

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**О. Ю. Ніцин**

**ТЕОРЕТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

Навчальний посібник для студентів і аспірантів спеціальностей 122  
«Комп'ютерні науки» і 131 «Прикладна механіка»

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 24.05.2018 р.

Харків  
НТУ «ХПІ», 2018

УДК 514.181.2  
Н70

Рецензенти:

*В. М. Комяк*, д-р техн. наук, проф., Університет цивільного захисту України;

*О. М. Соболев*, д-р техн. наук, проф., Університет цивільного захисту України;

*Ю. М. Тормосов*, д-р техн. наук, проф., Харківський державний університет харчування та торгівлі;

**Ніцин О. Ю.**

Н70 Теоретичні проблеми прикладної геометрії : навч. посіб. /  
О. Ю. Ніцин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – 156 с.

ISBN \_\_\_\_\_

Навчальний посібник присвячено одній з важливих у прикладній геометрії проблем, а саме: моделюванню кривих і поверхонь, що найчастіше зустрічаються у природі та науково-практичній діяльності людини. Крім того, у даному навчальному посібнику розповідається про такі властивості кривих і поверхонь, про які умовчують як шкільні підручники, так і підручники для вищих навчальних закладів.

Навчальний посібник призначено для студентів і аспірантів, що навчаються за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки» і 131 «Прикладна механіка».

Бібліогр.: 6 назв.

ISBN \_\_\_\_\_

УДК 514.181.2  
© О. Ю. Ніцин, 2018 р.

## ПЕРЕДМОВА

Ми знаємо з шкільної лави, що якщо прямий круговий конус розітнути площиною, що перетинає всі його твірні, то у перерізі лежатиме еліпс. Крім того, ми знаємо, що такий самий еліпс можна отримати, якщо розітнути такою ж площиною прямий круговий циліндр, діаметр основи якого визначається розмірами перерізу конуса. Зрозуміло, цю властивість можна пояснити тим, що і конус, і циліндр є окремими випадками лінійчатої поверхні з однією напрямною і вершиною. Єдина різниця полягає в тому, що вершина конуса належить простору, положення точок якого можна визначити з достатньою точністю, а вершина циліндра віддалена у нескінченність.

Проте чому еліпс також зустрічається в плоских перерізах поверхонь, які не мають нічого спільного ні з конусом, ні з циліндром, наприклад: однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів обертання, і лінійчатої поверхні з трьома напрямними прямими лініями? Чому, наприклад, параболу і гіперболу можна зустріти не лише в плоских перерізах конуса, але і в плоских перерізах однопорожнинного гіперболоїда обертання, лінійчатої поверхні з трьома напрямними прямими лініями і гіперболічного параболоїда? То хіба не дивно, що однопорожнинний гіперболоїд обертання, який утворюється обертанням прямої лінії, що схрещується з віссю обертання, можна отримати обертанням довкола тієї ж осі гіперболи, форма якої залежить від кута нахилу твірної та її відстані до осі обертання? При цьому, яким би способом не був отриманий однопорожнинний гіперболоїд обертання, його плоскими перерізами є такі ж еліпс, парабола і гіпербола, які зустрічаються в плоских перерізах прямого кругового конуса.

Звичайно, можна пояснити цей факт тим, що прями́й круговий конус можна подати як результат обертання прямої лінії, що перетинається з віссю обертання, а однопорожнинний гіперболоїд обертання – як результат обертання прямої лінії, що схрещується з тією ж віссю обертання. Проте чому якщо прямолінійна твірна ковзає по двох інших прямих лініях і залишається паралельною деякій площині, то утворюється гіперболічний гіперболоїд, плоскими перерізами якого будуть ті ж параболи і гіперболи, які можна виявити в плоских перерізах прямого кругового конуса? Адаже не існує єдиної осі обертання, довкола якої обертаються прямолінійні твірні при утворенні гіперболічного гіперболоїда.

Ще більше здивування викликає той факт, що якщо прямолінійна твірна ковзає вже по трьох інших прямих лініях, то утворюється поверхня, в плоских перерізах якої можна виявити не лише параболи і гіперболи, але і еліпси. Вочевидь, тут не може бути і мови про будь-яке обертання прямолінійною твірною довкола певної осі.

Звідси ми можемо зробити висновок про те, що всі перераховані вище поверхні можна подати як поверхні, утворені сім'ями еліпсів, парабол і гіпербол.

Напрочуд, що точки, що належать еліпсам, параболам і гіперболам, можна побудувати за допомогою таких елементарних креслярських інструментів, як лінійка і циркуль. Це, на наш погляд, свідчить про чудові зв'язки, що існують між еліпсами, параболами і гіперболами.

Крім того, ми не можемо обійти увагою і той факт, що більшість геометричних форм, які зустрічаються у природі, можна описати кривими і поверхнями, точки яких також можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Це означає, що елементарною цеглинкою, з якої складаються більшість природних форм, є найбільш прості геометричні образи, а саме: прями́ лінії і кола.

Ми не беремо на себе сміливість стверджувати, ніби існує деякий загальний закон, за яким будуються відомі з часів старовини криві і поверхні. Ми лише хочемо вказати на чудові зв'язки, які існують між окремими кривими і поверхнями. Крім того, ми передбачаємо, що якщо в перерізах деяких поверхонь лежать одні і ті ж криві, наприклад еліпси, параболи і гіперболи, то існує загальна властивість, яка об'єднує ці поверхні, і за допомогою відповідних перетворень з однієї поверхні даної сім'ї можна отримати іншу поверхню, що належить тієї ж сім'ї.

Таким чином, розкриттю зв'язків між чудовими кривими і поверхнями і присвячено дана книга.

Крім того, у даній книзі розповідається про такі властивості кривих і поверхонь, про які умовчують як шкільні підручники, так і підручники для вищих навчальних закладів.

Наприклад, ні шкільні підручники, ні підручники для вищих навчальних закладів не містять відповіді на такі запитання:

чому прожектори і автомобільні фари мають форму параболоїда обертання?

чим пояснюється утворення кривої на поверхні рідини, наливої в чашку, при падінні світла зверху і збоку? Як називається крива?

чому в машинобудуванні найбільшого поширення набули зубчасті колеса, профіль зубів яких побудований по евольвенті кола?

які криві описують точки відрізка прямої лінії, кінці якого ковзають по сторонах прямого кута?

як називається крива, по якій Земля обертається довкола Сонця? Де знаходиться Сонце по відношенню до траєкторії Землі?

Зрозуміло, можна бути хорошою людиною і не знати, що таке радіан. Проте, на нашу думку, без знань елементарної геометрії культурною людиною бути не можна. До того ж, елементарна геометрія – це краща

гімнастика для розуму, тому що ніщо так не розвиває розумові здібності людини, як розв'язання геометричних задач, зокрема задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.

Тому ми сподіваємося, що дана книга допоможе читачам заповнити пропуски в знаннях елементарної геометрії, які залишаються у них після здобуття атестата зрілості і диплома про вищу освіту.

# РОЗДІЛ 1

## ЕЛІПС, ПАРАБОЛА И ГІПЕРБОЛА

Називатимемо еліпсом множину точок, сума відстаней яких до двох заданих точок  $F_1$  і  $F_2$  є постійною величиною. Точки  $F_1$  і  $F_2$  називатимемо фокусами еліпса. Проведемо через фокуси  $F_1$  і  $F_2$  пряму лінію і розмістимо на ній дві точки  $A_1$  і  $A_2$  її перетину з еліпсом. Називатимемо точки  $A_1$  і  $A_2$  вершинами еліпса, а відрізок прямої лінії  $A_1A_2$  – його віссю. Передбачимо, що вершини еліпса  $A_1$  і  $A_2$  не належать відріzkу  $F_1F_2$ . Оскільки сума відстаней точок  $A_1$  і  $A_2$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$  є постійною величиною, довжини відрізків прямої лінії  $A_1F_1$  і  $A_2F_2$  рівні, а еліпс є кривою, симетричною відносно перпендикуляра, що проходить через середину осі  $A_1A_2$ . Покажемо початкові кроки побудови еліпса на рис. 1.

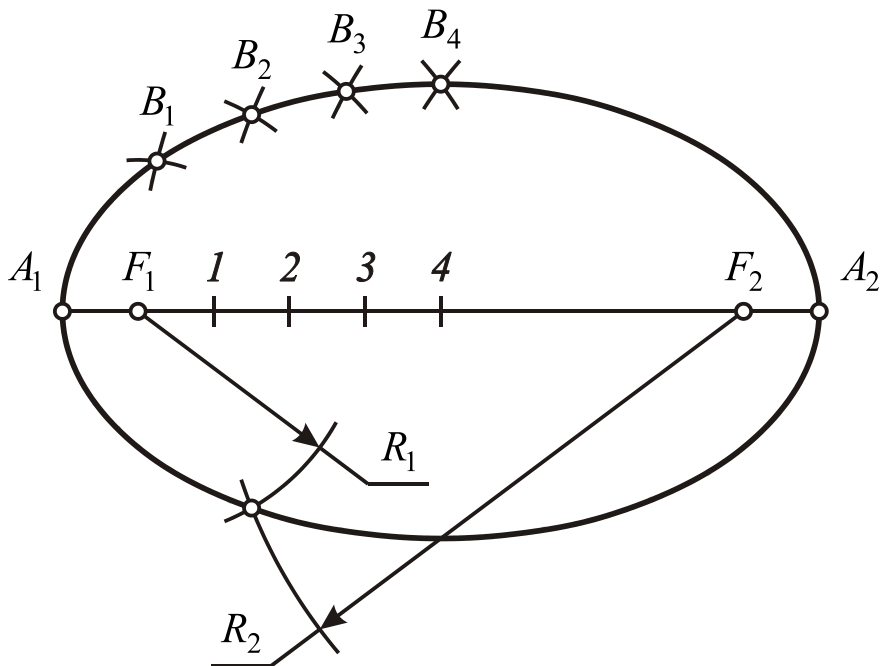


Рис. 1. Побудова еліпса по заданих фокусах і вершинах

Знайдемо відрізок, довжина якого дорівнює сумі відстаней вершин  $A_1$  і  $A_2$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$ . Відкладемо ліворуч від вершини  $A_1$  відрізок, рівний за довжиною відрізка  $A_1F_1$ , і відзначимо на осі деяку точку. Виділимо відрізок прямої лінії, що пов'язує отриману точку з фокусом  $F_2$ . При цьому довжина відрізка дорівнюватиме сумі відстаней вершини  $A_1$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$ . Зрушимо отриманий відрізок вправо на відстань, рівну довжині відрізка  $A_1F_1$ , і виявимо, що сума відстаней вершини  $A_1$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$  дорівнює відстані між вершинами еліпса  $A_1$  і  $A_2$ .

Знайдемо середину відрізка  $F_1F_2$ . Поділимо відрізок, що сполучає середину відрізка  $F_1F_2$  з фокусом  $F_2$ , на деяке число рівних відрізків і відзначимо на осі еліпса точки  $1,2,3,\dots$ . Проведемо з фокуса  $F_1$  як з центра дугу кола, радіус якого дорівнює відстані вершини  $A_1$  до точки  $1$ , а з фокуса  $F_2$  – дугу кола, радіус якого дорівнює відстані вершини  $A_2$  до тієї ж точки. Виділимо точку перетину дуг кіл і отримаємо першу точку еліпса  $B_1$ . Точки еліпса  $B_2, B_3, \dots$  знаходяться за допомогою дуг кіл, радіуси яких дорівнюють відстаням вершин  $A_1$  і  $A_2$  до однієї з подальших точок  $2,3,\dots$ . Проведемо через вершину  $A_1$  і точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$  криву лінію і отримаємо четверту частину еліпса.

Оскільки точки  $1,2,3,\dots$  можна відкладати не лише від фокуса  $F_1$ , але і від фокуса  $F_2$ , а дуги кіл, проведені з фокусів  $F_1$  і  $F_2$ , перетинаються у двох точках, можна стверджувати, що еліпс симетричний як відносно осі  $A_1A_2$ , так і відносно перпендикуляра, що проходить через її середину. Тому повну дугу еліпса отримаємо з кривої лінії, що проходить через

вершину  $A_1$  і точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , за допомогою симетрії відносно осі  $A_1A_2$  і перпендикуляра, проведеного через її середину.

З'єднаємо точки еліпса  $B_1, B_2, B_3, \dots$  відрізками прямої лінії з точками  $F_1, F_2$  і отримаємо картину, яка пояснює, чому точки  $F_1$  і  $F_2$  назвали «фокусами». Дійсно, якщо уявити еліпс у вигляді криволінійного дзеркала і у фокусі  $F_1$  помістити джерело вогню, то після віддзеркалення від еліпса всі світлові промені зберуться у фокусі  $F_2$ , і поміщена там речовина запалає. Тому слово «фокус», яке на латинській мові означає «вогнище», стало застосовуватися не лише для позначення точки, в якій збираються промені світла, але і для назви таємничого і нез'ясованого з точки зору здорового глузду явища, що приголомшує уяву глядача. Покажемо на рис. 2 оптичну властивість еліпса, згідно з яким промені світла, що випливають з фокуса  $F_1$ , збираються у фокусі  $F_2$ .

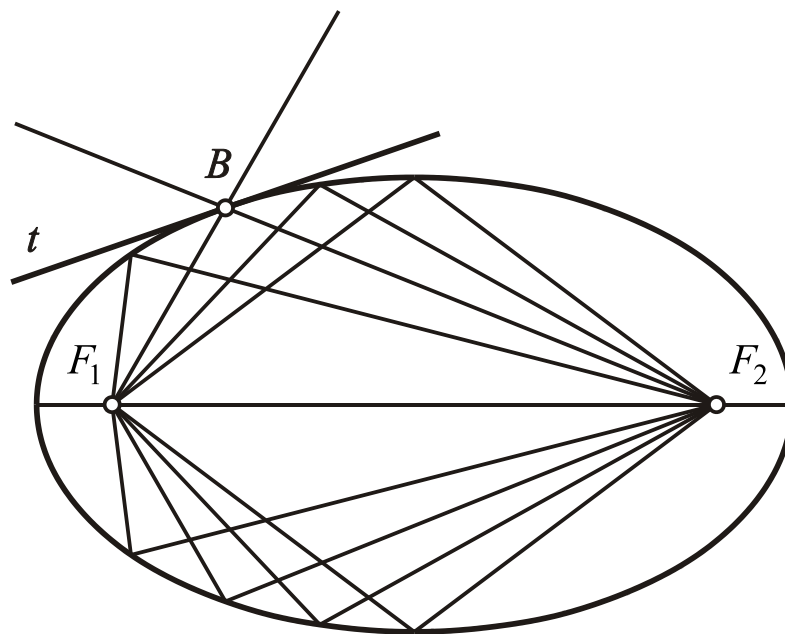


Рис. 2. Побудова дотичної до еліпса і його оптична властивість

Розглянемо віддзеркалення світла від точки перетину еліпса з перпендикуляром, проведеним через середину осі  $A_1A_2$ . Побудуємо в

точці перетину пряме дзеркало, яке відображає промінь світла, що випливає з фокуса  $F_1$ . Ми знаємо з елементарної фізики, що кут падіння променя світла дорівнює куту його віддзеркалення. Це означає, що пряме дзеркало повинне складати прямий кут з перпендикуляром, проведеним через середину осі  $A_1A_2$ , і, отже, – бути дотичною до еліпса в точці його перетину з перпендикуляром. Тому подамо пряме дзеркало у вигляді дотичної до еліпса. Оскільки еліпс – симетрична фігура, дотична до еліпса в точці перетину з перпендикуляром, проведеним через середину осі  $A_1A_2$ , розташовується паралельно осі  $A_1A_2$ . Звідси випливає, що дотична до еліпса в точці перетину з перпендикуляром, проведеним через середину осі  $A_1A_2$ , є бісектрисою кута, суміжного з кутом, утвореним прямими лініями, що сполучають точку еліпса з фокусами  $F_1$  і  $F_2$ .

Оскільки всі точки еліпса будуються по одному і тому ж правилу, можна передбачити, що дотична в будь-якій точці еліпса також є бісектрисою кута, суміжного з кутом, утвореним прямими лініями, що сполучають точку еліпса з фокусами  $F_1$  і  $F_2$ . Покажемо на рис. 2 побудову дотичної до еліпса.

Таким чином, еліпс має такі чудові властивості:

точку еліпса можна розглядати як вершину кута, сторони якого проходять через фокуси  $F_1$  і  $F_2$ ;

дотична в точці еліпса є бісектрисою кута, суміжного з кутом, утвореним прямими лініями, що сполучають точку еліпса з фокусами  $F_1$  і  $F_2$ .

Крім того, еліпс має оптичну властивість, яка полягає в тому, що якщо в одному фокусі  $F_1$  поміщається джерело світла, то промені світла, відбиті від еліпса, збираються в іншому фокусі  $F_2$ .

Розглянемо наступну чудову криву – параболу, яка виходить з еліпса за допомогою граничного переходу. Закріпимо фокус і вершину еліпса в точках  $F_1$  і  $A_1$ , а фокус  $F_2$  віддалятимемо у нескінченність. При цьому пряма лінія, що сполучає точку еліпса з фокусом  $F_2$ , нескінченно наблизатиметься до прямої лінії, паралельної осі  $A_1A_2$ , а еліпс – до кривої, званою параболою. Покажемо на рис. 3 граничний перехід еліпса в параболу.

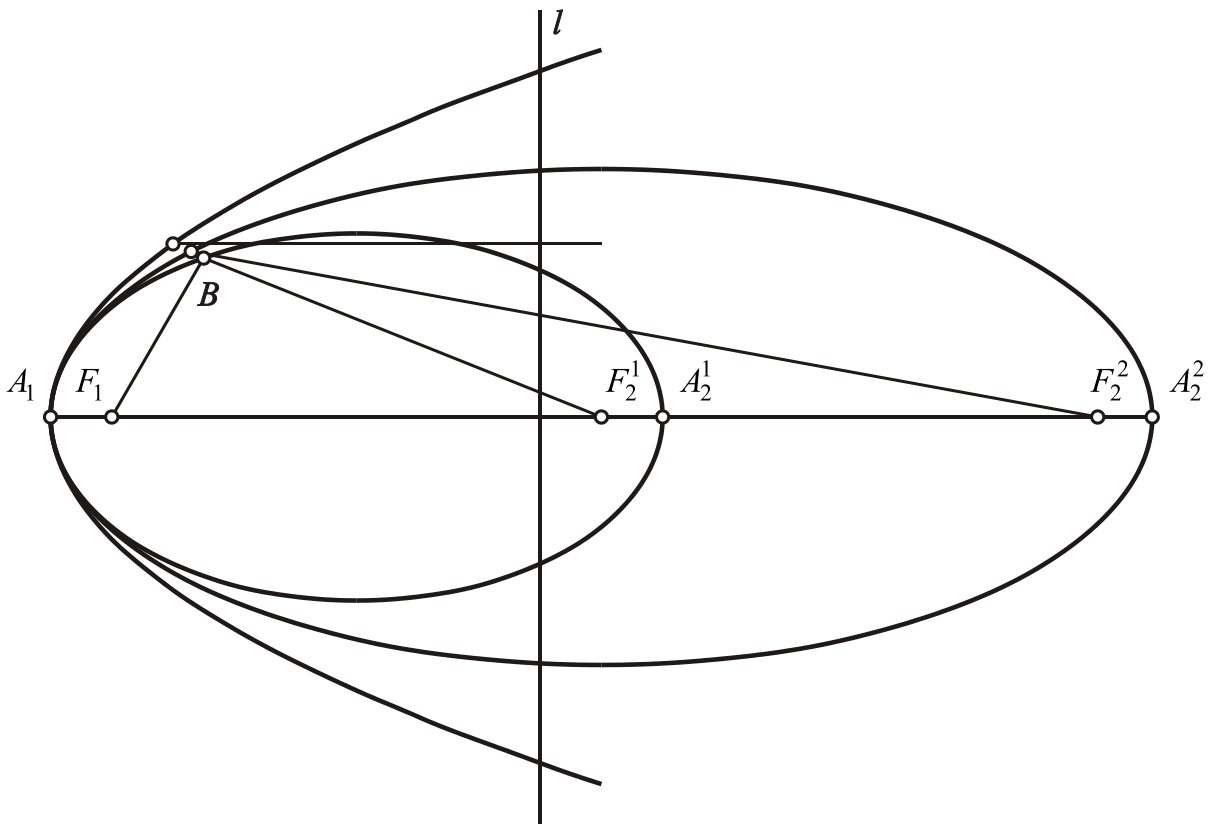


Рис. 3. Граничний перехід еліпса в параболу

Відмітимо, що на відміну від еліпса параболою є незамкнутою кривою, гілка якої вирушає у нескінченність. Проте і для параболи залишається справедливим правило, за яким будується еліпс, а саме: сума відстаней точок параболи до фокусів  $F_1$  і  $F_2$  залишається незмінною, – єдина відмінність полягає в тому, що другий фокус  $F_2$  віддалений у нескінченність. Тому називатимемо віссю параболи прямою лінію, що

виходить з вершини  $A_1$ , проходить через фокус  $F_1$  і віддаляється у нескінченність. Оскільки пряма лінія, що сполучає точку параболи з фокусом  $F_2$  паралельна її осі, замість відстані до віддаленого у нескінченність фокуса  $F_2$  можна брати відстань до будь-якої прямої лінії  $l$ , перпендикулярної осі параболи. Покажемо початкові кроки побудови параболи на рис. 4.

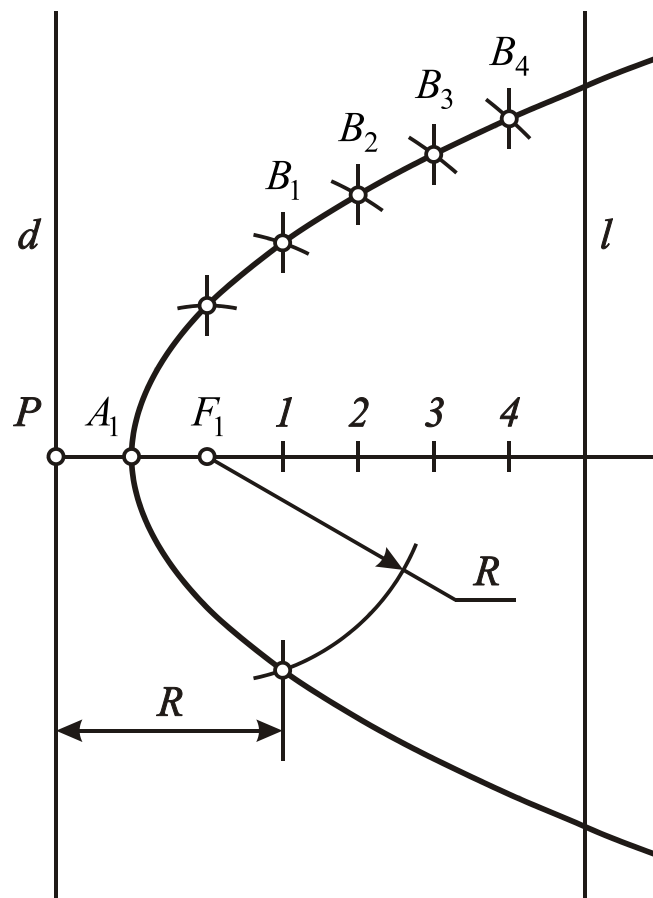


Рис. 4. Побудова параболи по заданому фокусу і директрисі

Знайдемо відрізок, довжина якого дорівнює сумі відстаней вершини  $A_1$  до фокуса  $F_1$  і прямої лінії  $l$ . Відкладемо ліворуч від вершини  $A_1$  відрізок, рівний за довжиною відрізка  $A_1F_1$ , і відзначимо на осі деяку точку. Відстань отриманої точки до прямої лінії  $l$  і буде сумою відстаней вершини  $A_1$  до фокуса  $F_1$  і прямої лінії  $l$ . Проведемо через отриману точку

пряму лінію  $d$ , перпендикулярну осі параболу, і назовемо її директрисою. Ця пряма чудова тим, що відстань будь-якої точки параболу до її фокуса  $F_1$  дорівнює відстані точки до директриси  $d$ . Дійсно, відстань точки параболу до фокуса  $F_1$  дорівнює різниці її відстані до прямої лінії  $l$  і відстані між прямою лінією  $l$  і директрисою  $d$ , тобто відстані точки до директриси  $d$ . Відзначимо на осі параболу ряд довільних точок  $1, 2, 3, \dots$ . Проведемо з фокуса  $F_1$  як з центра дугу кола, радіус якого дорівнює відстані директриси до точки  $1$ , а в точці  $1$  відновимо перпендикуляр до осі параболу. Виділимо точку перетину дуги кола з перпендикуляром і отримаємо першу точку параболу  $B_1$ . Точки параболу  $2, 3, \dots$  знайдемо за допомогою дуг кіл, радіуси яких дорівнюють відстаням директриси до однієї з подальших точок  $2, 3, \dots$ , і перпендикулярів, проведених через дані точки. Проведемо через вершину  $A_1$  і точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$  криву лінію і отримаємо половину параболу.

Оскільки точки  $1, 2, 3, \dots$  можна відкладати лише від фокуса  $F_1$ , а дуга кола, проведена з фокуса  $F_1$ , і перпендикуляр до осі параболу перетинаються у двох точках, можна укласти, що парабола симетрична відносно її осі. Тому повну дугу параболу отримаємо з кривої лінії, що проходить через вершину  $A_1$  і точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , за допомогою симетрії відносно осі параболу.

Побудова показує, що радіуси кіл, що проходять через точки параболу  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , дорівнюють відстаням даних точок до директриси. Тому параболі можна дати таке визначення: парабола є множина точок, рівновіддалених від заданої точки  $F_1$  і заданої прямої  $d$ .

Оскільки парабола є еліпсом, у якого фокус  $F_2$  віддалений у нескінченність, можна стверджувати, що дотична в будь-якій точці параболи є бісектрисою кута, суміжного з кутом, утвореним прямою лінією, що сполучає точку параболи з фокусом  $F_1$  і прямою лінією, що проходить через дану точку і паралельну осі параболи. Покажемо на рис. 5 побудову дотичної до параболи.

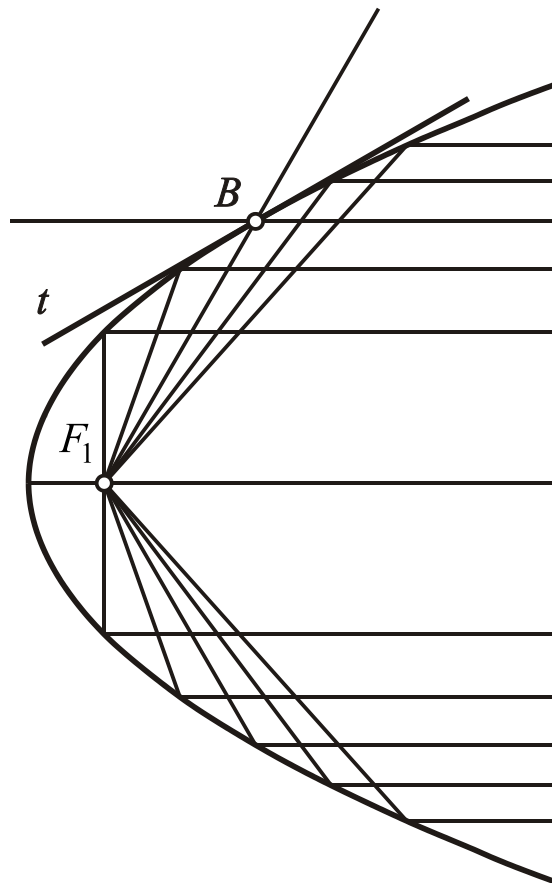


Рис. 5. Побудова дотичної до параболи і її оптична властивість

Подамо фокус  $F_1$  як джерело світла, параболу – як криволінійне дзеркало, відрізок прямої лінії  $F_1B$  – як падаючий промінь світла, а пряму лінію, що проходить через точку  $B$  і паралельну осі параболи, – як і відбитий промінь світла. Дійсно, перпендикуляром до параболи в точці  $B$  є бісектриса кута, утвореного відрізком  $F_1B$  і прямою лінією, що проходить через дану точку і паралельною осі параболи. Тому після віддзеркалення

від параболи світлові промені підуть паралельно її осі. Навпаки, якщо на криволінійне дзеркало у вигляді параболи падає пучок світлових променів, паралельних її осі, то після віддзеркалення від параболи всі промені світла зберуться в її фокусі  $F_1$ . Це узгоджується з твердженням про те, що парабола є еліпсом, в якого фокус  $F_2$  віддалений у нескінченність. Покажемо на рис. 5 оптичну властивість параболи, яка полягає в тому, що промені світла, що випливають з фокуса  $F_1$ , поширюються паралельно осі параболи.

Таким чином, парабола має такі чудові властивості:

точку параболи можна розглядати як вершину кута, одна сторона якого проходить через фокус  $F_1$ , а інша – паралельно осі параболи;

дотична в точці параболи є бісектрисою кута, суміжного з кутом, утвореним прямою лінією, що сполучає точку параболи з фокусом  $F_1$  і прямою лінією, яка проходить через дану точку і паралельна осі параболи.

Крім того, парабола має оптичну властивість: якщо у фокусі  $F_1$  поміщається джерело світла, то промені світла, відбиті від параболи, поширюються в напрямі, паралельному її осі.

Розглянемо множину точок, відстані яких до двох заданих точок  $F_1$  і  $F_2$  складають не постійну суму, а постійну різницю. Називатимемо таку множину точок гіперболою, а точки  $F_1$  і  $F_2$  – її фокусами. Проведемо через фокуси  $F_1$  і  $F_2$  пряму лінію і розмістимо на ній дві точки  $A_1$  і  $A_2$  її перетину з гіперболою. Називатимемо точки  $A_1$  і  $A_2$  вершинами гіперболи, а відрізок прямої лінії  $A_1A_2$  – її дійсною віссю. Передбачимо, що вершини гіперболи  $A_1$  і  $A_2$  не належать відрітку  $F_1F_2$ . Оскільки різниця відстаней точок  $A_1$  і  $A_2$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$  є постійною

величиною, довжини відрізків прямої лінії  $A_1F_1$  і  $A_2F_2$  рівні, а гіпербола є кривою, симетричною відносно перпендикуляра, що проходить через середину осі  $A_1A_2$ . Покажемо початкові кроки побудови гіперболи на рис. 6.

