та її застосування в системах автоматики, промислової електроніки та зв'язку. Розглянуто питання аналізу та синтезу цифрових фільтрів зі скінченними та нескінченними характеристиками та цифрового спектрального аналізу. Виконання лабораторних робіт дозволяє оцінити вплив параметрів алгоритмів ЦОС на їх точність і завадостійкість що дозволить надалі аргументовано проектувати програмні та апаратні системи ЦОС.

Методичні вказівки містять також індивідуальні завдання для виконання лабораторних робіт, які допоможуть краще зрозуміти особливості тих або інших алгоритмів. Для покращення засвоєння навчального матеріалу роботи супроводжуються також індивідуальними домашніми завданнями та прикладами їх виконання.

Для виконання лабораторних робіт потрібне встановлене на комп'ютері програмне середовище Matlab 2010 або новіше. У разі відсутності доступу до середовища Matlab може використовуватися вільно розповсюджуваний онлайн продукт *Octave Online* <https://octave-online.net/>.

Лабораторна робота №1. КОМП'ЮТЕРНИЙ РОЗРАХУНОК І ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВИХ СІХ-ФІЛЬТРІВ

Мета роботи: розрахунок СІХ-фільтрів за допомогою спеціалізованих програмних пакетів та дослідження їх характеристик. Комп'ютерне моделювання СІХ-фільтрів.

Теоретичні відомості

Існує ряд методів розрахунку фільтрів з кінцевою імпульсною характеристикою (СІХ-фільтрів), що відрізняються точністю розрахунку і обсягом необхідних обчислень. Найбільш простим та наочним є метод вікон (метод зважування).

Метод використовує наявність однозначних взаємних співвідношень, що пов'язують частотну $H(j\omega)$ та імпульсну h_i характеристики СІХ-фільтра.

$$H(j\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i e^{-j\omega i}. \quad (1.1)$$

$$h_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\omega) e^{j\omega i} d\omega, \quad (1.2)$$

Ці співвідношення дозволяють обчислювати значення відліків імпульсної характеристики h_i , що співпадають з коефіцієнтами СІХ-фільтра згідно (1.2) як коефіцієнти ряду Фур'є для розкладання частотної характеристики $H(j\omega)$.

Проте аналіз поведінки ЧХ для фільтра з усіченою ІХ показує, що на межах смуг пропускання та непропускання з'являються викиди та пульсації. Максимальна амплітуда пульсацій становить близько 9% і не зменшується із збільшенням довжини імпульсної характеристики, що призводить лише до зменшення ширини викиду. Цей ефект має назву *явища Гіббса*.

З метою корекції АЧХ фільтра було запропоновано поелементно перемножувати імпульсну характеристику фільтра на послідовність w_i , звану вікном. Процедура множення послідовності h_i на вікно w_i називається також зважуванням. Таким чином формується відкоригована імпульсна характеристика

$$h_i^* = h_i \cdot w_i. \quad (1.3)$$

До функції вікна пред'являються такі вимоги: ширина головної пелюстки частотної характеристики вікна має бути по можливості мала, а амплітуда бічних пелюсток повинна швидко зменшуватися при наближенні до π . Було запропоновано багато вікон тією чи іншою мірою відповідних сформульованим вимогам. Найпоширенішими з вікон є.

<i>Прямокутне вікно</i>	$w_i = 1;$
<i>Вікно Гемінга</i>	$w_i = 0.54 + 0.46 \cdot \cos[2\pi i / (N-1)];$
<i>Вікно Блекмана</i>	$w_i = 0.42 + 0.5 \cdot \cos[2\pi i / (N-1)] + 0.08 \cdot \cos[4\pi i / (N-1)];$

Вікно Ханна (Хеннінг) $w_i = 0.5 + 0.5 \cdot \cos[2\pi i / (N+1)]$;

Трикутне (вікно Фейєра) $w_i = 1 - |2 \cdot i / N|$.

У багатьох галузях техніки (аудіотехніка, обробка мови, зв'язок, радіолокація та інших) пред'являється вимога суворої лінійності фазочастотної характеристики. Дослідженнями встановлено, що необхідною та достатньою умовою лінійності фазочастотної характеристики є виконання одного з двох співвідношень для імпульсної характеристики:

імпульсна характеристика має бути симетричною $h_i = h_{N-1-i}$,

або антисиметричною $h_i = -h_{N-1-i}$.

Тому з метою забезпечення лінійності ФЧХ доцільно змістити отриману у відповідності до (1.3) імпульсну характеристику на $(N-1)/2$ відліків вправо та симетрично відобразити щодо центрального відліку.

Другим поширеним методом синтезу СІХ-фільтрів є метод частотних вибірок. Метод заснований на тому факті, що імпульсна та частотна характеристики СІХ-фільтра пов'язані парою перетворень Фур'є (1.1) та і (1.2). З іншого боку якщо обсяг вибірки сигналу дорівнює N відліків, то, значення коефіцієнтів ДПФ H_0, H_1, \dots, H_{N-1} відповідають значенням частотної характеристики $H(0), H(j\omega/N), H(2j\omega/N), \dots, H(j\omega(N-1)/N)$, тобто коефіцієнти ДПФ послідовності утворюють рівномірну вибірку частотної характеристики цієї послідовності

$$H_k = H(j2\pi k/N) \quad (1.4)$$

(так звана властивість частотної вибірки дискретного перетворення Фур'є).

Таким чином, для розрахунку ІХ N -точкового фільтра слід взяти N рівновіддалених відліків необхідної частотної характеристики на інтервалі $0..2\pi$ і обчислити зворотне ДПФ. Інтервал між відліками АЧХ $\Delta\omega$ має при цьому становити $2\pi/N$. Частотна характеристика отриманого фільтра проходить через опорні точки.

Найбільш універсальним алгоритмом синтезу КІХ-фільтрів, є так званий алгоритм Ремеза. Алгоритм дозволяє отримувати оптимальні за мінімаксімним критерієм фільтри, тобто вибирати фільтр, для якого забезпечується умова

$$\max_{0 < \omega < \pi} |H(\omega) - D(\omega)| \rightarrow \min, \quad (1.5)$$

де $D(\omega)$ -ідеальна АЧХ фільтра.

Математичною основою алгоритма служить теорема про чебишовський альтернанс, яка може бути в даному випадку сформульована наступним чином: якщо функція $H(\omega)$ - лінійна комбінація косінусів, тобто

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \cos(\omega k), \quad (1.6)$$

то необхідною та достатньою умовою того, щоб $H(\omega)$ була оптимальною за мінімаксімним критерієм апроксимацією функції $D(\omega)$ на ділянці $[a, b]$, є наявність у функції помилки $E(\omega) = H(\omega) - D(\omega)$ $r+1$ знакочередних екстремумів на $[a, b]$.

Це означає, що має існувати $r+1$ точка $a \leq \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_r \leq b$ така, що $E(\omega_k) = -E(\omega_{k+1})$, $k=0, \dots, r-1$. При цьому

$$|E(\omega_k)| = \max_{\omega \in [a,b]} |E| = 0, \quad (1.7)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів найбільш ефективний вищезгаданий алгоритм Ремеза, сутність якого можна сформулювати наступним чином:

Крок 1. Вибираються $r+1$ довільних значень вихідних екстремальних частот ω_k , на яких функція помилки $E(\omega)$ повинна приймати значення $\pm\delta$.

Для кожної з цих частот складають вираз для помилки апроксимації

$$E(\omega_k) = H(\omega_k) - D(\omega_k) = a_0 \cos(\omega_k \cdot 0) + a_1 \cos(\omega_k \cdot 1) + \dots + a_{r-1} \cos(\omega_k \cdot (r-1)) - D(\omega_k) = (-1)^k \delta \quad (1.8)$$

Ці $r+1$ рівнянь утворюють лінійну систему щодо невідомих $a_0, \dots, a_{r-1}, \delta$.

Крок 2. Вирішується система (1.8) та знаходяться значення a_0, \dots, a_{r-1} , а також δ , і за формулою (1.6) розраховується АЧХ $H(\omega)$, а потім помилка $E(\omega)$ на густій сітці частот.

Крок 3. Аналізується помилка $E(\omega)$ у всій області апроксимації. Якщо $|E(\omega)| \leq \delta$ у всіх точках, то рішення є оптимальним, обчислення припиняються і за отриманими значеннями a_i знаходяться коефіцієнти імпульсної характеристики h_i . Якщо в деяких точках $|E(\omega)| > \delta$, то розшуковуються $r+1$ точок, де помилка $E(\omega)$ максимальна і має знак, що чергується. Ці точки приймаються як екстремальні частоти і здійснюється перехід до кроку 1.

Можна показати, що процедура є схожою, помилка δ зростає на кожному кроці і прагне деякого максимального значення, в межах якого знаходиться помилка апроксимації $E(\omega)$.

Попереднє домашнє завдання

Згідно з вказаним викладачем варіантом з таблиці 1.1 розрахувати методом вікон зазначені коефіцієнти вихідного фільтра, вікна та відкоригованого фільтра.

