УДК 17.27

***І. С. БЄЛОВ,*** канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

# ПРО LMI – ХАРАКТЕСТИКИ НЕВІД'ЄМНИХ КОСИНУС – МНОГОЧЛЕНІВ

Розглянуті невід'ємні косинус – многочлени з мінімальним вільним членом, який знаходиться як розв'язок задачі SDP-програмування.

Рассмотрены неотрицательные косинус – многочлены с минимальным свободным членом, который находится как решение задачи SDP – программирования.

Nonnegative cosine polynomials with minimal free term are considered, which is a solution of task of SDP - programming

**Вступ.** Тригонометричний многочлен

$$P(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta$$

називається *невід'ємним в* $[a,b]$, якщо $P(\theta)\ge 0(a\le\theta\le b)$.

Невід'ємний тригонометричний многочлен по косинусах

$$A(\theta)=a_0+2\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta\quad(0\le\theta\le\pi)$$

визначає нескінченну множину лінійних нерівностей відносно коефіцієнтів $\vec{a}(a_0,a_1,...,a_n)\in\Re^n$. Перетин відповідних півпросторів утворює опуклий конус $C_{n+1}=\left\{\vec{a}\,\middle|\,A(\theta)\ge 0\right\}$. Умовою невід'ємності косинус-многочлена є відома теорема *Фейєра – Ріса* про спектральну факторизацію [2]. А саме, для невід'ємності косинус-многочлена $A(\theta)=a_0+2\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta$ у $[-\pi,\pi]$ необхідно і достатньо існування параметрів $P(x_0,x_1,...,x_n)$ таких, що

$$A(\theta)=\left|x_0+x_1e^{-i\theta}+...+x_ne^{-in\theta}\right|^2.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь

$$a_0=\sum_{k=0}^{n}x_k^2\quad a_k=\sum_{i=0}^{n-k}x_ix_{k+i}\quad(1\le k\le n). \tag{1}$$

Отже, для перевірки невід'ємності $A(\theta)$ достатньо дослідити на сумісність систему квадратичних рівнянь (1). Якщо $a_0=E(a_1,a_2,...,a_n)>0$ є найменше значення, при якому $A(\theta)$ є невід'ємним, будемо казати, що відповідний косинус - многочлен має *нормальну форму*.

Пізніше, з розвитком обчислювальних методів, з'явилися так звані LMI – характеристики невід'ємних косинус – многочленів [2]. А саме, LMI – характеристика у формі рівностей стверджує що $\vec{a} \in C_{n+1}$ тоді і тільки тоді, коли існує ненегативна матриця

$$X = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{10} & & X_{n0} \\ X_{10} & X_{11} & & X_{n1} \\ & & & \\ X_{n0} & X_{n1} & & X_{nn} \end{pmatrix} \succ 0,$$

така що виконується система рівностей

$$\begin{cases} a_0 = X_{00} + X_{11} + \ldots + X_{nn}, \\ a_1 = X_{10} + X_{21} + \ldots + X_{nn-1}, \\ \\ a_n = X_{n0}. \end{cases} \qquad (2)$$

Дійсно, за умови (2) маємо $A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ \\ e^{in\theta} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} X_{00} & X_{10} & & X_{n0} \\ X_{10} & X_{11} & & X_{n1} \\ & & & \\ X_{n0} & X_{n1} & & X_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ \\ e^{in\theta} \end{bmatrix} \geq 0.$

За допомогою матриці $E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ систему (2) можна подати у вигляді

$$a_k = Tr\left(E^k X\right) \quad \left(0 \leq k \leq n\right). \qquad (3)$$

Обернене твердження легко отримати з (1)

$$a_k = \sum_{i-0}^{n-k} x_i x_{k+i} = x^T E^k x = Tr(E^k x x^T).$$

Безпосередньо з (2) отримуємо, що

$$A(\theta) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta \left(0 \leq \theta \leq \pi\right)$$

є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці $P$ порядку $n$ матриця $X\left(\vec{a}, P\right)$ порядку $n+1$ є ненегативною

$$X\left(\vec{a}, P\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \ldots & 0 & a_n \\ & & \\ 0 \ldots & 0 & a_1 \\ a_1 \ldots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \succ 0. \qquad (4)$$

Це і є LMI – характеристика у формі нерівностей.

Для перевірки умов (3,4), в яких фігурують позитивно – визначені матриці, існує декілька пакетів так званого *SDP – програмування*: Sedumi, SDPT3, SDPPACK, SDPA та інші. Ми розглянемо SDPT3 та варіант, що є імплементований у MatLab Control System Toolbox

**Постановка задачі.** Ми побудуємо невід'ємні косинус – многочлени в яких з теоретичних міркувань відомі мінімальні вільні члени і спробуємо знайти їх як розв'язок задачі на екстремум SDP – програмування.