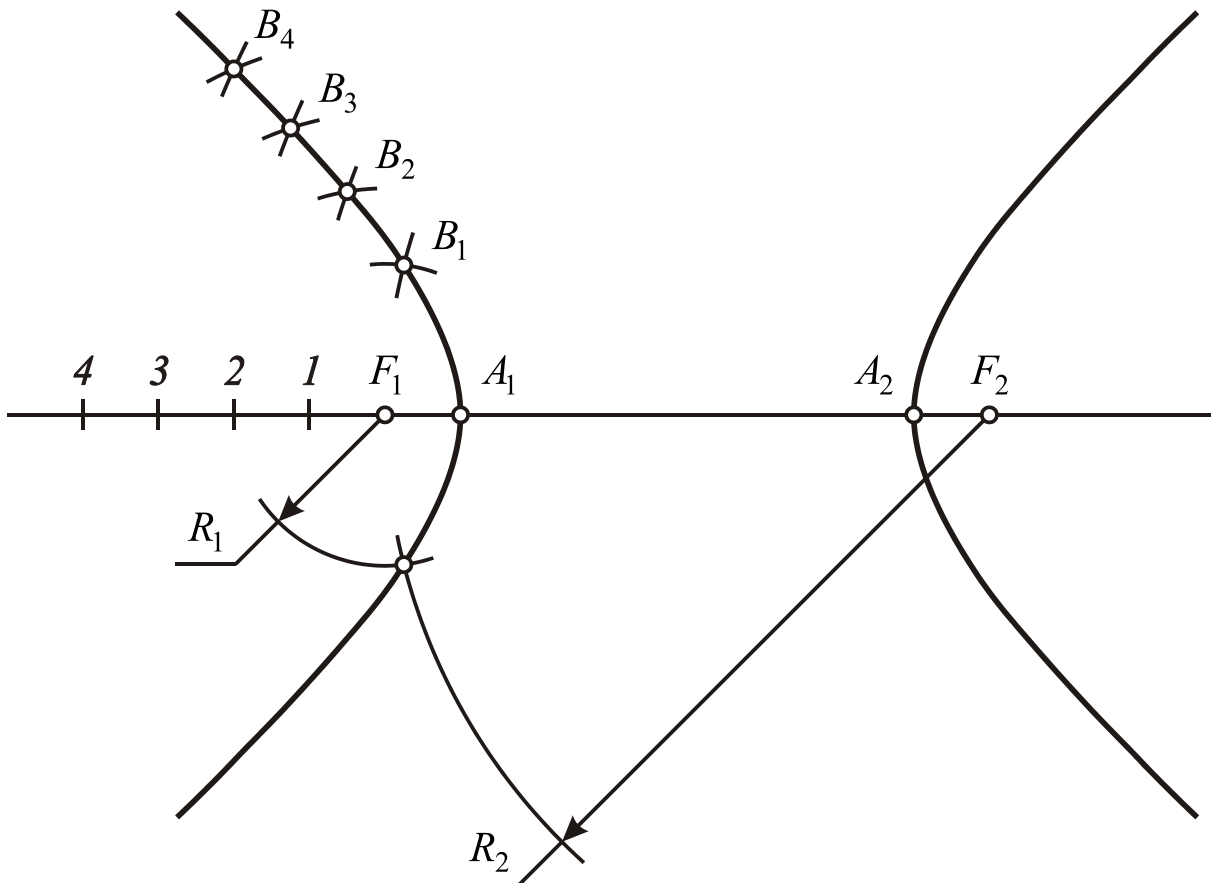


Рис. 6. Побудова гіперболи по заданих фокусах і вершинах

Знайдемо відрізок, довжина якого дорівнює різниці відстаней вершин  $A_1$  і  $A_2$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$ . Візьмемо точку, розташовану між фокусами  $F_1$  і  $F_2$ . Відкладемо вправо від вершини  $A_1$  відрізок, рівний за довжиною відрізка  $A_1F_1$ , і відзначимо на осі деяку точку. Виділимо відрізок прямої лінії, що пов'язує отриману точку з фокусом  $F_2$ . При цьому довжина відрізка дорівнюватиме різниці відстаней вершини  $A_1$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$ . Зрушимо отриманий відрізок вліво на відстань, рівну

довжині відрізка, і виявимо, що різниця відстаней вершини  $A_1$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$  дорівнює відстані між вершинами гіперболи  $A_1$  і  $A_2$ . Оскільки довжина відрізка  $A_1A_2$  виходить меншою довжини відрізка  $F_1F_2$ , можна передбачити, що гіпербола розпадається на дві гілки, кожна з яких проходить через одну з вершин  $A_1$  і  $A_2$ .

Відзначимо на осі гіперболи, що проходить через фокуси  $F_1$  і  $F_2$ , ряд довільних точок  $1, 2, 3, \dots$ . Проведемо з фокуса  $F_1$  як з центра дугу кола, радіус якого дорівнює відстані вершини  $A_1$  до точки 1, а з фокуса  $F_2$  як з центра – дугу кола, радіус якого дорівнює відстані вершини  $A_2$  до тієї ж точки 1. Виділимо точку перетину дуг кіл і отримаємо першу точку гіперболи  $B_1$ . Точки гіперболи  $B_2, B_3, \dots$  знайдемо за допомогою дуг кіл, радіуси яких дорівнюють відстаням вершин  $A_1$  і  $A_2$  до однієї з подальших точок  $2, 3, \dots$ . Проведемо через вершину  $A_1$  і точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$  криву лінію і отримаємо четверту частину гіперболи.

Оскільки точки  $1, 2, 3, \dots$  можна відкладати не лише від фокуса  $F_1$ , але і від фокуса  $F_2$ , а дуги кіл, проведені з фокусів  $F_1$  і  $F_2$ , перетинаються у двох точках, можна стверджувати, що гіпербола симетрична як відносно осі  $A_1A_2$ , так і відносно перпендикуляра, що проходить через її середину. Тому повну дугу гіперболи отримаємо з кривої лінії, що проходить через вершину  $A_1$  і точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , за допомогою симетрії відносно осі  $A_1A_2$  і перпендикуляра, проведеного через її середину.

Знайдемо уявну вісь гіперболи. Проведемо з вершин  $A_1$  і  $A_2$  як з центрів дуги кола, радіус якого дорівнює половині фокусної відстані  $F_1F_2$ . Відзначимо точки  $R_1$  і  $R_2$  перетину дуг кіл і виділимо відрізок прямої лінії

$R_1R_2$ , який і називатимемо уявною віссю гіперболи. Проведемо через кінці дійсної осі  $A_1A_2$  і уявної осі  $R_1R_2$  перпендикуляри до них і в точках їх перетину отримаємо вершини прямокутника  $PQST$ . Проведемо в прямокутнику діагоналі  $PT$  і  $QS$ . Якщо діагоналі  $PT$  і  $QS$  продовжити у нескінченність, то отримаємо асимптоти гіперболи. Називатимемо асимптотою кривої, що має безконечну гілку, прямою лінією, що володіє тією властивістю, що відстань від точки кривої до цієї прямої прагне до нуля при русі її уздовж гілки у нескінченність. Це означає, що асимптоти гіперболи ніде не перетинаються з нею, хоча її точки наближаються до асимптот скільки завгодно близько і тим ближче до них, чим далі за точку гілок гіперболи віддаляються у нескінченність. Покажемо на рис. 7 побудову уявної осі гіперболи і її асимптот.

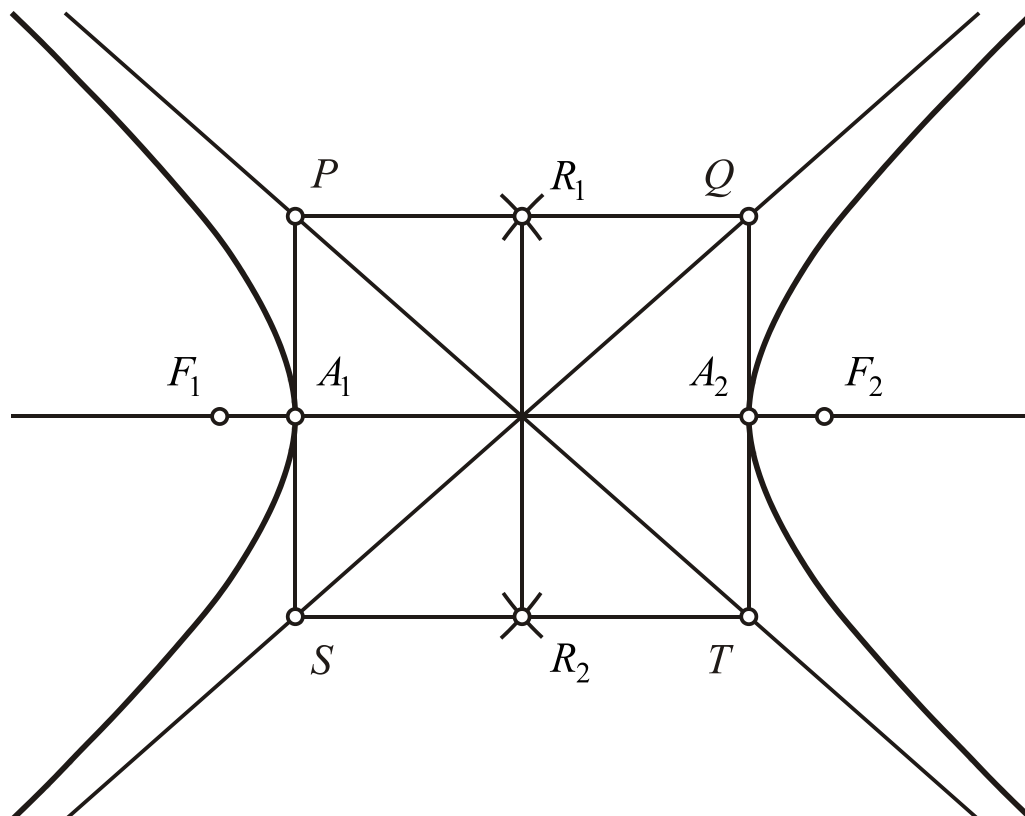


Рис. 7. Побудова уявної осі гіперболи і її асимптот

Відмітимо, що визначення еліпса і гіперболи відрізняються лише тим, що якщо при побудові еліпса незмінною залишається сума відстаней точки кривої до двох заданих точок, то при побудові гіперболи незмінною залишається їх різниця. Тому можна передбачити, що дотична до гіперболи є також бісектрисою одного з кутів, утворених прямими лініями, що сполучають точку гіперболи з фокусами  $F_1$  і  $F_2$ . Оскільки при побудові гіперболи враховується не сума відстаней точки кривої до фокусів  $F_1$  і  $F_2$ , а їх різниця, можна стверджувати, що дотична до гіперболи є бісектрисою кута, сторони якого проходять через фокуси  $F_1$  і  $F_2$ . Нагадаємо, що бісектриса кута, суміжного з кутом, сторони якого проходять через фокуси  $F_1$  і  $F_2$ , є дотичною до еліпса. Покажемо на рис. 8 побудову дотичної до гіперболи.

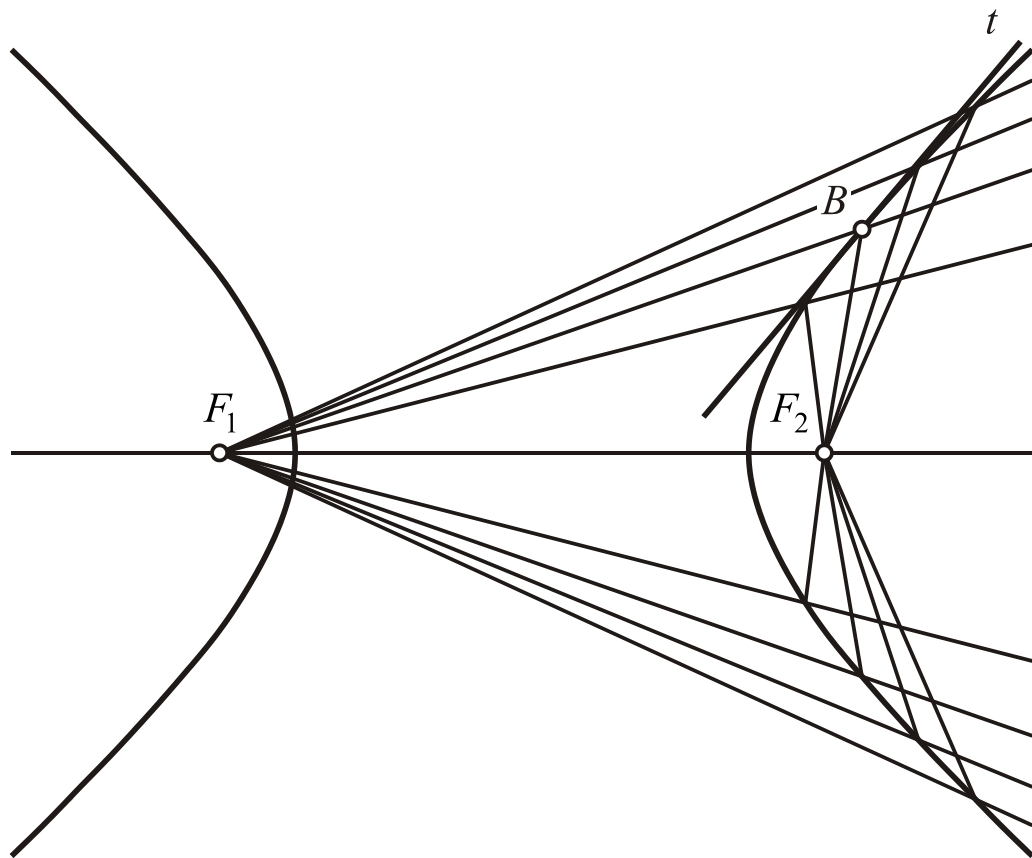


Рис. 8. Побудова дотичної до гіперболи і її оптична властивість

Подамо фокус  $F_2$  як джерело світла, гіперболу – як криволінійне дзеркало, відрізок прямої лінії  $F_2B$  – як падаючий промінь світла, а продовження відрізка прямої лінії  $BF_1$  – як відбитий промінь світла. Дійсно, перпендикуляр до гіперболи в точці  $B$  є бісектрисою кута, утвореного відрізком  $F_2B$  і продовженням відрізка  $BF_1$ . Тому після віддзеркалення від гіперболи світлові промені утворюють пучок, що розходить, з центром у фокусі  $F_1$ . Покажемо на рис. 8 оптичну властивість гіперболи, яка полягає в тому, що промені світла, що випливають з фокуса  $F_2$ , збираються у фокусі  $F_1$ .

Ми знаємо з елементарної геометрії, що пряма, що проходить через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з ним. Тому, якщо фокуси еліпса збігаються з фокусами гіперболи, дотичні до еліпса і гіперболи, проведені в точці їх перетину, взаємно перпендикулярні. Покажемо на рис. 9 дотичні до еліпса і гіперболи, які мають одні і ті ж фокуси.

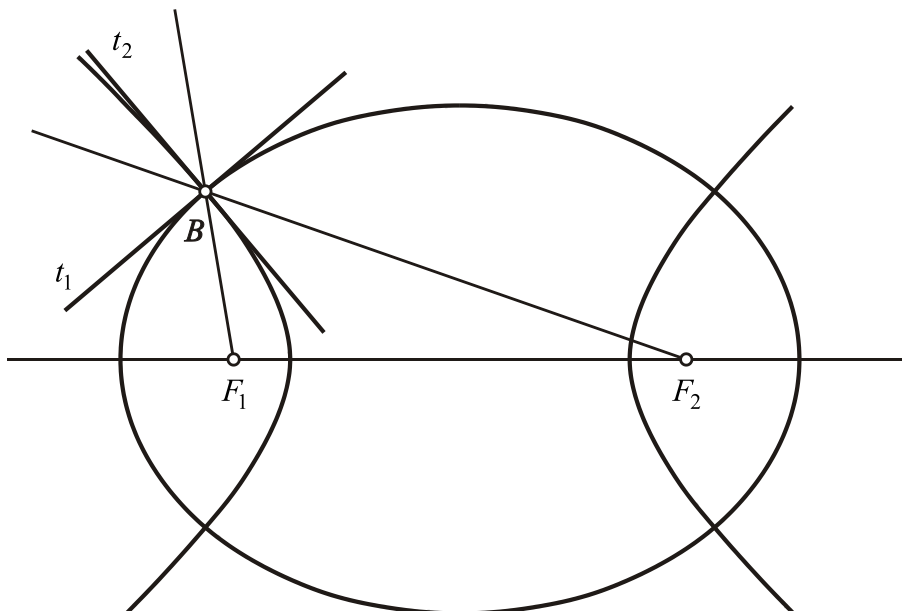


Рис. 9. Перпендикулярність дотичних до еліпса і гіперболи, що мають загальні фокуси, в точці їх перетину

Побудуємо сім'ю еліпсів, що мають загальні фокуси, і сім'ю гіпербол, фокуси яких збігаються з фокусами еліпсів. Оскільки еліпси і гіперболи, що мають загальні фокуси, перетинаються під прямим кутом, сім'ї еліпсів і гіпербол, що мають загальні фокуси, утворюють сітку взаємно ортогональних кривих. Покажемо на рис.10 сім'ї взаємно ортогональних еліпсів і гіпербол.

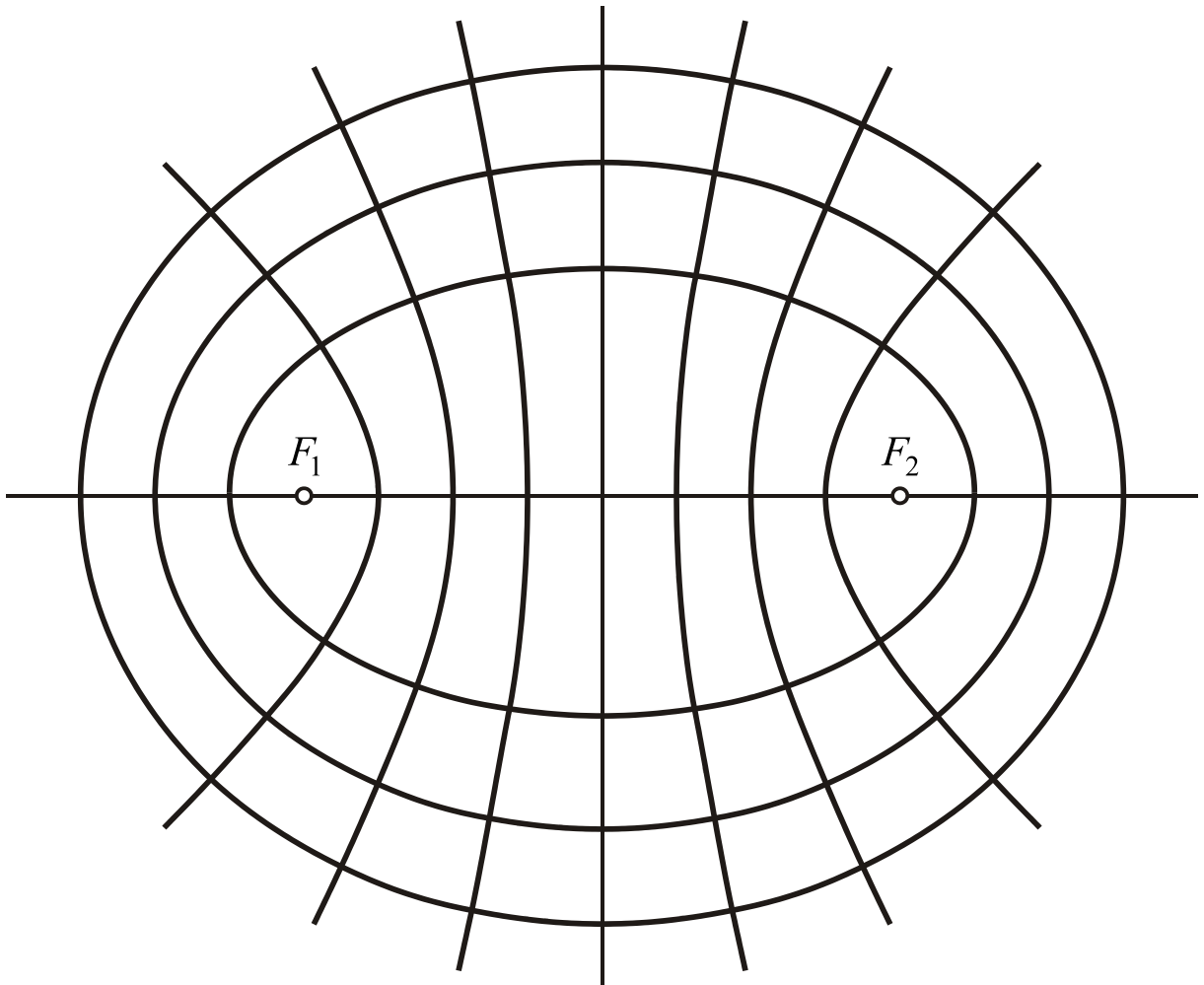


Рис. 10. Ортогональна сітка з сімей еліпсів і гіпербол

Таким чином, гіпербола має такі чудові властивості:

точку гіперболи можна розглядати як вершину кута, сторони якого проходять через фокуси  $F_1$  і  $F_2$ ;

дотична в точці гіперболи є бісектрисою кута, утвореного прямими лініями, що сполучають точку гіперболи з фокусами  $F_1$  і  $F_2$ ;

сім'ї еліпсів і гіпербол, що мають загальні фокуси, утворюють сітку взаємно ортогональних кривих.

Крім того, гіпербола має оптичну властивість, яка полягає в тому, що якщо в одному фокусі  $F_2$  поміщається джерело світла, то промені світла, відбиті від гіперболи, утворюють пучок, що розходить, з центром в іншому фокусі  $F_1$ .

Відмітимо, що найбільш простим прикладом сітки взаємно ортогональних кривих є концентричні кола і прямі лінії, що проходять через загальний центр. Причому цю сітку можна отримати з взаємно ортогональних сімей еліпсів і гіпербол за допомогою граничного переходу, при якому відстані між їх фокусами нескінченно наближаються до нуля. При цьому еліпси прагнуть до кіл, а гіперболи – в дві симетричні прямі лінії, що перетинаються.

### Контрольні запитання

1. Як називається множина точок, сума відстаней яких до двох заданих точок є постійною величиною?

2. Яку властивість мають промені світла, що впливають з одного з фокусів еліпса?

3. Яку властивість має дотична, проведена в точці еліпса?

4. Який чудовий зв'язок існує між еліпсом і параболою?

5. Як називається множина точок, рівновіддалених від заданої точки і заданої прямої?

6. Яку властивість мають промені світла, що впливають з одного з фокусів параболи?

7. Яку властивість має дотична, проведена в точці параболи?

8. Як називається множина точок, відстані яких до двох заданих точок складають постійну різницю

9. Що таке асимптоти гіперболи?

10. Яку властивість мають промені світла, що випливають з одного з фокусів гіперболи?

11. Яку властивість має дотична, проведена в точці гіперболи?

12. Яку властивість мають сім'ї еліпсів і гіпербол, що мають загальні фокуси?

## РОЗДІЛ 2

### Подери еліпса, параболи і гіперболи

Називатимемо подерою кривої  $l$  відносно точки  $M$  множину основ перпендикулярів, опущених з точки  $M$  на дотичні до кривої  $l$ .

Покажемо, що подерою еліпса відносно одного з її фокусів є коло, діаметр якого дорівнює відстані між вершинами еліпса, подерою параболи відносно її фокуса є пряма лінія, що проходить через її вершину, а подерою гіперболи відносно одного з її фокусів також є коло, діаметр якого дорівнює відстані між вершинами гіперболи. Втім, якщо пряму лінію розглядати як коло, центр якого віддалений у нескінченність, можна стверджувати, що подерою параболи також є коло, що проходить через вершину параболи.

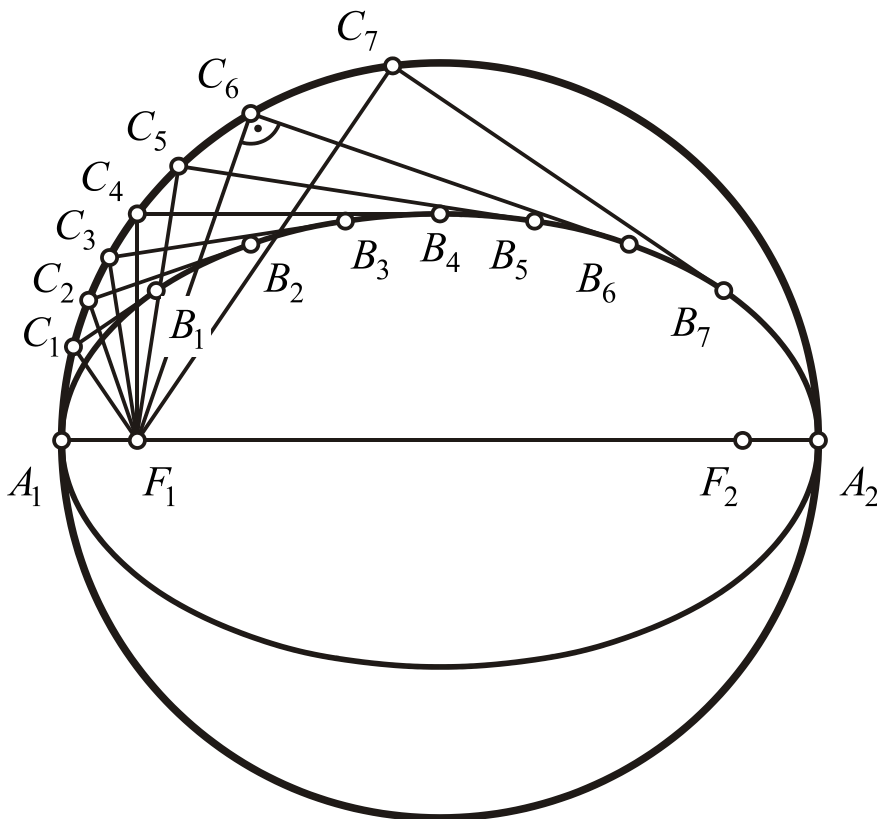


Рис. 1. Побудова подери еліпса відносно його фокуса

Побудуємо подери еліпса, параболи і гіперболи відносно одного з їх фокусів, наприклад  $F_1$ . Виділимо на еліпсі, параболі і гіперболі ряд довільних точок, проведемо через них дотичні до них і опустимо з точки  $F_1$  перпендикуляри на дотичні. Проведемо через основи перпендикулярів криві і побачимо, що подерою еліпса і гіперболи дійсно є коло, а подерою параболи – пряма лінія. Покажемо на рис. 1–3 подери еліпса, параболи і гіперболи відносно їх фокуса  $F_1$ .

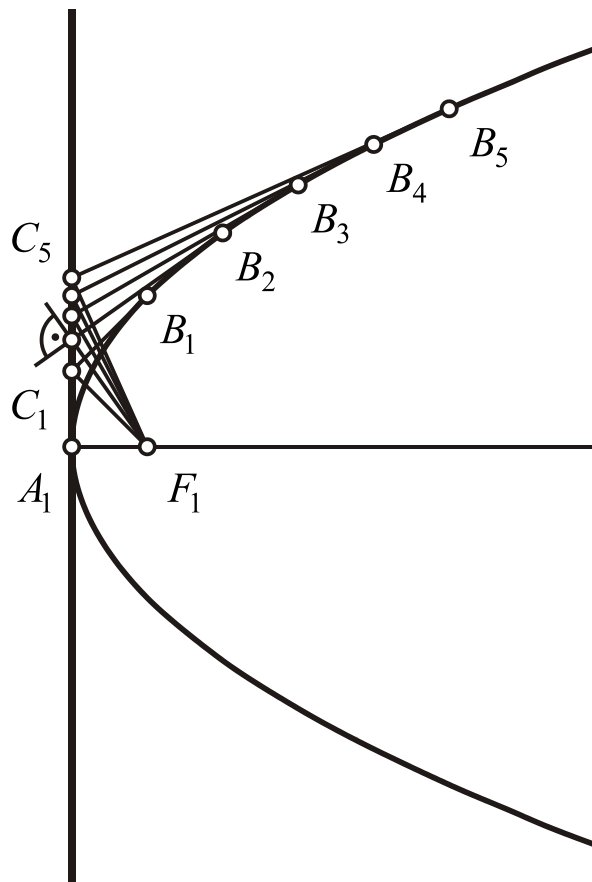


Рис. 2. Побудова подери параболи відносно її фокуса

Навпаки, якщо задана подера і точка  $M$ , то за допомогою подери і точок  $M$  можна відновити криву  $l$ . Виділимо на подері множину точок і з'єднаємо їх відрізками прямої лінії з точкою  $M$ . Відновимо в точках подери перпендикуляри до відрізків прямих ліній, що сполучають їх з

точкою  $M$ . Тоді крива  $l$  буде такою, що огинає отриману сім'ю перпендикулярів.

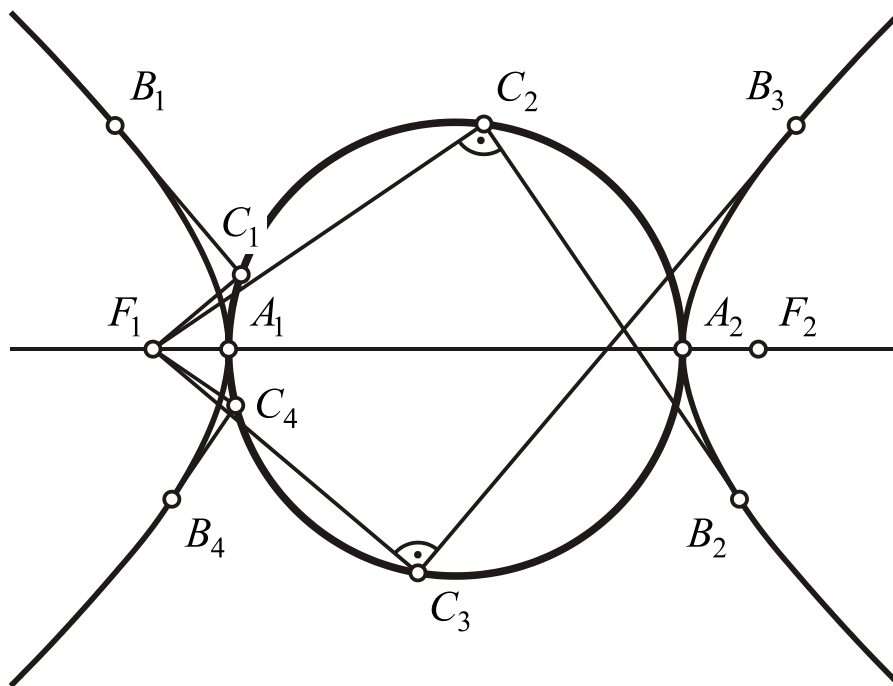


Рис. 3. Побудова подери гіперболи відносно її фокуса

Наприклад, побудуємо точку еліпса за допомогою кола, що є його подерою відносно його фокуса  $F_1$ . Візьмемо коло, діаметр якого дорівнює відстані між вершинами еліпса  $A_1$  і  $A_2$ . З'єднаємо точки  $A_1$  і  $A_2$  відрізком прямої лінії і задамо на ньому фокус еліпса  $F_1$ . Проведемо через точку  $F_1$  довільну пряму лінію, яка перетинає коло в точці  $C$ . Візьмемо на прямій точку  $D$ , віддалену від точки  $C$  на відстань, рівну довжині відрізка  $CF_1$ . Відновимо в точці  $C$  перпендикуляр  $t$  до відрізка прямої лінії  $DF_1$ . Побудуємо на прямій  $A_1A_2$  точку, віддалену від центра  $O$  кола на відстань, рівну довжині відрізка  $F_1O$ . З'єднаємо точки  $F_2$  і  $D$  відрізком прямої лінії і відзначимо точку  $B$  його перетину з перпендикуляром  $t$ . Покажемо на рис. 4 початкові кроки побудови еліпса з його подери відносно його фокуса  $F_1$ .



Оскільки довжина відрізка  $CO$  дорівнює радіусу кола, довжина відрізка  $DF_2$  дорівнює його діаметру, тобто  $DF_2 = A_1A_2$ . Обчислимо довжину відрізка  $DF_2$  з урахуванням того, що трикутник  $\Delta F_1BD$  є рівнобедреним:

$$DF_2 = DB + BF_2 = BF_1 + BF_2.$$

Прирівняємо праві частини двох останньої рівності і отримаємо співвідношення  $BF_1 + BF_2 = A_1A_2$ , яке показує, що сума відстаней точки  $B$  до фокусів  $F_1$  и  $F_2$  є постійною величиною, не залежною від вибору точки  $C$  на колі.