Таблиця 1.1 – Варіанти завдання

№ варіанта	Тип фільтра	Тип симетрії	N	f_1	f_2	Тип вікна
1	ФНЧ	Парна	18	0.3		Ханна
2	ФВЧ	Парна	17	0.35		Хеммінга
3	СФ	Парна	16	0.1	0.35	Блекмана
4	РФ	Парна	15	0.25	0.4	Трикутне
5	ФНЧ	Парна	14	0.25		Ханна
6	ФНЧ	Парна	20	0.15		Хеммінга

№ варіанта	Тип фільтра	Тип симетрії	N	f_1	f_2	Тип вікна
7	ФВЧ	Парна	19	0.3		Блекмана
8	СФ	Парна	18	0.15	0.3	Трикутне
9	РФ	Парна	17	0.27	0.4	Ханна
10	ФВЧ	Парна	17	0.3 2		Хеммінга
11	ФНЧ	Парна	19	0.2		Блекмана
12	ФВЧ	Парна	15	0.2		Трикутне
13	СФ	Парна	17	0.2	0.4	Ханна
14	РФ	Парна	19	0.2	0.35	Хеммінга
15	ФНЧ	Парна	18	0.4		Блекмана
16	ФНЧ	Парна	16	0.35		Трикутне
17	ФВЧ	Парна	17	0.15		Ханна
18	СФ	Парна	18	0.25	0.35	Хеммінга
19	РФ	Парна	19	0.15	0.3	Блекмана
20	ФНЧ	Парна	17	0.3 3		Трикутне
21	ФВЧ	Парна	19	0.1 8		Ханна
22	СФ	Парна	23	0.27	0.34	Хеммінга
23	РФ	Парна	21	0.16	0.31	Блекмана
24	СФ	Парна	18	0.13	0.36	Блекмана
25	РФ	Парна	17	0.22	0.34	Трикутне
26	ФВЧ	Парна	17	0.38		Трикутне
27	ФНЧ	Парна	19	0.28		Хеммінга
28	ФВЧ	Парна	15	0.24		Трикутне
29	СФ	Парна	17	0.23	0.4	Ханна
30	РФ	Парна	19	0.22	0.33	Хеммінга
31	ФНЧ	Парна	18	0.42		Блекмана
32	ФВЧ	Парна	15	0.33		Блекмана
33	СФ	Парна	17	0.12	0.34	Трикутне
34	РФ	Парна	15	0.24	0.34	Ханна
35	ФНЧ	Парна	16	0.23		Хеммінга
36	ФНЧ	Парна	20	0.14		Трикутне

Для розрахунку коефіцієнтів фільтра та вікна слід використовувати формули з табл. 1.2, 1.3.

Таблиця 1.2 – Імпульсні характеристики основних фільтрів

Тип фільтра	$h(0)$	$h(i)$
ФНЧ	$2f_1$	$(\sin(2\pi if_1))/\pi i$
ФВЧ	$1-2f_1$	$(\sin(\pi i)-\sin(2\pi if_1))/\pi i$
Смуговий фільтр (СФ)	$2*(f_2-f_1)$	$(\sin(2\pi if_2)-\sin(2\pi if_1))/\pi i$
Режекторний фільтр (РФ)	$1-2*(f_2-f_1)$	$(\sin(\pi i)+\sin(2\pi if_1)-\sin(2\pi if_2))/\pi i$
Диференціатор	0	$-(\sin(2\pi if_1)-2\pi if_1*\cos(2\pi if_1))/\pi^2 i^2$
Перетворювач Гільберта	0	$(\cos(2\pi if_1)-\cos(2\pi if_2))/\pi i$

Таблиця 1.3 – Основні вікна

Тип вікна	$w(i)$
Прямокутне	1
Ханна (Хеннінг)	$0.5+0.5*\cos(2\pi i/(N+1))$
Гемінга	$0.54+0.46*\cos(2\pi i/(N-1))$
Блекмана	$0.42+0.5*\cos(2\pi i/(N-1))+0.08*\cos(4\pi i/(N-1))$
Трикутне (Фейєра)	$1- 2*i/N $
Папуліса	$ \sin(2\pi i/(N-1))/\pi+2 i *\cos(2\pi i/(N-1))/(N-1)$

Для непарного N i змінюється в діапазоні $0..(N-1)/2$. Для парного N i змінюється в діапазоні $0..N/2$, у формули підставляється $(i-1/2)$.

При цьому слід враховувати зсув на половину довжини імпульсної характеристики. Таким чином, при розрахунку i -го коефіцієнта для непарного N слід у формулу підставити $(N-1)/2-i$, для парного N підставити $N/2-i-1/2$.

Приклад розрахунку домашнього завдання

Умова:

Розрахувати коефіцієнт h_7 смугового пропускаючого фільтра з наступними характеристиками. Число ланок $N=22$, відносні частоти зрізу $f_1=0.22$, $f_2=0.38$, вікно Блекмана.

Розв'язок:

Згідно з формулою з табл. 1.2 значення коефіцієнта імпульсної характеристики розраховується як

$$h_i = [\sin(2\pi f_2 i') - \sin(2\pi f_1 i')] / \pi i'. \quad (1.9)$$

Оскільки кількість ланок $N = 22$ парне, визначаємо i' як

$$i' = N/2 - i - 1/2 = 22/2 - 7 - 1/2 = 3.5.$$

Підставляючи в (1.9) значення $i' = 3.5$, $N = 22$, $f_1 = 0.22$, $f_2 = 0.38$, отримуємо

$$h_7 = [\sin(2\pi \cdot 0.38 \cdot 3.5) - \sin(2\pi \cdot 0.22 \cdot 3.5)] / (\pi \cdot 3.5) = \\ [(0.8763 - (-0.9921)) / (3.1416 \cdot 3.5) = 0.1699.$$

Розрахуємо значення відповідного відліку вікна Блекмана.

Згідно з формулою з табл. 1.3

$$w_i = 0.42 + 0.5 \cos[2\pi i' / (N-1)] + 0.08 \cos[4\pi i' / (N-1)]. \quad (1.10)$$

Підставляючи в (1.10) раніш розраховане значення $i' = 3.5$, отримуємо

$$w_7 = 0.42 + 0.5 \cdot \cos(2\pi \cdot 3.5 / 21) + 0.08 \cdot \cos(4\pi \cdot 3.5 / 21) = \\ 0.42 + 0.5 \cdot \cos(\pi/3) + 0.08 \cdot \cos(2\pi/3) = 0.42 + 0.5 \cdot 0.5 + 0.08(-0.5) = 0.63.$$

Для визначення відкоригованої імпульсної характеристики перемножимо відліки вихідної імпульсної характеристики та віконної послідовності:

$$h_7^* = h_7 * w_7 = 0.1699 * 0.63 = 0.1070$$

Порядок виконання роботи

1. Очистити пам'ять. Задати вихідні дані, наприклад

```
» clear , N = 22; fc1 = 0.22; fc2 = 0.38;
```

Для ФНЧ та ФВЧ ввести лише одне значення частоти `fc1`.

2. Задати прямокутне вікно з відповідним числом відліків

```
» win=boxcar(N)'
```

3. Синтезувати методом вікон КІХ-фільтр із прямокутним вікном

Для ФНЧ `» h = fir1 (N-1, 2*fc1, win, 'noscale')`

Для ФВЧ `» h = fir1 (N-1, 2*fc1, 'high', win, 'noscale')`

Для СФ `» h = fir1 (N-1, [2*fc1 2*fc2], win, 'noscale')`

Для РФ `» h = fir1 (N-1, [2*fc1 2*fc2], 'stop', win, 'noscale')`

Записати значення коефіцієнтів `h`. Порівняти із домашнім завданням.

4. Побудувати та замалювати графік імпульсної характеристики

```
» stem(h)
```

5. Сформувати сітки частот для обчислення ЧХ

```
» f = [0: 0.005: 0.5]; w = 2* pi*f;
```

6. Сформувати поліном знаменника передавальної характеристики для обчислення ЧХ

```
» b = 1;
```

7. Обчислити частотну характеристику

```
» H = freqz ( h , b, w );
```

8. Обчислити АЧХ

```
» HA = abs (H);
```

9. Вивести графік АЧХ

```
» plot ( f, HA ), axis ([0 0.5 -0.05 1.15]), grid on
```

Порівняти отриману АЧХ з очікуваною. Звернути увагу на явище Гіббса. Замалювати графік.

10. Задати вікно вказаного в індивідуальному завданні типу

Для вікна Гемінга

```
» win = hamming( N )'
```

Для вікна Ханна (Хеннінг)

```
» win = hanning(N)'
```

Для вікна Блекмана

```
» win = blackman(N)'
```

Для трикутного вікна

```
» win = triang(N)'
```

Записати значення коефіцієнтів вікна win . Порівняти із домашнім завданням.

11. Побудувати та замалювати графік віконної функції

```
» stem(win)
```

12. Розрахувати фільтр із заданим вікном згідно з п.3. Порівняти із домашнім завданням.

13. Виконати для фільтра із заданим типом вікна пункти 7..9. Порівняти отриманий графік АЧХ із графіком з п. 9. Звернути увагу на придушення явища Гіббса.