Для цього розглянемо *ядро Фейєра*

$$F_n(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos k\theta ,$$

яке є невід'ємним косинус – многочленом із мінімальним вільним членом $a_0 = 1$. Легко перевірити, що за теоремою Фейєра – Ріса йому відповідають параметри

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Дослідимо відповідні косинус – многочлени із параметрами

$$P\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \pm\frac{1}{\sqrt{n+1}}, ..., \pm\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

**Розв'язок задачі.** Спочатку розглянемо питання, коли у сумісній системі (1) не можна зменшити $a_0$. Для цього, вважаючи координати розв'язку $P(x_0, x_1, ..., x_n)$ диференційованими функціями $a_0$, про- диференціюємо систему (1) по $a_0$. Отримаємо, позначаючи $x_i = P(i+1)$, лінійну систему для $P'$:

$$\begin{cases} P(1)*P'(1) + P(2)*P'(2) + ... + P(n)*P'(n) + P(n+1)*P'(n+1) = \dfrac{1}{2}, \\ P(2)*P'(1) + \left(P(1)+P(3)\right)*P'(2) + ..., \\ ... + \left(P(n-1)+P(n+1)\right)*P'(n) + P(n)*P'(n+1) = 0, \\ \\ P(n+1)*P'(1) + P(1)*P'(n+1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Зрозуміло, що при мінімальному $a_0$ $P'$ не існує, а це можливо тоді і тільки тоді, коли визначник системи (3) дорівнює нулю.

Отже доведена наступна

***Теорема***. *Для того щоб сумісна система (1) визначала найменший ві-*

*льний член* $a_0$*, при якому*

$$A(\theta) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

*є невід'ємним при фіксованих* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *необхідно і достатньо, щоб дорівнював нулю визначник*

$$\Delta(P) = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & & P(n+1) \\ P(2) & P(1)+P(3) & & P(n) \\ & & & \\ P(n+1) & 0 & & P(1) \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Для проведення конкретних обчислень вважатимемо $n = 7$, хоча все наступне має місце при будь–якому $n = 2^k - 1$. Розглянемо, наприклад, точку

$$P_2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),$$

(нумерація пов'язана із *нумерацією Пелі функцій Уолша* [1]), якій за Фейєром – Рісом відповідає невід'ємний косинус – многочлен

$$A_2(\theta) = 1 + \frac{5}{4}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta - \cos 4\theta - \frac{3}{4}\cos 5\theta - \frac{1}{2}\cos 6\theta - \frac{1}{4}\cos 7\theta.$$

Згідно теореми складаємо визначник (6)

$$\Delta(P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси маємо, що $\qquad 1 = E\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$

Відповідна LMI – задача на екстремум має вигляд:

$$\min \quad tr(X)$$

$$s.t. \quad X_{10} + X_{21} + X_{32} + X_{43} + X_{54} + X_{65} + X_{76} = \frac{5}{4};$$

$$X_{20} + X_{31} + X_{42} + X_{53} + X_{64} + X_{75} = \frac{1}{2};$$

$$X_{30}+X_{41}+X_{52}+X_{63}+X_{74}=-\frac{1}{4}; \qquad X_{40}+X_{51}+X_{62}+X_{73}=-1 ;$$

$$X_{50}+X_{61}+X_{72}=-\frac{3}{4}; \qquad X_{60}+X_{71}=-\frac{1}{2}; \qquad X_{70}=-\frac{1}{4}; \tag{7}$$

$$X=\begin{pmatrix} X_{00} & X_{10} & X_{20} & X_{30} & X_{40} & X_{50} & X_{60} & X_{70} \\ X_{10} & X_{11} & X_{21} & X_{31} & X_{41} & X_{51} & X_{61} & X_{71} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} & X_{32} & X_{42} & X_{52} & X_{62} & X_{72} \\ X_{30} & X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{43} & X_{53} & X_{63} & X_{73} \\ X_{40} & X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{54} & X_{64} & X_{74} \\ X_{50} & X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} & X_{65} & X_{75} \\ X_{60} & X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} & X_{76} \\ X_{70} & X_{71} & X_{72} & X_{73} & X_{74} & X_{75} & X_{76} & X_{77} \end{pmatrix} \succ 0 .$$

Розв’язок задачі (7) ( для подвоєних даних $2*\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-1,-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ ) за допомогою солвера MatLab **mincx** [4] має вигляд:

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 3.561480 | |
| *** | | new lower bound: | -0.049342 |
| | 2 | 2.207842 | |
| *** | | new lower bound: | 1.258658 |

……………………………

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 26 | 2.000014 | |
| *** | | new lower bound: | 1.999984 |
| | 27 | 2.000010 | |
| *** | | new lower bound: | 1.999991 |

Result: feasible solution of required accuracy
best objective value: 2.000010
guaranteed relative accuracy: 9.50e-006
f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009

