УДК 621.375:621.396.62

Т. Д. ГУЦОЛ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРОВОТОКА ЖИВОТНЫХ ПРИ НАЛИЧИИ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрена теоретическая модель кровотока в крупных кровеносных сосудах животных, учитывающая периодические пульсации давления в них, связанные с работой сердца, а также изменения просвета в них. Кровеносные сосуды представлены в виде однородных цилиндрических каналов с жесткими стенками, а кровь – в виде ньютоновской жидкости. Решение уравнений Навье-Стокса проведено в предположении, что пульсации давления имеют форму прямоугольных импульсов.

Ключевые слова: кровоток, кровеносный сосуд, переменное давление, составляющая скорости, уравнения Навье-Стокса, дифференциальные уравнения, ряд Фурье.

Розглянуто теоретичну модель течії крові у великих кровоносних судинах тварин, що враховує періодичні пульсації тиску в них, пов'язані з роботою серця, а також зміни просвіту в них. Кровоносні судини представлені у вигляді однорідних циліндричних каналів з жорсткими стінками, а кров – у вигляді ньютонівської рідини. Рішення рівнянь Нав’є-Стокса проведено в припущенні, що пульсації тиску мають форму прямокутних імпульсів.

Ключові слова: течія крові, кровоносна судина, змінний тиск, складова швидкості, рівняння Нав’є-Стокса, диференціальні рівняння, ряд Фур’є.

The subject of this article is a theoretical model of blood flow in large blood vessels of animals. Periodic pulsations of pressure, associated with the work of the heart, as well as changes in the lumen in the vessels are taken into account. Blood vessels are represented as uniform cylindrical channels with rigid walls, and blood – in the form of a Newtonian fluid. The solution of the Navier-Stokes equations is carried out on the assumption that pressure pulsations have the form of rectangular pulses. A longitudinal component of the blood flow velocity is obtained, which reflect the state of both the vessel and the possible deviations in the periodicity of pulsations.

A theoretical analysis shows possibility of the appearance of whole spectrum speeds in the pulsating blood stream. Accordingly, depending on the parameters of vessel such as diameter, presence of obstacles, blood clots, inflamed areas, one or another speeds and consequently, different levels of electromagnetic radiation will prevail. The results were used for realization of external thermal mapping of organism with the purpose of exposure of diseases and also research of the phenomena, related to affecting of external periodically changing factors, for example, electromagnetic fields on the bloodstream.

Keywords: blood flow, blood vessel, variable pressure, velocity component, Navier-Stokes equations, differential equations, Fourier series.

Введение. Вопросы динамики крови весьма существенны при составлении физиологического портрета животного. Изменения в кровотоке сопровождают практически любые патологии организма. Это обусловило появление достаточного количества работ, посвященных данной проблеме. Однако их существенным недостатком является рассмотрение лишь стационарного случая. Это значительно ограничивает применение полученных результатов для проведения внешнего термокартирования организма с целью выявления заболеваний, а также исследования явлений, связанных с воздействием на кровоток внешних периодически изменяющихся факторов, например, электромагнитных полей.

Литературный обзор. Из литературных источников известно, что любые изменения факторов внутренней и внешней среды организма, в том числе любые заболевания, немедленно сказываются на параметрах крови и кровеносной системы [1, 2]. В связи с этим данный вопрос подробно исследуется в целом ряде публикаций [3–5].

Однако существенным недостатком, на наш взгляд, является то, что здесь и в других работах получены результаты для стационарной задачи, то есть для кровотока, не зависящего от времени. Это значительно ограничивает применение полученных результатов в упомянутых работах. В частности, они не применимы для оценки явлений, связанных с воздействием на кровоток внешних периодически изменяющихся факторов, а также для дистанционного измерения температуры внутренних органов животных. Отсутствует в существующих публикациях и анализ спектрального состава пульсирующей крови в зависимости от деятельности сердечнососудистой системы.