Звідси випливає, що точка  $B$  дійсно належить еліпсу, а перпендикуляр  $t$  є дотичним до еліпса в точці  $B$ .

Побудуємо точку параболи за допомогою прямої лінії, що є його подерою відносно його фокуса  $F_1$ . Проведемо пряму лінію, що проходить через вершину параболи  $A_1$ , і задамо на неї фокус еліпса  $F_1$ . Відновимо в точці  $A_1$  перпендикуляр до осі параболи. Проведемо через точку  $F_1$  довільну пряму лінію, яка перетинає коло в точці  $C$ . Візьмемо на прямій точку  $D$ , віддалену від точки  $C$  на відстань, рівну довжині відрізка  $CF_1$ . Відновимо у точці  $C$  перпендикуляр  $t$  до прямої лінії, що проходить через точку, а в точці  $D$  – перпендикуляр  $d$  до осі параболи. Проведемо через точку  $D$  пряму лінію, перпендикулярну до директриси  $d$  параболи, і відзначимо точку  $B$  її перетину з перпендикуляром  $t$ . Покажемо на рис. 5 початкові кроки побудови параболи з її подери відносно її фокуса  $F_1$ .

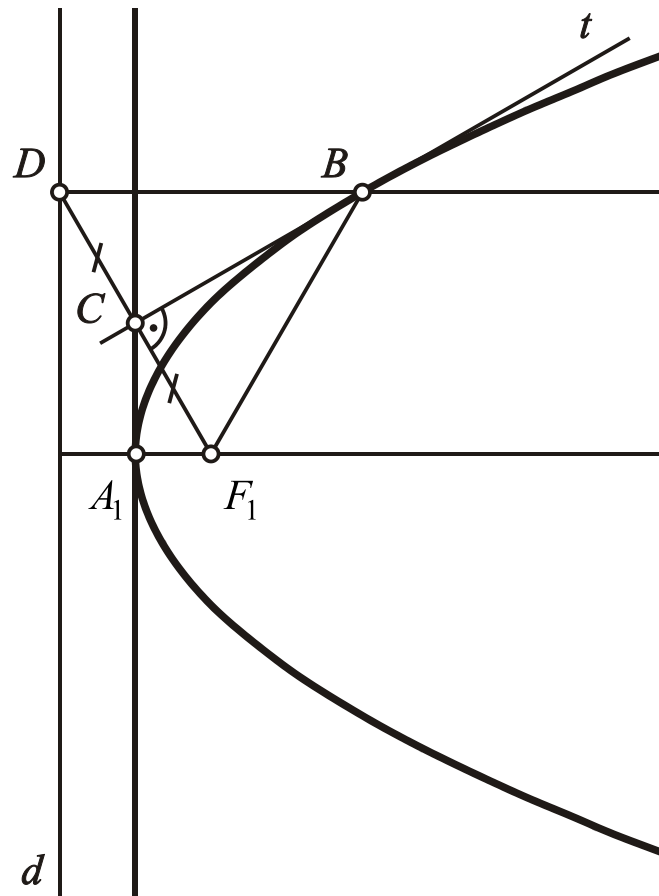


Рис. 5. Метаморфоза прямої лінії в параболу за умови, що пряма лінія – це подера параболі відносно її фокуса  $F_1$

Доведемо, що точка  $B$  дійсно належить параболі. Розглянемо трикутник  $\Delta F_1BD$ . Оскільки відрізок  $BC$  є висотою трикутника, що ділить його основу навпіл, трикутник  $\Delta F_1BD$  є рівнобедреним. Звідси випливає рівність сторін трикутника  $BF_1 = BD$ . Це означає, що точка  $B$  відстоїть на рівні відстані як від точки  $F_1$ , так і від прямої лінії  $d$ .

Звідси випливає, що точка  $B$  дійсно належить параболі, а перпендикуляр  $t$  є дотичним до параболі в точці  $B$ .

Побудуємо точку гіперболи за допомогою кола, що є її подерою відносно її фокуса  $F_1$ . Візьмемо коло, діаметр якого дорівнює відстані між вершинами гіперболи  $A_1$  і  $A_2$ . Проведемо через точки  $A_1$  і  $A_2$  пряму

лінію і задамо на ній фокус гіперболи  $F_1$ . Проведемо тепер через точку  $F_1$  довільну пряму лінію, яка перетинає коло у точці  $C$ . Візьмемо на прямій точку  $D$ , віддалену від точки  $C$  на відстань, рівну довжині відрізка  $CF_1$ . Відновимо у точці  $C$  перпендикуляр  $t$  до відрізка прямої лінії  $DF_1$ . Побудуємо на прямій лінії, що проходить через точки  $A_1$  і  $A_2$ , точку, яка відстоїть від центра  $O$  кола на відстань, рівну довжині відрізка  $F_1O$ . Проведемо через точки  $F_2$  і  $D$  пряму лінію і відзначимо точку  $B$  її перетину з перпендикуляром  $t$ . Покажемо на рис. 6 початкові кроки побудови гіперболи з її подери відносно її фокуса  $F_1$ .

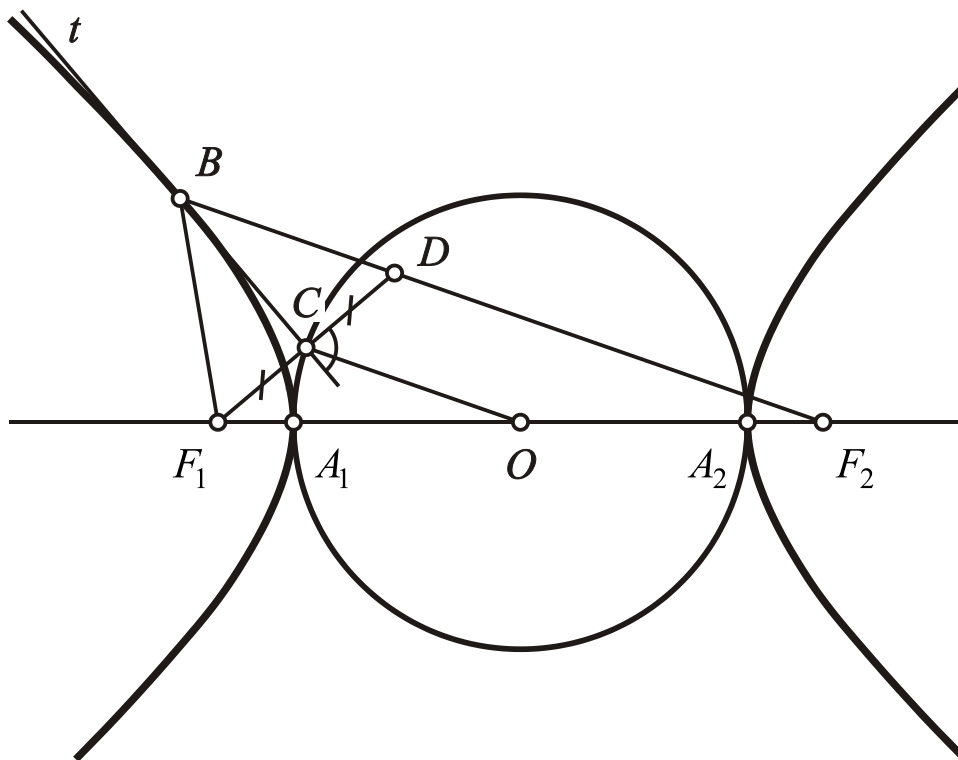


Рис. 6. Метаморфоза кола в гіперболу за умови, що коло – це подера гіперболи відносно її фокуса  $F_1$

Доведемо, що точка  $B$  дійсно належить гіперболі. Розглянемо трикутник  $\Delta F_1BD$ . Оскільки відрізок  $BC$  є висотою трикутника, що ділить його основу навпіл, трикутник  $\Delta F_1BD$  є рівнобедреним. Звідси

впливає рівність сторін трикутника  $BF_1 = BD$ . Розглянемо трикутник  $\Delta F_1DF_2$ . З'єднаємо центр  $O$  кола і точку  $C$  відрізком прямої лінії і отримаємо трикутник, подібний до трикутника  $\Delta F_1DF_2$ . Це впливає з того, що вершини  $O$  і  $C$  трикутника  $\Delta F_1CO$  ділять сторони  $F_1F_2$  і  $DF_1$  трикутника  $\Delta F_1DF_2$  навпіл, а кути при вершині  $F_1$  трикутників рівні. Складемо рівність, яка виходить з подібності трикутників  $\Delta F_1CO$  і  $\Delta F_1DF_2$ :

$$\frac{DF_1}{CF_1} = \frac{DF_2}{CO} = 2 \text{ або } DF_2 = 2CO.$$

Оскільки довжина відрізка  $CO$  дорівнює радіусу кола, довжина відрізка  $DF_2$  дорівнює його діаметру, тобто  $DF_2 = A_1A_2$ . Обчислимо довжину відрізка  $DF_2$  з урахуванням того, що трикутник  $\Delta F_1BD$  є рівнобедреним:

$$DF_2 = BF_2 - DB = BF_2 - BF_1.$$

Прирівняємо праві частини двох останніх рівностей і отримаємо співвідношення  $BF_2 - BF_1 = A_1A_2$ , яке показує, що різниця відстаней точки  $B$  до фокусів  $F_1$  і  $F_2$  є постійною величиною, не залежною від вибору точки  $C$  на колі.

Звідси впливає, що точка  $B$  дійсно належить гіперболі, а перпендикуляр  $t$  є дотичним до гіперболи в точці  $B$ .

Таким чином, крім того, що еліпс, парабола і гіпербола – це множина точок, відстані яких до двох заданих точок дають постійну суму або різницю, у них є ще одна загальна властивість. Ця властивість полягає в тому, що еліпс, параболу і гіперболу можна отримати за допомогою кола або прямої лінії за умови, що коло або пряма лінія є їх подерами відносно

одного з їх фокусів. При цьому коло і пряму лінію об'єднує те, що пряму лінію можна розглядати як коло з віддаленим у нескінченність центром.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке подера кривої відносно заданої точки?
2. Яка крива є подерою еліпса відносно одного з її фокусів?
3. Яка крива є подерою параболи відносно її фокуса?
4. Яка крива є подерою гіперболи відносно одного з її фокусів?
5. Чи можна по заданій подері і точці відновити криву?

## РОЗДІЛ 3

### Конічні перерізи

Називатимемо конічними перерізами плоскі криві, що утворюються при перетині площиною конічної поверхні, напрямною якої служить коло.

Візьмемо січну площину, перпендикулярну осі прямого кругового конуса. Вочевидь, що його перерізом буде коло. Нахилимо січну площину і побачимо, що якщо кут її нахилу до осі прямого кругового конуса більше кута нахилу його твірних, то переріз перетворюється на еліпс, а січна площина перетинає всі твірні конічної поверхні. Таким чином, якщо січна площина не паралельна жодній твірній конічної поверхні, то конічним перерізом є або еліпс, або коло, або точка. При цьому коло утворюється у тому випадку, якщо січна площина не проходить через вершину конічної поверхні, але перпендикулярна її осі, а точка – у тому випадку, якщо січна площина проходить через вершину конічної поверхні. Покажемо на рис. 1 конічний переріз, який утворюється при перетині конічної поверхні площиною, яка не паралельна жодній її твірній, не проходить через її вершину і не перпендикулярна її осі.

Зменшуватимемо кут нахилу січної площини до осі прямого кругового конуса і побачимо, що еліпси все більше витягуватиметься і, нарешті, коли кут нахилу січної площини до осі прямого кругового конуса стане рівним куту нахилу його твірних, то переріз перетвориться на параболу. При цьому січна площина стане паралельною одній із твірних конічної поверхні. Таким чином, якщо січна площина паралельна лише одній твірній конічної поверхні, то конічним перерізом є парабола. Покажемо на рис. 2 конічний переріз, який утворюється при перетині конічної поверхні площиною, паралельною лише одній її твірній.

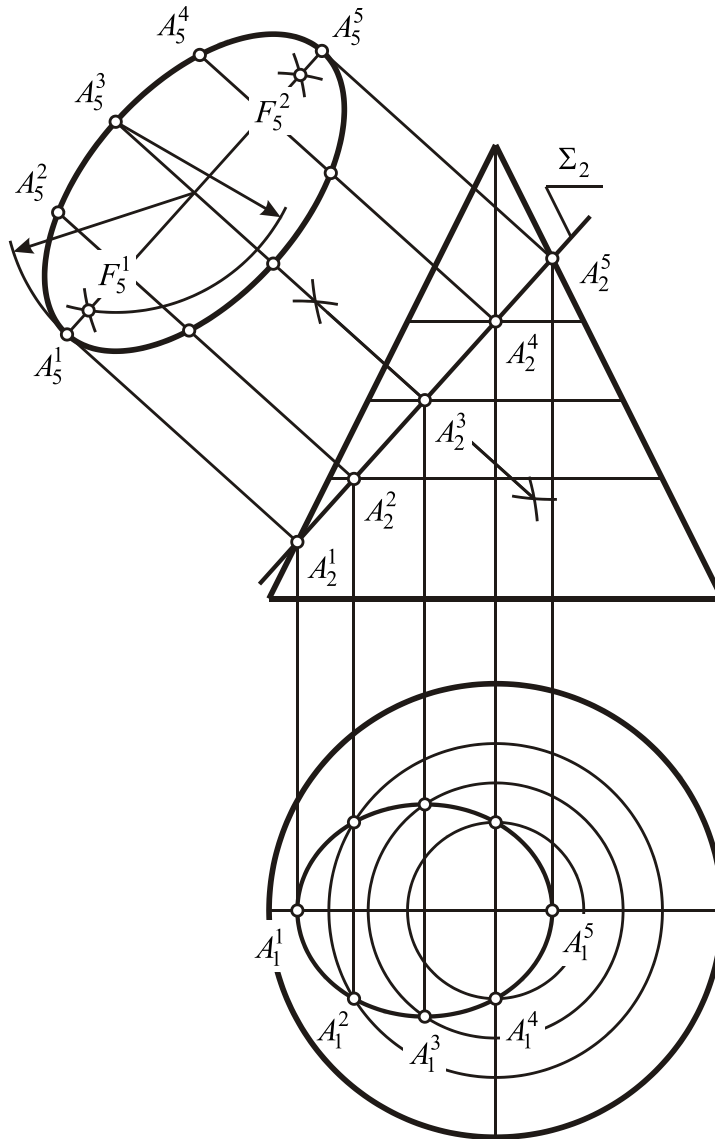


Рис. 1. Переріз прямого кругового конуса площиною, не паралельною жодній її твірній

Продовжимо зменшувати кут нахилу січної площини до осі прямого кругового конуса і побачимо, що січна площина перетинає не лише дану порожнину конічної поверхні, але й ту порожнину, яка утворюється при продовженні її твірних. Це означає, що якщо кут нахилу січної площини до осі прямого кругового конуса стає менше кута нахилу його твірних, то переріз перетворюється на гіперболу. Крім того, серед твірних конічної поверхні завжди можна знайти дві такі твірні, які утворюють площину, паралельну січній площині. Таким чином, якщо січна площина паралельна

двом твірним конічної поверхні, то конічним перерізом є гіпербола. При цьому, оскільки січна площина перетинає не одну, а дві порожнини конічної поверхні, гіпербола складається не з однієї, а з двох гілок. Крім того, у тому випадку, якщо січна площина проходить через вісь конічної поверхні, її перерізом буде пара прямих ліній, що перетинаються в її вершині. Покажемо на рис. 3 конічний переріз, який утворюється при перетині конічної поверхні площиною, паралельною двом її твірним.

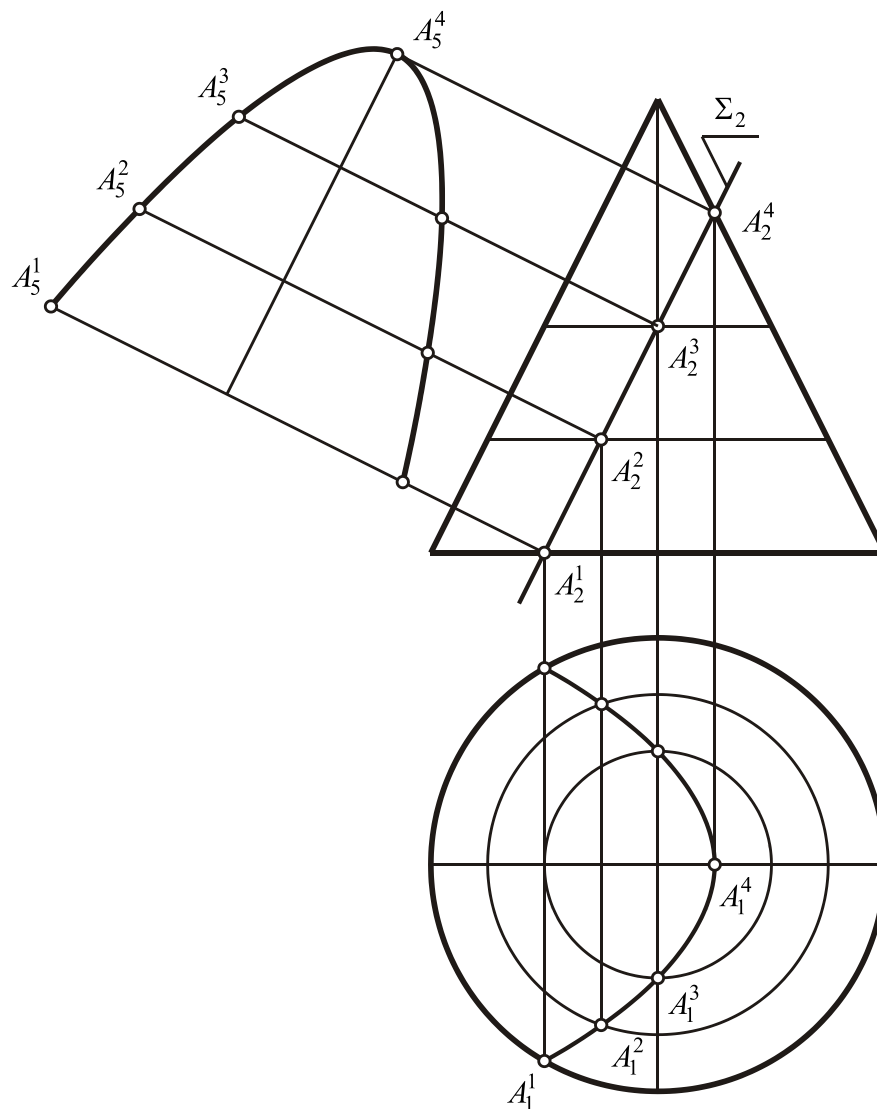


Рис. 2. Переріз прямого кругового конусу площиною, паралельною лише одній її твірній

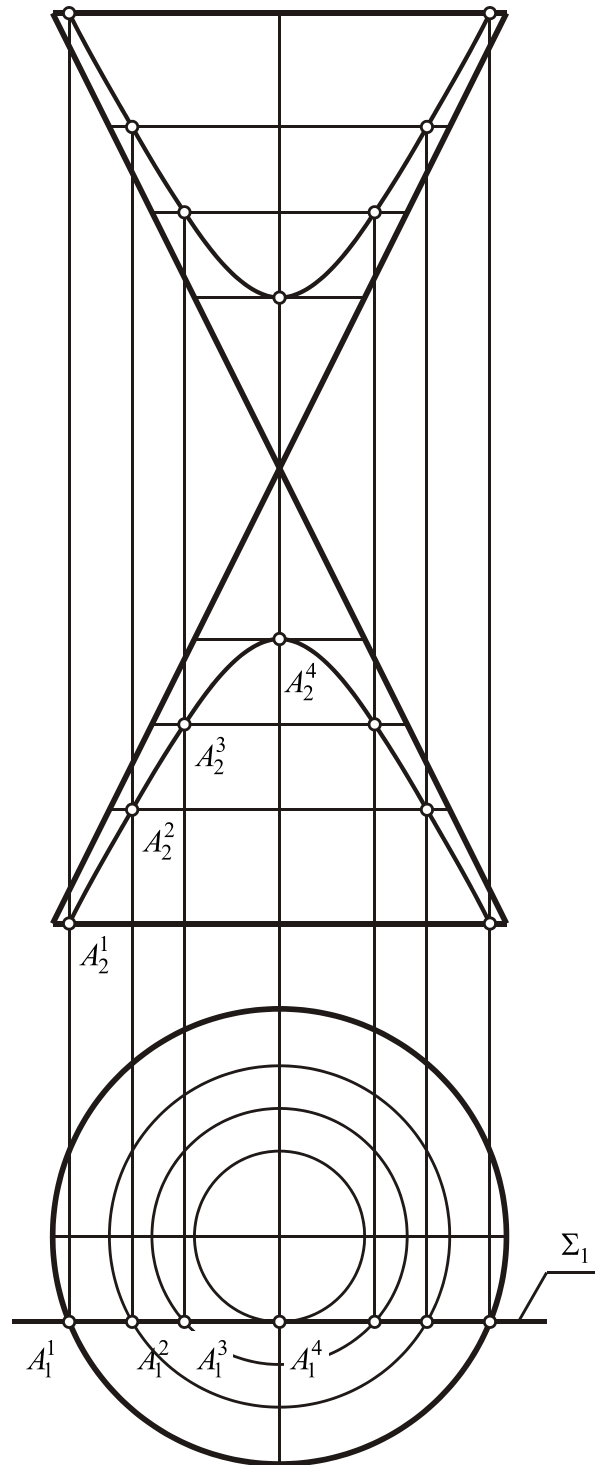


Рис. 3. Переріз прямого кругового конусу площиною, паралельною двом її твірним

Отже, ми розглянули метаморфози, які відбуваються з лінією перетину прямого кругового конусу площиною, а тепер доведемо, що кінцевий переріз, показаний на рис. 1, є еліпсом. Перш за все, знайдемо

його фокуси. Візьмемо точку  $A^3$ , що належить кінцю другої осі еліпса. Проведемо з точки  $A^3$  як з центра коло, радіус якого дорівнює відстані від центра еліпса до вершини  $A^1$ , виділимо точку перетину кола з першою віссю еліпса  $A^1A^2$  і позначимо точку перетину як один з його фокусів  $F^1$ . Покажемо на рис. 1 побудову фокусів еліпса.

Впишемо в прямий круговий конус сферу  $\Phi^1$ , що дотикається водночас конічної поверхні і січної площини. Нехай сфера дотикається конічної поверхні по колу  $l^1$ , що проходить через точку дотику  $U^1$ , а січній площині – в точці  $F^1$ . Побудуємо ще одну сферу, що дотикається як конічної поверхні, так і січної площини. Позначимо  $F^2$  точку дотику січної площини. Покажемо на рис. 4 сфери, що дотикаються як конічної поверхні, так і січної площини. З'єднаємо тепер довільну точку  $B$  лінії перетину з точками  $F^1$  і  $F^2$ . Проведемо твірну конуса, що проходить через точку  $B$ . Нехай твірна перетинається з колами, за якими дві сфери дотикаються конусу, в точках  $K^1$  і  $K^2$ . Оскільки сфера має множину осей симетрії, дотичні, проведені до неї з однієї точки  $B$ , мають рівну довжину. Звідси випливає рівність відрізків  $BF^1 = BK^1$  и  $BF^2 = BK^2$ . Виконаємо складання лівих і правих частин отриманої рівності:

$$BF^1 + BF^2 = BK^1 + BK^2 = K^1K^2.$$

Оскільки відстань  $K^1K^2$  не залежить від вибору точки  $B$ , а визначається лише діаметрами сфер, що дотикаються конусу, для всіх точок лінії перерізу сума відстаней до точок  $F^1$  і  $F^2$  однакова. Отже, переріз, показаний на рис. 1, є еліпсом.

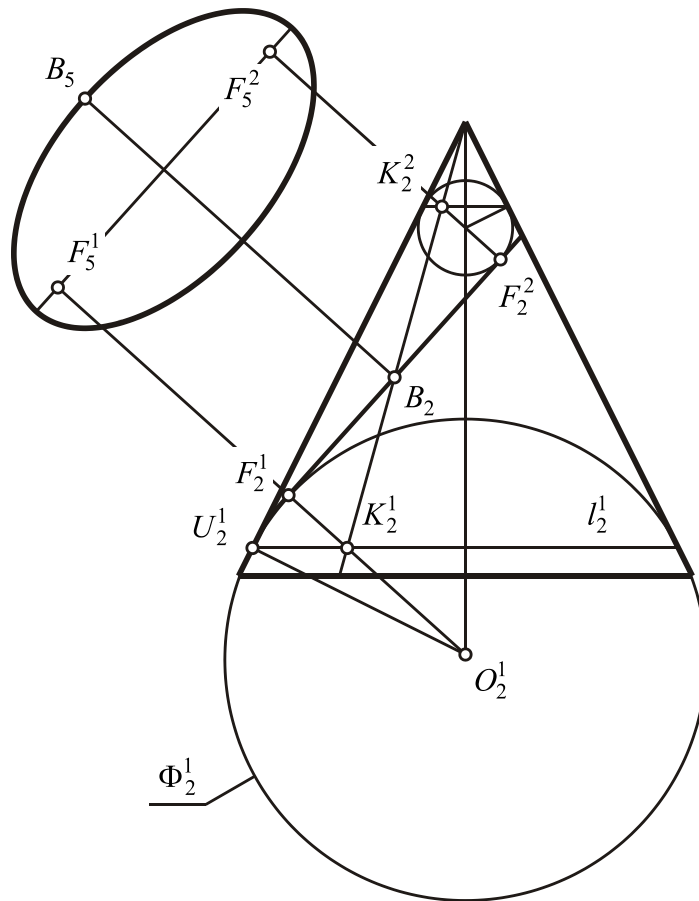


Рис. 4. Доведення того, що переріз прямого кругового конусу площиною, не паралельною жодній його твірній, є еліпсом

Доведемо, що конічний переріз, поданий на рис. 2, є параболою.

Впишемо в прямий круговий конус сферу  $\Phi^1$ , що дотикається водночас конічній поверхні і січній площині. Оскільки січна площина паралельна одній із твірних конічній поверхні, точки дотику січної площини і конічній поверхні належать кінцям діаметру сфери  $\Phi^1$ . Знайдемо центр сфери  $\Phi^1$  за умови, що довжина її діаметру дорівнює відстані між твірною конічній поверхні і січною площиною. Проведемо сферу, що дотикається конічній поверхні по колу  $l^1$ , що проходить через точку дотику  $U^1$ , а січній площині – в точці  $F^1$ . При цьому передбачається, що друга сфера, що дотикається конічній поверхні і січній площині, віддалена у нескінченність. З'єднаємо довільну точку  $B$  лінії перетину з точкою  $F^1$ .

Проведемо твірну конуса, що проходить через точку  $B$ . Нехай твірна перетинається з колом, по якому сфера  $\Phi^1$  дотикається конусу, в точці  $K^1$ . Покажемо на рис. 5 сферу, що дотикається як конічної поверхні, так і січної площини.

Відкладемо від вершини параболи відрізок, довжина якого дорівнює відстані від точки  $F^1$  до вершини. Проведемо через точку, що належить кінцю відрізка, пряму лінію, перпендикулярну осі параболи і позначимо її буквою  $d$ . Опустимо з точки  $B$  перпендикуляр на пряму лінію  $d$ . Проведемо з точки  $B$  як з центра коло, радіус якого дорівнює довжині побудованого перпендикуляра, і виявимо, що його дуга проходить через точку  $F^1$ . Це означає, що точка  $B$  рівновіддалена від прямої лінії  $d$  і точки  $F^1$ . Отже, переріз, показаний на рис. 2, є параболою, точка  $F^1$  – її фокусом, а пряма лінія  $d$  – її директрисою.

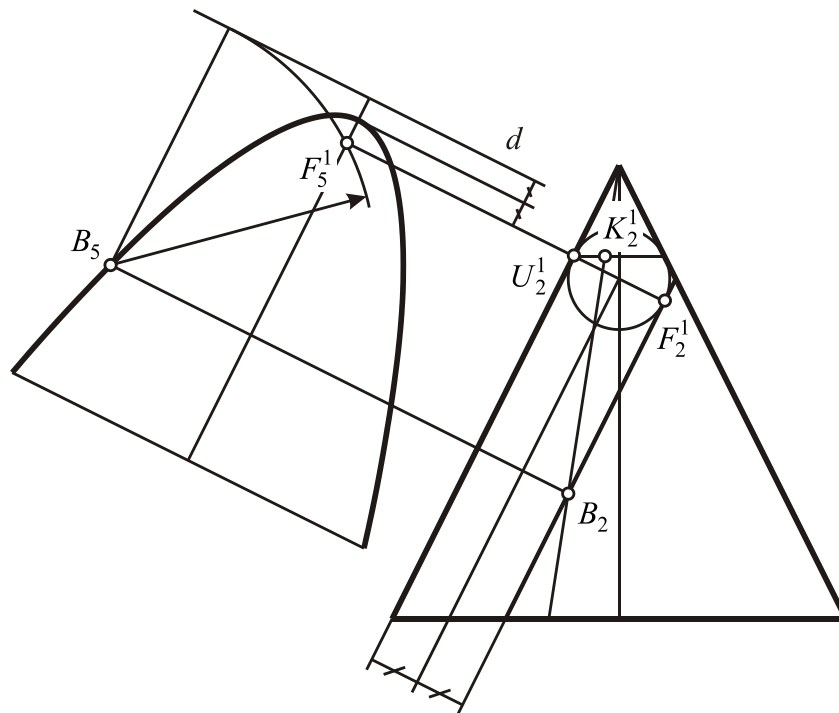


Рис. 5. Доведення того, що переріз прямого кругового конуса площиною, не паралельною лише одній його твірній, є параболою

Доведемо тепер, що конічний переріз, поданий на рис. 3, є гіперболою. Знайдемо її фокуси. Скористаємося тим, що обрисові твірні прямого кругового конуса є асимптотами гіперболи. Проведемо через її вершини  $A_1$  і  $A_2$  перпендикуляри до її осі, відзначимо точки їх перетину з асимптотами і побудуємо прямокутник  $PQST$ . Проведемо з вершини конусу як з центра коло, радіус якого дорівнює діагоналі прямокутника  $PQST$ , виділимо точку перетину кола з віссю гіперболи  $A^1A^2$  і позначимо точку перетину як один з його фокусів  $F^1$ . Покажемо на рис. 6 побудову фокусів гіперболи.

Впишемо в прямий круговий конус сфери  $\Phi^1$  і  $\Phi^2$ , що дотикаються водночас конічній поверхні і січній площини. Нехай сфери дотикаються конічній поверхні в точках  $U^1$  і  $U^2$ , а січній площини – в точках  $F^1$  і  $F^2$ . Звернемо увагу, що тепер дотичні сфери розташовуються по один бік від січній площини. Покажемо на рис. 6 сфери, що дотикаються як конічній поверхні, так і січній площини. З'єднаємо тепер довільну точку  $B$  лінії перетину з точками  $F^1$  і  $F^2$ . Проведемо в обох порожнинах конуса твірні, що проходять через точку  $B$ . Нехай твірні перетинаються з колами, по яких обидві сфери дотикаються конусу, в точках  $K^1$  і  $K^2$ . Оскільки сфера має множину осей симетрії, дотичні, проведені до неї з однієї точки  $B$ , мають рівну довжину. Звідси випливає рівність відрізків  $BF^1 = BK^1$  і  $BF^2 = BK^2$ . Виконаємо віднімання лівих і правих частин отриманої рівності:

$$BF^2 - BF^1 = BK^2 - BK^1 = K^1K^2.$$

Оскільки відстань  $K^1K^2$  не залежить від вибору точки  $B$ , а визначається лише діаметрами сфер, що дотикаються конусу, для всіх

точок лінії перетину різниця відстаней до точок  $F^1$  и  $F^2$  однакова. Отже, переріз, показаний на рис. 3, є гіперболою.