14. Задати вектор граничних частот для фільтра Ремеза з урахуванням захисних інтервалів між смугами пропускання та непропускання

Для ФНЧ і ФВЧ

```
» cf=[0 0.9*2*fc1 1.1*2*fc1 1]
```

Для ППФ та ПЗФ

```
» cf =[0 0.9*2*fc1 1.1*2*fc1 0.9*2*fc2 1.1*2*fc2 1]
```

15. Задати вектор необхідних амплітуд у смугах пропускання та непропускання

Для ФНЧ » $A = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$

Для ФВЧ » $A = [0 \ 0 \ 1 \ 1]$

Для СФ » $A = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$

Для РФ » $A = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$

16. Синтезувати КІХ - фільтр методом Ремеза

» `h = remez (N-1, cf, A)`

Записати значення коефіцієнтів **h**

17. Виконати для одержаного фільтра пункти 7 ... 9. Звернути увагу на рівноколивальну поведінку помилки АЧХ. Якщо крива АЧХ виходить за межі вікна, збільшити максимальне значення ординати в команді axis. (формат команди axis ([x_{\min} x_{\max} · y_{\min} y_{\max}])

18. Відповідно до зазначеного викладача варіантом з табл. 1.4 задати значення $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (для ФНЧ і ФВЧ ввести по два значення частоти і фази) наприклад

» `f1=0.17; f2=0.24; f3=0.42; p1=35; p2= -125; p3= -60;`

19. Перетворити значення фаз із градусів на радіани

Для ФНЧ та ФВЧ » `p1=p1*180/pi, p2=p2*180/pi`

Для ППФ та ПЗФ » `p1=p1*180/pi, p2=p2*180/pi, p3=p3*180/pi`

20. Встановити дискретні значення часу

» `t = 0:29;`

21. Сформувати сигнал, що є сумою двох або трьох синусоїд одиничної амплітуди

Для ФНЧ та ФВЧ:

» `x=sin(2*pi*f1*t+p1)+sin(2*pi*f2*t+p2);`

Для ППФ та ПЗФ:

» `x=sin(2*pi*f1*t+p1)+sin(2*pi*f2*t+p2)+sin(2*pi*f3*t+p3);`

22. Виконати фільтрацію сигналу останнім синтезованим фільтром

» `y = filter (h, b, x);`

23. Встановити проміжні значення часу

» `ti = 0: 0.1: 29.9;`

24. Виконати інтерполяцію вихідного та відфільтрованого сигналів фільтром-відновником нижніх частот

```
» xi = interp ( x , 10);
» yi = interp ( y , 10);
```

25. Спостерігати вхідний та вихідний сигнали фільтра. Звернути увагу на придушення гармонік, що лежать поза смугою пропускання. Якщо графік виходить за межі вікна, збільшити значення ординат y_{\min} y_{\max} у команді axis (формат команди axis ($[x_{\min} x_{\max} \cdot y_{\min} y_{\max}]$)).

```
» stem( t, x ),hold on, plot( ti,xi,'k '), axis([0 29.1 -2 2]),
grid on
» figure, stem ( t, y, 'b '), hold on, plot ( ti, yi, 'k '),
axis ([0 29.1 -1.2 1.2]), grid on
```

Зміст звіту

Звіт по роботі повинен включати результати домашніх розрахунків, дані комп'ютерних розрахунків, графіки ІХ та вікна для зазначеного фільтра, графіки АЧХ для трьох фільтрів, графіки вхідного та вихідного сигналу фільтра.

Таблиця 1.4 – Варіанти завдання

№ варіанту	Тип фільтра	f_1	f_2	f_3	φ_1	φ_2	φ_3
1	ФНЧ	0.2	0.4		30	-145	
2	ФВЧ	0.2	0.4		60	30	
3	ППФ	0.05	0.2	0.42	0	70	-30
4	ПЗФ	0.35	0.3	0.45	80	-60	-15
5	ФНЧ	0.2	0.4		30	-30	
6	ФНЧ	0.1	0.3		135	60	
7	ФВЧ	0.2	0.4		-10	30	
8	ППФ	0.1	0.2	0.4	20	-45	135
9	ПЗФ	0.35	0.3	0.45	-30	50	70
10	ФВЧ	0.25	0.41		90	-55	
11	ФНЧ	0.1	0.3		10	120	
12	ФВЧ	0.12	0.4		45	-120	
13	ППФ	0.1	0.28	0.45	60	-60	-25
14	ПЗФ	0.12	0.3	0.24	-45	120	-30
15	ФНЧ	0.3	0.45		-20	100	

№ варіанту	Тип фільтра	f_1	f_2	f_3	φ_1	φ_2	φ_3
16	ФНЧ	0.25	0.4		-30	45	
17	ФВЧ	0.1	0.23	0	60	-35	
18	ППФ	0.17	0.3	0.4	15	-30	45
19	ПЗФ	0.1	0.25	0.4	60	-80	30
20	ФНЧ	0.2	0.4	90	45	-70	
21	ФВЧ	0.1	0.3	-30	90	-60	
22	ППФ	0.17	0.3	0.4	20	-45	90
23	ПЗФ	0.19	0.23	0.41	90	30	-50
24	ППФ	0.08	0.27	0.43	15	-45	120
25	ПЗФ	0.1	0.27	0.42	-30	20	90
26	ФВЧ	0.25	0.48		-80	60	
27	ФНЧ	0.13	0.38		90	-55	
28	ФВЧ	0.12	0.23		10	100	
29	ППФ	0.13	0.34	0.43	75	-120	-30
30	ПЗФ	0.13	0.24	0,27	90	-60	-25
31	ФНЧ	0.23	0.46		-45	120	
32	ФВЧ	0.22	0.47		80	-55	
33	СФ	0.09	0.24	0.42	10	110	-35
34	РФ	0.14	0.22	0.41	65	-110	-20
35	ФНЧ	0.11	0.37		70	-70	
36	ФНЧ	0.09	0.28		-25	10	

Контрольні питання

1. Що є необхідною умовою лінійності фазочастотної характеристики КІХ-фільтрів?
2. Який зв'язок між коефіцієнтами СІХ-фільтра та його імпульсною характеристикою?
3. Як визначити частотні характеристики СІХ-фільтра за його коефіцієнтами?
4. Як може бути знайдено відгук СІХ-фільтра на задану вхідну послідовність?
5. Що таке явище Гіббса і як воно впливає на характеристики фільтра?

6. Розрахуйте коефіцієнт h_7 режекторного фільтра з $f_{c1}=0.17$, $f_{c2}=0.32$, $N=21$, симетричною ІХ.
7. Які вимоги висуваються до віконної послідовності?
8. Які види віконних послідовностей вам відомі?
9. У чому переваги та недоліки фільтрів, синтезованих методом вікон?
10. У чому основний недолік методу частотних вибірок?
11. Як називаються зміни в АЧХ СІХ-фільтрів, що викликаються відтінком імпульсної характеристики та проявляються в вигляді викиду в перехідній смузі?
12. З якою метою застосовуються віконні функції при спектральному аналізі?
13. Які вікна не використовуються при синтезі СІХ-фільтрів?
- а) Прямокутне
 - б) Трикутне
 - в) Парсеваля
 - г) Хемінга
 - д) Блекмана.
14. Застосування вікон при синтезі СІХ-фільтрів має мету
- а) Підвищення крутизни АЧХ
 - б) Придушення викидів АЧХ в перехідній смузі
 - в) Забезпечення стійкості фільтру
 - г) Забезпечення рівноколивального характеру похибки
15. Що є перевагою методу вікон при синтезі цифрових фільтрів?
- а) Метод оптимізує фільтр за мінімакним критерієм
 - б) Метод оптимізує фільтр за середньоквадратичним критерієм
 - в) Метод простий та наочний
 - г) Метод підвищує стійкість фільтру
16. Вкажіть формулу для розрахунку похибки при розрахунку фільтрів на основі мінімаксного критерія
17. За яким критерієм оптимізує АЧХ фільтра метод Ремеза?
18. На якій теоремі базується метод Ремеза синтезу КІХ-фільтрів?

Лабораторна робота №2. КОМП'ЮТЕРНИЙ РОЗРАХУНОК І ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВИХ НІХ-ФІЛЬТРІВ

Мета роботи: розрахунок НІХ-фільтрів за допомогою спеціалізованих програмних пакетів та дослідження їх характеристик.

Теоретичні відомості

Поряд із СІХ-фільтрами в цифровій обробці сигналів широко застосовуються системи з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-фільтри). Як правило, НІХ-фільтри реалізуються за рекурсивною схемою. Характерною рисою цієї схеми і те, що черговий відлік вихідної послідовності y_i визначається як відліками вхідної послідовності x_i , а й попередніми відліками вихідної послідовності y_{i-1}, \dots, y_{i-M} .

$$y_i = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{i-k} + \sum_{k=1}^M b_k y_{i-k}. \quad (2.1)$$

Вираз для частотної функції БІХ-фільтра $H(j\omega)$ має вигляд:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-j\omega i}}{1 - \sum_{k=1}^M b_k e^{-j\omega k}}. \quad (2.2)$$

Шляхом домноження чисельника і знаменника (2.2) на величину, комплексно спряжену до знаменника, можемо виділити дійсну і уявну частини $H(j\omega)$, а потім визначити АЧХ $H(\omega)$ і ФЧХ $\varphi(\omega)$.

Імпульсна характеристика дискретної системи h_i визначається як реакція системи на одиничний імпульс. Таким чином, для визначення h_i необхідно отримати послідовність відліків вихідного сигналу y_i при подачі на вхід послідовності

$$u_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

Обчислення чергового значення y_i , що збігатиметься з імпульсною характеристикою h_i виконується шляхом множення відліків x_i, \dots, x_{i-N+1} та y_{i-1}, \dots, y_{i-M} на коефіцієнти a_i та b_k відповідно і сумування добутків згідно з виразом (2.1).