Розв’язок тієї ж задачи за допомогою солвера SDPT3 **sqlp** [3] має вигляд:

num. of constraints = 36
dim. of sdp var = 8, num. of sdp blk = 1

dim. of free var = 7 *** convert ublk to lblk
*****************************************************************
SDPT3: Infeasible path-following algorithms
*****************************************************************
version predcorr gam expon scale_data
HKM 1 0.000 1 0
it pstep dstep pinfeas dinfeas gap prim-obj dual-obj cputime
-------------------------------------------------------------------
0|0.000|0.000|1.4e+001|6.9e+000|8.4e+002|-5.084022e-010 0.000000e+000| 0:0:00| chol 1 1
1|1.000|0.951|4.9e-006|4.1e-001|3.7e+001|-6.517675e-001 -3.476110e+001| 0:0:00| chol 1 1
……………………………………….
18|1.000|0.930|6.9e-013|5.7e-009|7.7e-008|-2.000000e+000 -2.000000e+000| 0:0:01| chol 2 2
19|1.000|0.931|4.0e-012|1.3e-009|1.9e-008|-2.000000e+000 -2.000000e+000| 0:0:01|
stop: max(relative gap, infeasibilities) < 1.00e-008
-------------------------------------------------------------------
number of iterations = 19
primal objective value = -1.99999999e+000
dual objective value = -2.00000001e+000
gap := trace(XZ) = 1.91e-008
relative gap = 3.81e-009
actual relative gap = 3.73e-009
rel. primal infeas = 3.98e-012
rel. dual infeas = 1.30e-009
norm(X), norm(y), norm(Z) = 2.5e+000, 2.0e+000, 4.0e+000
norm(A), norm(b), norm(C) = 1.4e+001, 3.8e+000, 4.3e+000
Total CPU time (secs) = 0.9
CPU time per iteration = 0.0
termination code = 0
DIMACS: 7.6e-012 0.0e+000 2.0e-009 0.0e+000 3.7e-009 3.8e-009
-------------------------------------------------------------------

Зведемо у таблицю результати аналогічних обчислень для невід’ємних многочленів $\{A_1,...,A_8\}$, параметри яких є функціями Уолша. Стовпець таблиці містить коефіцієнти двох многочленів, які відрізняються зсувом на $\pi$ і тому мають однакові характеристики.

**Зауваження.** Не слід вважати, що будь–яка послідовність чисел $\pm 1$ визначає за Фейєром – Рісом невід’ємний косинус – многочлен із коефіцієнтом

$a_0 = E(a_1,...,a_n)$. Наприклад, для $P(-1,1,1,-1,-1,-1,1,-1)$ маємо $\Delta(P) = 32$, отже, за доведенною теоремою вільний член $a_0 = 8$ не є мінімальним.

Таблиця

Результати обчислень для невід'ємних многочленів

| | [7/4 3/2 5/4 1 3/4 1/2 1/4] [-7/4 3/2 -5/4 1 -3/4 1/2 -1/4] | [1/4 -3/2 -1/4 1 1/4 -1/2 -1/4] [-1/4 -3/2 1/4 1 - 1/4 --1/2 1/4] | [5/4 1/2 -1/4 -1 -3/4 -1/2 -1/4] [-5/4 1/2 1/4 -1 3/4 -1/2 1/4] | [3/4 -1/2 -3/4 -1 -1/4 1/2 1/4] [-3/4 -1/2 3/4 -1 1/4 1/2 -1/4] |
|---|---|---|---|---|
| **mincx** | | | | |
| number of iterations | 7 | 16 | 27 | 21 |
| objective value | 2,000004 | 2,000013 | 2,00000001 | 2,000012 |
| guaranteed relative accuracy: | 6,06E-6 | 9.5E-6 | 9.5E-6 | 9.5E-6 |
| **sqlp** | | | | |
| number of iterations | 9 | 17 | 19 | 18 |
| objective value | 2.00000000 | 2.00000003 | 2.00000001 | 2.00000002 |
| relative gap | 7.63E-9 | 7.87E-9 | 3.81E-9 | 6.86E-9 |

**Висновки.**

1. Порівнюючи результати у таблиці, бачимо, що на розглянутих прикладах солвер **sqlp** працює краще за **mincx.**
2. Розгляд многочленів $\{A_1,...,A_8\}$ при $n = 7$ дозволяє припустити, що невід'ємні косинус – многочлени, параметри яких є функціями Уолша, мають нормальну форму.

**Список літератури: 1.** *Б.И.Голубов, А.В.Ефимов, В.А.Скворцов.* Ряды и преобразования Уолша.-М: Наука.–1987.–344 с. **2.** *B.Dumitrescu.* Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications.-Springer.–2007.–239 p. **3.** *K.C.Toh,R.H.Tutuncu,M.J.Todd.* On the implementation and usage of SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite – quadratic – linear programming, version 4.0.– Draft, 2006.–46 p. **4.** MatLab2010 Control ToolBox.-Users Guide.–2010.–78 p.

*Надійшла до редколегії 07.09.2011*