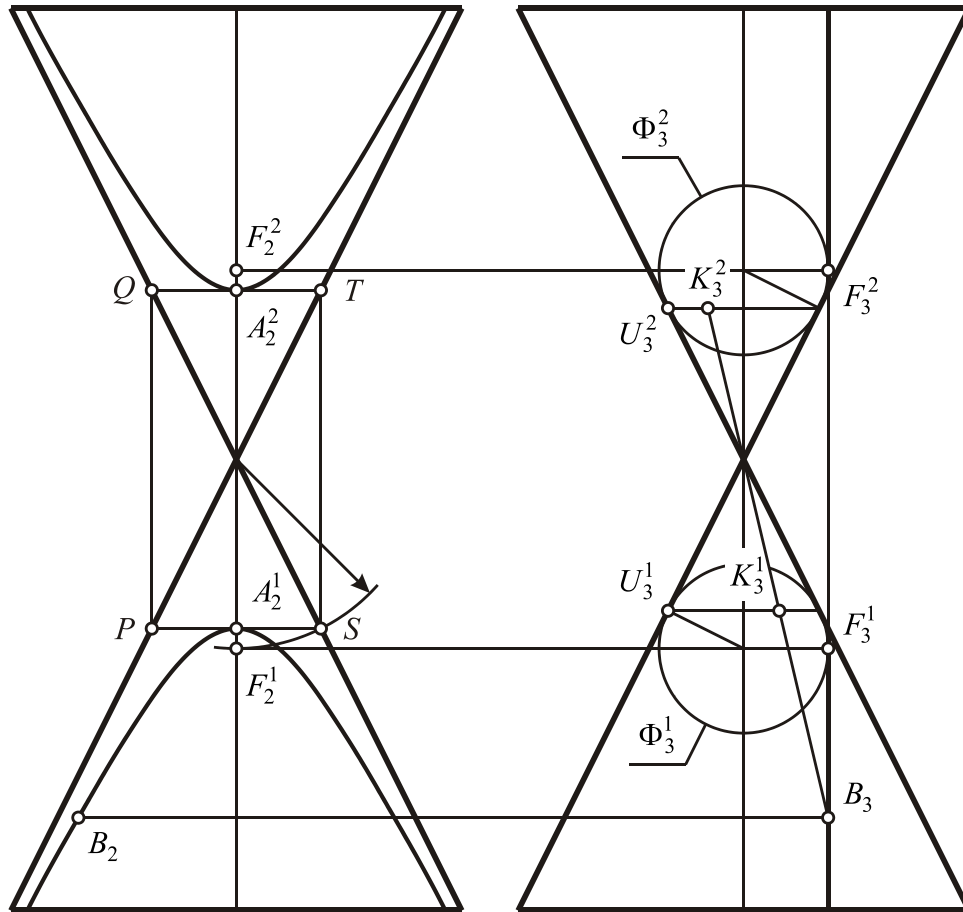


Рис. 6. Доведення того, що переріз прямого кругового конусу площиною, паралельною двом його твірнім, є гіперболою

Математики Давньої Греції знали конічні перерізи і успішно застосовували їх для розв'язання деяких задач на побудову, які не можна було розв'язати за допомогою простих геометричних фігур – прямої і кола. Наприклад, Менехм в 4 столітті до Р.Х. застосував параболу і гіперболу для розв'язання задачі про подвоєння куба. Попри те, що старогрецькі учені не знали правил, за якими можна було викреслити графіки еліпса, параболи і гіперболи, вони отримували їх за допомогою перерізу прямого кругового конуса площиною, перпендикулярною до однієї з його твірних.

При цьому якщо кут при вершині конуса був гострим, в перерізі лежав еліпс, якщо кут був прямим, – парабола, а якщо кут був тупим, – гіпербола.

Цілих два тисячоліття конічні перерізи залишалися не більше ніж предметом математичних вправ вузького круга вчених і геометричними фігурами, що не мали нічого спільного з дійсністю. Конічні перерізи придбали широку популярність після того, як в XVII столітті завдяки значним успіхам в астрономії був виявлений чудовий зв'язок еліпса, параболи і гіперболи з багатьма явищами природи, зокрема із законом всесвітнього тяжіння.

Німецький астроном Іоганн Кеплер (1571–1630) на підставі багатолітніх спостережень за рухами планет, проведених данським астрономом Тихо Бразі (1546–1601), відкрив закони, один з яких стверджує, що при незбуреному русі траєкторією точки, що рухається, є крива другого порядку, в одному з фокусів якої знаходиться центр сили тяжіння. Таким чином, орбіти планет і комет Сонячної системи – це деякий конічний переріз, тобто коло, еліпс, парабола або гіпербола, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Багато років по тому англійський фізик і математик Ісаак Ньютон (1643–1727) довів, що відкриті Іоганном Кеплером закони руху планет і комет справедливі лише для незбуреного руху, що відбувається під впливом сили тяжіння, обернено пропорційної до квадрата відстані точки до центра сили тяжіння.

Звідси випливає, що якщо траєкторія рухомої точки є крива, сума відстаней точок якої до двох заданих точок є постійною величиною, а центр тяжіння знаходиться в одній із заданих точок, то рух точки відбувається під впливом сили тяжіння, обернено пропорційної до квадрата відстані точки до центра сили тяжіння. Навпаки, якщо точка рухається під впливом сили тяжіння, обернено пропорційної до квадрата відстані точки до центра сили тяжіння, то траєкторія її руху є крива, для

точок якої сума відстаней до двох заданих точок є постійною величиною, а центр тяжіння знаходиться в одній із заданих точок.

Таким чином, попри те, що конічні перерізи – це результат дослідів вчених Древньої Греції по перетину прямого кругового конуса площинами, нахиленими до його осі під різними кутами, і застосовувалися ними для розв'язання чисто геометричних задач, між конічними перерізами і законом всесвітнього тяжіння існує чудова залежність. Мабуть, ця залежність пояснюється тим, що визначення конічних перерізів як множини точок, об'єднаних однією ознакою, є таким же загальним законом природи, як і закон всесвітнього тяжіння.

### **Контрольні запитання**

1. Яка крива є перерізом прямого кругового конуса площиною, не паралельною жодній його твірної?
2. Яка крива є перерізом прямого кругового конуса площиною, паралельною лише одній його твірній?
3. Яка крива є перерізом прямого кругового конуса площиною, паралельною двом його твірним?

## РОЗДІЛ 4

### Спіраль Архімеда і логарифмічна спіраль

Спіраль – це траєкторія точки, що обертається довкола нерухомої точки, званої полюсом, і що одночасно віддаляється від неї або наближається до неї. Звідси випливає, що рух точки, що описує спіраль, є комбінацією двох основних рухів: поступального і обертального. Це пояснює, чому в природі спіралі можна зустріти всюди: від Галактик і до чайнок на дні чайної чашки. Спіралі, що зустрічаються в природі, залежно від того, з якою швидкістю – постійною або змінною – точка віддаляється від полюса або наближається до нього, розділяються на спіраль Архімеда і логарифмічну спіраль.

Розглянемо спіраль Архімеда. Називатимемо спіраллю Архімеда плоску криву, яка утворюється рівномірним обертанням променя  $l$  довкола полюса  $O$  і рівномірною поступальною ходою точки  $M$  уздовж проміння за умови, що початкове положення точки збігається з полюсом. Звідси випливає, що в рівні одиниці часу промінь буде обертатися на один і той же кут, а точка просуватиметься уздовж проміння на одну і ту ж відстань.

Звідси випливає, що спіралі Архімеда можна дати таке визначення: спіраль Архімеда – це плоска крива, яка утворюється рухом точки по променю, що обертається довкола полюса, за умови, що кут повороту і відстань точки до полюса збільшуються в арифметичних прогресіях. Скористаємося цим визначенням для побудови спіралі Архімеда.

Називатимемо арифметичною прогресією послідовність чисел, в якій різниця між подальшим і попереднім членами залишається постійною. Отже, будь-який член арифметичної прогресії можна обчислити за формулою

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

де  $d$  – різниця прогресії.

Побудуємо спіраль Архімеда за умови, що промінь здійснює два повні оберти. Розділимо повний кут на 8 рівних частин. Це означає, що кути повороту променя складають арифметичну прогресію з різницею  $\frac{2\pi}{8}$ .

Нехай відстані точки до полюса складають арифметичну прогресію з різницею 4.

Поєднаємо початкове положення точки  $M_1$  з полюсом  $O$  спіралі Архімеда. Проведемо через полюс  $O$  пряму лінію, що задає початкове положення променя  $l$ . Відкладемо від точки  $M_1$  відрізок прямої лінії  $M_1M_2$ , рівний різниці прогресії, яку складають відстані точки до полюса. Проведемо коло з центром в точці  $M_1$  і радіусом, рівним довжині відрізка  $M_1M_2$ . Розглянемо її як коло, радіус якого відповідає першому членові арифметичної прогресії.

Відкладемо від точки  $M_2$  відрізок прямої лінії  $M_2M_3$ , рівний різниці прогресії, яку складають відстані точки до полюсу. Проведемо коло з центром в точці  $M_1$  і радіусом, рівним довжині відрізка  $M_1M_3$ . Розглянемо її як коло, радіус якого відповідає другому членові арифметичної прогресії. Продовжимо побудови до тих пір, поки не будуть знайдені всі точки, відповідні 16 членам арифметичної прогресії.

Проведемо 8 променів, що випливають з одного полюсу, і 16 кіл, радіуси яких дорівнюють довжинам відрізків, що складають арифметичну прогресію. Виділимо з урахуванням того, що промінь здійснює два повних оберти, точки перетину променів з відповідними колами і отримаємо

спіраль Архімеда. Покажемо на рис. 1 спіраль Архімеда і побудову відрізків, довжини яких складають арифметичну прогресію.

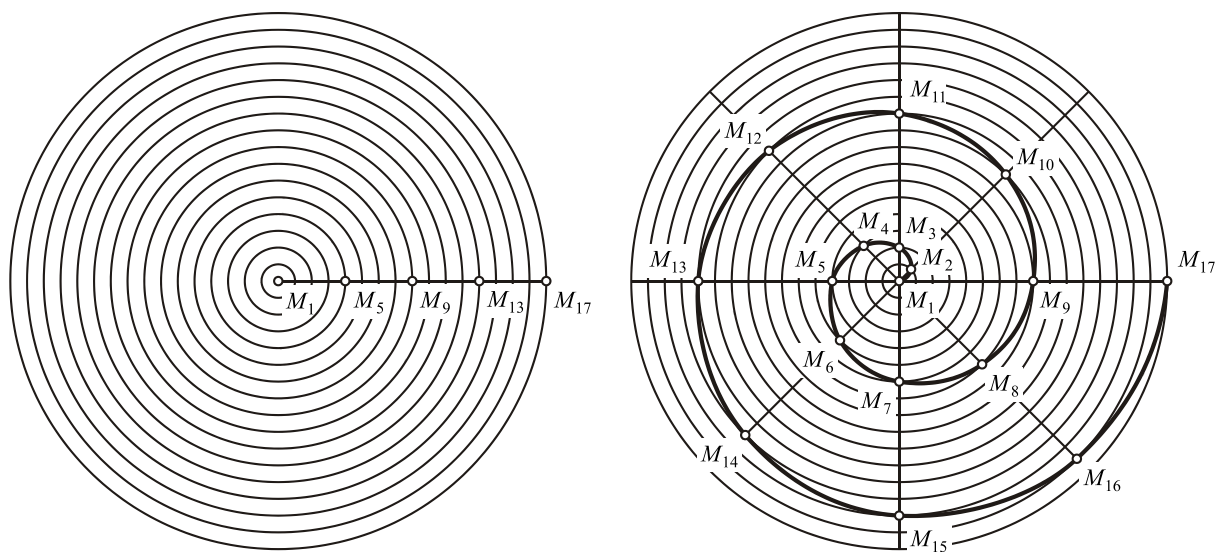


Рис. 1. Спіраль Архімеда і побудова точок, відстані яких до полюсу складають арифметичну прогресію

Розглянемо тепер логарифмічну спіраль. Називатимемо логарифмічною спіраллю плоску криву, яка утворюється рівномірним обертанням променя  $l$  довкола полюса  $O$  і поступальною ходою точки  $M$  уздовж проміння з швидкістю, пропорційною відстані точки до полюса. Звідси випливає, що повороту променя на даний кут  $\omega$  відповідає одне і те ж відношення відстані  $OM_1$  точки до полюса на початку повороту до відстані  $OM_2$  точки до полюса в кінці повороту.

Логарифмічна спіраль була відкрита в 1638 році французьким філософом і математиком Рене Декартом (1596–1650) і незалежно від нього в тому ж році італійським математиком і фізиком Еванджеліста Торрічеллі (1608–1647). До честі Торрічеллі, він не лише набагато детальніше, ніж Декарт, вивчив властивості логарифмічної спіралі, але і першим запропонував спосіб її побудови. Його спосіб побудови дожив до наших днів і наводиться у всіх підручниках по геометрії, але, на наш погляд, є настільки громіздким, що логарифмічну спіраль простіше

побудувати по точках, координати яких обчислюються за допомогою її рівняння.

Ми пропонуємо інший спосіб побудови логарифмічної спіралі. Скористаємося її наступним визначенням: логарифмічна спіраль – це плоска крива, яка утворюється рухом точки по променю, що обертається довкола полюса, за умови, що кут повороту збільшується в арифметичній прогресії, а відстань точки до полюса – у геометричній прогресії.

Називатимемо геометричною прогресією послідовність чисел, в якій відношення між подальшим і попереднім членами залишається постійним. Отже, будь-який член геометричної прогресії можна обчислити за формулою

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

де  $q$  – знаменник прогресії.

Допустимо, що промінь здійснює два повні оберти, а відстань точки до полюса збільшується в 10 разів. Розділимо повний кут на 8 рівних частин. Підставимо в приведену вище формулу відношення відстані точки до полюса на початку і в кінці повороту, а також число частин повного кута, що уміщаються у двох повних обертах, і отримаємо вираз, за допомогою якого можна обчислити знаменник прогресії:

$$10 = q^{16}.$$

Виконаємо логарифмування обох частин отриманого виразу і знайдемо значення знаменника прогресії:

$$\lg q = \frac{1}{16}; \quad q = 1,1548.$$

Розглянемо задачу про побудову точок, відстані яких до полюса складають геометричну прогресію. Відкладемо від полюса  $O$  відрізки

прямих ліній  $OM_1$  і  $OM_2$ , відношення довжин яких дорівнює знаменнику прогресії  $q$ :

$$\frac{OM_2}{OM_1} = q. \quad (1)$$

Проведемо коло з центром в точці  $M_1$  і радіусом, рівним довжині відрізка  $OM_1$ . Відновимо в точці  $M_2$  перпендикуляр і відзначимо точку  $A_1$  його перетину з колом. З'єднаємо точки  $M_1$  і  $A_1$  відрізком прямої лінії  $M_1A_1$ . Проведемо коло з центром у точці  $M_2$  і радіусом, рівним довжині відрізка  $OM_2$ . Проведемо через точку  $M_2$  пряму лінію, паралельну відрізку  $M_1A_1$ , і виділимо точку  $A_2$  її перетину з другим колом. Опустимо з точки  $A_2$  перпендикуляр на пряму лінію, що є продовженням відрізка  $OM_2$ , і відзначимо на ній точку  $M_3$ . Покажемо на рис. 2 початкові кроки побудови відрізків, довжини яких складають геометричну прогресію.

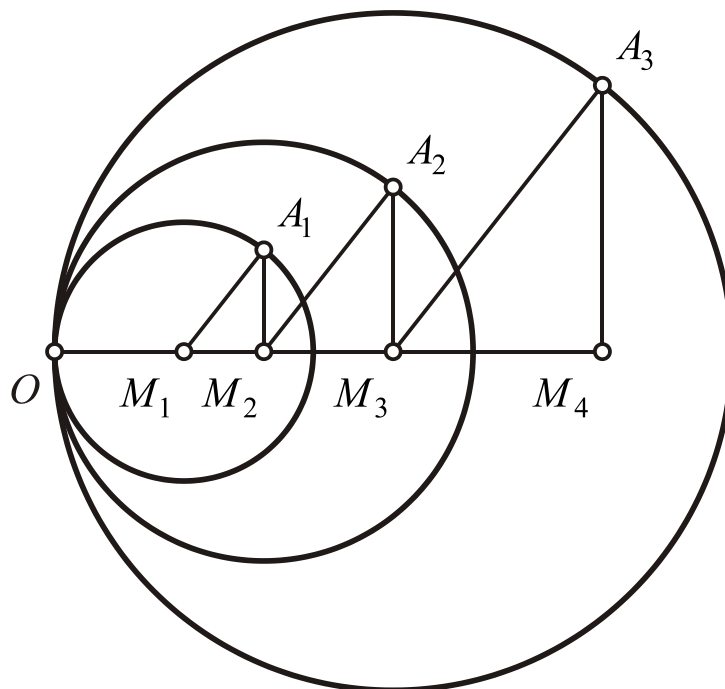


Рис. 2. Побудова точок, відстані яких до полюсу складають геометричну прогресію

Доведемо, що довжина відрізка  $OM_3$  відноситься до довжини відрізка  $OM_2$  так само, як довжина відрізка  $OM_2$  – до довжини відрізка  $OM_1$ , тобто відношення відповідних відрізків дорівнює знаменнику прогресії  $q$ :

$$\frac{OM_3}{OM_2} = \frac{OM_2}{OM_1} = q.$$

Почнемо доведення з того, що встановимо рівність відрізка  $M_1A_1$  відрізка  $OM_1$ , а відрізка  $M_2A_2$  – відрізка  $OM_2$ :

$$M_1A_1 = OM_1; M_2A_2 = OM_2.$$

Ця рівність випливає з того, що відрізки  $M_1A_1$  і  $OM_1$  є радіусами першого кола, а відрізки  $M_2A_2$  і  $OM_2$  – радіусами другого кола.

Розглянемо прямокутні трикутники  $\Delta M_1M_2A_1$  і  $\Delta M_2M_3A_2$ . Оскільки їх гіпотенузи паралельні, кути при вершинах  $M_1$  і  $M_2$  рівні. Звідси випливає, що трикутники  $\Delta M_1M_2A_1$  і  $\Delta M_2M_3A_2$  подібні:

$$\Delta M_1M_2A_1 \sim \Delta M_2M_3A_2.$$

Складемо відношення сторін двох подібних трикутників:

$$\frac{M_2M_3}{M_1M_2} = \frac{M_2A_2}{M_1A_1} = q.$$

Отже, між відрізками  $M_1M_2$  і  $M_2M_3$  існує рівність

$$M_2M_3 = qM_1M_2. \quad (2)$$

Обчислимо відношення між відрізками  $OM_2$  і  $OM_3$  з врахуванням рівностей (1) і (2):

$$\frac{OM_3}{OM_2} = \frac{OM_2 + M_2M_3}{OM_2} = \frac{qOM_1 + qM_1M_2}{OM_2} =$$

$$= \frac{q(OM_1 + M_1M_2)}{OM_2} = q.$$

Таким чином, ми довели теорему про те, що якщо у двох і більш колах провести паралельні радіуси і з їх кінців опустити перпендикуляри на паралельні діаметри, то основа перпендикуляра і центр першого кола поділять її діаметр на відрізки, відношення яких дорівнюватиме відношенню відповідних відрізків другого і подальшого кіл.

Застосуємо розв'язання задачі про побудову точок, відстані яких до полюса складають геометричну прогресію, до побудови логарифмічної спіралі. Продовжимо побудову, початкові кроки яких показані на рис. 2, до тих пір, поки не будуть знайдені всі точки, відповідні 16 членам геометричної прогресії. Проведемо 8 променів, що випливають з одного полюса, і 16 кіл, радіуси яких дорівнюють довжинам відрізків, що складають геометричну прогресію. Виділимо з урахуванням того, що промінь здійснює два повні оберти, точки перетину променів з відповідними колами і отримаємо логарифмічну спіраль. Покажемо на рис. 3 логарифмічну спіраль, точки якої відстоять від полюса на відстані, числові значення яких складають геометричну прогресію із знаменником  $q = 1,1548$ .

Розглянемо «золоту» логарифмічну спіраль. Називатимемо «золотою» логарифмічну спіраль, точки якої відстоять від полюсу на відстані, числові значення яких складають геометричну прогресію із знаменником  $q = 1,618$ , рівним пропорції, що отримується у результаті «золотого перерізу». Нагадаємо, що «золотим перерізом» називається ділення відрізка на дві частини, при якому відношення відрізка до його більшої частини дорівнює відношенню більшої частини до його меншої

частини. Покажемо на рис. 4 побудову «золотої» логарифмічної спіралі, відповідної одному повороту променя довкола полюсу.

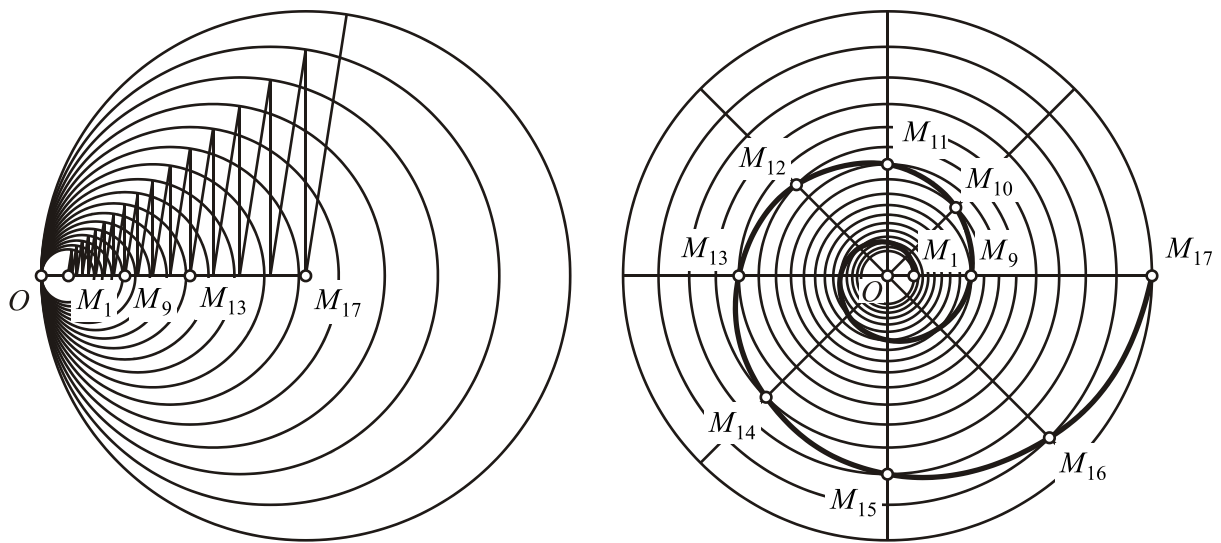


Рис. 3. Логарифмічна спіраль, точки якої відстоять від полюсу на відстані, числові значення яких складають геометричну прогресію із знаменником  $q = 1,1548$

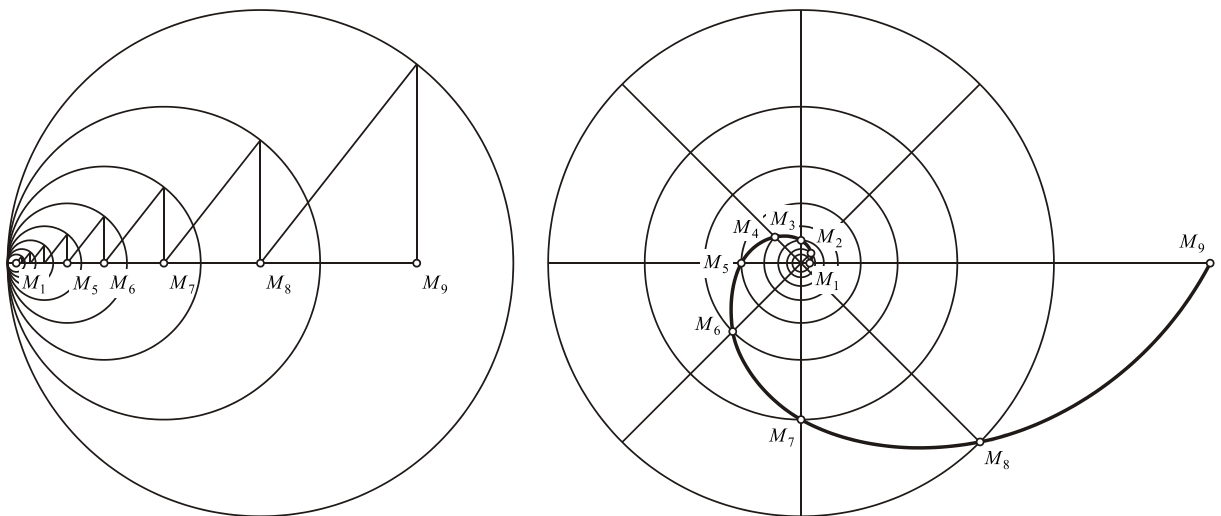


Рис. 4. «Золота» логарифмічна спіраль

Виділимо серед багатьох властивостей логарифмічної спіралі одне найбільш чудове: логарифмічна спіраль перетинає будь-який промінь, що виходить з полюсу, під одним і тим же кутом. При цьому під кутом між променем і кривою лінією розумітимемо кут між променем і дотичною до кривої лінії, проведеної в точці перетину.

## Контрольні запитання

1. Як називається крива, яка утворюється рівномірним обертанням променя довкола полюса і рівномірним поступальним рухом точки уздовж проміння за умови, що початкове положення точки збігається з полюсом?

2. Як називається крива, що утворюється рухом точки по променю, що обертається довкола полюса, за умови, що кут повороту і відстань точки до полюса збільшуються в арифметичних прогресіях?

3. Як називається крива, яка утворюється рівномірним обертанням променя довкола полюса і поступальним рухом точки уздовж проміння з швидкістю, пропорційною відстані точки до полюса?

4. Як називається крива, яка утворюється рухом точки по променю, що обертається довкола полюса, за умови, що кут повороту збільшується в арифметичній прогресії, а відстань точки до полюса – в геометричній прогресії?

5. Яку властивість має кут, під яким промінь, що виходить з полюса, перетинає логарифмічну спіраль?

6. Яку властивість має довжина дуги логарифмічної спіралі?

7. Яку властивість має кут повороту променя, що сполучає полюс з точкою логарифмічної спіралі?

## РОЗДІЛ 5

### Евольвента колу і її еволюта

Називатимемо евольвентою кола плоску криву, яка утворюється рухом точки  $A$ , заданої на прямій лінії  $l$ , що котиться по колу без ковзання. Якщо за початкове положення точки  $A$  прийняти точку дотику прямою  $l$  кола, то відстань від точки  $A$  до поточної точки дотику дорівнюватиме довжині дуги кола, пройденою точкою дотику.

Побудуємо евольвенту кола. Візьмемо коло радіусу  $r$  і розділимо його на 12 рівних дуг. Нехай пряма лінія, що котиться по колу, здійснює один повний оберт. Виділимо на колі точки  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{12}$ . Проведемо через виділені точки дотичні до кола за напрямом, протилежним обертанню прямої лінії. Нехай початкова точка  $A_0$  евольвенти збігається з точкою  $B_0$  кола. Відкладемо на дотичній, проведеній через точку  $B_{12}$  кола, відрізок прямої лінії, довжина якого дорівнює довжині кола  $2\pi r$ , і знайдемо кінцеву точку  $A_{12}$  евольвенти. Розділимо отриманий відрізок прямої лінії на 12 рівних частин. Відкладемо на дотичних до кола, проведених в точках  $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ , стільки частин довжини кола, скільки дуг кола полягає між початковою точкою  $B_0$  і однієї з поточних точок  $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ , і отримаємо подальші точки евольвенти  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ . Покажемо на рис. 1 побудову евольвенти кола.

Відновимо в одній з точок евольвенти, наприклад в точці  $A_{10}$ , перпендикуляр до дотичної, проведеної до кола в точці  $B_{10}$ . Покажемо на рис. 1 перпендикуляр  $t$  до дотичної до кола і побачимо, що у малому околі точки  $A_{10}$  вся дуга евольвенти лежить по один бік перпендикуляра,

побудованого в даній точці. Це означає, що перпендикуляр  $t$  є дотичним до евольвенти, а точка  $A_{10}$  – точкою дотику. Звідси випливає, що евольвента перетинає під прямим кутом дотичну до кола, проведену в будь-якій її точці. Причому все подальші витки евольвенти також перетинають дану дотичну до кола під прямим кутом.