Результати розрахунків імпульсної характеристики h_i зручно звести в таблицю 2.1, що дозволяє рекурентно обчислювати чергове значення h_i .

Перший рядок значень вхідного та вихідного сигналу обнулюється лише відліку x_i надається одиничне значення Перед обчисленням наступного значення відліки вхідного сигналу x_i зсуваються на один такт вправо, відліки вихідного y_i - на один такт вліво.

Таблиця 2.1 – Розрахунок імпульсної характеристики НІХ-фільтра

i	a_0	a_1		a_{N-1}	b_M	...	b_1	
i	x_i	x_{i-1}	...	x_{i-N+1}	y_{i-M}	...	y_{i-1}	$y_i=h_i$
0	1	0		0	0	0	0	
1	0	1		0				
2	0	0		0				
3	0	0		0				
4	0	0		0				
...

Незручність такого обчислення полягає, однак, у тому, що для розрахунку чергового значення y_i необхідно отримати всі попередні значення. Крім того, найчастіше складно оцінити характер поведінки послідовності h_i , наприклад, визначити стійкість фільтра. Тому для знаходження h_i часто використовується апарат *лінійних різницевих рівнянь* (ЛРУ), описаний, наприклад, в [1].

Існує низка методів розрахунку коефіцієнтів НІХ-фільтрів, що дозволяють отримувати якісні фільтри, проте потребують застосування складного математичного апарату та громіздких обчислень.

Найбільш простим і наочним і водночас забезпечуючим прийнятну якість синтезованих фільтрів є метод так званого білінійного перетворення. Сутність методу полягає в тому, що вибирається аналоговий фільтр-прототип, що володіє необхідними характеристиками, для нього записується вираз частотної характеристики $H(j\omega)$ і передавальної функції $H(p)$, а потім здійснюється перехід $p \rightarrow z$.

Так, для фільтрів нижніх частот це відображення матиме вигляд

$$p \rightarrow k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.3)$$

де $p = j\Omega$, k – постійний коефіцієнт, значення якого не змінює форму перетворення.

Як фільтри-прототипи найчастіше використовуються фільтри Баттерворта, Чебишова, Бесселя та ряд інших. *Фільтри Баттерворта нижніх частот* характерні тим, що мають максимально гладку АЧХ. Аналітичний вираз АЧХ фільтра має вигляд

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^{2n}}}, \quad (2.4)$$

де ω_3 – частота зрізу фільтра; n – порядок фільтра.

Передатна характеристика фільтра Баттерворта відповідно має вигляд

$$H(p) = \sqrt{\frac{1}{1 + p^{2n}}} \quad (2.5)$$

Фільтри Чебишева нижніх частот мають АЧХ, що визначається співвідношенням

$$H(p) = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_3)}} \quad (2.6)$$

де ε – постійний коефіцієнт, що характеризує амплітуду пульсацій у смузі пропускання; $T_n(x)$ – поліном Чебишова n -го порядку

Фільтри Чебишова забезпечують рівновеликі пульсації АЧХ у смузі пропускання та монотонні зміни ослаблення у смузі непропускання.

За допомогою білінейного перетворення можна будувати не тільки фільтри нижніх частот, а й інші найпоширеніші фільтри. Для цього як вихідний береться аналоговий фільтр нижніх частот, а білінійне перетворення (2.3) дещо змінюється.

Таблиця 2.2 – Формули перетворення аналогового ФНЧ-прототипу на цифровий фільтр.

Цифровий фільтр	Формула білінійного перетворення	Зв'язок аналогових частот із цифровими частотами
Фільтр нижніх частот (ФНЧ)	$p \rightarrow k \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$	$\omega_A = k \cdot \operatorname{tg}(\omega/2)$
Фільтр верхніх частот (ФВЧ)	$p \rightarrow k \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	$\omega_A = k \cdot \operatorname{ctg}(\omega/2)$
Смуговий фільтр (СФ)	$p \rightarrow k \cdot \frac{1 - 2\beta z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$	$\omega_A = k \cdot \frac{\beta - \cos(\omega)}{\sin(\omega)}$
Режекторний фільтр (РФ)	$p \rightarrow k \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\beta z^{-1} + z^{-2}}$	$\omega_A = k \cdot \frac{\sin(\omega)}{\beta - \cos(\omega)}$

Порядок виконання роботи

1. Визначити вихідні дані проєктованого фільтра згідно з заданим викладачем варіантом з табл.2.3.

Таблиця 2.3 – Варіанти завдання

Варіант	Порядок фільтра m	Тип фільтра	fc1	fc2
1	3	ФНЧ	0.2	
2	3	ФВЧ	0.3	
3	2	РФ	0.15	0.35

Варіант	Порядок фільтра m	Тип фільтра	$fc1$	$fc2$
4	2	СФ	0.2	0.35
5	3	ФНЧ	0.3	
6	4	ФВЧ	0.2	
7	2	РФ	0.2	0.4
8	2	СФ	0.15	0.3
9	4	ФНЧ	0.22	
10	4	ФВЧ	0.31	
11	3	РФ	0.17	0.36
12	3	СФ	0.23	0.37
13	2	ФНЧ	0.32	
14	3	ФВЧ	0.21	
15	3	РФ	0.24	0.4
16	3	СФ	0.15	0.3
17	3	ФНЧ	0.29	
18	3	ФВЧ	0.19	
19	3	РФ	0.22	0.44
20	3	СФ	0.18	0.36
21	2	ФНЧ	0.23	
22	2	ФВЧ	0.32	
23	3	РФ	0.18	0.37
24	3	СФ	0.21	0.33
25	3	РФ	0.24	0.38
26	3	СФ	0.15	0.3
27	2	ФНЧ	0.27	
28	2	ФВЧ	0.17	
29	2	РФ	0.23	0.43

2. Задати вихідні дані, наприклад

`clear, m=3; fc1 = 0.18; fc2 = 0.38;`

Для ФНЧ та ФВЧ ввести лише одне значення частоти $fc1$.

3. Синтезувати фільтр Баттерворта

Для ФНЧ » `[a, b] = butter (m, 2*fc1)`

Для ФВЧ » `[a, b] = butter (m, 2*fc1, 'high')`

Для СФ » `[a, b] = butter (m, [2*fc1 2*fc2])`

Для РФ » `[a, b] = butter (m, [2*fc1 2*fc2], 'stop')`

Записати значення коефіцієнтів **a** та **b**. УВАГА! **b** – коефіцієнти видаються з інверсією.

4. Розрахувати та вивести на екран імпульсну характеристику

» `h=impz(a,b,20), stem(h), grid on`

5. Сформувати сітки частот для обчислення ЧХ

» `f=[0:0.025:0.5];w=2*pi*f;`

6. Обчислити частотну характеристику;

» `H=freqz(a,b,w)`

H =

	0 + 0i	-0.0005 - 0.0018i	-0.0075 - 0.0136i	-0.0379 - 0.0385i
-0.1173 - 0.0627i		-0.2652 - 0.0382i	-0.4442 + 0.1181i	-0.5126 + 0.4301i
-0.3642 + 0.7482i		-0.0892 + 0.9209i	0.1826 + 0.9515i	0.4022 + 0.9019i
0.5693 + 0.8163i		0.6951 + 0.7165i	0.7900 + 0.6122i	0.8615 + 0.5074i
0.9149 + 0.4036i		0.9536 + 0.3012i	0.9798 + 0.2000i	0.9950 + 0.0998i
1.0000 + 0.0000i				

Записати значення відліків ЧХ.

7. Обчислити АЧХ

» `HA=abs(H)`

HA =

0	0.0019	0.0155	0.0541	0.1330	0.2679	0.4596	0.6691
0.8321	0.9252	0.9689	0.9876	0.9952	0.9983	0.9994	0.9998
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000			

Записати значення відліків АЧХ.

8. Обчислити ФЧХ у градусах

» `HP=180*angle(H)/pi`

0	-104.2481	-118.9171	-134.5426	-151.8682	-171.8036
165.1151	140.0054	115.9538	95.5336	79.1372	65.9643
55.1051	45.8677	37.7741	30.4967	23.8045	17.5284
11.5377	5.7257	0.0000			

Записати значення відліків ФЧХ

9. Вивести графіки АЧХ та ФЧХ з дрібнішим кроком

```

» f1=[0:0.005:0.5];w1=2*pi*f1; H1=freqz(a,b,w1);
» HA1=abs(H1); plot(f1,HA1), axis([0 0.5 -0.05 1.05]), grid on
» figure, HP1=angle(H1); plot(f1,HP1), grid on

```

10. Встановити значення амплітуди пульсацій фільтра Чебишова 0.4 дБ

```
» R = 0.4
```

11. Синтезувати фільтр Чебишова з $R = 0.4$ дБ

Для ФНЧ » `[a,b]=cheby1(m, R, 2*fc1)`

Для ФВЧ » `[a,b]= cheby1 (m, R, 2*fc1, 'high')`

Для РФ » `[a,b]= cheby1 (m, R, [2*fc1 2*fc2])`

Для СФ » `[a,b]= cheby1 (m, R, [2*fc1 2*fc2], 'stop')`

Записати значення коефіцієнтів `a` і `b`.