Объект, цель и задачи исследований. Объект исследования. Процесс движения крови по сосудам животных под действием переменного давления.

Цель работы. Определение спектрального состава пульсирующей крови в зависимости от геометрических и ветеринарных характеристик сосудов, а также параметров пульсаций давления.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Решить уравнение кровотока с учетом пульсирующего давления в сосудах.

2. Проанализировать характер продольной составляющей скорости в зависимости от характеристик сосуда и параметров пульсаций.

Решение уравнения движения крови с учетом пульсаций давления в сосуде. Пусть имеется однородный цилиндрический канал с жесткими стенками радиуса R и длины L. Канал заполнен кровью, которую мы будем рассматривать как ньютоновскую жидкость [6]. На входе канала действует периодический источник давления.

В этом случае движение ньютоновской жидкости может быть описано с помощью уравнения Навье-Стокса [7]:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} P + \eta \Delta \vec{v}, \qquad (1)$$

где $\vec{v}$ – скорость кровотока; P – приложенное на входе канала давление; ρ – плотность крови; η – вязкость крови.

Уравнение (1) является нелинейным, поскольку:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\operatorname{div}\vec{v}.$$

Однако тот факт, что движение крови в сосудах является ламинарным, дает право считать слагаемое $\vec{v}\operatorname{div}\vec{v} = 0$ и тем самым линеаризовать задачу. Кроме того, ламинарность потока приводит к тому, что скорость $\vec{v}$ имеет лишь одну компоненту v_z.

С учетом сказанного выше уравнение Навье-Стокса в цилиндрической системе координат приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} = 0; \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \varphi} = 0; \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right], \end{cases} \qquad (2)$$

где ν – кинетическая вязкость, равная $\dfrac{\eta}{\rho}$.

Принимая во внимание, что течение крови является соленоидальным, то есть $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, приходим к выводу, что:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (3)$$

Используя выражение (3) совместно с системой (2), а также учитывая осесимметричность задачи $\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0\right)$ и абсолютную упругость жидкости, в связи с чем $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\dfrac{\Delta P}{L}$, где ΔP – перепад давления в кровотоке между концом и началом кровеносного сосуда заданной длины L, получим окончательно уравнение для v_z в виде:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L}. \qquad (4)$$

По своему характеру выражение (4) является неоднородным дифференциальным уравнением с однородными начальными и граничными условиями:

$$v_z(r,0) = 0; \quad v_z(R,t) = 0. \qquad (5)$$

Правая часть уравнения (4) содержит величину ΔP, представляющую собой перепад давления ΔP_0 в кровеносном сосуде. В реальной ситуации изменение этой величины во времени носит импульсный характер.

С достаточной степенью точности можно считать, что эти импульсы имеют крутой фронт и могут рассматриваться как прямоугольные импульсы с длительностью t_2 и периодом повторения t_1. При этом отношение:

$$t_2/t_1 = \theta,$$

с одной стороны, является величиной, обратной скважности следования импульсов перепада давления, а с другой стороны учитывает эластичность кровеносных сосудов.

Для решения уравнения (4) разложим функцию $\Delta P(t)$ в ряд Фурье [8] по косинусам:

$$\Delta P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k \cos\frac{2k\pi}{t_1} t \,. \qquad (6)$$

Здесь

$$a_0 = \frac{2}{t_1}\int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \Delta P(t)dt = 2\frac{t_2}{t_1}\Delta P_0 \,, \qquad (7)$$

$$a_k = \frac{2}{t_1}\int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \Delta P(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{t_1}t\right)dt = \frac{2\Delta P_0}{k\pi}\sin\left(k\pi\frac{t_2}{t_1}\right). \qquad (8)$$

С учетом того, что $\frac{t_2}{t_1} = \theta$, а $\frac{2\pi}{t_1} = l$, окончательно получим:

$$\Delta P(t) = \Delta P_0\left(\theta + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi t)}{k}\cos(klt)\right) \qquad (9)$$