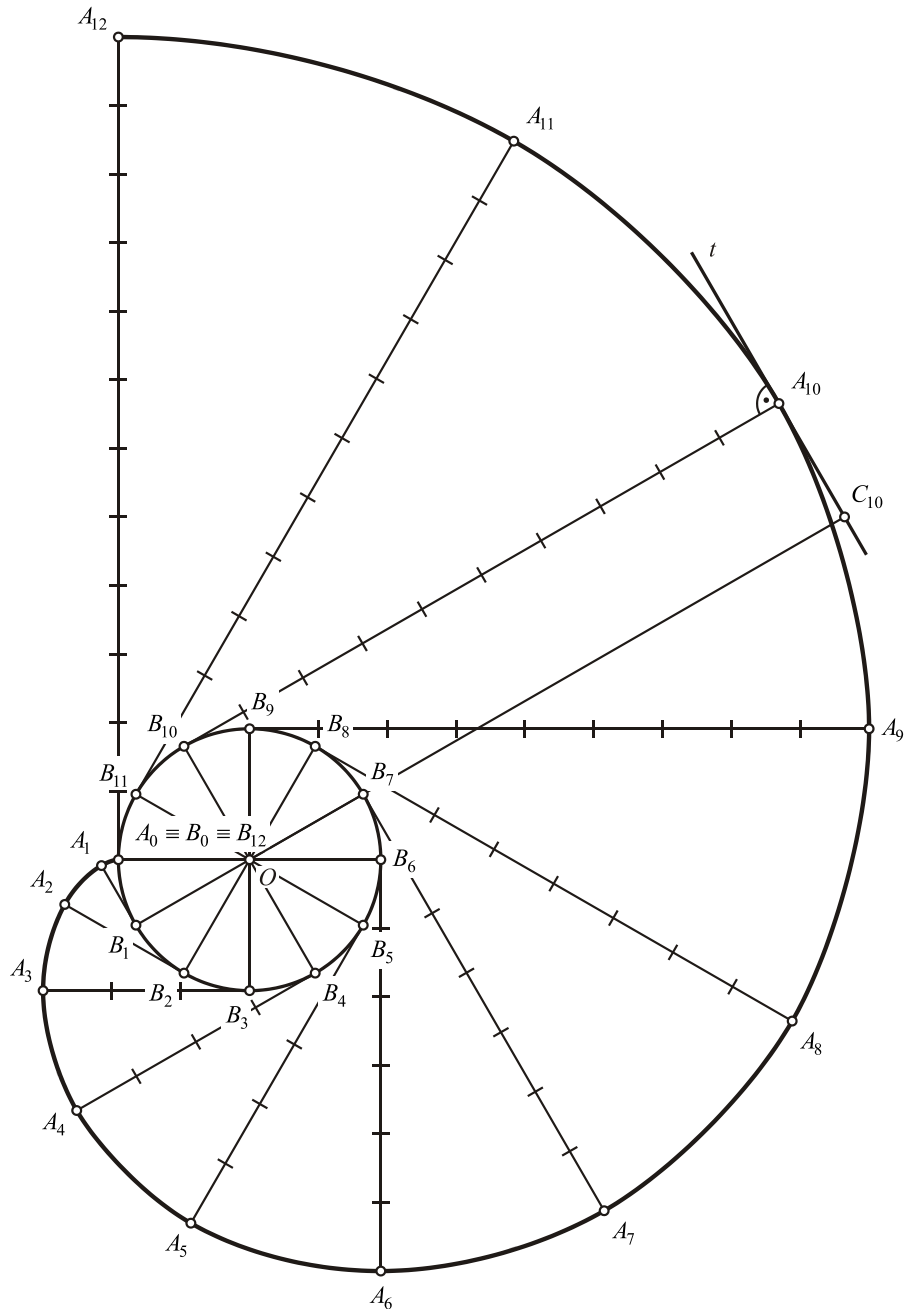


Рис. 1. Побудова евольвенти кола

Ми знаємо з елементарної геометрії, що дотична до кола перпендикулярна до його радіусу, проведеного в точку дотику. Отже, якщо з точки  $B_{10}$  як з центра провести коло, що дотикається перпендикуляра  $t$ , то отримаємо коло, що дотикається евольвенти у точці  $A_{10}$ . Навпаки, якщо через точку  $A_{10}$  евольвенти провести коло, що дотикається її, то центр кола належатиме точці  $B_{10}$  дотичної до кола, по якому котиться пряма лінія, що утворює евольвенту. Коло, яке дотикається кривої у деякій точці, в диференціальній геометрії називають колом кривини, а його центр – центром кривини. Отже, якщо в точках евольвенти побудувати множину кіл кривини, то центри кривин належатимуть колу, по якому котиться пряма лінія, що утворює евольвенту. Називатимемо множину центрів кривини кривої її еволютою. Отже, якщо евольвентою кола є траєкторія, яку описує точка прямої лінії, що котиться по колу, то еволютою евольвенти кола є коло, по якому котиться пряма лінія. Тому евольвенті можна дати таке визначення: евольвента деякої кривої  $m$  є крива  $n$ , для якої крива  $m$  є еволютою.

Крім того, оскільки коло можна розглядати як криву, що огинає сім'ї дотичних до неї, еволюті можна дати таке визначення: еволюта деякої кривої  $n$  є крива  $m$ , що огинає її нормалі або перпендикуляри до її дотичних.

Напрочуд, що коло може мати нескінченне число евольвент, тому що будь-яка точка кола може бути вибрана як початкова точка при побудові її евольвенти. При цьому всі евольвенти можуть бути отримані з однієї евольвенти за допомогою її обертання довкола центра кола. Оскільки всі евольвенти перетинають всі дотичні до кола під прямим кутом, можемо стверджувати, що отримана сім'я евольвент утворює із сім'єю дотичних до кола ортогональну сітку. Отже, сім'ї евольвент і дотичних до кола подають

ще один приклад сітки взаємно ортогональних кривих. Покажемо на рис. 2 сім'ї взаємно ортогональних евольвент і дотичних до кола.

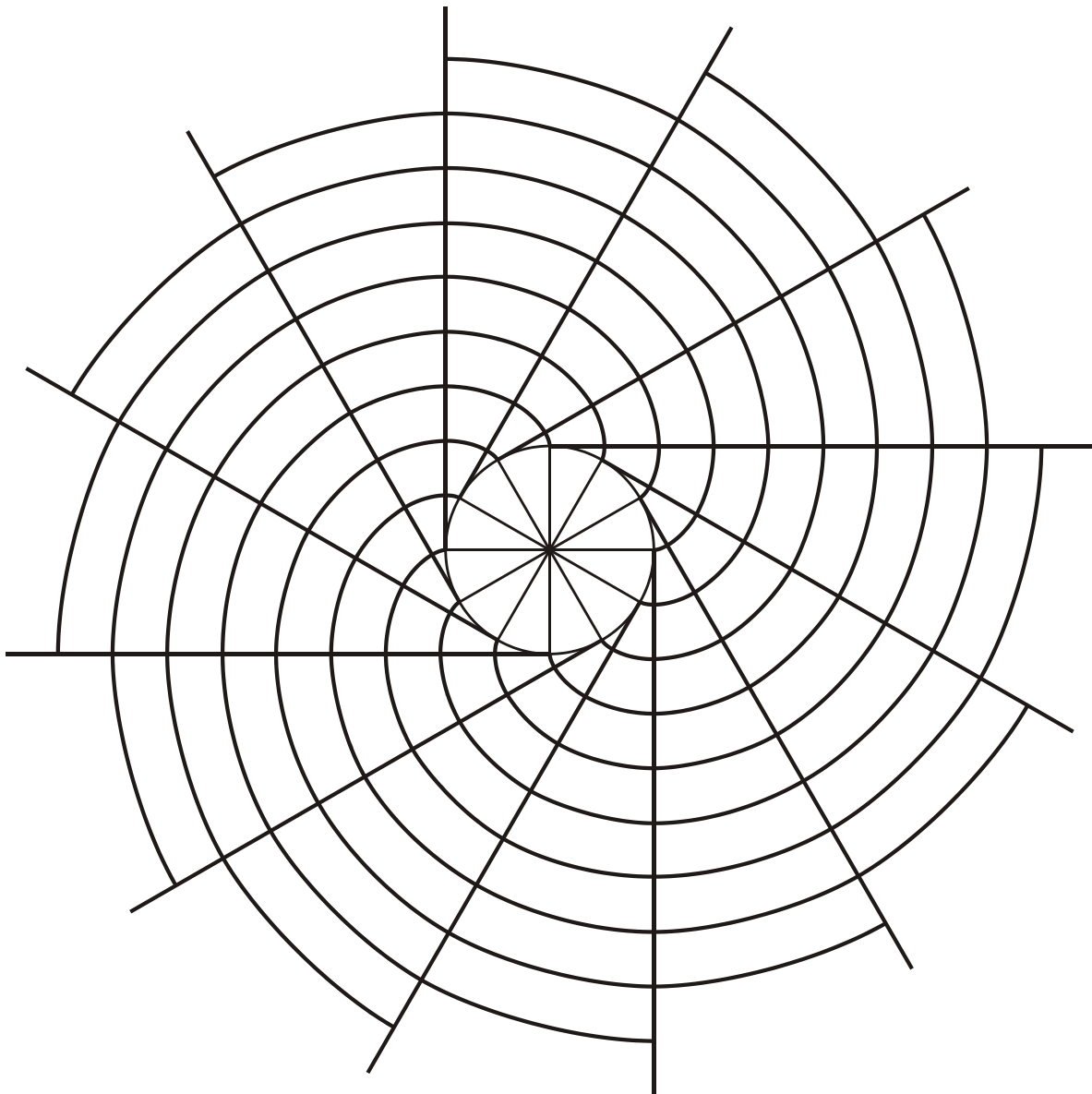


Рис. 2. Ортогональна сітка із сімей евольвент і дотичних до кола

Таким чином, евольвента кола має такі чудові властивості:

еволютою евольвенти кола є коло;

евольвента перетинає всі дотичні до її еволюти під прямим кутом.

Наприклад, на рис. 1 евольвента кола складає в початковій точці  $A_0$

прямий кут з дотичною  $B_0A_{12}$  до даного кола;

нормаль евольвенти або перпендикуляр, відновлений в точці евольвенти, є дотичною до її еволюти;

різниця радіусів кривизни у двох точках евольвенти, наприклад радіусів  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$  в точках  $B_1$  і  $B_2$ , дорівнює довжині дуги  $B_1B_2$  її еволюти;

сім'ї евольвент і дотичних до їх загальної еволюти утворюють сітку взаємно ортогональних кривих.

Розглянемо чудовий зв'язок евольвенти кола із спіраллю Архімеда. Виділимо на рис. 1 будь-яку точку евольвенти, наприклад точку  $A_{10}$ , і проведемо через неї пряму лінію, що дотикається кола в точці  $B_{10}$ . Відновимо в центрі  $O$  кола перпендикуляр до її радіусу  $OB_{10}$  і відзначимо точку  $C_{10}$  його перетину з дотичною до евольвенти в точці  $A_{10}$ . Оскільки відрізки прямої лінії  $B_{10}A_{10}$  і  $OC_{10}$  є сторонами прямокутника, їх довжини рівні. З іншого боку, згідно з визначенням евольвенти кола радіус кривизни евольвенти збільшується прямо пропорціональне збільшенню кута повороту дотичної до кола. Тому якщо з центра  $O$  колу провести множину перпендикулярів до дотичних евольвенти, то множина основ перпендикулярів утворює спіраль Архімеда. Називатимемо множину основ перпендикулярів, опущених з точки  $M$  на дотичні до кривої  $l$  подерою кривої  $l$  відносно точки  $M$ .

Виконаємо побудову подери евольвенти кола. Виділимо на евольвенті ряд довільних точок, проведемо через них дотичні до неї і опустимо з точки  $O$  перпендикуляри на дотичні. Проведемо через основи перпендикулярів криву і побачимо, що подерою евольвенти кола є спіраль Архімеда. Звернемо увагу, що із збільшенням кута повороту променя, по якому рухається точка спіралі Архімеда, її графік необмежено

наближається до евольвенти. Покажемо на рис. 3 побудову спіралі Архімеда як подери евольвенти кола відносно центра  $O$  даному колу.

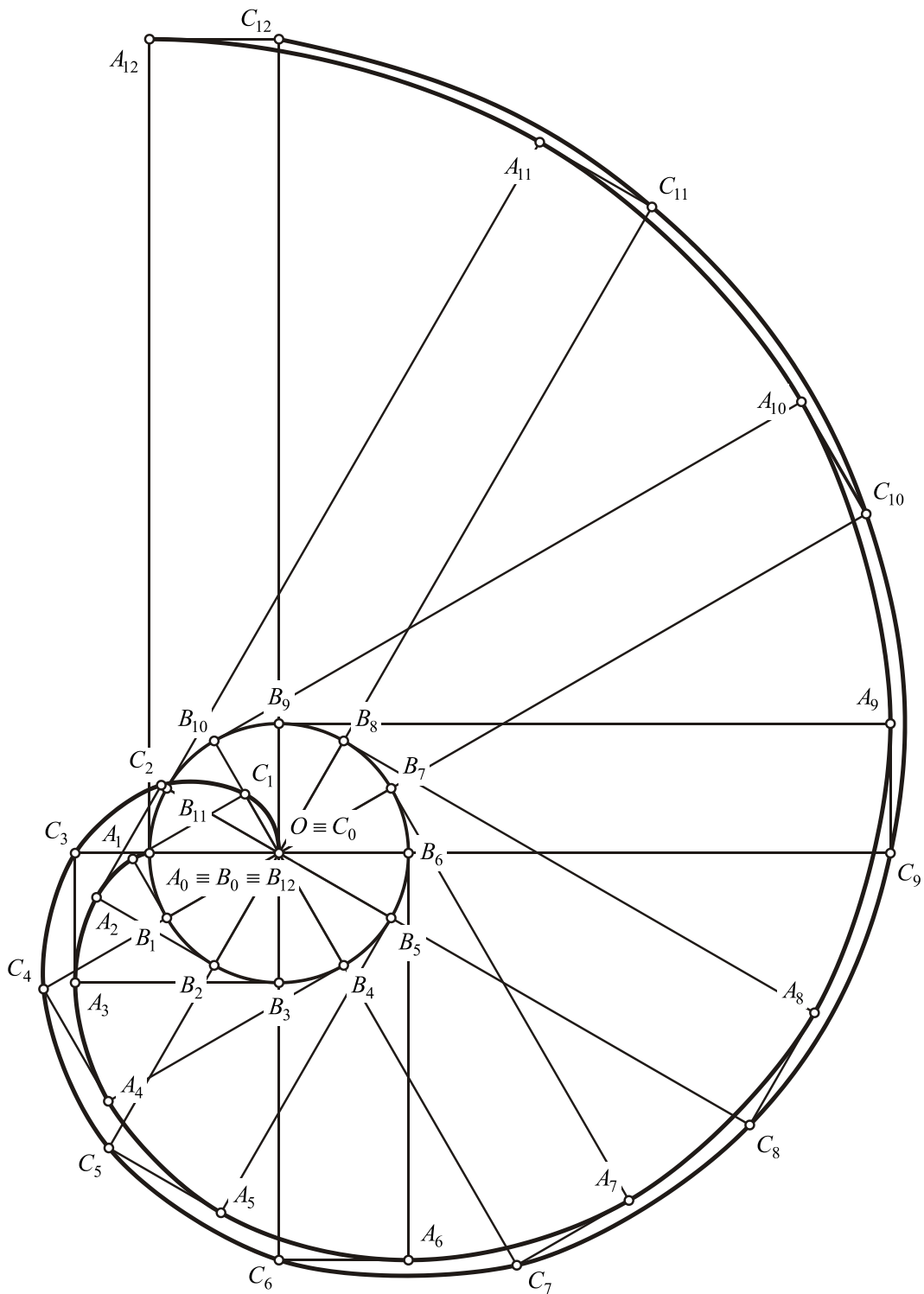


Рис. 3. Побудова спіралі Архімеда як подери евольвенти кола відносно центра даного кола

Таким чином, в евольвенти кола є ще одна чудова властивість, яка полягає в тому, що подерою евольвенти кола відносно центра  $O$  даному колу є спіраль Архімеда.

Розглянемо тепер кінематичну властивість евольвенти кола. Візьмемо коло з центром в точці  $O_1$  і коло з центром в точці  $O_2$  і побудуємо їх евольвенти. Виберемо нормаль до першої евольвенти і знайдемо в другій евольвенти нормаль, паралельну першій нормалі. Розташуємо конструкцію з першого кола і її евольвенти і конструкцію з другого кола і її евольвенти так, щоб нормаль до першої евольвенти була продовженням нормалі до другої евольвенти, а точки евольвент, через які проходять їх нормалі, збіглися з точкою  $K_1$ . Проведемо через точку  $K_1$  пряму лінію  $t$ , загальну для обох нормалей. Оскільки нормаль евольвенти є дотичною до її кола, пряма лінія  $t$  є загальною дотичною до обох даних кіл. Покажемо на рис. 4 евольвенту кола з центром в точці  $O_1$  і евольвенту кола з центром в точці  $O_2$ , які стосуються один одного в точці  $K_1$ .

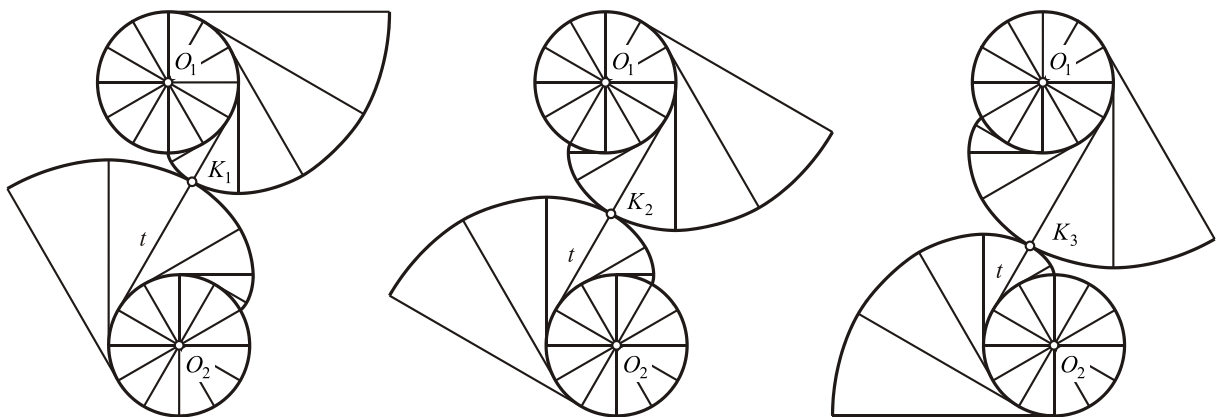


Рис. 4. Передача руху від одного кола і її евольвенти до іншого кола і її евольвенти

Обернемо конструкцію, що складається з першого кола і її евольвенти, довкола точки  $O_1$  на кут  $\varphi_1$ . Тоді конструкція, що складається з другого кола і її евольвенти, обернеться довкола точки  $O_2$  на кут

$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{r_1}{r_2}$ , де  $r_1$  і  $r_2$  – радіуси першого і другого кіл. Точка дотику  $K_1$

переміститься в точку  $K_2$  по прямій лінії  $t$ , що є загальною дотичною до обох кіл. Ми знаємо з елементарної геометрії, що при заданій відстані між центрами  $O_1$  і  $O_2$  до кіл із заданими радіусами  $r_1$  і  $r_2$  можна провести чотири загальних дотичних. Тому при русі кіл з центрами  $O_1$  і  $O_2$  положення прямої лінії  $t$  як їх загальною дотичною не міняється. Покажемо на рис. 4 переміщення точок дотику  $K_1, K_2, K_3$  по нерухомій прямій лінії  $t$  при передачі обертання від кола з центром  $O_1$  до кола з центром  $O_2$ .

Таким чином, евольвента кола має такі чудові властивості:

при передачі обертання від однієї конструкції, що складається з кола і її евольвенти, до іншої конструкції точки дотику  $K_1, K_2, K_3, \dots$  евольвент належать прямій лінії  $t$ , загальній дотичній, що є, до обох кіл;

Попри те, що перша і друга евольвенти здійснюють обертальні рухи, положення прямої лінії  $t$ , що є множиною точок дотику евольвент, не міняється;

кут її нахилу до прямої лінії, що сполучає центри  $O_1$  і  $O_2$  кіл, залишається постійним і залежить лише від відстані між центрами  $O_1$  і  $O_2$  кіл.

Звідси випливає, що якщо передача обертання від кола з центром  $O_1$  до кола з центром  $O_2$  здійснюється за допомогою їх евольвент, то відношення кутових швидкостей кіл залишається постійним при їх русі. Крім того, при передачі обертання за допомогою евольвент кіл зміна відстані між їх центрами  $O_1$  і  $O_2$  не впливає на відношення їх кутових

швидкостей. При цьому із зміною даної відстані змінюється лише кут нахилу між загальною дотичною  $t$  до обох кіл і прямою лінією, що сполучає їх центри  $O_1$  і  $O_2$ . Це пояснює, чому передача обертання від одного кола до іншої за допомогою їх евольвент є найбільш поширеним видом зубчастого зачеплення.

### Контрольні запитання

1. Як називається крива, що утворюється рухом точки, заданої на прямій лінії, що котиться по колу без ковзання?
2. Яку властивість має кут, під яким евольвента перетинає дотичну до даного кола, проведену в будь-якій її точці?
3. Яка крива є еволютою евольвенти кола?
4. Скільки евольвент може мати коло?
5. Яку властивість має сітка кривих, утворена сім'ями евольвент і дотичних до їх загальної еволюти?
6. Яка крива є подорою евольвенти кола?
7. Яку властивість мають точки дотику евольвент при передачі обертання від однієї конструкції, що складається з кола і її евольвенти, до іншої конструкції з кола і її евольвенти?
8. Які властивості має кут нахилу прямої лінії, яка є множиною точок дотику евольвент, що обертаються довкола центрів даних кіл, до прямої лінії, що сполучає їх центри?

## РОЗДІЛ 6

### Кардіоїда і її зв'язки з епіциклоїдою і равликом Паскаля

Окрім еліпса, параболи і гіперболи є ще одна чудова крива. Ця крива називається кардіоїдою і чудова тим, що її можна виявити в багатьох природних явищах, а також тим, що її можна побудувати декількома способами, між якими існує глибокий зв'язок.

Розглянемо, перш за все, кардіоїду як окремий вид кривої, званої равликом Паскаля. Ця крива була відкрита Етьєном Паскалем (1588–1651), батьком знаменитого французького математика і філософа Блеза Паскаля (1623–1662), і була названа на його честь.

Побудуємо равлика Паскаля. Візьмемо коло діаметру  $d$ , і виберемо на ній довільну точку  $P$ . Назвемо коло основним, а точку  $P$  – полюсом. Проведемо через полюс  $P$  довільну пряму лінію, що перетинає коло. Відкладемо від точки перетину в обидва боки від неї по прямій лінії відрізки, довжина яких рівна  $l$ . Множина точок, що належать кінцям відрізків, і утворюють равлика Паскаля. Зокрема, коли довжина відрізків, що відкладаються від точки перетину променя з колом, дорівнює її діаметру  $l = d$ , отримуємо криву, звану кардіоїдою. Покажемо на рис. 1 побудову кардіоїди як окремого виду равлика Паскаля.

Звернемо увагу, що на рис. 1 відстань кінцевої точки кардіоїди до найближчої до неї точки основного кола, дорівнює її діаметру  $d$ . Впишемо в кардіоїду коло діаметру  $d$ , що дотикається кардіоїди в точці  $A_6$  і основному колу в точці  $B_6$ . Крім того, побудуємо ще одне коло діаметру  $d$ , що дотикається основного кола в точці  $B_0$ , діаметрально протилежній точці дотику  $B_6$ . Подамо отримані кола як початкове і кінцеве положення

кола, що котиться по основному колу, а точки  $A_0$  і  $A_6$  кардіоїди – як початкову і кінцеву точки кривої, званою епіциклоїдою.

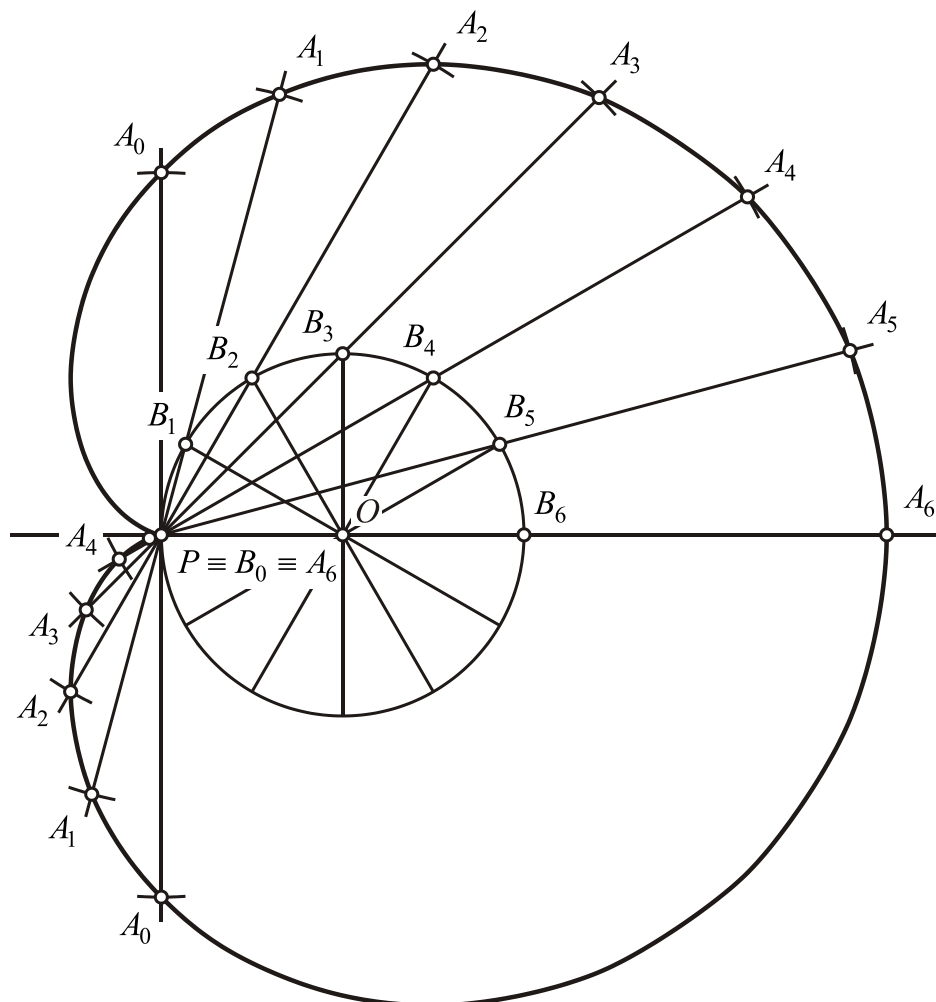


Рис. 1. Побудова кардіоїди як окремого виду равлика Паскаля

Таким чином, кардіоїді можна дати таке визначення. Називатимемо кардіоїдою криву, яку описує будь-яка точка кола діаметру  $d$ , що котиться без ковзання по нерухомому колу того ж діаметру з її зовнішнього боку. Звідси випливає, що кардіоїда – це окремий вид епіциклоїди.

Побудуємо епіциклоїду, в якій діаметр рухливого кола дорівнює діаметру нерухомого кола. Назвемо рухливе коло твірним, а нерухоме коло – напрямним. Оскільки кола котяться одна по іншій без ковзання, довжина дуги, яку в одиницю часу описує точка дотику, узята на колі, що

проводить, дорівнює довжині дуги, що описується в ту ж одиницю часу точкою дотику, належного напрямного кола. Крім того, оскільки діаметри твірного і напрямного кола рівні, кут повороту точки дотику в одиницю часу довкола центра твірного кола дорівнює куту повороту точки дотику в ту ж одиницю часу довкола центра напрямного кола. Тому розділимо твірне коло на 12 рівних частин і на таке ж число рівних частин розділимо напрямне коло. При цьому початкову точку  $O$  епіциклоїд розташуємо на напрямному колі. Проведемо через центр  $O_0$  твірного кола сім'ю концентричних дуг, а через точки ділення напрямного кола – радіуси і відзначимо точки  $0,1,2,\dots,12$  їх перетину з концентричною дугою. Крім того, проведемо через точки ділення  $0,1,2,\dots,12$  твірного кола сім'ю концентричних дуг. Опишемо з центрів  $O_1, O_2, \dots, O_{12}$  кола, що є послідовними положеннями твірного кола, і відзначимо точки їх перетину з концентричними дугами, що проходять через точки ділення  $0,1,2,\dots,12$  твірного кола. Наприклад, точка  $A_1$  є точкою перетину концентричної дуги, що проходить через точку 1, з колом, описаним з центра  $O_1$ , точка  $A_2$  є точкою перетину концентричної дуги, що проходить через точку 2, з колом, описаним з центра  $O_2$  і так далі. Проведемо через точки  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$  криву і побачимо, що крива є не що інше, як кардіоїда. Покажемо на рис. 2 побудову кардіоїди як епіциклоїди, у якої діаметри твірного і напрямного кіл рівні.

Звернемо увагу, що на рис. 2 кривою, що огинає сім'ю послідовних положень твірного кола, є коло, діаметр якого у півтора рази більше діаметру напрямного кола. Ми знаємо з елементарної геометрії, що нормаль, проведена через будь-яку точку епіциклоїди, наприклад  $A_1$ , проходить через відповідну точку дотику твірного кола з центром  $O_1$  з

напрямним колом. Дотична до епіциклоїди проходить через точку твірного кола, діаметрально протилежну точці її дотику з напрямним колом, або точку перетину  $B_1$  кривої, що огинає, з продовженням відповідного радіусу напрямного кола. Звідси випливає, що радіус напрямного кола можна розглядати як нормаль, проведену до кола, що огинає, в точці  $B_1$ , а дотичну до епіциклоїди, проведену в точці  $A_1$ , – як промінь світла, відбитий від кола, що огинає, в точці  $B_1$ . Покажемо на рис. 3 побудову дотичних до кардіоїди або епіциклоїди, у якої діаметри твірного і напрямного кола рівні.

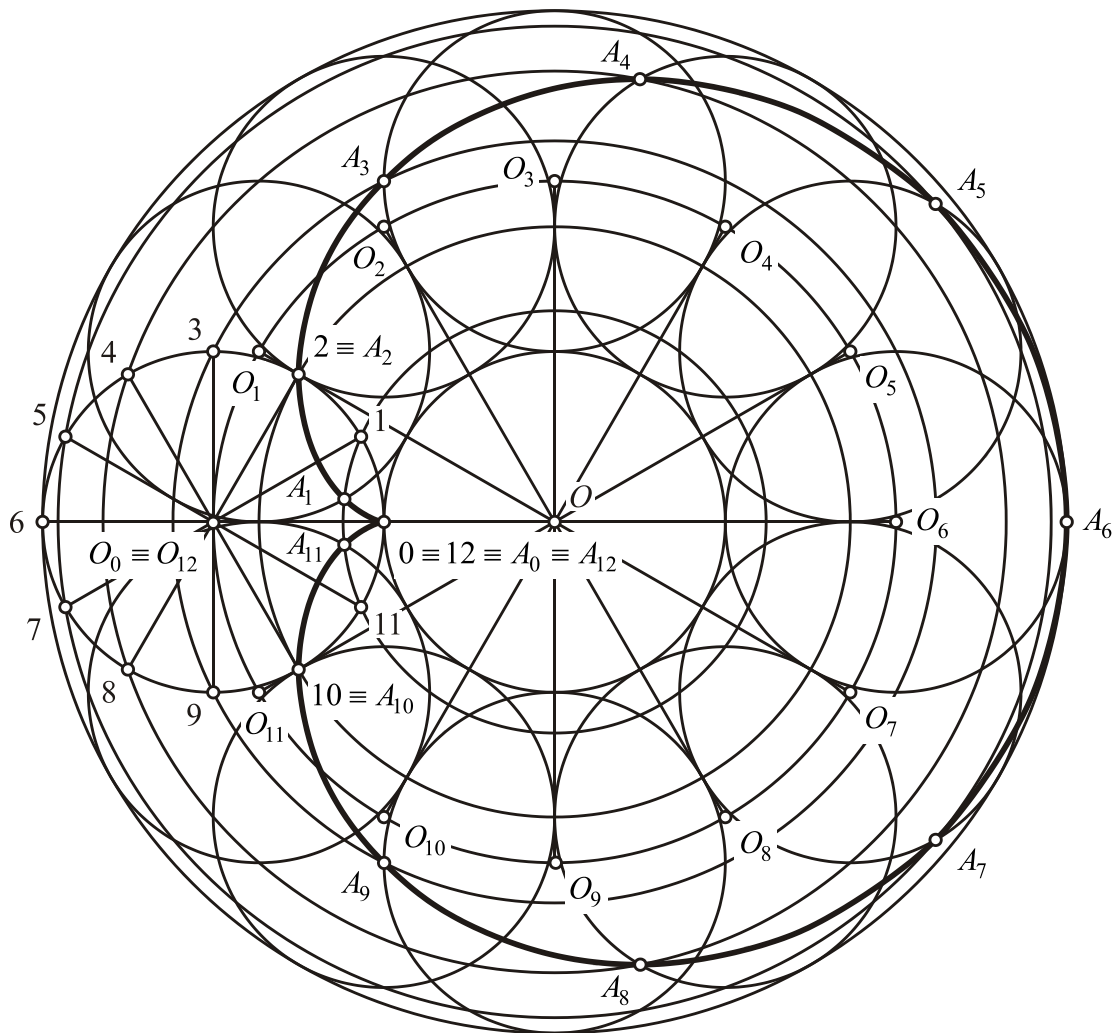


Рис. 2. Побудова кардіоїди як епіциклоїди, у якої діаметри твірного і напрямного кіл рівні

Побудуємо падаючі промені світла, для яких відбитими променями від кола, що огинає, в точках  $B_1, B_2, \dots, B_{12}$  є дотичні до епіциклоїди, проведені в точках  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ . Наприклад, проведемо коло з центром  $O_1$ , що проходить через точку  $A_1$  епіциклоїди. Опустимо з точки  $A_1$  перпендикуляр на нормаль  $OB_1$  кола, що огинає, на продовженні перпендикуляра від його основи відкладемо відрізок прямої лінії, довжина якого дорівнює довжині перпендикуляра, і отримаємо точку, що належить падаючому променю. Проведемо через отриману точку і точку  $B_1$  кола, що огинає, пряму лінію і виявимо, що падаючий промінь світла проходить через точку  $A_6$  епіциклоїди. Побудуємо падаючі промені світла, відбиті колом, що огинає, в точках  $B_2, B_3, \dots, B_{12}$ , і виявимо, що падаючі промені світла збираються в пучок прямих ліній, що проходять через точку  $A_6$  епіциклоїди.