12. Виконати для фільтра пункти 4-9. Звернути увагу на коливання в АЧХ фільтра Чебишова.

13. Встановити значення амплітуди пульсацій фільтра Чебишова 1.2 дБ

```
» R = 1.2
```

14. Виконати для фільтра пункти 11, 4-9.

Порівняти крутість АЧХ та рівень пульсацій для фільтра Баттерворта та фільтрів Чебишова з $R = 0.4$ та 1.2 дБ

Домашнє завдання

Для зазначеного викладачем і синтезованого в ході виконання роботи фільтра розрахувати значення ЧХ у точках $\omega = 0, \pi/2, \pi$. Порівняти з результатами, що отримані в ході лабораторної роботи (П. 6-8). Частоти $0, \pi/2, \pi$ відповідають відлікам 1, 11, 21 виведеної ЧХ (виділені в прикладі). Заповнити табл 2.4.

Таблиця 2.4 – Результати розрахунків

ω	0	$\pi/2$	π
$R(\omega)$			
$I(\omega)$			
$H(\omega)$			
$\varphi(\omega)$			

Розрахувати 6 відліків імпульсної характеристики. Заповнити табл. 2.1

Приклад виконання домашнього завдання

Умова:

Розрахувати значення ЧХ у точках $\omega = 0, \pi/2, \pi$ фільтра верхніх частот Баттерворта з наступними характеристиками. Порядок фільтра $m = 3$, відносна частота зрізу $f_1=0.18$.

Розрахувати шість відліків імпульсної характеристики $h_0 \dots h_5$. Заповнити табл.2.1

Розв'язок:

Для розрахунку коефіцієнтів фільтра введемо вихідні дані $m = 3, f_1=0.18$ (пункт 2 лабораторної роботи). Далі виконаємо пункт 3 і отримаємо результати у вигляді

$$a = 0.3003 \quad -0.9008 \quad 0.9008 \quad -0.3003$$

$$b = 1.000000 \quad -0.809832 \quad 0.508073 \quad -0.084274$$

Таким чином коефіцієнти фільтра мають значення

$$a_0 = 0.3003; \quad a_1 = -0.9008; \quad a_2 = 0.9008; \quad a_3 = -0.3003;$$

$$b_1 = 0.809832; \quad b_2 = -0.508073; \quad b_3 = 0.084274.$$

Звертаємо увагу, що коефіцієнти b_k набувають інверсних значень порівняно з виданими програмою.

Розрахуємо значення відліків частотної характеристики для заданих значень ω .

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega i}}{1 - \sum_{k=1}^M b_k e^{-j\omega k}} = \frac{a_0 e^{-j\omega \cdot 0} + a_1 e^{-j\omega \cdot 1} + a_2 e^{-j\omega \cdot 2} + a_3 e^{-j\omega \cdot 3}}{1 - b_1 e^{-j\omega \cdot 1} - b_2 e^{-j\omega \cdot 2} - b_3 e^{-j\omega \cdot 3}}.$$

$$\text{При } \omega = 0 \quad H(j0) = \frac{a_0 e^{-j0 \cdot 0} + a_1 e^{-j0 \cdot 1} + a_2 e^{-j0 \cdot 2} + a_3 e^{-j0 \cdot 3}}{1 - b_1 e^{-j0 \cdot 1} - b_2 e^{-j0 \cdot 2} - b_3 e^{-j0 \cdot 3}}.$$

Враховуючи, що $e^{j0} = 1$,

$$H(j0) = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3}{1 - b_1 - b_2 - b_3} = \frac{0.3003 - 0.9008 + 0.9008 - 0.3003}{1 - 0.80983 + 0.50807 - 0.08427} = \frac{0}{0.61397} = 0.$$

$$H(0)=0, \varphi(0)=0.$$

$$\text{При } \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$H(j\frac{\pi}{2}) = \frac{a_0 e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 0} + a_1 e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 1} + a_2 e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2} + a_3 e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3}}{1 - b_1 e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 1} - b_2 e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2} - b_3 e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3}} =$$

$$= \frac{a_0 e^{-j0} + a_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} + a_2 e^{-j\pi} + a_3 e^{-j\frac{3\pi}{2}}}{1 - b_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} - b_2 e^{-j\pi} - b_3 e^{-j\frac{3\pi}{2}}}.$$

Відмітимо, що

$$e^{-j0} = \cos(0) - j \sin(0) = 1;$$

$$e^{-j\pi/2} = \cos(\pi/2) - j \sin(\pi/2) = -j;$$

$$e^{-\pi} = \cos(\pi) - j \sin(\pi) = -1;$$

$$e^{-j3\pi/2} = \cos(3\pi/2) - j \sin(3\pi/2) = j.$$

Тоді

$$\begin{aligned} H(j\frac{\pi}{2}) &= \frac{a_0 - ja_1 - a_2 + ja_3}{1 + jb_1 + b_2 - jb_3} = \frac{0.3003 + j0.9008 - 0.9008 - j0.3003}{1 + j0.8098 - 0.5081 - j0.0843} = \\ &= \frac{-0.6005 + j0.6005}{0.4919 + 0.7255}. \end{aligned}$$

Відповідно до правил ділення комплексних чисел домножуємо чисельник та знаменник на число, комплексно спряжене до знаменника. В результаті уявна частина в знаменнику занулиться і отримаємо класичну формулу комплексного числа.

$$\begin{aligned} H(j\frac{\pi}{2}) &= \frac{(-0.6005 + j0.6005) \cdot (0.4919 - j0.7255)}{(0.4919 + j0.7255) \cdot (0.4919 - j0.7255)} = \\ &= \frac{(-0.6005 \cdot 0.4919 + 0.6005 \cdot 0.7255) + j(0.6005 \cdot 0.7255 + 0.6005 \cdot 0.4919)}{0.4919^2 + 0.7255^2} = \\ &= \frac{0.14028 + j0.73105}{0.76832} = 0.1826 + j0.9515 \\ H(\pi/2) &= |H(j\pi/2)| = \\ \sqrt{H_R^2(\pi/2) + H_I^2(\pi/2)} &= \sqrt{0.1826^2 + 0.9515^2} = \sqrt{0.03870} = 0.9689; \end{aligned}$$

$$\varphi(\pi/3) = \text{Arctg}\left(\frac{H_I(\pi/2)}{H_R(\pi/2)}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{0.9515}{0.1826}\right) = -0.587 \text{ рад} = 79.14^\circ.$$

При $\omega = \pi$

$$\begin{aligned} H(j\pi) &= \frac{a_0 e^{-j\pi \cdot 0} + a_1 e^{-j\pi \cdot 1} + a_2 e^{-j\pi \cdot 2} + a_3 e^{-j\pi \cdot 3}}{1 - b_1 e^{-j\pi \cdot 1} - b_2 e^{-j\pi \cdot 2} - b_3 e^{-j\pi \cdot 3}} = \\ &= \frac{a_0 e^{-j0} + a_1 e^{-j\pi} + a_2 e^{-j2\pi} + a_3 e^{-j3\pi}}{1 - b_1 e^{-j\pi} - b_2 e^{-j2\pi} - b_3 e^{-j3\pi}}. \end{aligned}$$

Врахуємо, що

$$e^{-j0} = \cos(0) - j \sin(0) = 1;$$

$$e^{-\pi} = \cos(\pi) - j \sin(\pi) = -1;;$$

$$e^{-2\pi} = \cos(2\pi) - j \sin(2\pi) = 1;$$

$$e^{-2\pi} = \cos(3\pi) - j \sin(3\pi) = -.$$

Тоді

$$H(j\frac{\pi}{2}) = \frac{a_0 - a_1 + a_2 - a_3}{1 + b_1 - b_2 + b_3} = \frac{0.3003 + 0.9008 + 0.9008 + 0.3003}{1 + 0.8098 + 0.5081 + 0.0843} = \frac{2.4022}{2.4022} = 1.$$

$$H(\pi) = 1, \varphi(\pi) = 0.$$

На підставі отриманих даних заповнимо табл. 2.5

Таблиця 2.5 – Розраховані значення

ω	0	$\pi/2$	π
$R(\omega)$	0	0.1826	1
$I(\omega)$	0	0.9515	0
$H(\omega)$	0	0.9689	1
$\varphi(\omega)$	0	79.14°	0

Розрахуємо імпульсну характеристику фільтра, для чого заповнимо табл. 2.6

Таблиця 2.6 – Розрахунок імпульсної характеристики НІХ-фільтра

i	a_0	a_1	a_2	a_3	b_3	b_2	b_1	
	0.3003	-0.9008	0.9008	-0.3003	0.0843	-0.5081	0.8098	
i	x_i	x_{i-1}	x_{i-2}	x_{i-3}	y_{i-3}	y_{i-2}	y_{i-1}	$y_i = h_i$
0	1	0	0	0	0	0	0	0.3003
1	0	1	0	0	0	0	0.3003	-0.6576
2	0	0	1	0	0	0.3003	-0.6576	0.2157
3	0	0	0	1	0.3003	-0.6576	0.2157	0.2338
4	0	0	0	0	-0.6576	0.2157	0.2338	0.0243
5	0	0	0	0	0.2157	0.2338	0.0243	...