Для решения уравнения (4) воспользуемся методом разделения переменных [9]. Для этого положим:

$$v_z = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)T_n(t)\,, \qquad (10)$$

а правую часть (4) разложим по собственным функциям $R_n(r)$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{\rho L}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta P_n(t)R_n(r) \qquad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (4) и учитывая свойство ортогональности собственных функций, получим для n - ой гармоники выражение:

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} - \frac{1}{\rho L}\frac{\Delta P_n(t)}{T_n(t)} = \nu\left(\frac{R_n''(r)}{R_n(r)} + \frac{1}{r}\frac{R_n'(r)}{R_n(r)}\right), \qquad (12)$$

что приводит к системе:

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \frac{1}{\nu}\lambda_n R_n(r) = 0\,, \qquad (13)$$

$$T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = \frac{1}{\rho L}\Delta P_n(t)\,, \qquad (14)$$

где λ_n – собственные значения уравнения (13).

Полагая $x = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\nu}}r$, а $y_n(x) = R_n(r) = R_n\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda_n}}x\right)$, приведем (13) к уравнению Бесселя первого порядка:

$$y_n''(x) + \frac{1}{x}y_n'(x) + y_n(x) + 0\,. \qquad (15)$$

Решением этого уравнения будет линейная комбинация цилиндрических функций первого и второго рода:

$$y_n(x) = A_1 J_0(x) + A_2 N_0(x)\,. \qquad (16)$$

Из условия ограниченности решения на оси, то есть $y_n(0) \neq \infty$, имеем $A_2 = 0$. Кроме того, из граничного условия $v_z(R,t) = 0$ получаем:

$$J_0\left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{\nu}}R\right) = 0\,.$$

Корнем этого уравнения является $\mu_n^{(0)} = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\nu}}R$.

Отсюда собственные значения:

$$\lambda_n = \nu\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\right)^2$$

или, обозначая $\frac{\mu_n^{(0)}}{R} = \alpha_n^{(0)}$, получим:

$$\lambda_n = \nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2 . \qquad (17)$$

Решим уравнение (14). С учетом (17) оно примет вид:

$$T_n'(t) + \nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2 T_n(t) = \frac{1}{\rho L}\Delta P_n(t)\,, \qquad (18)$$

причем из начального условия $v_z(r,0) = 0$ следует, что $T_n(0) = 0$.

Будем искать решение в виде:

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2(t-\tau)}\frac{1}{\rho L}\Delta P_n(\tau)d\tau\,, \qquad (19)$$

при этом $\Delta P_n(t)$ с учетом (11) имеет вид:

$$\Delta P_n(t) = \frac{2\Delta P(t)}{\mu_n^{(0)}J_1\left(\mu_n^{(0)}\right)} . \qquad (20)$$

Подставляя (20) в (19) и учитывая (9), получим:

$$T_n(t) = \frac{2}{\rho L\mu_n^{(0)}J_1\left(\mu_n^{(0)}\right)}\int_0^t e^{-\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2(t-\tau)}\Delta P_0\Big(\theta + \qquad (21)$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi\theta}{k}\cos kl\tau\Big).$$

Вычисление интеграла дает окончательное выражение для $T_n(t)$:

$$T_n(t) = \frac{2\Delta P_0}{\rho L\,\mu_n^{(0)}J_1\left(\mu_n^{(0)}\right)}\left\{\frac{\theta}{\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2}\left[1 - e^{-\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2 t}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi\theta)}{k}\frac{\frac{1}{kl}\left\{\sin(klt) + \frac{\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2}{kl}\left[\cos(klt) - e^{-\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2 t}\right]\right\}}{1 + \left[\frac{\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2}{kl}\right]^2}\right\}. \qquad (22)$$