Подамо кардіоїду або епіциклоїду, у якої діаметри твірного і напрямного кола рівні, як криву, що огинає світлові промені, відбиті від деякого кола, за умови, що джерело світла поміщається в точці, належної даному колу. Називатимемо катакаустикою криву, що огинає промені, відбиті даною лінією. Таким чином, кардіоїда є катакаустикою пучка світлових променів, відбитих від кола, за умови, що джерело світла поміщається в точці, належної даному колу. Покажемо на рис. 3 побудову кардіоїди як катакаустики світлових променів, відбитих від кола, за умови, що одна з її точок є джерелом світла.

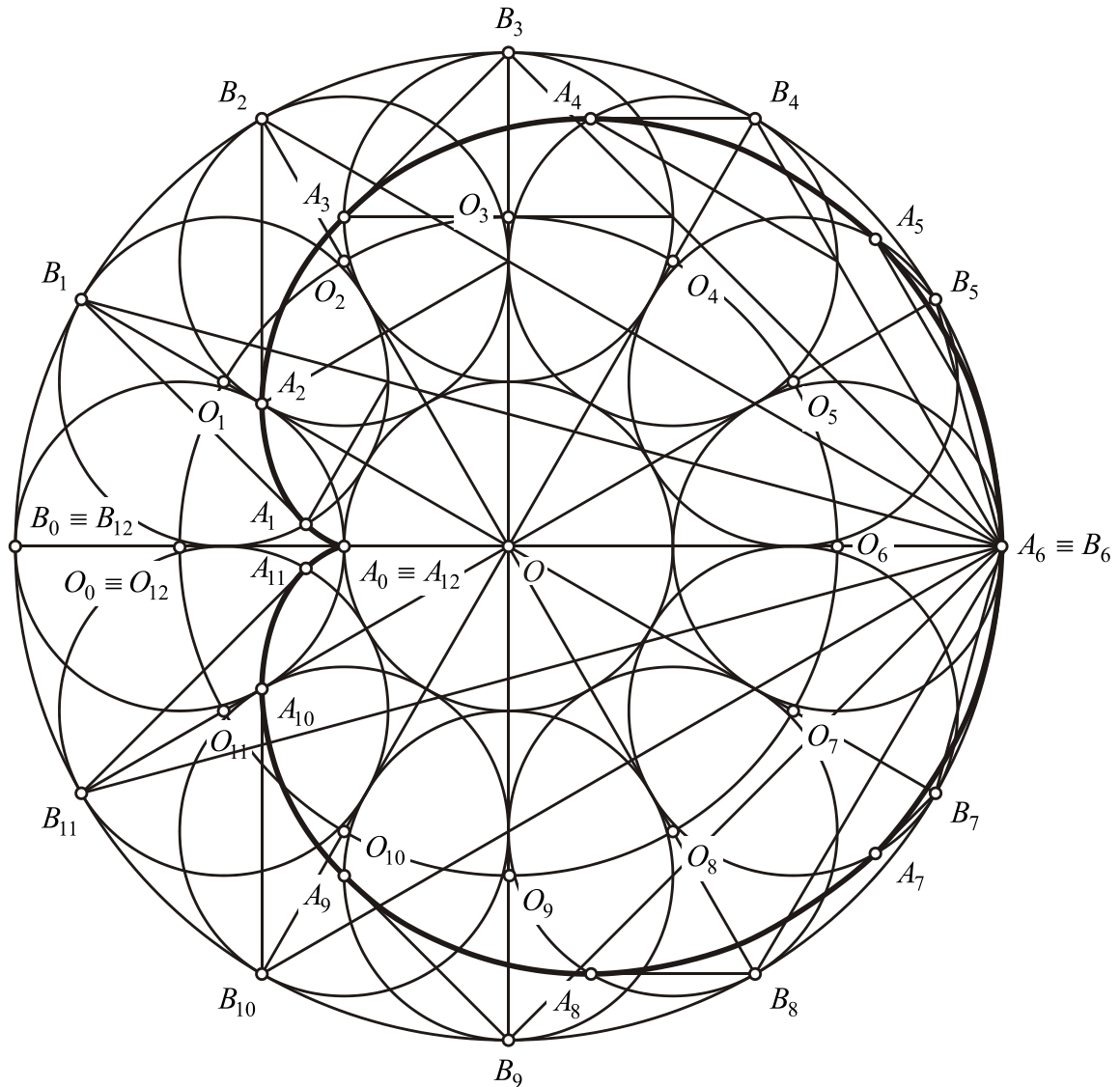


Рис. 3. Побудова кардіоїди як катакаустики променів, відбитих від кола, за умови, що одна з її точок є джерелом світла

Розглянемо метаморфозу, яка станеться з катакаустикою, якщо джерело світла віддалити у нескінченність, а падаючі промені перетворити на пучок паралельних прямих ліній. Візьмемо коло, що віддзеркалює, з центром  $O$ , розділимо його на 24 рівних частин і з'єднаємо відрізками прямих ліній точки ділення  $B_0, B_1, \dots, B_{12}$  з точкою  $O$ . Проведемо через точки  $B_0, B_1, \dots, B_{12}$  пучок світлових променів, паралельних діаметру кола, що проходить через точку  $B_0$ . Побудуємо сім'ю світлових променів,

відбитих від кола в точках  $B_0, B_1, \dots, B_{12}$ . Візьмемо ще одне коло, діаметр якого в 4 рази менше діаметру кола, що віддзеркалює. Нехай допоміжне коло і коло, що віддзеркалює, дотикаються один одного в точці  $B_0$ . Проведемо коло через центр  $O_0$  допоміжного кола і відзначимо точки  $O_1, O_2, \dots, O_{12}$  її перетину з радіусами кола, що віддзеркалює. Опишемо з центрів  $O_1, O_2, \dots, O_{12}$  кола, діаметри яких дорівнюють діаметру допоміжного кола. Покажемо на рис. 4 початкові кроки побудови катакаустики пучка паралельних світлових променів. Звернемо увагу, що на рис. 4 кривою, що огинає сім'ю допоміжних кіл, є коло, діаметр якого в 2 рази більше їх діаметру.

Побудуємо промені, відбиті колом в точках  $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ . Наприклад, візьмемо коло з центром  $O_1$  і відзначимо точку її перетину з променем світла, падаючим в точку  $B_1$  кола, що віддзеркалює. Опустимо з точки перетину перпендикуляр на радіус  $OB_1$  кола, що віддзеркалює. Відкладемо на продовженні перпендикуляра від його основи відрізок прямої лінії, довжина якого дорівнює довжині перпендикуляра, і отримаємо точку  $A_1$ , через яку проходить промінь світла, відбитий від кола в точці  $B_1$ . Побудуємо промені світла, відбиті колом в точках  $B_2, B_3, \dots, B_{12}$ , і виявимо, що їх огинає є крива, що проходить через точки  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ . Це зумовлено тим, що допоміжне коло було вибрано так, щоб її діаметр був в 4 рази менше діаметру кола, що віддзеркалює.

Доведемо, що крива, що проходить через точки  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$  перетину допоміжних кіл з відбитими світловими променями, є епіциклоїдою, у якої діаметр твірного кола менше діаметру напрямного кола в 2 рази. Нехай твірне коло котиться без ковзання по зовнішньому

боку напрямного кола, діаметр якого в 2 рази більше діаметру твірного кола. Оскільки кола котяться одне по іншому без ковзання, довжина дуги, яку в одиницю часу описує точка дотику, узята на твірному колі дорівнює довжині дуги, що описується в ту ж одиницю часу точкою дотику, належній напрямному колу. Крім того, оскільки діаметр твірного кола в 2 рази менше діаметру напрямного кола, кут повороту точки дотику в одиницю часу довкола центра твірного кола в 2 рази більше кута повороту точки дотику в ту ж одиницю часу довкола центра напрямного кола. Тому розділимо твірне коло на 12 рівних частин, а напрямне кола – на 24 рівні частини. Побудуємо епіциклоїду, відповідну половині повного кута точки дотику довкола центра напрямного кола. Проведемо концентричне коло через центр  $O_0$  твірного кола, а через точки ділення напрямного кола – радіуси і відзначимо точки  $O_1, O_2, \dots, O_{12}$  їх перетину з концентричним колом. Крім того, проведемо через точки ділення  $0, 1, 2, \dots, 12$  твірного кола сім'ю концентричних кіл. Опишемо з центрів  $O_1, O_2, \dots, O_{12}$  кола, що є послідовними положеннями твірного кола, і відзначимо точки їх перетину з концентричними колами, що проходять через точки ділення  $0, 1, 2, \dots, 12$  твірного кола. Наприклад, точка  $A_1$  є точкою перетину концентричної дуги, що проходить через точку 1, з колом, описаним з центра  $O_1$ , точка  $A_2$  є точкою перетину концентричної дуги, що проходить через точку 2, з колом, описаним з центра  $O_2$  і так далі. Проведемо через точки  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$  криву і отримаємо половину шуканої епіциклоїди. Оскільки повна дуга твірного кола відповідає половині повної дуги напрямного кола, отримана епіциклоїда симетрична відносно прямої лінії, що проходить через центри початкового і кінцевого положень твірного кола. Тому повну дугу епіциклоїди отримаємо за

допомогою симетрії відносно прямої лінії, що проходить через центри напрямного і початкового положення твірного кола.

Ми знаємо з елементарної геометрії, що нормаль, проведена через будь-яку точку епіциклоїди, наприклад  $A_1$ , проходить через відповідну точку дотику твірного кола з центром  $O_1$  з напрямним колом. Дотична до епіциклоїди проходить через точку твірного кола, діаметрально протилежну точці її дотику з напрямним колом, або точку  $B_1$ , в якій падаючий промінь відбивається від кола. Побудуємо дотичні в точках  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$  епіциклоїди і виявимо, що дотичні до епіциклоїди проходять через точки, в яких пучок паралельних променів відбивається від кола. Отже, епіциклоїда, у якої діаметр твірного кола менше діаметру напрямного кола в 2 рази, є кривою, що огинає сім'ю променів, відбитих від кола.

Покажемо на рис. 4 побудову епіциклоїди як кривої, що огинає сім'ю променів, відбитих від кола, за умови, що падаючими променями є пучок паралельних променів. Звернемо увагу, що епіциклоїда, у якої діаметр твірного кола менше діаметру напрямного кола в 2 рази, має дві початкові точки  $A_0$  і  $A_{12}$ , що є її точками повернення.

Таким чином, катакаустикою пучка паралельних променів, відбитих від кола, є половина епіциклоїди, у якої діаметр твірного кола менше діаметру напрямного кола в 2 рази.

Примітно, що якщо взяти чашку з водою і поставити її так, щоб сонячні промені освітлювали її зверху і збоку, то на поверхні води утворюється фігура, показана на рис. 4. Ця фігура є складеною кривою, що складається з половини епіциклоїди з двома початковими точками і половини кола, яке утворюють стінки чашки.

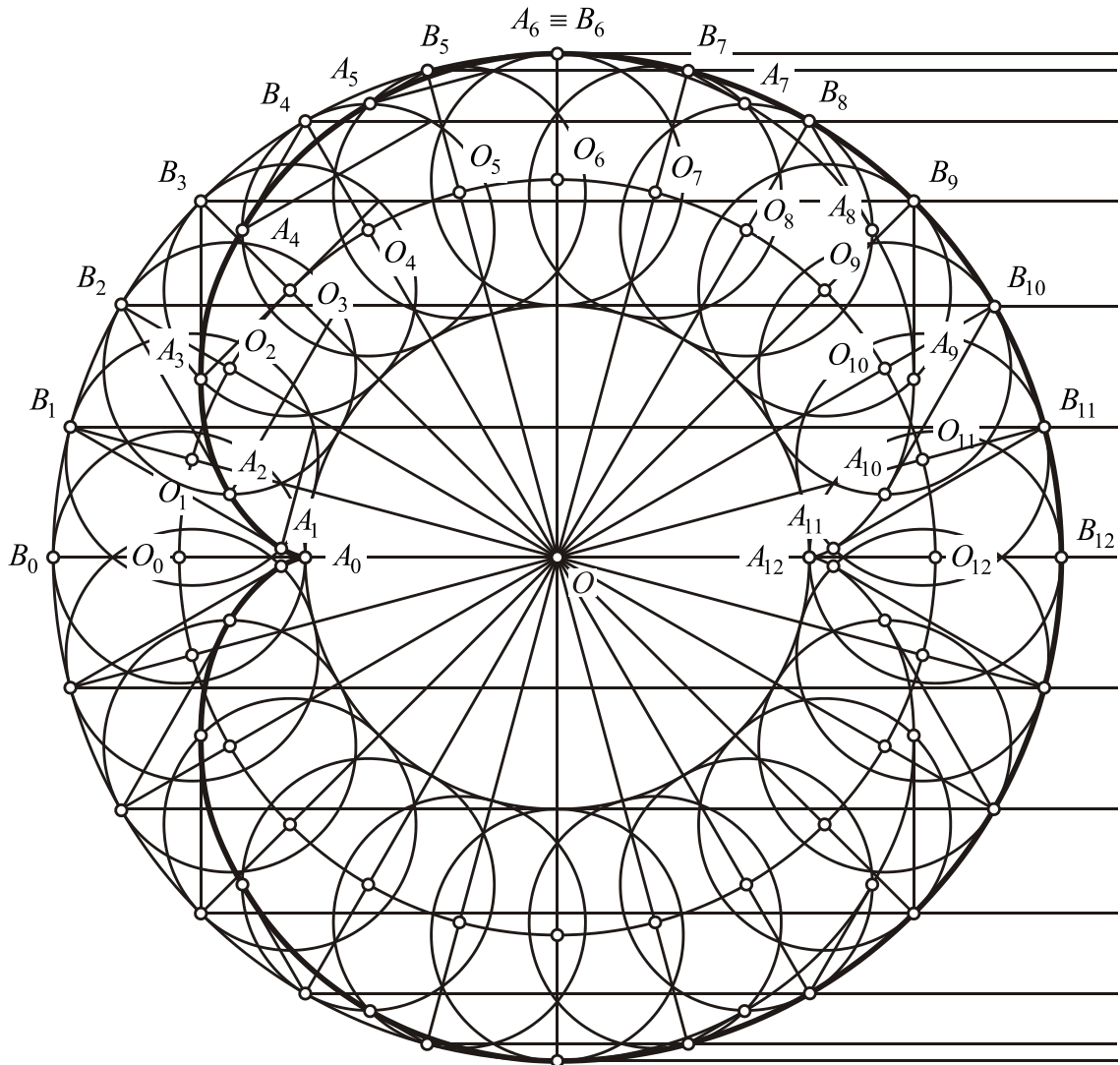


Рис. 4. Побудова епіциклоїди як кривої, що огинає сім'ю променів, відбитих від кола, за умови, що падаючими променями є пучок паралельних променів

Розглянемо ще раз рис. 1. Уявимо, що точка  $B_1$  з'єднана відрізками прямих ліній з точками  $B_0$  і  $B_6$ , що належать діаметру кола, що віддзеркалює. Ми знаємо з елементарної геометрії, що вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий. Тому відрізки  $B_0B_1$  і  $B_1B_6$  перетинаються в точці  $B_1$  під прямим кутом. Відновимо в точках  $B_1$  і  $B_6$  перпендикуляри до відрізка прямої лінії  $B_1B_6$ . Відмітимо, що перпендикуляр, відновлений в точці  $B_1$ , проходить через точку  $A_1$

кардіоїди. Відновимо в точці  $A_1$  перпендикуляр до відрізка прямої лінії  $B_1A_1$  і відсічемо на прямій лінії, що проходить через точку  $B_6$  і перпендикулярній відрізку  $B_1B_6$ , відрізок, паралельний відрізку  $B_1A_1$  і рівний йому за довжиною. Нагадаємо, що згідно з визначенням раулика Паскаля довжини відрізків  $B_1A_1$  і  $B_6A_6$  рівні. Тому можна передбачити, що відрізок, паралельний відрізку  $B_1A_1$  і рівний йому за довжиною, є радіусом кола з центром в точці  $B_6$ , а точка  $A_1$  кардіоїди є основа перпендикуляра, проведеного з точки  $B_0$  на дотичну до уявного кола. Подамо на рис. 5 побудову, що пояснює наші міркування.

Називатимемо подерою кривої  $l$  відносно точки  $M$  множину основ перпендикулярів, проведених з точки  $M$  на дотичні до кривої  $l$ . Таким чином, кардіоїда є подерою кола відносно точки, належної даному колу.

Побудуємо кардіоїду у вигляді подери кола відносно точки, належної колу, яке на рис. 1 має центр в точці  $B_6$  і проходить через точки  $A_0$  і  $A_6$ . Покажемо побудову подери даного кола на рис. 5. Опишемо з центра  $O$  коло, діаметр якого в 2 рази більше діаметру основного кола, показаного на рис. 1. Розділимо коло на 24 рівні частини, проведемо через точки ділення  $B_0, B_1, \dots, B_{12}$  дотичні до неї і опустимо з точки  $B_0$  перпендикуляри на дотичні. Проведемо через основи перпендикулярів  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$  криву і отримаємо половину кардіоїди, зображеної на рис. 1. Повну дугу кардіоїди отримаємо з кривої, що проходить через точки  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$ , за допомогою симетрії відносно осі  $B_0B_{12}$ . Покажемо на рис. 5 побудову кардіоїди як подери кола відносно точки, належної даному колу. Крім того, на рис. 5 зображено коло, яке пояснює

зв'язок між побудовою кардіоїди за допомогою кола і січних і побудовою кардіоїди як подери кола відносно точки, що лежить на даному колі.

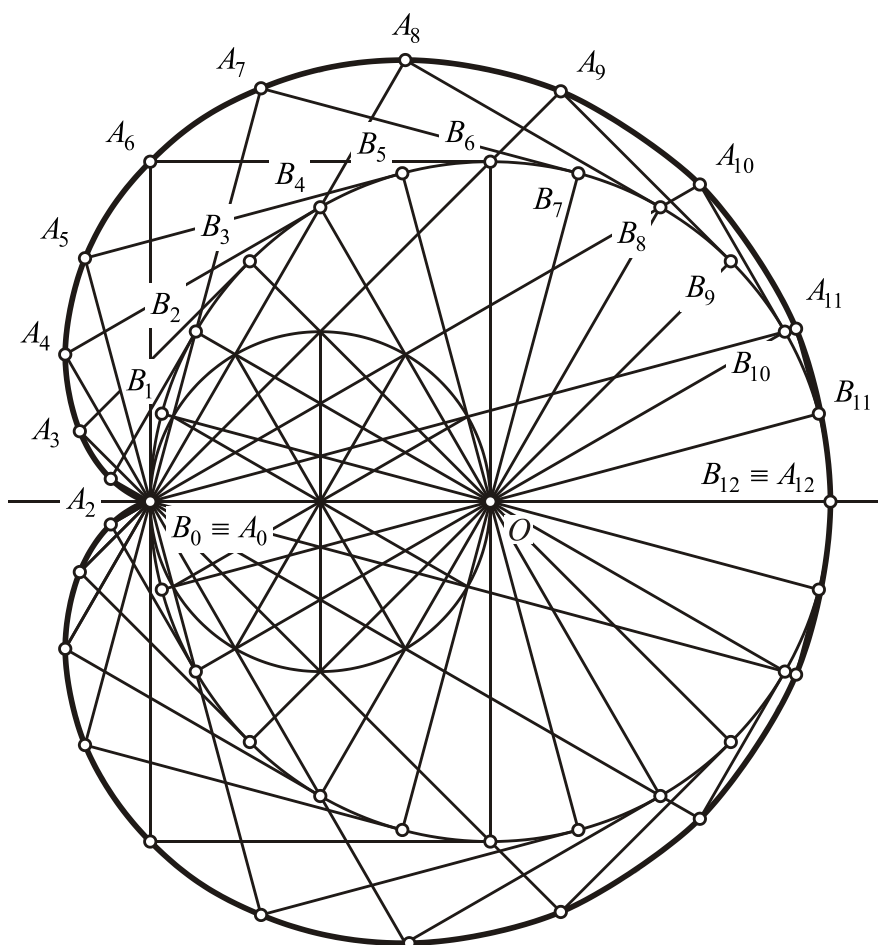


Рис. 5. Побудова кардіоїди як подери кола відносно точки, належної даному колу

Розглянемо метаморфозу, яка станеться з кардіоїдою, якщо точку, відносно якої будується подера колу, помістити поза даним колом. Опишемо з центра  $O$  коло, діаметр якого дорівнює діаметру основного кола, показаного на рис. 1. Виберемо положення точки  $M$ , відносно якої будується подера колу, так, щоб її відстань до точки  $B_0$  дорівнювала діаметру кола. Розділимо коло на 24 рівні частини, проведемо через точки ділення  $B_0, B_1, \dots, B_{12}$  дотичні до неї і опустимо з точки  $B_0$  перпендикуляри на дотичні. Проведемо через основи перпендикулярів

$A_0, A_1, \dots, A_{12}$  криву і отримаємо половину равлика Паскаля. Повну дугу равлика Паскаля отримаємо з кривої, що проходить через точки  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$ , за допомогою симетрії відносно осі  $B_0B_{12}$ . Звернемо увагу, що якщо у кардіоїди особливою точкою була точка повернення, то особливою точкою равлика Паскаля є точка самоперетину. Визначимо діаметр кола, яке необхідно задати, аби побудувати равлика Паскаля за допомогою кола і січних. Оскільки довжини відрізків  $MA_6$  і  $OA_{12}$  рівні, діаметр основного кола равлика Паскаля дорівнює різниці довжини відрізка  $MA_{12}$  і довжини відрізка  $OA_{12}$ . Покажемо на рис. 6 побудову равлика Паскаля як подери кола відносно точки, що знаходиться поза даним колом. Крім того, на рис. 6 показаний спосіб побудови того ж самого равлика Паскаля за допомогою кола і січних.

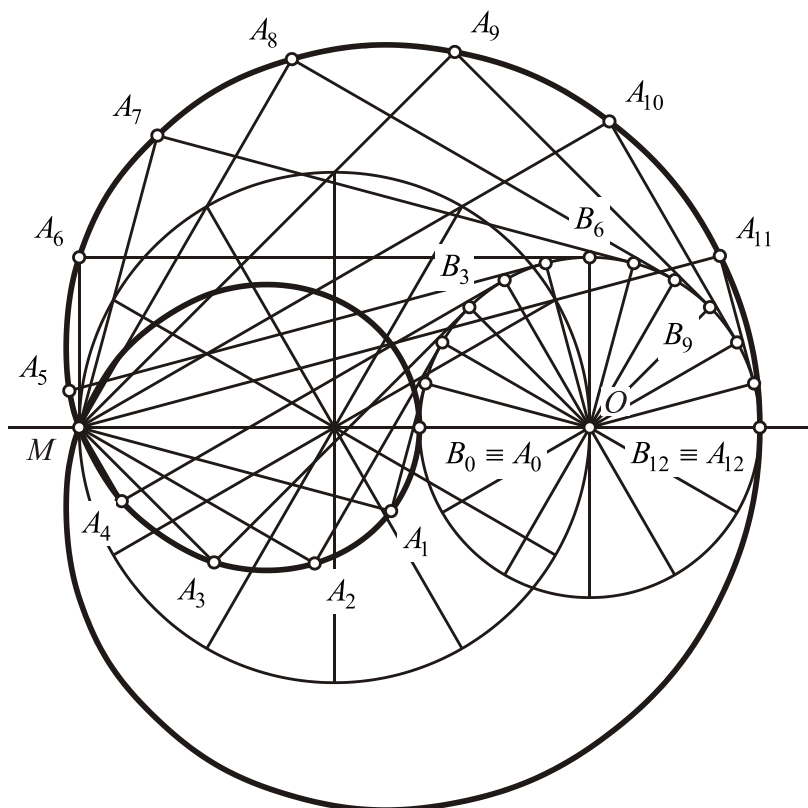


Рис. 6. Побудова равлика Паскаля як подери кола відносно точки, що знаходиться поза даним колом

Таким чином, залежно від вибору закону, за яким утворюється крива, кардіоїда може бути окремим видом равлика Паскаля, епіциклоїдою, у якої діаметри твірного і напрямного кола рівні, катакаустикою променів, відбитих від кола, за умови, що одна з її точок є джерелом світла, і подерою кола відносно точки, належного даному колу. Причому один і той же закон, якому підкоряється побудова кардіоїди, є як слідством, що впливає з попереднього закону, так і причиною, що наводить до подальшого закону. Це дає підставу передбачити, що закони побудови кардіоїди є не що іншим, як окремими випадками загального закону, який керує побудовою не лише кардіоїди, але і інших кривих.

### **Контрольні запитання**

1. Яку криву утворює множина точок, що належить кінцям відрізків прямої лінії, що впливають з точки кола і перетинають його, якщо відстані від кінців відрізків до точки перетину, відкладені в обидва боки від неї, мають одне і те ж значення?

2. Яку криву утворює множина точок, що належать кінцям відрізків прямої лінії, що впливають з точки кола і перетинають його, якщо відстані від кінців відрізків до точки перетину, відкладені в обидва боки від неї, дорівнюють діаметру кола?

3. Яку криву описує точка кола, що котиться без ковзання по зовнішньому боку нерухомого кола того ж діаметру?

4. Яка крива є катакаустикою пучка світлових променів, відбитих від кола, за умови, що джерело світла поміщається в точці, належній даному колу?

5. Яка крива є катакаустикою пучка світлових променів, відбитих від кола, за умови, що падаючими променями є пучок паралельних променів?

6. Яка крива є подерою колу відносно точки, належній даному колу?

7. Яка крива є подерою колу відносно точки, що лежить поза даним колом?

## РОЗДІЛ 7

### Астроїда і її зв'язок з гіпоциклоїдою

Розглянемо криву, між якою і еліпсом існує чудовий зв'язок.

Називатимемо астроїдою криву, яку описує будь-яка точка кола діаметру  $d$ , що котиться без ковзання по внутрішньому боку нерухомого кола діаметру в 4 рази більшого діаметру рухливого кола. Звідси випливає, що астроїда – це окремий вид гіпоциклоїди.

Побудуємо гіпоциклоїду, в якій діаметр рухливого кола в 4 рази менше діаметру нерухомого кола. Назвемо рухливе коло твірним, а нерухоме коло – напрямним. Нехай твірне коло котиться без ковзання по внутрішньому боку напрямного кола, діаметр якого в 4 рази більше діаметру твірного кола. Оскільки кола котяться одне по іншому без ковзання, довжина дуги, яку в одиницю часу описує точка дотику, узята на твірному колі, дорівнює довжині дуги, що описується в ту ж одиницю часу точкою дотику, належного напрямного кола. Крім того, оскільки діаметр твірного кола в 4 рази менше діаметру напрямного кола, кут повороту точки дотику в одиницю часу довкола центра твірного кола в 4 рази більше кута повороту точки дотику в ту ж одиницю часу довкола центра напрямного кола. Тому розділимо твірне коло на 6 рівних частин, а напрямне коло – на 24 рівних частин. При цьому початкову точку  $O$  гіпоциклоїди розташуємо на напрямному колі. Побудуємо гіпоциклоїду, відповідну одній чверті повного кута обертання точки дотику довкола центра напрямного кола. Проведемо через центр  $O_0$  твірного кола концентричне коло, а через точки ділення напрямного кола – радіуси і відзначимо точки  $O_1, O_2, \dots, O_6$  їх перетину з концентричним колом. Крім того, проведемо через точки ділення  $0, 1, 2, \dots, 6$  твірного кола сім'ю

концентричних кіл. Опишемо з центрів  $O_1, O_2, \dots, O_6$  кола, що є послідовними положеннями твірного кола, і відзначимо точки їх перетину з концентричними колами, що проходять через точки ділення  $0, 1, 2, \dots, 6$  твірного кола. Наприклад, точка  $M_1$  є точкою перетину концентричного кола, що проходить через точку 1, з колом, описаним з центра  $O_1$ , точка  $M_2$  є точкою перетину концентричного кола, що проходить через точку 2, з колом, описаним з центра  $O_2$  і так далі. Проведемо через точки  $M_0, M_1, \dots, M_6$  криву і отримаємо одну чверть шуканої гіпоциклоїди. Оскільки довжина твірного кола відповідає одній чверті довжини напрямного кола, отримана гіпоциклоїда симетрична відносно двох взаємно перпендикулярних прямих ліній, що проходять через центри початкового і кінцевого положень твірного кола. Тому повну дугу гіпоциклоїди отримаємо за допомогою симетрії відносно двох взаємно перпендикулярних прямих ліній, що проходять через центри початкового і кінцевого положень твірного кола.

Покажемо на рис. 1 побудову астроїди як гіпоциклоїди, в якій діаметр твірного кола в 4 рази менше діаметру напрямного кола. Звернемо увагу, що гіпоциклоїда, в якій діаметр твірного кола менше діаметру напрямного кола в 4 рази, має чотири початкові точки, що є її точками повернення.

Ми знаємо з елементарної геометрії, що нормаль, проведена через будь-яку точку гіпоциклоїди, наприклад  $M_1$ , проходить через відповідну точку дотику твірного кола з центром  $O_1$  з напрямним колом. Дотична до гіпоциклоїди проходить через точку твірного кола, діаметрально протилежній точці її дотику з напрямним колом. Покажемо на рис. 2 побудову дотичних в точках  $M_0, M_1, \dots, M_6$  гіпоциклоїди. Виміримо за

допомогою циркуля або лінійки довжину відрізків дотичних, що спираються на дві взаємно перпендикулярні прямі лінії, що проходять через центри початкового і кінцевого положень твірного кола, і виявимо, що дотичні до гіпоциклоїди відсікають на її осях симетрії відрізки постійної довжини.