В дискретний момент часу $i=0$ $x_0 = 1$, решта значень x_{i-j} , y_{i-k} дорівнюють нулю. Згідно (2.1)

$$\begin{aligned} y_0 = h_0 &= a_0 x_0 + a_1 x_{-1} + a_2 x_{-2} + a_3 x_{-3} + b_1 y_{-1} + b_2 y_{-2} + b_3 y_{-3} = \\ &= 0.3003 \cdot 1 - 0.9008 \cdot 0 + 0.9008 \cdot 0 - 0.3003 \cdot 0 + \\ &+ 0.8098 \cdot 0 - 0.5081 \cdot 0 + 0.0843 \cdot 0 = 0.3003 \end{aligned}$$

Для отримання наступного значення у другому рядку табл. 2.6 значення x_{i-j} зсуваємо праворуч, а значення y_{i-k} ліворуч і повторюємо обчислення за формулою (2.1).

$$\begin{aligned} y_1 = h_1 &= a_0 x_1 + a_1 x_0 + a_2 x_{-1} + a_3 x_{-2} + b_1 y_0 + b_2 y_{-1} + b_3 y_{-2} = \\ &= 0.3003 \cdot 0 - 0.9008 \cdot 1 + 0.9008 \cdot 0 - 0.3003 \cdot 0 + \\ &+ 0.8098 \cdot 0.3003 - 0.5081 \cdot 0 + 0.0843 \cdot 0 = -0.6576 \end{aligned}$$

Для розрахунку $h_2 \dots h_5$ повторюємо обчислення за формулою 2.1.

$$\begin{aligned} y_2 = h_2 &= a_0 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_0 + a_3 x_{-1} + b_1 y_1 + b_2 y_0 + b_3 y_{-1} = \\ &= 0.3003 \cdot 0 - 0.9008 \cdot 0 + 0.9008 \cdot 1 - 0.3003 \cdot 0 + \\ &+ 0.8098 \cdot (-0.6576) - 0.5081 \cdot 0.3003 + 0.0843 \cdot 0 = 0.2157 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 = h_3 &= a_0 x_3 + a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_0 + b_1 y_2 + b_2 y_1 + b_3 y_0 = \\ &= 0.3003 \cdot 0 - 0.9008 \cdot 0 + 0.9008 \cdot 0 - 0.3003 \cdot 1 + \\ &+ 0.8098 \cdot 0.2157 - 0.5081 \cdot (-0.6576) + 0.0843 \cdot 0.3003 = 0.2338 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 = h_4 &= a_0 x_4 + a_1 x_3 + a_2 x_2 + a_3 x_1 + b_1 y_3 + b_2 y_2 + b_3 y_1 = \\ &= 0.3003 \cdot 0 - 0.9008 \cdot 0 + 0.9008 \cdot 0 - 0.3003 \cdot 0 + \\ &+ 0.8098 \cdot 0.2338 - 0.5081 \cdot 0.2157 + 0.0843 \cdot (-0.6576) = 0.0243 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_5 = h_5 &= a_0 x_5 + a_1 x_4 + a_2 x_3 + a_3 x_2 + b_1 y_4 + b_2 y_3 + b_3 y_2 = \\ &= 0.3003 \cdot 0 - 0.9008 \cdot 0 + 0.9008 \cdot 0 - 0.3003 \cdot 0 + \\ &+ 0.8098 \cdot 0.0243 - 0.5081 \cdot 0.2338 + 0.0843 \cdot 0.2157 = -0.0809 \end{aligned}$$

Комп'ютерне моделювання підтвердило збіг розрахованих та експериментально отриманих результатів.

Зміст звіту

Звіт по роботі повинен включати дані комп'ютерних розрахунків, графіки ІХ та вікна для зазначеного фільтра, графіки АЧХ, ФХ та ІХ для трьох фільтрів, результати домашніх перевірочних розрахунків.

Контрольні питання

1. Які переваги та недоліки НІХ-фільтрів у порівнянні з СІХ-фільтрами?
2. Що спільного і чим відрізняються схеми СІХ- та НІХ-фільтрів?

3. Визначте значення ЧХ $H(j\frac{\pi}{3})$ НІХ-фільтра з коефіцієнтами $a_0=2, a_1 = -1, a_2 = -3, b_1 = -1, b_2 = -3..$
4. На вхід фільтра з попереднього питання подано послідовність $\{x_i\} = \{2, -2, 1, -4, -3\}$. Визначте перші вісім відліків сигналу на виході фільтра.
5. За якою схемою реалізуються НІХ-фільтри?
6. Визначити значення частотної характеристики $H(j\pi/2)$ НІХ-фільтру з $H(z)=(3+1\cdot z^{-1}\cdot 4\cdot z^{-2})/(1-3\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2})$.
7. Визначити значення частотної характеристики $H(j\pi/2)$ НІХ-фільтру, що описується лінійним різністним рівнянням
- $$y_i = 2x_i - 3x_{i-1} + 1x_{i-2} - 2y_{i-1} + 3y_{i-2}$$
8. Що не є відмінністю НІХ-фільтрів в порівнянні з СІХ-фільтрами?
- нелінійність фазочастотної характеристики
 - чутливість до помилок округлення
 - можлива нестійкість
 - складність реалізації.
9. Який математичний апарат доречно примінити для знаходження імпульсної характеристики НІХ-фільтрів?
- диференціальних рівнянь
 - частотних перетворень
 - перетворення Фур'є
 - лінійних різністних рівнянь
10. Які методи синтезу НІХ фільтрів ви знаєте?
11. Як відображається шкала частот при білінійному перетворенні під час синтезу цифрових фільтрів?
- лінійно
 - нелінійно
 - дискретно
 - з аналогових одиниць виміру в цифрові
 - змінюючи розмірність.
12. Що є ознакою стійкості БІХ-фільтрів?
- додатність коефіцієнтів
 - від'ємність коефіцієнтів
 - модулі полюсів передаточної функції менше одиниці
 - модулі нулів передаточної функції менше одиниці
13. Що є характерним для АЧХ фільтрів Баттерворта?
- має рівноколивальний вигляд
 - монотонно змінюється
 - є сталою на інтервалах пропускання та непропускання
 - має розриви.
14. Що є характерним для АЧХ фільтрів Чебишова?
- має рівноколивальний вигляд
 - монотонно змінюється

- в) є сталою на інтервалах пропускання та непропускання
- г) має розриви.

Лабораторна робота №3. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ЦИФРОВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Мета роботи: дослідження методів цифрового спектрального аналізу та визначення впливу параметрів алгоритмів спектрального аналізу на форму спектру.

Теоретичні відомості

Спектральне оцінювання допомагає вирішувати завдання неруйнівного контролю, діагностики в техніці та медицині, пошуку прихованих періодичностей, аналізу ДНК та багато інших. Найбільш простим методом оцінювання амплітуди гармонік, що містяться в спектрі аналізованого сигналу, є обчислення коефіцієнтів АЧХ сигналу згідно (1.1). На практиці АЧХ обчислюється для набору дискретних частоти за допомогою дискретного перетворення Фур'є, при цьому зазвичай застосовується алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ).

Однак визначення спектрального складу сигналу за допомогою обчислення ДПФ від дискретної вибірки викликає ряд труднощів. Так, застосування формули ДПФ передбачає періодичність сигналу. Періоди ж реальних сигналів далеко не завжди збігаються із довжиною вибірки, що призводить до розривів сигналу на краях. При обчисленні ДПФ таких сигналів з'являються високочастотні потужні спектральні коефіцієнти.

З іншого боку, аналізований сигнал піддається, зазвичай, впливу різноманітних шумів. При обчисленні спектра сигналу ці шуми можуть як замаскувати існуючі в сигналі гармоніки, так і породити помилкові викиди на АЧХ.

З метою боротьби зі згаданими проблемами та отримання найбільш точних характеристик сигналу застосовується кілька методів. Одним із загальних прийомів, що застосовуються в цих методах, є домноження аналізованої послідовності на віконну послідовність, що має АЧХ з одним вузьким центральним пелюстком. В якості таких послідовностей можуть використовуватися розглянуті при синтезі КІХ-фільтрів віконні послідовності вікон Хеммінга, Ханна, Блекмана і т.д. При поелементному перемноженні аналізованого сигналу та вікна відбувається згортка їх частотних характеристик, і, таким чином, несправжні бічні пелюстки пригнічуються.

Іншою загальною ідеєю, на якій будуються сучасні алгоритми спектрального аналізу, є усереднення інформації по кільком реалізаціям із метою придушення шумової складової. Конкретні математичні алгоритми, що втілюють цю ідею, дуже різноманітні і дозволяють вирішувати завдання спектрального ана-

лізу при різних вимогах та обмеженнях за точністю, роздільною здатністю та швидкістю.

Найбільш простим методом, що забезпечує виділення характеристик спектральних складових на тлі шуму, є *періодограмний метод Уелча*. Основною ідеєю методу є поділ послідовності $x_0 \dots x_{N-1}$ з N відліків сигналу на ряд сегментів, що не перекриваються (рис. 3.1) та усереднення результатів.