Поскольку рассматриваются процессы при $t \to \infty$, то переходные процессы в расчет не принимаются, поэтому:

$$T_n(t)=\frac{2\Delta P_0}{\rho L\mu_n^{(0)}J_1\left(\mu_n^{(0)}\right)}\left\{\frac{\theta}{\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi\theta)}{k}\frac{\frac{1}{kl}\left[\sin(klt)+\frac{\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2}{kl}\cos(klt)\right]}{1+\left[\frac{\nu\left(\alpha_n^{(0)}\right)^2}{kl}\right]^2}\right\}. \quad (23)$$

Ряд в (23) является быстро сходящимся, поэтому для описания процессов, происходящих при движении крови, можно ограничиться первыми двумя-тремя гармониками разложения $\Delta P(t)$. Что касается разложения по собственным функциям, то здесь достаточно взять $n=1$. При $n>1$ непосредственная подстановка корней функции Бесселя нулевого порядка и наиболее характерных размеров кровеносных сосудов в (23) показывает пренебрежмую малость $T_2(t)$, $T_3(t)$ и т.д. по сравнению с $T_1(t)$.

Учитывая вышесказанное, получаем выражение для продольной составляющей скорости кровотока v_z [10]:

$$v_z=\frac{2\pi\Delta P_0}{\rho L}\frac{J_0\left(\alpha_1^{(0)}r\right)}{\mu_1^{(0)}J_1\left(\mu_1^{(0)}\right)}\left\{\frac{\theta}{\nu\left(\alpha_1^{(0)}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\sin(k\pi\theta)}{k}\frac{\frac{1}{kl}\sin(klt)+\left(\frac{1}{kl}\right)^2\nu\left(\alpha_1^{(0)}\right)^2\cos(klt)}{1+\left[\frac{\nu\left(\alpha_1^{(0)}\right)^2}{kl}\right]^2}\right\}. \quad (24)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует движению крови при постоянном давлении на входе кровеносного сосуда. Оно дает результат, сходный с решением задачи Пуазейля о течении вязкой жидкости в цилиндрическом канале под влиянием постоянного перепада давлений, то есть параболический профиль скоростей в поперечном сечении сосуда. Второе слагаемое дает поправку, связанную с пульсацией крови. Его появление означает, что профиль скоростей кровотока будет совершать периодические колебания около среднего значения с некоторой частотой.

Выводы. При воздействии внешнего механического возмущения, связанного с собственным электромагнитным полем, промодулированным с частотой пульсации давления, возникает резонансный процесс и одним из следствий этого явления будет увеличение скорости кровотока и возможность столкновения форменных элементов крови, несущих электрический заряд.

Список литературы:

1. Педли, Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов [Текст] / Т. Педли. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
2. Каро, К. Механика кровообращения [Текст] / К. Каро, Т. Педли. – М.: Мир, 1981. – 624 с.
3. Ремизов, А. Н. Медицинская и биологическая физика [Текст]: учеб. / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина, А. Я. Потапенко. – М.: Дрофа, 2003. – 560 с.
4. Ивахненко, Е. В. Динамика электролитов плазмы крови и мочи на этапах наблюдений при различных типах инфузионной терапии у пациентов с инфекционно-токсическим шоком [Текст] / Е. В. Ивахненко // Медицина неотложных состояний. – 2015. – № 4. – С. 28–31.
5. Гемостаз. Физиологические механизмы, принципы диагностики основных форм геморрагических заболеваний [Текст] / под ред. Н. Н. Петрищева, Л. П. Папаян. – СПб.: Изд-во СПбГМУ, 1999. – 115 с.
6. Бейер, В. А. Краткое пособие по гематологии [Текст] / В. А. Бейер. – Л.: Медицина, 1973. – 231 с.
7. Бэтчелор, Дж. Введение в динамику жидкостей [Текст] / Дж. Бэтчелор. – М.: Мир, 1973. – 760 с.
8. Привалов, И. И. Ряды Фурье [Текст]: учеб. / И. И. Привалов. – М.: Юрайт, 2016. – 164 с.
9. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст] / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М.: Либроком, 2012. – 544 с.
10. Березовский, В. А. Биофизические характеристики тканей человека [Текст] / В. А. Березовский, Н. Н. Колотилов. – К.: Наукова думка, 1990. – 224 с.