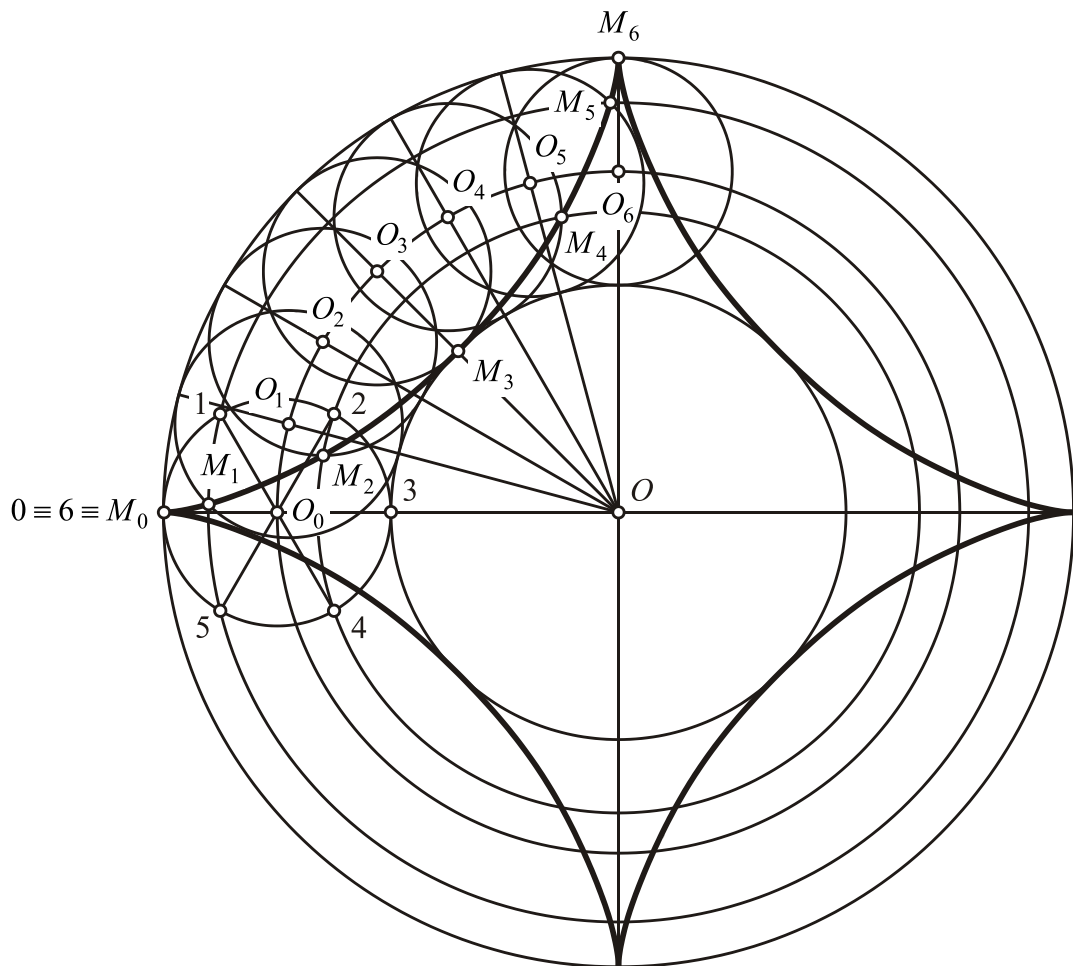


Рис. 1. Побудова астроїди як гіпоциклоїди, в якій діаметр твірного кола в 4 рази менше діаметру напрямного кола

Отже, астроїда є кривою, що огинає сім'ю відрізків постійної довжини, кінці яких розташовані на двох взаємно перпендикулярних прямих лініях.

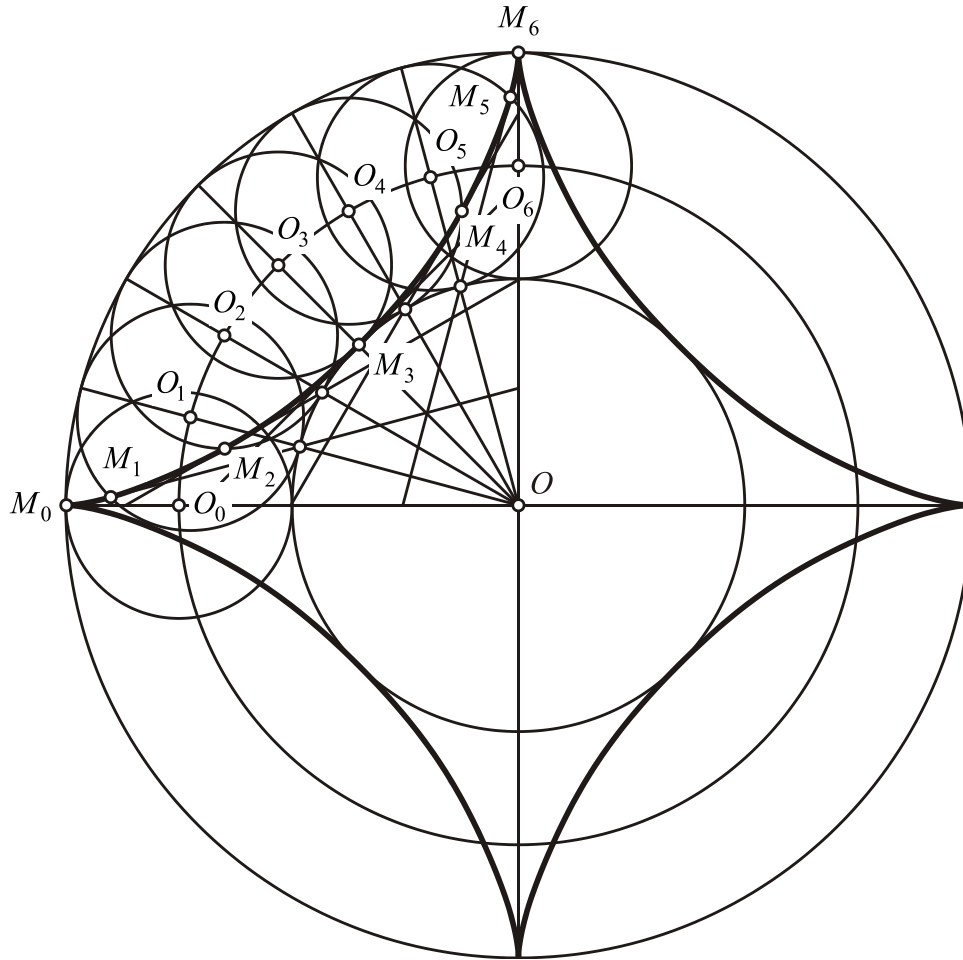


Рис. 2. Побудова астроїди як кривої, що огинає сім'ю відрізків постійної довжини, кінці яких розташовані на двох взаємно перпендикулярних прямих лініях

Відкладемо за допомогою циркуля або лінійки на відрізках  $A_1B_1, \dots, A_6B_6$  дотичних, проведених до астроїди, відрізки прямої лінії  $A_1M_1, \dots, A_6M_6$ , що мають постійну довжину. Проведемо через точки  $M_1, \dots, M_6$  криву і побачимо, що крива є не що інше, як еліпс. Виміримо на рис. 2 за допомогою циркуля або лінійки відстані точок  $M_1, \dots, M_6$  кривою до двох заданих точок  $F_1$  і  $F_2$ , складемо їх величини і переконаємося, що сума відстаней точок  $M_1, \dots, M_6$  кривої до двох

заданих точок  $F_1$  і  $F_2$  є величиною постійною, тобто крива, що проходить через точки  $M_1, \dots, M_6$ , є еліпсом.

Отже, якщо ми змусимо відрізок постійної довжини ковзати своїми кінцями по двом взаємно перпендикулярним прямим лініям, що перетинаються, то довільна точка, узята на відрізку, опише еліпс. При цьому довільно узята точка розділить відрізок на два відрізка, довжини яких відповідатимуть першій і другій півосям еліпса. Покажемо на рис. 3 побудову еліпса як траєкторії точки відрізка постійної довжини, кінці якого ковзають по двом взаємно перпендикулярним прямим лініям.

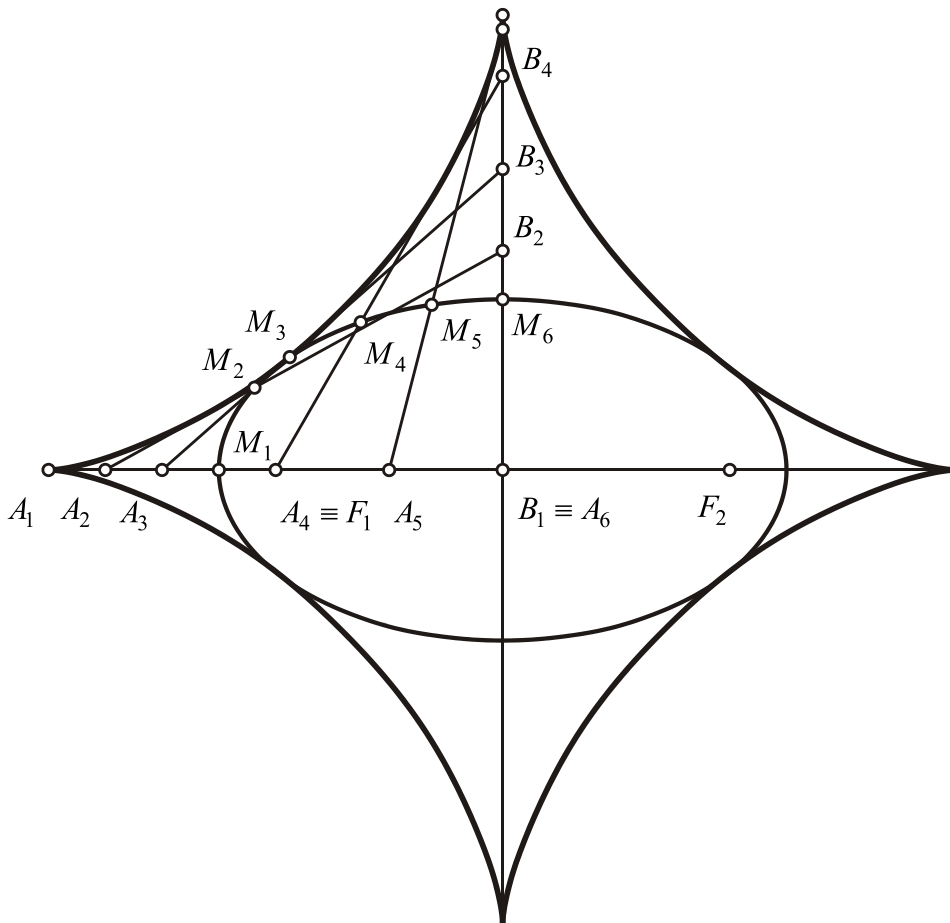


Рис. 3. Побудова еліпса як траєкторії точки відрізка постійної довжини, кінці якого ковзають по двом взаємно перпендикулярним прямим лініям

Візьмемо на відрізку  $A_1B_1$  ряд точок  $M_1^1, M_1^2, M_1^3, \dots$ . Якщо кінці відрізка  $A_1B_1$  ковзатимуть по двом взаємно перпендикулярним прямим

лініям, то отримаємо сім'ю еліпсів, точок, що є траєкторіями точок  $M_1^1, M_1^2, M_1^3, \dots$ . Оскільки при ковзанні відрізка  $A_1B_1$  його довжина не міняється, у всіх еліпсів, що входять в дану сім'ю, сума довжин першої і другої півосей симетрії буде постійною величиною. Крім того, оскільки всі еліпси, що входять в дану сім'ю, утворюються ковзанням одного того ж відрізка прямої лінії, кривою, що огинає сім'ю еліпсів, є крива, що огинає сім'ю відрізків постійної довжини, кінці яких ковзають по двом взаємно перпендикулярним прямим лініям.

Отже, астроїда є кривою, що огинає сім'ю еліпсів, у яких сума довжин першої і другої півосей симетрії має постійну величину. Покажемо на рис. 4 астроїду як криву, що огинає сім'ю еліпсів.

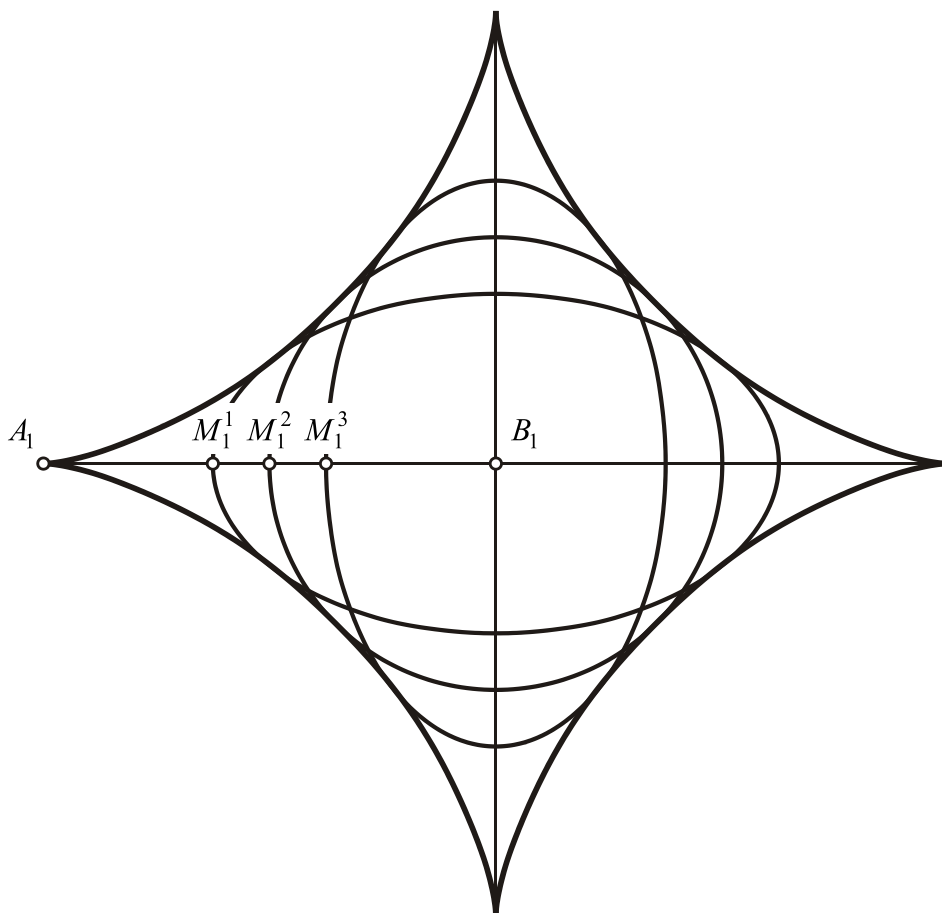


Рис. 4. Побудова астроїди як кривої, що огинає сім'ю еліпсів, у яких сума довжин першої і другої півосей симетрії має постійну величину

Таким чином, ми встановили, що у астроїди є декілька законів її утворення. Астроїда може бути гіпоциклоїдою, у якої діаметр твірного кола в 4 рази менше діаметру напрямного кола. Крім того, астроїда може бути кривою, що як огинає сім'ю відрізків постійної довжини, кінці яких розташовані на двох взаємно перпендикулярних прямих лініях, так і кривою, що огинає сім'ю еліпсів, у яких сума довжин першої і другої півосей симетрії має постійну величину. Це ще раз підтверджує наше припущення про те, що існує загальний закон, що управляє побудовою не лише астроїди, але і інших кривих, а закони побудови астроїди є не що інше, як окремі випадки загального закону.

Крім того, ми відкрили ще одну чудову властивість еліпсу. Ця властивість полягає в тому, що до визначення еліпса як множини точок, сума відстаней яких до двох заданих точок є постійною величиною, ми додали визначення еліпса як траєкторії точки відрізка постійної довжини, кінці якого ковзають по двом заданим взаємно перпендикулярним прямим лініям.

### **Контрольні запитання**

1. Яка крива є траєкторією точки кола, що котиться без ковзання по внутрішньому боку нерухомого кола, діаметр якого в 4 рази більше діаметру рухомого кола?

2. Як називається крива, що огинає сім'ю відрізків прямої лінії постійної довжини, кінці яких лежать на двох взаємно перпендикулярних прямих лініях?

3. Яка крива є траєкторією точки відрізка прямої лінії постійної довжини, кінці якого ковзають по двох взаємно перпендикулярним прямим лініям?

4. Як називається крива, що огинає сім'ю еліпсів, у яких сума довжин першої і другої півосей симетрії має постійну величину?

## РОЗДІЛ 8

### Ланцюгова лінія

Ланцюговою лінією називається плоска крива, форма якої відповідає однорідній нерозтяжній нитці, що закріплена у двох її кінцях і провисає під впливом сили тяжіння.

Розглянемо виведення рівняння ланцюгової лінії. Нехай однорідна нерозтяжна нитка підвішена в точках  $A$  і  $B$ , які можуть знаходитися на різній висоті. Покажемо на рис. 1 нитку і декартову систему координат  $ХОУ$ .

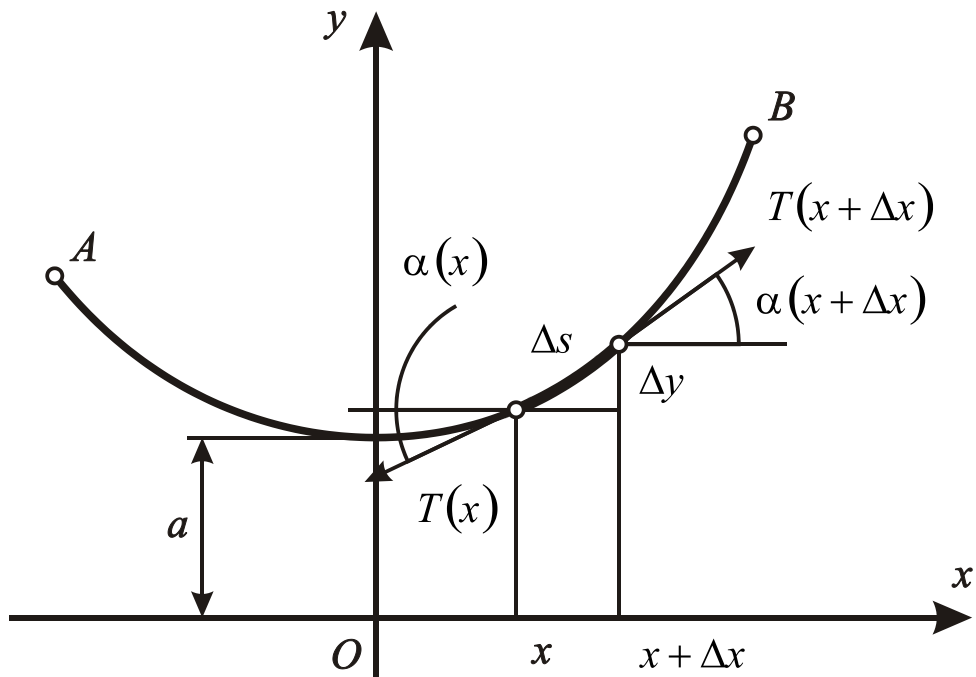


Рис. 1. Малий елемент однорідної нерозтяжної нитки

Виділимо малий елемент нитки довжиною  $\Delta s$  і розглянемо умови його рівноваги. Нехай рівномірно розподілена сила тяжіння, що діє на нього, обчислюється за формулою

$$\Delta P = \rho g F \Delta s,$$

де  $\rho$  – об’ємна щільність матеріалу нитки,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $F$  – площа поперечного перерізу нитки.

Крім того, в початковій і кінцевій точці  $x$  і  $x = x + \Delta x$  виділеного елемента діють сили натягу  $T(x)$  і  $T(x + \Delta x)$  відповідно.

Запишемо умови рівноваги виділеного елемента довжиною  $\Delta s$  в проекціях на осі  $OX$  і  $OY$  у такому вигляді:

$$\begin{aligned} -T(x)\cos\alpha(x) + T(x + \Delta x)\cos\alpha(x + \Delta x) &= 0, \\ -T(x)\sin\alpha(x) + T(x + \Delta x)\sin\alpha(x + \Delta x) - \Delta P &= 0. \end{aligned}$$

Як впливає з першого рівняння, горизонтальна складова сили натягу  $T(x)$  є постійною величиною:

$$T(x)\cos\alpha(x) = T_0 = \text{const}.$$

Якщо в другому рівнянні перейти до диференціалів, його можна записати в такому вигляді:

$$d(T(x)\sin\alpha(x)) = dP(x).$$

Оскільки  $T(x) = \frac{T_0}{\cos\alpha(x)}$ , отримуємо

$$d(T_0 \operatorname{tg}\alpha(x)) = dP(x),$$

$$T_0 d(\operatorname{tg}\alpha(x)) = dP(x).$$

Відмітимо, що  $\operatorname{tg}\alpha(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$ , і запишемо рівняння

рівноваги нитки у такому вигляді:

$$T_0 d(y'(x)) = dP(x),$$

$$T_0 d(y'(x)) = \rho g F ds.$$

Обчислимо диференціал елемента довжини  $ds$  за формулою:

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Підставимо його в попередній вираз і отримаємо диференціальне рівняння ланцюгової лінії:

$$T_0 \frac{dy'(x)}{dx} = \rho g F \sqrt{1 + (y'(x))^2},$$

$$T_0 y''(x) = \rho g F \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

Знизимо порядок отриманого рівняння. Позначимо  $y'(x) = z(x)$  і подамо його у вигляді диференціального рівняння першого порядку:

$$T_0 z'(x) = \rho g F \sqrt{1 + z^2(x)}.$$

Розв'яжемо дане рівняння методом розділення змінних:

$$T_0 dz(x) = \rho g F \sqrt{1 + z^2(x)} dx,$$

$$\frac{dz(x)}{\sqrt{1 + z^2(x)}} = \frac{\rho g F}{T_0} dx,$$

$$\int \frac{dz(x)}{\sqrt{1 + z^2(x)}} = \frac{\rho g F}{T_0} \int dx,$$

$$\ln \left( z(x) + \sqrt{z^2(x) + 1} \right) = \frac{x}{a} + C_1,$$

де вираз  $\frac{\rho g F}{T_0}$  позначений як величина  $\frac{1}{a}$ .

Нехай координата  $x$  вершини ланцюгової лінії дорівнює нулю  $x = 0$ . Оскільки дотична до вершини ланцюгової лінії паралельна осі  $OX$ , функція  $z(0)$  дорівнює нулю:

$$z(0) = y'(0) = 0.$$

Тоді постійну  $C_1$  можна визначити після підстановки величин  $x = 0$  і  $z(0) = 0$  в останнє рівняння

$$\ln 1 = 0 + C_1, \quad C_1 = 0.$$

Таким чином, останнє рівняння набуває такий вигляд:

$$z(x) + \sqrt{z^2(x) + 1} = e^{\frac{x}{a}}.$$

Помножимо обидві частини даного рівняння на вираз  $z(x) - \sqrt{z^2(x) + 1}$  і перетворимо його таким чином:

$$\left(z(x) + \sqrt{z^2(x) + 1}\right)\left(z(x) - \sqrt{z^2(x) + 1}\right) = \left(z(x) - \sqrt{z^2(x) + 1}\right)e^{\frac{x}{a}},$$

$$z^2(x) - (z^2(x) + 1) = \left(z(x) - \sqrt{z^2(x) + 1}\right)e^{\frac{x}{a}},$$

$$-1 = \left(z(x) - \sqrt{z^2(x) + 1}\right)e^{\frac{x}{a}},$$

$$z(x) - \sqrt{z^2(x) + 1} = -e^{-\frac{x}{a}}.$$

Складемо праву і ліву частини даного рівняння з відповідними частинами попереднього рівняння і отримаємо вираз для функції  $z(x) = y'(x)$ :

$$\left(z(x) + \sqrt{z^2(x) + 1}\right) + \left(z(x) - \sqrt{z^2(x) + 1}\right) = e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}},$$

$$z(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

$$y'(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Виконаємо інтегрування даного диференціального рівняння і отримаємо рівняння ланцюгової лінії:

$$y(x) = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + C_2.$$

Якщо початок декартової системи координат знаходиться у вершині ланцюгової лінії, в якій значення функції  $y(0)$  дорівнює нулю, то постійна  $C_2$  набуває значення  $C_2 = 0$  і рівняння ланцюгової лінії набуває вигляду

$$y(x) = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) - a.$$

Якщо початок декартової системи координат відстоїть від вершини ланцюгової лінії на відстань  $y(0) = a$ , то постійна  $C_2$  набуває значення  $C_2 = 0$  і рівняння ланцюгової лінії має вигляд

$$\frac{y(x)}{a} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Таким чином, ланцюгова лінія є графіком функції гіперболічного косинусу. При цьому форма ланцюгової лінії визначається параметром  $a = \frac{T_0}{\rho g F}$ , що є довжиною такої ділянки нитки, вага якої дорівнює горизонтальній складовій натягу нитки. Покажемо на рис. 2 залежність форми ланцюгової лінії від значення параметра  $a$ .

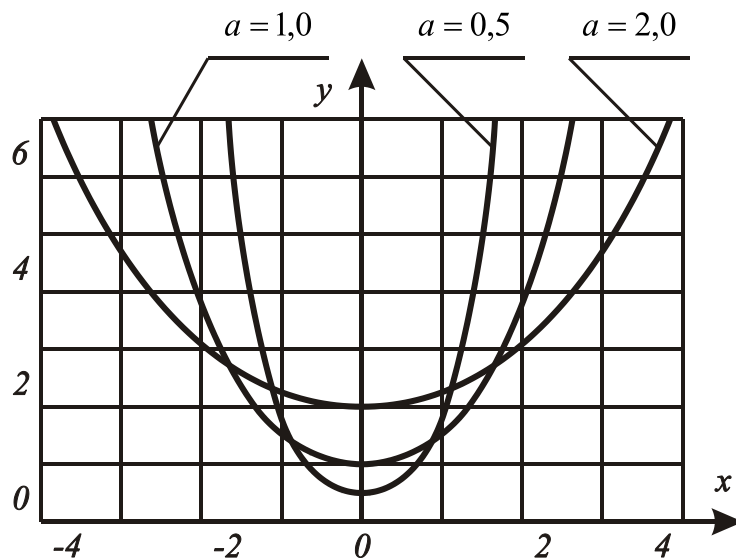


Рис. 2. Форма ланцюгової лінії при різних значеннях параметра  $a$

Розглянемо задачу про визначення форми каната підвісного моста.

Нехай сила тяжіння, що діє на малий елемент каната, буде пропорційна не його довжині  $\Delta s$ , а вазі відповідної ділянки моста довжиною  $\Delta x$ , тобто  $\Delta P = \mu \Delta x$ , де  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності.

Тоді умова рівноваги нескінченно малого елемента каната довжиною  $ds$  можна записати таким чином

$$T_0 dy'(x) = dP(x) = \mu dx,$$

$$y''(x) = \frac{\mu}{T_0}.$$

Виконаємо інтегрування отриманого диференціального рівняння другого порядку і знайдемо рівняння лінії, що визначає форму каната підвісного моста:

$$y'(x) = \frac{\mu}{T_0} x + C_1,$$

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{\mu}{T_0} x^2 + C_1 x + C_2,$$

де  $C_1, C_2$  – постійні інтегрування, залежні від початкових умов.

Таким чином, канат підвісного моста має форму не ланцюгової лінії, а параболи.

Розглянемо задачу про визначення форми неоднорідної ланцюгової лінії рівного опору.

Нехай канат має змінну товщину, яка змінюється так, щоб напруга в будь-якому перерізі була однаковою. При цьому товщина каната в точках підвісу має максимальне значення в верхній точці й мінімальне значення – в нижній точці.

Подамо умови рівноваги довільного нескінченно малого елемента нитки  $ds$  у вигляді таких рівнянь:

$$T(x)\cos\alpha(x) = T_0,$$

$$T(x)\sin\alpha(x) = \int \rho g F(s) ds,$$

де  $T_0$  – горизонтальна складова сили натягу,  $\alpha$  – кут між дотичною до ланцюгової лінії і віссю  $OX$ ,  $\rho$  – об’ємна щільність матеріалу нитки,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $F(s)$  – площа перерізу нитки, яка у даній задачі є змінною величиною.

Знайдемо з першого рівняння силу натягу  $T(x)$ :

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos\alpha(x)}.$$

Підставимо  $T(x)$  в друге рівняння і подамо його у такому вигляді:

$$T_0 \frac{\sin\alpha(x)}{\cos\alpha(x)} = \int \rho g F(s) ds,$$

$$T_0 \operatorname{tg}\alpha(x) = \int \rho g F(s) ds.$$

Відмітимо, що  $\operatorname{tg}\alpha(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$  і запишемо останнє рівняння

у такому вигляді:

$$T_0 y'(x) = \rho g \int F(s) ds.$$

Обчислимо напругу  $\sigma$  за формулою  $\sigma = \frac{T(x)}{F(s)}$  і виведемо з неї вираз

для площі поперечного перерізу нитки

$$F(s) = \frac{T(x)}{\sigma} = \frac{T_0}{\sigma \cos\alpha(x)}.$$

Тоді рівняння рівноваги набирає вигляду:

$$T_0 y'(x) = \rho g \int \frac{T_0}{\sigma \cos \alpha(x)} ds.$$

Оскільки за умовою задачі напруга  $\sigma$  має бути однаковою у всіх перерізах, винесемо  $\sigma$  з-під знаку інтеграла і отримаємо

$$y'(x) = \frac{\rho g}{\sigma} \int \frac{1}{\cos \alpha(x)} ds.$$

Виконаємо диференціювання обох частин рівняння по змінній  $s$ :

$$\frac{dy'(x)}{ds} = \frac{\rho g}{\sigma} \frac{1}{\cos \alpha(x)},$$

$$\frac{dy'(x)}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{\rho g}{\sigma} \frac{1}{\cos \alpha(x)}.$$

Оскільки  $\cos \alpha(x) = \frac{dx}{ds}$ , перетворимо диференціальне рівняння до

такого вигляду:

$$y''(x) \frac{dx}{ds} = \frac{\rho g}{\sigma} \frac{1}{\frac{dx}{ds}},$$

$$y''(x) = \frac{\rho g}{\sigma} \left( \frac{ds}{dx} \right)^2,$$

$$y''(x) = \frac{\rho g}{\sigma} \left( 1 + (y'(x))^2 \right).$$

Розв'яжемо отримане диференціальне рівняння, що описує форму нитки рівного опору, за допомогою розділення змінних:

$$\frac{dy'(x)}{1 + (y'(x))^2} = \frac{\rho g}{\sigma} dx,$$

$$\int \frac{dy'(x)}{1 + (y'(x))^2} = \frac{\rho g}{\sigma} \int dx,$$

$$\operatorname{arctg}(y'(x)) = \frac{\rho g}{\sigma} x + C_1.$$

Нехай координата  $x$  вершини ланцюгової лінії дорівнює нулю  $x = 0$ . Оскільки дотична до вершини ланцюгової лінії паралельна осі  $OX$ , похідна  $y'(0)$  дорівнює нулю  $y'(0) = 0$ . Отже, постійна  $C_1$  також дорівнює нулю  $C_1 = 0$ .