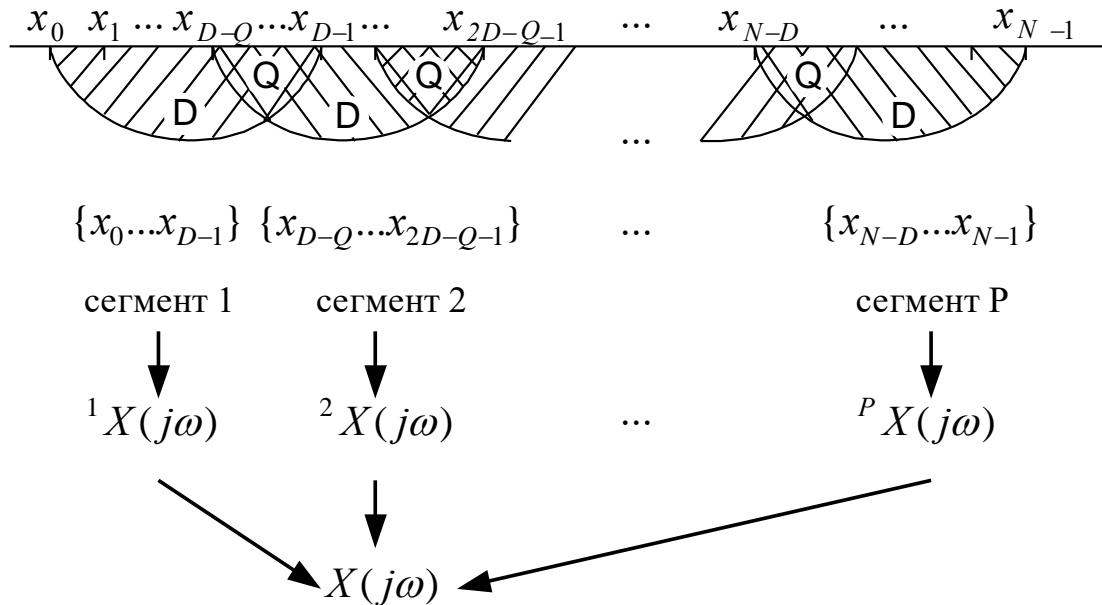


Рисунок 3.1 – Періодограмний метод спектрального оцінювання

Якщо у кожному сегменті міститься по D відліків, а число загальних відліків у суміжних сегментах Q відліків (тобто зсув сегментів дорівнює $D-Q$), то загальна кількість сегментів становитиме

$$P = \lfloor (N-D)/(D-Q) + 1 \rfloor \quad (3.1)$$

де $\lfloor \rfloor$ означає цілу частину числа.

Набір відліків у кожному сегменті $\{^K x_i\} = \{^K x_0, ^K x_1, \dots, ^K x_{D-1}\}$, (K – номер сегмента), як правило, зважується, тобто поелементно примножується на віконну послідовність $w_0 \dots w_{D-1}$, у результаті чого отримуються зважені сегментні послідовності $^K x_i^* = ^K x_i \cdot w_i$. Після цього проводиться обчислення оцінки спектра для кожного сегмента згідно (3.2).

$$^K X(j\omega) = \sum_{i=0}^{D-1} ^K x_i \cdot e^{-j\omega i} \quad (3.2)$$

Потім значення спектра усереднюються по всіх сегментах, що розглядаються. Зазвичай при цьому обчислюється усереднена спектральна щільність потужності

$$S(\omega) = \frac{1}{P} \sum_{\kappa=1}^P \left| X(j\omega) \right|^2. \quad (3.3)$$

Для виключення впливу величини сегмента та енергії вікна $S(\omega)$ зазвичай додатково домножується на нормуючий коефіцієнт $U = 1/D \cdot \sum_{i=0}^{D-1} w_i^2$.

У разі якщо зважування не застосовувалося (прямокутне вікно), нормуючий коефіцієнт визначається просто як $U=1/D^2$.

Оцінка амплітудного спектра виходить із (3.3) як $X(\omega) = \sqrt{S(\omega)}$.

Іншим методом спектрального оцінювання, що часто використовується, є *корелограмний метод*. Метод заснований на відомій *теоремі Вінера Хінчина*, що пов'язує спектральну щільність потужності та автокореляційну функцію (АКФ) сигналу. Для випадкового дискретного сигналу теорема Вінера-Хінчина записується так ,

$$S(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} R(i) \cdot e^{-j\omega i}, \quad (3.4)$$

де $S(\omega)$ – спектральна щільність потужності;

$R(i)$ – i -й відлік автокореляційної функції аналізованого сигналу.

Можливі різні способи оцінювання автокореляційної функції, проте найчастіше використовують оцінки аперіодичної АКФ:

незміщену
$$R(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-1} x_k \cdot x_{k+i} \cdot \quad (3.5)$$

та зміщену
$$R(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-i-1} x_k \cdot x_{k+i} \quad (3.6)$$

Сутність самого корелограмного методу складається у тому, що у вираз (3.4) підставляється кінцева послідовність оцінок АКФ (корелограма). Тоді (3.4) набуває вигляду . (3.7)

$$S(\omega) = \sum_{i=-L}^L R(i) \cdot e^{-j\omega i}, \quad (3.7)$$

де L – кінцева кількість оцінок АКФ.

Враховуючи симетрію АКФ $R(i)=R(-i)$ та властивості парності/непарності тригонометричних функцій, вираз (3.7) може бути перетворений на

$$S(\omega) = R(0) + 2 \sum_{i=1}^L R(i) \cdot \cos(\omega i). \quad (3.8)$$

Зазначимо, що, як і в періодограмному методі, зазвичай використовують зважування вибірки $R(i)$ за допомогою вікна та домноження на коефіцієнт корекції енергії вікна.

$$U = 1 / \sum_{i=0}^{2L} w_i^2, \quad (3.9)$$

Для прямокутного вікна

$$U = 1/(2L+1). \quad (3.10)$$

Найбільш точні спектральні оцінки дає група методів, що базуються на параметричному моделюванні. Суть цих методів полягає в тому, що сигнал подається як результат проходження білого шуму с нульовим середнім, дисперсією D_ε і середнім квадратичним відхиленням σ_ε через цифровий фільтр (рис. 3.2).

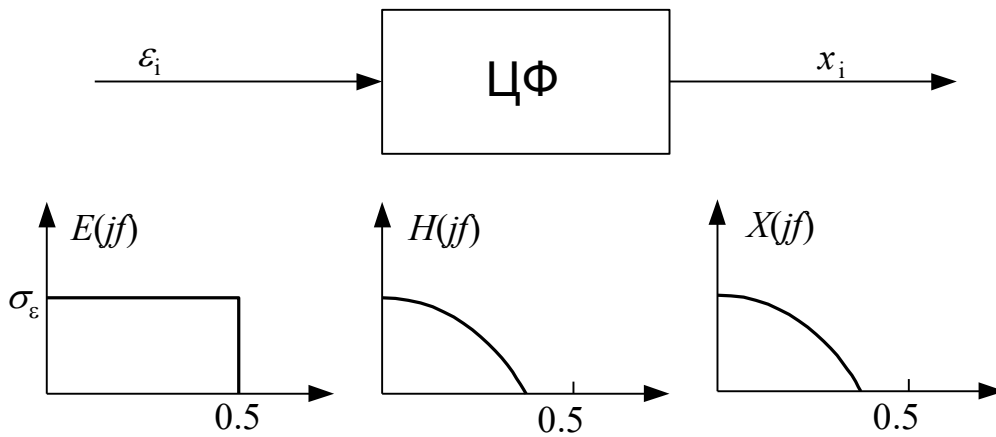


Рисунок 3.2 – Схема спектрального оцінювання на основі параметричного моделювання

Спектр білого шуму, що надходить на вхід гіпотетичного фільтра, рівномірний у всій смузі частот від нуля до $0.5 f_d$ і має у цій смузі постійне значення σ_ε . Спектр сигналу $X(j\omega)$ дорівнює добутку спектру шуму $E(j\omega)$ та частотної характеристики фільтра $H(j\omega)$.

$$X(j\omega) = E(j\omega) \cdot H(j\omega), \quad (3.11)$$

Або, враховуючи, що спектр білого шуму $E(j\omega)$ постійний у заданій смузі частот,

$$X(j\omega) = \sigma_\varepsilon H(j\omega). \quad (3.12)$$

Відновивши якимось чином структуру та коефіцієнти фільтра, можна розрахувати його частотну характеристику $H(j\omega)$ та спектр сигналу $X(j\omega)$. Залежно від передбачуваної структури фільтра розглядаються три основні моделі.

Якщо передбачається, що фільтр має СІХ-структуру, тобто

$$H(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_{N-2} \cdot z^{N-2} + a_{N-1} \cdot z^{N-1}, \quad (3.13)$$

а також амплітудний спектр $X(\omega) = \sqrt{S(\omega)}$.

Одним із сучасних методів відображення результатів спектрального оцінювання є спектрограми. Спектрограми спираються на результати короткочасного (віконного) перетворення Фур'є. Як і в періодограмному методі, при проведенні короткочасного перетворення Фур'є інтервал спостереження сигналу розбивається на ряд часових вікон, що перекриваються, і в кожному вікні обчислюється своє перетворення Фур'є. Проте потім, на відміну періодограмного методу, спектральні коефіцієнти не усереднюються, а відображаються у площині частота – час. Амплітуда кожної спектральної складової при цьому відображується кольором, рівнем яскравості або висотою на тривимірному графіку.