Bibliography

1. Pedli, T. (1983). Gidrodinamika krupnykh krovenosnykh sosudov [Hydrodynamics of large blood vessels]. Moscow: Mir, 400.
2. Karo, K., Pedli, T. (1981). Mekhanika krovoobrashcheniya [Mechanics of blood circulation]. Moscow: Mir, 624.
3. Remizov, A. N., Maksina, A. G., Potapenko, A. Ya. (2003). Meditsinskaya i biologicheskaya fizika [Medical and Biological Physics]. Moscow: Drofa, 560.
4. Ivakhnenko, Ye. V. (2015). Dinamika elektrolitov plazmy krovi i mochi na etapakh nablyudeniy pri razlichnykh tipakh infuzionnoy terapii u patsientov s infektsionno-toksicheskim shokom [Dynamics of plasma and urine electrolytes at the observation stages for various types of infusion therapy in patients with infectious-toxic shock]. Emergency medicine, 4, 10–14.
5. Petrishchev, N. N., Papayan, L. P. (Eds.) (1999). Gemostaz. Fiziologicheskie mekhanizmy, printsipy diagnostiki osnovnykh form gemorragicheskikh zabolevaniy [Hemostasis. Physiological mechanisms, principles of diagnostics of the main forms of hemorrhagic diseases]. Saint Petersburg: State Medical University, 115.
6. Beyer, V. A. (1973). Kratkoe posobie po gematologii [Short manual on hematology]. Leningrad: Meditsina, 231.
7. Batchelor, G. (1973). Vvedenie v dinamiku zhidkostey [Introduction to the dynamics of liquids]. Moscow: Mir, 760.
8. Privalov, I. I. (2016). Ryady Fure [Fourier series]. Moscow: Yurayt, 164.
9. Nikolskiy, V. V., Nikolskaya, T. I. (2012). Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln [Electrodynamics and propagation of radio waves]. Moscow: Librokom, 544.
10. Berezovskiy, V. A., Kolotilov, N. N. (1990). Biofizicheskie kharakteristiki tkaney cheloveka [Biophysical characteristics of human tissues]. Kyiv: Naukova dumka, 224.

Поступила (received) 16.09.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Теоретичний аналіз кровотоку тварин за наявності пульсацій тиску/ Гуцол Т. Д. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – No 33(1255). – С. 112–116.– Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Теоретический анализ кровотока животных при наличии пульсаций давления/ Гуцол Т. Д. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – No 33(1255). – С. 112–116.– Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Theoretical analysis of blood stream of animals at presence of pulsations of pressure/ Hutsol T. //Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Kharkov: NTU "KhPI", 2017. – № 33 (1255).– P.112–116. – Bibliogr.:10. – ISSN 2079-5459

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Гуцол Тарас Дмитрович – кандидат технических наук, доцент, Подольский государственный аграрно-технический университет, ул. Шевченко, 13, г. Каменец-Подольский, Хмельницкая обл., Украина, 32300, e-mail: tte.nniekt@ukr.net.

Гуцол Тарас Дмитриевич – кандидат технічних наук, доцент, Подольський державний аграрно-технічний університет, вул. Шевченко, 13, г. Каменец-Подольський, Хмельницька обл., Україна, 32300, e-mail: tte.nniekt@ukr.net.

Hutsol Taras **–** PhD, associate professor, Podolsky state agrarian and technical university, st. Shevchenko, 13, Kamyanets-Podolsky, Khmelnytsky region, Ukraine, 32300, e-mail: tte.nniekt@ukr.net.