Порядок виконання роботи

1. Відповідно до зазначеного викладача варіантом з табл.1 задати значення $a_1, a_2, a_3, f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, наприклад

```
» a1 = 0.8; a2 = 0.7; a3 = 0.5; f1 = 50; f2 = 140; f3 = 255;
p1=0; p2=90; p3=30;
```

2. Задати число відліків сигналу N , частоту та період дискретизації f_d, T_d

```
»N = 200; fd=1000; Td=1/fd;
```

3. Встановити шкалу дискретних відліків часу

```
t=0:Td:(N-1)*Td;
```

4. Сформувати і спостерігати сигнал, що є сумою трьох синусоїд

```
» x = a1 * sin (2 * pi * f1 * t + p1) + a2 * sin (2 * pi * f2 *
t + p2) + a3 * sin (2 * pi * f3 * t + p3); plot(t,x)
```

5. Задати амплітуду шуму E та додати шум до сигналу. Спостерігати зашумлений сигнал

```
» E = 4; x=x+E*(rand(1,N)-0.5); plot(t,x)
```

6. Задати параметри періодограмного методу Уелча – розмір блоку D та число відліків Q , що перекриваються

```
»D = 200; Q=0;
```

7. Сформувати прямокутне вікно

```
» win = boxcar(D);
```

8. Обчислити оцінку спектра періодограмним методом Уелча

```
»[Pxx,F] = pwelch(x,win,Q,1000,fd);
```

9. Спостерігати та замалювати криву залежності спектральної щільності потужності від частоти. Виділити піки, що відповідають основним гармонікам сигналу.

```
» plot(F,Pxx)
```

10. Сформувати та спостерігати вікно Хеммінга

```
» win = hamming(D); plot(1:D, win)
```

11. Повторити пункти 8-9. Відзначити вплив віконного зважування на форму спектру

12. Послідовно задати параметри періодограмного методу Уелча – розмір блоку D рівним 100 і 50 і число відліків Q , що перекриваються, відповідно рівним 50 і 40. У випадку виконання роботи в середовищі *Octave Online* задати Q рівним відповідно 0.5 та 0.8.

Для кожного з цих випадків виконати пункти 10, 11. Відзначити вплив параметрів алгоритму на форму спектру

13. Задати порядок моделі авторегресії M

```
» M = 8;
```

14. Обчислити оцінку спектра на основі моделі авторегресії та рівнянь Юла-Уолкера

```
» [Pxx, F] = pyulear(x, M, 1000, fd);
```

15. Спостерігати та замалювати криву залежності спектральної щільності потужності від частоти. Виділити піки, що відповідають основним гармонікам сигналу.

```
» plot(F,Pxx)
```

16. Послідовно задати параметр моделі авторегресії M рівним 16, 32, 64. Для кожного з цих випадків виконати пункти 14-15. Відзначити вплив параметрів алгоритму на форму спектра

17. Сформувати та спостерігати лінійно частотно модульований сигнал

```
» y = chirp (t, f1, 0.2, f3, 'linear'); plot(t,y)
```

18. Сформувати та спостерігати спектрограму ЧС сигналу. Відзначити характер зміни частоти сигналу від часу

```
» specgram(y, 1000, fd, boxcar(20), 19), colorbar
```

19. Сформувати та спостерігати квадратично частотно модульований сигнал

```
» y = chirp (t, f1, 0.2, f3, 'quadratic'); plot(t,y)
```

20. Повторити пункт 18. Порівняти з результатами п.17. Звернути увагу на відображення закону зміни частоти на графіку.

Зміст звіту

Графіки за пунктами 9, 15 (по чотири графіки за кожним методом). Висновки щодо впливу параметрів алгоритмів на форму спектра.

Графіки спектрограм за пунктами 18, 20.

Таблиця 3.1 – Варіанти завдання

№	a_1	a_2	a_3	f_1	f_2	f_3	φ_1	φ_2	φ_3
1	0.4	0.7	0.5	50	140	185	0	90	30
2	0.6	0.9	0.3	75	133	204	45	60	0
3	0.8	1	0.4	43	122	198	90	45	45
4	1.1	0.7	0.3	48	137	206	90	90	45
5	0.7	0.8	0.4	62	146	214	45	0	90
6	0.5	0.9	0.4	36	153	215	0	30	0
7	1.1	0.3	0.7	45	117	183	30	45	30
8	0.7	0.5	0.8	39	154	205	60	90	45
9	0.9	0.4	0.7	61	125	174	30	45	90
10	1	0.4	0.6	47	123	117	40	55	10
11	0.44	0.7	0.5	50	140	175	0	90	30
12	0.65	0.9	0.3	73	133	194	35	60	0
13	0.83	1	0.4	43	122	178	90	35	45
14	1.07	0.7	0.3	48	147	196	90	30	45
15	0.6	0.8	0.4	62	146	204	45	30	90
16	0.5	0.9	0.4	38	143	215	40	30	0
17	1.02	0.3	0.7	45	127	193	30	55	30
18	0.7	0.5	0.8	39	144	175	40	60	45
19	0.8	0.4	0.7	61	125	174	60	45	90
20	1.05	0.4	0.6	45	123	113	40	45	10
21	0.47	0.7	0.5	56	120	165	0	40	30

№	a_1	a_2	a_3	f_1	f_2	f_3	φ_1	φ_2	φ_3
22	0.65	0.96	0.34	73	133	214	45	60	50
23	0.84	1	0.41	44	142	198	90	145	45
24	1.08	0.6	0.2	41	117	206	90	20	45
25	0.78	0.85	0.3	67	146	218	45	110	90
26	0.58	0.94	0.41	36	113	205	0	150	60

Контрольні питання

1. Яку структуру має цифровий фільтр, що використовується при спектральному аналізі методом ковзного середнього?

2. Яку структуру має цифровий фільтр, що використовується при спектральному аналізі методом авторегресії?

3. Яку структуру має цифровий фільтр, що використовується при спектральному аналізі методом авторегресії-ковзного середнього?

4. До яких ефектів призводить неспівпадіння періоду сигналу та довжини вибірки при спектральному аналізі?

5. З якою метою застосовуються віконні функції при спектральному аналізі?

6. Визначити параметри b_1, b_2 моделі авторегресії другого порядку послідовності $\{x_i\} = \{-1, 2, -2, 0, 3, 1\}$. Використати зміщену аперіодичну оцінку АКФ $R(0), R(1), R(2)$.

7. Розрахувати періодограмним методом значення $X(\pi/3)$ послідовності $\{x_i\} = \{2, 1, 0, 3, -2, 1, 0, -1\}$. Використати прямокутне вікно, розмір сегмента $D=4$, перекриття на $Q=2$ відліки.

8. Між якими величинами встановлює зв'язок теорема Вінера-Хінчина?

а) спектральна щільність потужності та автокореляційна функція

б) спектральна щільність потужності та частотна характеристика

в) автокореляційна та взаємна кореляційна функція

г) імпульсна та частотна характеристика.

9. Як підвищити ступень розрізнення при спектральному аналізі періодограмним методом?

а) застосувати вікно Хемінга

б) збільшити сегмент

в) зменшити сегмент

г) збільшити коефіцієнт перекриття сегментів

10. Як підвищити ступень розрізнення при спектральному аналізі корелограмним методом?

а) застосувати ДПФ

б) застосувати вікно Хемінга

в) збільшити кількість відліків АКФ

г) зменшити кількість відліків АКФ.

11. Як підвищити ступень придушення завад при спектральному аналізі періодограмним методом?

- а) додати до сигналу білий шум
- б) збільшити сегмент
- в) зменшити сегмент
- г) зменшити коефіцієнт перекриття сегментів

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з курсу «Цифрова обробка сигналів» для студентів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та курсу «Цифрова обробка сигналів в інформаційно-комп'ютерних системах» для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / уклад. А.В. Івашко, Д. О. Лунін, М. В. Гунбін. – Харків : НТУ «ХПІ». – 51 с.

2. Наконечний А. Й., Наконечний Р. А., Павлиш В. А. Цифрова обробка сигналів. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. - 368 с.

3. Цифрова обробка сигналів та зображень: навчальний посібник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Укладачі : Тотосько О.В., Стухляк П.Д. – Тернопіль :Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя ,2016. – 140 с.

4. Цифрова обробка сигналів в телекомунікаційних системах : підручник / Г. Г. Бортник, В. М. Кичак. – Вінниця : ВНТУ, 2014. – 232 с. ISBN

5. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.

6. Сайко В.Г., Оксіюк О.Г., Дікарев О.В. Основи цифрового оброблення сигналів в системах цифрового радіозв'язку. Частина 1. Навчальний посібник. – К.: ДУТ, 2016. – 107 с.

7. Лазарев Ю. Ф. Довідник з MATLAB / Електронний навчальний посібник з курсового і дипломного проектування. – К.: НТУУ "КПІ", 2013. – 132 с.

Навчальне видання

ІВАШКО Андрій Володимирович
ЛУНІН Денис Олександрович

ЦИФРОВІ ФІЛЬТРИ

Методичні вказівки

до виконання лабораторних робіт

з курсу «Цифрова обробка сигналів»

для студентів спеціальностей:

174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

172 Телекомунікації та радіотехніка

Відповідальний за випуск Зуєв А.О.

Роботу до друку рекомендував Дудник О.В.

Редактор

План 2023 р., Поз. 638

Підписано до друку 01.11.2023. Формат 60'84 1/16. Папір друк. № 2.

Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Умов. друк. арк. 3,2.

Обл.-вид. арк. 2,7. Наклад 100 прим. Зам. № __. Ціна договірна.

Самостійне видання