Перетворимо останнє рівняння до вигляду:

$$y'(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\rho g}{\sigma} x\right).$$

Виконаємо інтегрування даного рівняння:

$$y(x) = \int \operatorname{tg}\left(\frac{\rho g}{\sigma} x\right) dx = -\frac{\sigma}{\rho g} \ln \cos\left(\frac{\rho g}{\sigma} x\right) + C_2.$$

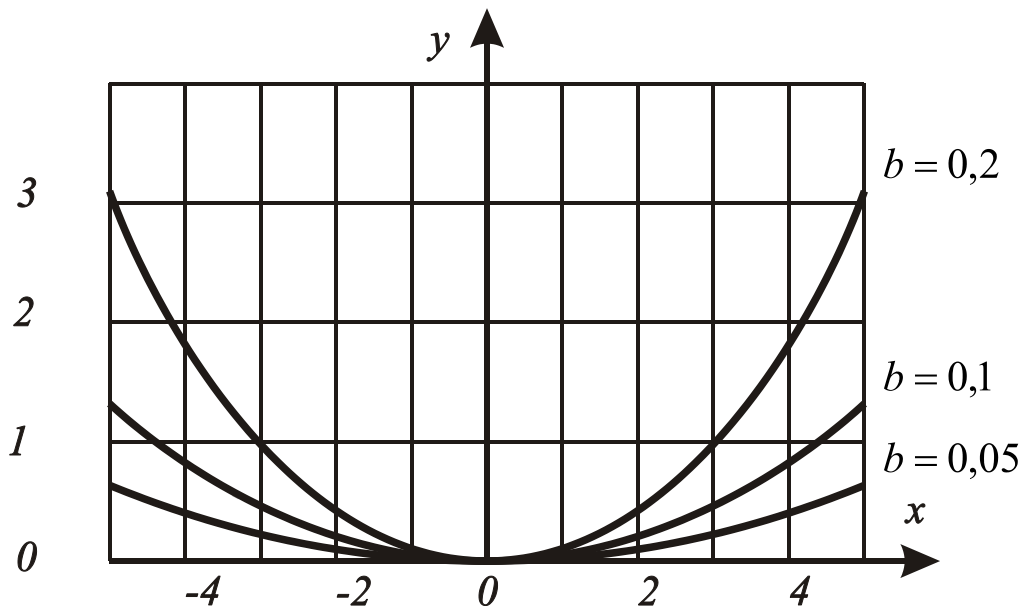


Рис. 3. Форма ланцюгової лінії рівного опору при різних значеннях параметра  $b$

Нехай початок декартової системи координат відстоїть від вершини ланцюгової лінії на відстань  $y(0) = 0$ . Тоді постійна  $C_2$  набуває значення  $C_2 = 0$ .

Таким чином, ланцюгова лінія рівного опору є графіком функції

$$y(x) = -\frac{1}{b} \ln \cos(bx),$$

де  $b$  дорівнює  $b = \frac{\rho g}{\sigma}$ . Графік цієї функції при різних значеннях  $b$

поданий на рис. 3.

### Контрольні запитання

1. Як називається крива, форма якої відповідає однорідній нерозтяжній нитці, що закріплена у двох її кінцях і провисає під впливом сили тяжіння?

2. Яка функція є графіком ланцюгової лінії?

3. Якої форми набуде однорідна нерозтяжна нитка, якщо до неї підвісити горизонтальну балку, підвіски якої відстоять один від одного на рівні відстані, вимірювані уздовж балки?

## РОЗДІЛ 9

### Крива Персея і її зв'язки з лемніскатою Бернуллі і овалом Кассині

Називатимемо тором поверхню, утворену обертанням кола довкола осі, що належить площини кола, але не проходить через її центр. Вісь обертання називатимемо віссю тора, а коло, утворене обертанням центра твірної тора, – кривою віссю тора.

Здавалося б, що може бути чудового в поверхні, яка має вигляд «бублика»? Виявляється, не дивлячись на просту форму, тор володіє дивною властивістю, з якою ми зараз познайомимося.

Виконаємо на рис. 1 проєкції тора. Розглянемо лінії перетину тора площинами, паралельними його осі. Введемо позначення:  $r$  – радіус кола, що описує тор,  $d$  – відстань від осі тора до її центра або радіус кривої осі тора,  $p$  – відстань від осі тора до січної площини. Вочевидь, якщо січна площина проходить через вісь тора, тобто, то перерізом тора є два кола, відстань між центрами яких рівна  $2d$ . Якщо січна площина проходить через порожнину тора, тобто її відстань до осі тора міститься в інтервалі  $0 < p < d - r$ , то перерізом тора є два овали. Якщо січна площина дотикається порожнини тора, тобто її відстань до осі тора рівна  $p = d - r$ , то перерізом тора є фігура, що має вигляд «вісімки». Якщо січна площина перетинає тор і її відстань до осі тора міститься в інтервалі  $d - r < p < d$ , то перерізом тора є фігура, що має вигляд «бісквіта». Якщо січна площина перетинає тор і її відстань до осі тора міститься в інтервалі  $d \leq p < d + r$ , то перерізом тора є овал. Покажемо на рис. 1 проєкції перерізів тора площинами, паралельними його осі.

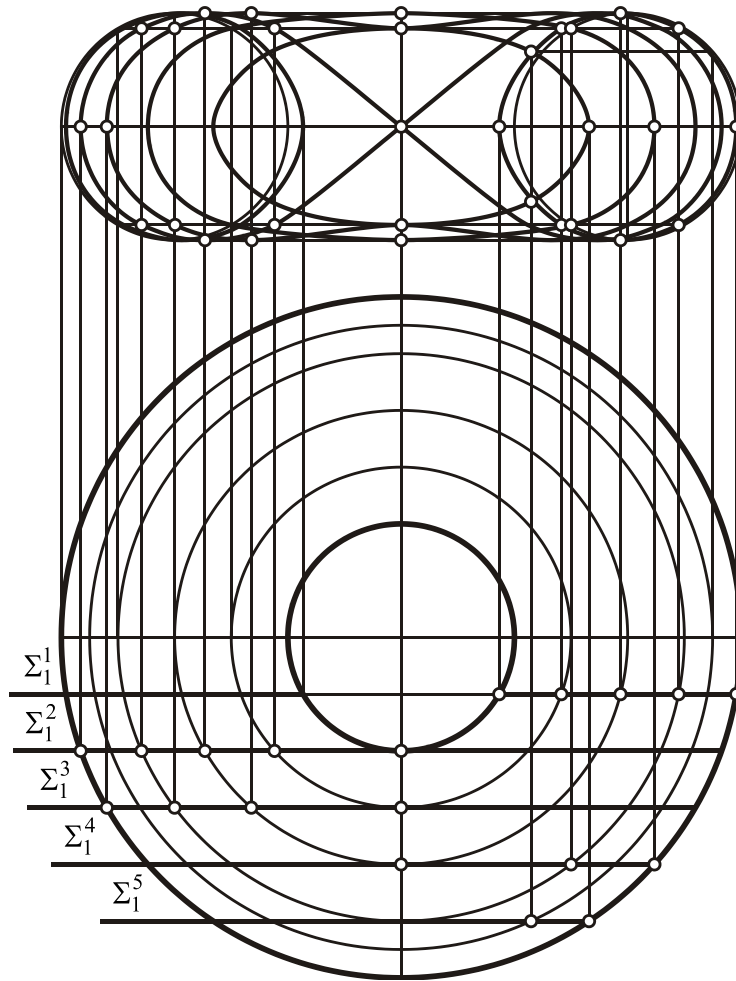


Рис. 1. Проекції перерізів тора площинами, паралельними його осі

Називатимемо лінію перетину тора площинами, паралельними його осі, кривою Персея. Ця лінія була названа на честь старогрецького математика Персея, що жив в 2-м столітті до Р.Х. і що вперше дослідив її у зв'язку з вивченням різних способів завдання кривих ліній. Виділимо на рис. 1 криву Персея з проекцій тора і покажемо її на рис. 2.

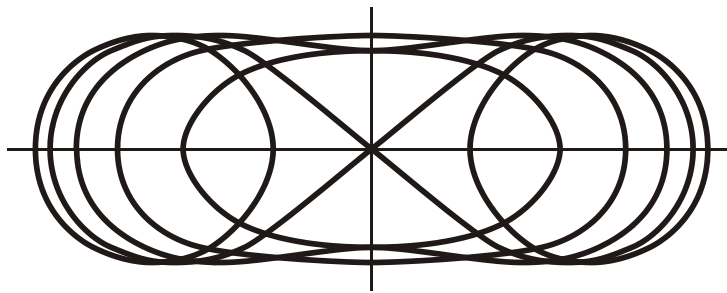


Рис. 2. Крива Персея

Розглянемо овал Кассині – плоску криву, чудову тим, що добуток відстаней її точок до двох точок, званих її фокусами, є постійною величиною. Порівняємо овал Кассині з кривою Персея і виявимо дивну схожість між ними. Крім того, лінія Персея при відстані  $p$  січної площини до осі тора, рівному, є нічим іншим, як лемніскатою Бернуллі, тобто плоскою кривою, для якої добуток відстаней її точок до її фокусів є постійною величиною, що дорівнює квадрату половини відстані між її фокусами.

Таким чином, крива Персея – це не що інше, як овал Кассині, побудована при різних величинах постійного твору відстаней її точок до двох точок, званих її фокусами. Звідси випливає, що це чудова властивість лінії Персея встановлює зв'язок перерізів тора площинами, паралельними його осі, з плоскими кривими лініями, що є множиною точок, добуток відстаней яких до двох певних точок дорівнює постійній величині. Втім, якщо взяти до уваги, що коло – це множина точок, для яких частка від ділення відстаней до двох нерухомих точок є постійною величиною, то зв'язок кривої Персея з овалом Кассині і лемніскатою Бернуллі здається вже не випадковим, а закономірним. Дійсно, за визначенням тора, якому належить крива Персея, – це траєкторія обертання кола довкола нерухомої осі. Тому якщо коло – це множина точок, для яких відношення відстаней до двох нерухомих точок є постійною величиною, то два кола – це множина точок, для яких добуток відстаней до їх центрів є теж постійною величиною.

### **Контрольні запитання**

1. Яка поверхня утворюється обертанням кола довкола осі, що належна площини кола, але не проходить через його центр?

2. Як називається лінія перетину тора площинами, паралельними його осі?

3. Яку криву утворює множина точок, добуток відстаней яких до двох заданих точок є постійною величиною?

4. Яка крива належить перерізу тора площиною, що паралельна його осі і дотикається його з внутрішнього боку?

## РОЗДІЛ 10

### Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Розглянемо лінійчату поверхню, яка утворюється обертанням прямолінійної твірної довкола прямої лінії, званою віссю обертання. Якщо прямолінійна твірна перетинається з віссю обертання, то отримаємо прямий круговий конус; якщо прямолінійна твірна паралельна осі обертання, то – прямий круговий циліндр, а якщо прямолінійна твірна схрещується з віссю обертання, то – поверхню, звану однопорожнинним гіперболоїдом обертання.

Виділимо серед лінійчатих поверхонь обертання однопорожнинний гіперболоїд обертання і вивчимо деякі його чудові властивості. Задамо в просторі вісь обертання і відрізок прямої лінії  $AB$ , що належать двом паралельним площинам, але не паралельних один одному. Нехай кут нахилу відрізка  $AB$  до осі обертання вибраний так, щоб найкоротший поворот відрізка до осі обертання здійснювався за годинниковою стрілкою, якщо дивитися у напрямі погляду, перпендикулярному їх площині паралелізму, з боку відрізка  $AB$ . Розділимо кола, які описують точки  $A$  і  $B$ , на 12 рівних частин, з'єднаємо відрізками прямих ліній відповідні точки, виділені на їх паралелях, і отримаємо сім'ю твірних однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Відмітимо, що таку ж сім'ю твірних можна отримати, якщо як початкове положення твірної узяти будь-який відрізок прямої лінії, віддалений від осі обертання на таку ж відстань і що становить з нею такий же кут, що і відрізок  $AB$ .

Покажемо на рис. 1 проекції однопорожнинного гіперболоїда обертання і сім'ю його твірних. Побудуємо ті, що огинають фронтальних проекцій твірних і побачимо, що обрисом фронтальної проекції

однопорожнинного гіперболоїда обертання є гіпербола з дійсною віссю, перпендикулярної осі обертання. Крім того, рис. 1 показує, що кривою, що огинає горизонтальні проекції твірних і, отже, обрисом горизонтальної проекції однопорожнинного гіперболоїда обертання є коло.

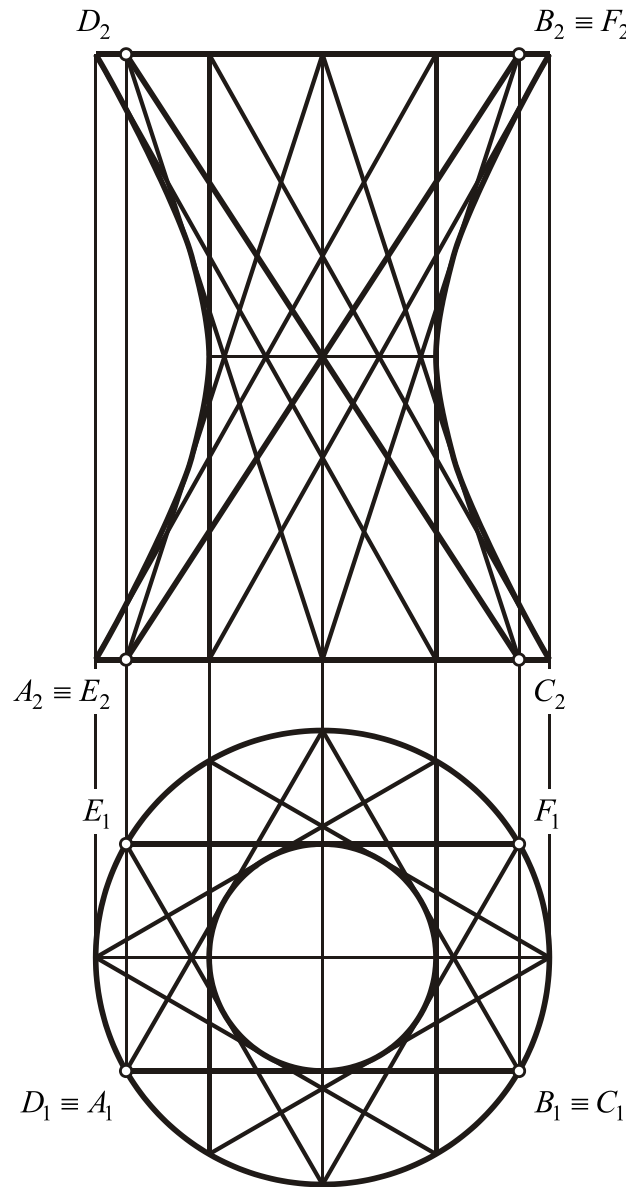


Рис. 1. Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Доведемо за допомогою рис. 1, що якщо як твірна узяти відрізок прямої лінії, симетричний відрітку  $AB$  відносно площини, що проходить через вісь обертання, то отримаємо такий же однопорожнинний гіперболоїд обертання. Наприклад, візьмемо відрізок прямої лінії  $CD$ ,

симетричний відрізок  $AB$  відносно площини, що проходить через вісь обертання і перпендикулярної площини паралелізму осі обертання і відрізка  $AB$ , і побудуємо другу сім'ю твірних. При цьому кут нахилу відрізка  $CD$  до осі обертання вибраний так, щоб найкоротший поворот відрізка до осі обертання здійснювався проти годинникової стрілки, якщо дивитися у напрямі погляду, перпендикулярному їх площині паралелізму, з боку відрізка  $CD$ . Нехай відрізок  $CD$  обертається довкола осі обертання в напрямі, протилежному до напрямку обертання відрізка  $AB$ . Побудуємо твірні, які відповідають положенням відрізка  $CD$ , отриманим через рівні одиниці часу, і побачимо, що фронтальні і горизонтальні проекції другої сім'ї твірних збігаються з такими ж проекціями першої сім'ї твірних. Звідси випливає, що друга сім'я твірних належить однопорожнинному гіперболоїду обертання, отриманому в результаті обертання відрізка прямої лінії  $AB$ .

Візьмемо відрізок прямої лінії  $EF$ , симетричний відрізка  $AB$  відносно площини, що проходить через вісь обертання і паралельної площини паралелізму осі обертання і відрізка  $AB$ . Додамо відрізка  $EF$  обертальний рух довкола осі і побачимо, що твірні, які відповідають його положенням, отриманим через рівні одиниці часу, належать сім'ї твірних, заданій обертанням відрізка прямої лінії  $CD$ . Звідси випливає, що друга сім'я твірних може бути заданою відрізком прямої лінії  $CD$  або відрізком прямої лінії  $EF$ .

Таким чином, в однопорожнинному гіперболоїді обертання є дві сім'ї твірних, що задаються двома прямими лініями, симетричними відносно площини, що проходить через вісь обертання. При цьому площина симетрії може бути як перпендикулярною площині паралелізму осі обертання і початковим положенням твірних, так і паралельною їй.

Розглянемо чудову властивість однопорожнинного гіперболоїда обертання, яке полягає в тому, що через кожну його точку можна провести дві прямі лінії, що належать першій і другій сім'ям твірних. Дійсно, якщо дві сім'ї твірних утворюють одну і ту ж поверхню, то серед твірних, що належать першій і другій сім'ям, завжди можна знайти дві прямі лінії, що перетинаються в одній точці поверхні. Це чудова властивість виділяє однопорожнинний гіперболоїд обертання серед інших лінійчатих поверхонь, тому що, окрім площини, гіперболічного параболоїда і однопорожнинного гіперболоїда, не існує інших лінійчатих поверхонь, через кожну точку яких можна провести більш за одну пряму.

Звідси випливає, що площина, дотична до однопорожнинного гіперболоїда обертання виділяє на ньому дві прямі лінії, що належать двом сім'ям твірних і перетинаються в точці дотику.

Розглянемо зв'язок між однопорожнинним гіперболоїдом обертання і плоскими кривими лініями 2-го порядку.

Перетнемо однопорожнинний гіперболоїд обертання площиною  $\Sigma$ , що перетинає його вісь обертання під кутом, відмінним від кута нахилу твірних до тієї ж осі. Покажемо на рис. 2 проекцію перерізу однопорожнинного гіперболоїда обертання на площину, паралельну площині, і виявимо, що його перерізом є еліпс.

Перетнемо однопорожнинний гіперболоїд обертання площиною  $\Sigma$ , що складає з його віссю обертання кут, рівний куту нахилу твірних до осі обертання. Наприклад, нехай січна площина паралельна площині, заданій твірними  $AB$  і  $EF$ . Покажемо на рис. 3 проекцію перерізу однопорожнинного гіперболоїда обертання на площину, паралельну площині, і виявимо, що його перерізом є парабола.

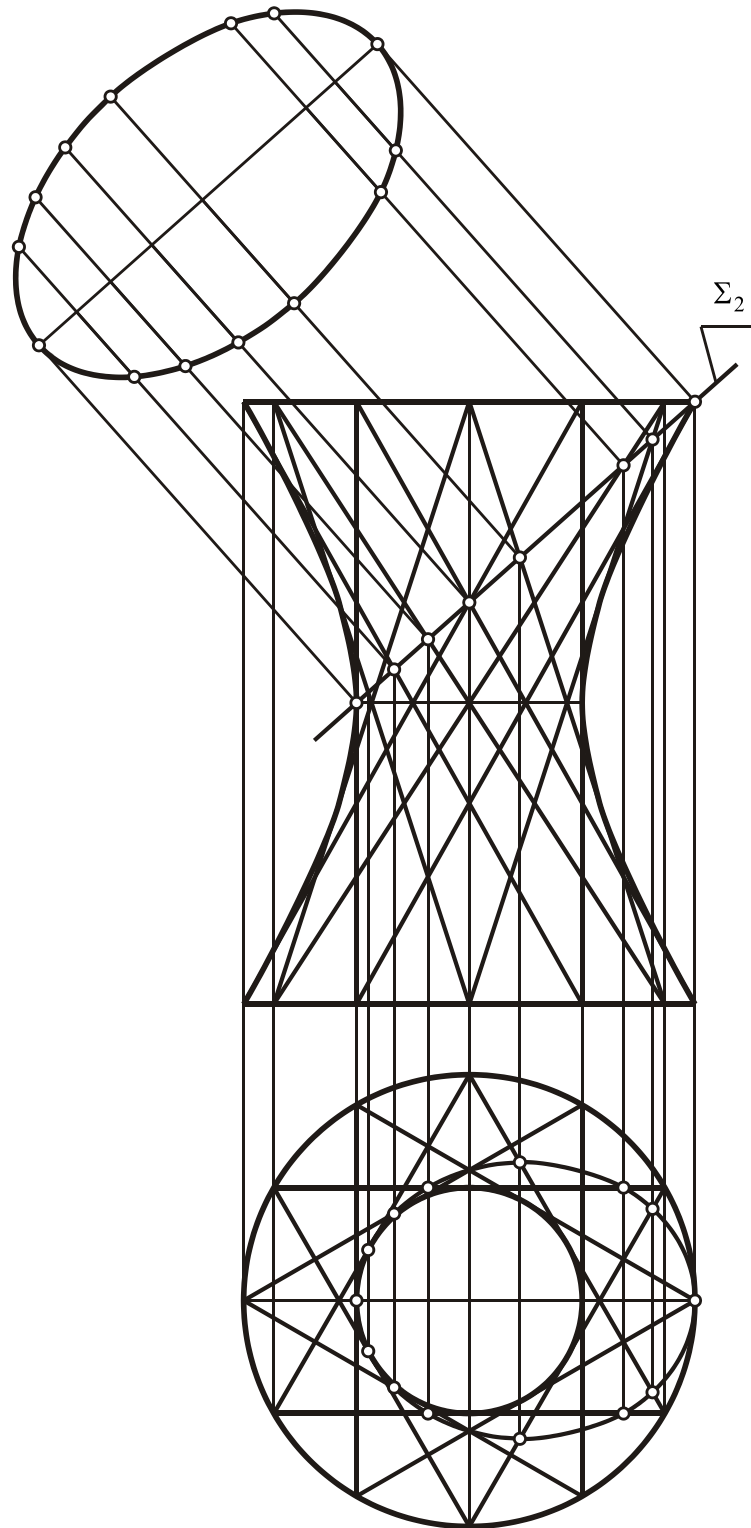


Рис. 2. Переріз однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною, що перетинає його вісь обертання під кутом, відмінним від кута нахилу твірних до тієї ж осі

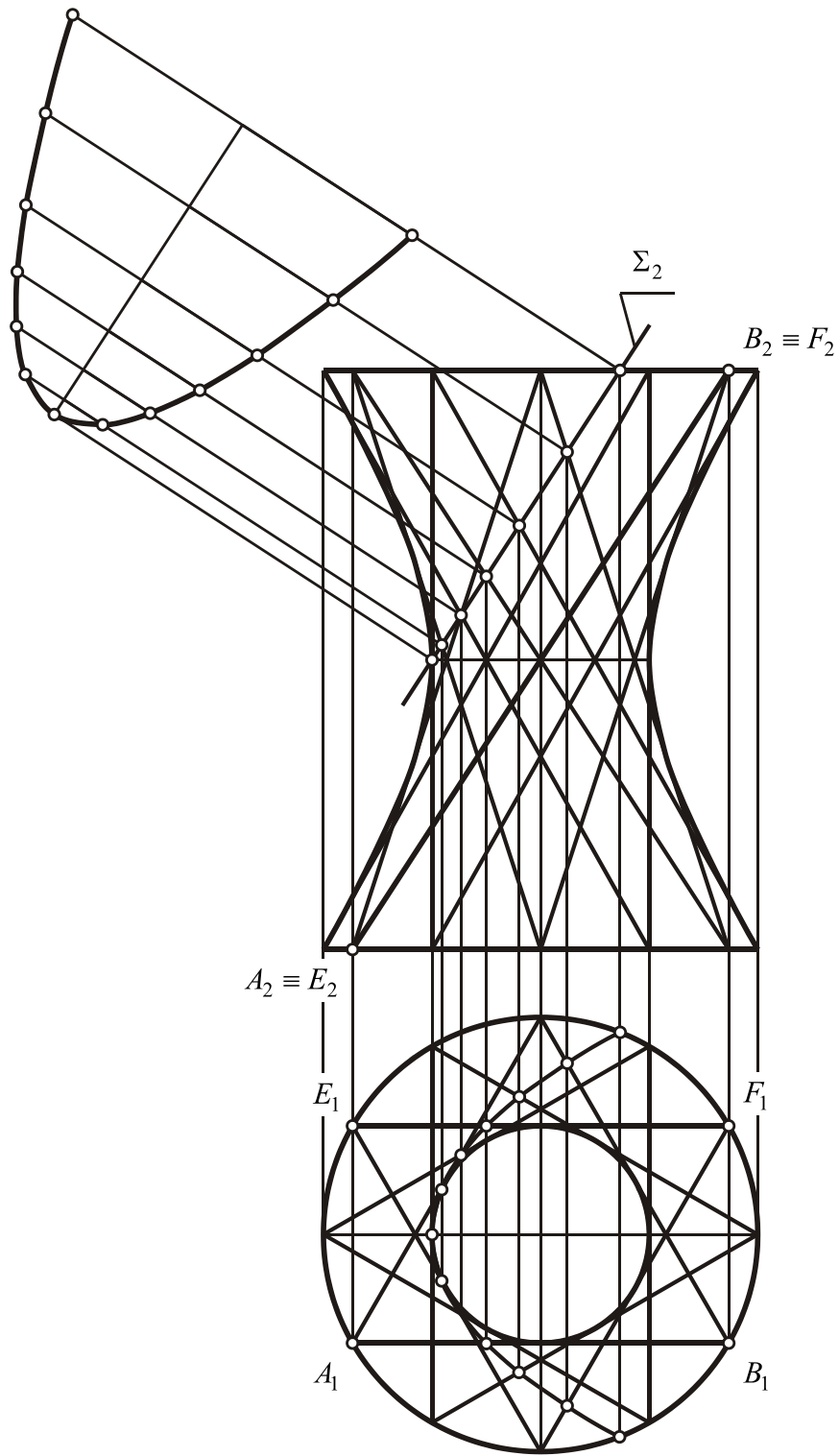


Рис. 3. Переріз однопорожнинного гіперboloїда обертання площиною, що перетинає його вісь обертання під кутом, рівним куту нахилу твірних до неї

Перетнемо тепер однопорожнинний гіперboloїд обертання площинами, паралельними його осі обертання і віддаленими від неї на

різні відстані. Покажемо на рис. 4 фронтальних проекції перерізу однопорожнинного гіперболоїда обертання площинами  $\Sigma^1$ ,  $\Sigma^2$ ,  $\Sigma^3$  і виявимо, що якщо відстань січної площини  $\Sigma^1$  до осі обертання менше відстані твірною до тієї ж осі, то в перерізі лежить гіпербола, дійсна вісь якої перпендикулярна осі обертання. Якщо відстань січної площини  $\Sigma^2$  до осі обертання дорівнює відстані твірною до тієї ж осі, то перерізом є дві прямі лінії, що перетинаються, задані відрізками  $AB$  і  $CD$ . Якщо відстань січної площини  $\Sigma^3$  до осі обертання більше відстані твірною до тієї ж осі, то в перерізі лежить гіпербола, дійсна вісь якої паралельна осі обертання. При цьому асимптотами двох сімей гіпербол є фронтальні проекції твірних  $AB$  і  $CD$ , що проходять через точку, в якій січна площина дотикається «горловини» однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Таким чином, рис. 2–4 дають наочне уявлення про такі чудові властивості однопорожнинного гіперболоїда обертання:

якщо січна площина перетинає його вісь обертання під кутом, відмінним від кута нахилу твірних до осі обертання, то перерізом однопорожнинного гіперболоїда обертання є еліпс;

якщо січна площина паралельна твірною, то перерізом однопорожнинного гіперболоїда обертання є парабола;

якщо січна площина паралельна осі обертання, то перерізом однопорожнинного гіперболоїда обертання є гіпербола або дві прямі лінії, причому залежно від відстані січної площини до осі обертання дійсні осі гіпербол можуть розташовуватися як паралельно, так і перпендикулярно осі обертання.

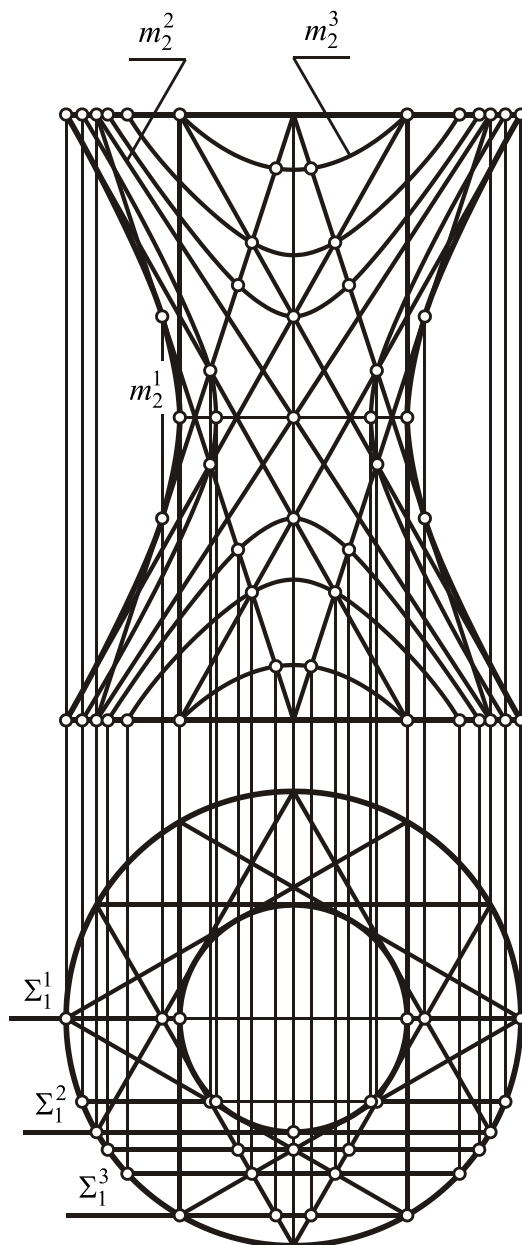


Рис. 4. Переріз однопорожнинного гіперболоїда обертання площинами, паралельними його осі обертання

Відмітимо, що ці властивості не так очевидні, як може здатися на перший погляд. З одного боку, не важко уявити, як пряма лінія, що обертається довкола осі, залишає на площині слід у вигляді кривої лінії, але з іншого боку, важко пояснити, чому пряма лінія залежно від положення площини в просторі викреслює на ній не будь-яку криву лінію, а саме еліпс, параболу або гіперболу. По-перше, і еліпс, і параболу, і гіперболу будуються за власними законами, які застосовуються до

побудови лише даного вигляду кривою, а по-друге, ці закони не мають нічого спільного із законом, за яким утворюється однопорожнинний гіперболоїд обертання. Проте, між законами, за якими будуються чудові криві лінії, і законом, за яким утворюється однопорожнинний гіперболоїд обертання, повинно бути щось загальне, – інакше як можна пояснити, чому однопорожнинний гіперболоїд обертання носить на собі сім'ї еліпсів, парабол і гіпербол.

Можливо, це загальне полягає в тому, що і обертання в просторі прямої лінії довкола осі, і утворення еліпса, параболи і гіперболи описуються рівняннями 2-го порядку, – різниця лише в тому, що рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання зв'язує три координати його точок, а рівняння еліпса, параболи і гіперболи – дві координати їх точок. Проте це припущення підтвердиться, якщо вдасться пояснити, чому в плоских перерізах однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда також лежать еліпси, параболи і гіперболи, хоча ці поверхні й не є поверхнями обертання.

### **Контрольні запитання**

1. Як називається поверхня, яка утворюється обертанням прямої лінії, що схрещується з віссю обертання?
2. Яка крива є обрисом однопорожнинного гіперболоїда обертання на площині проєкцій, паралельній його осі обертання?
3. Скільки сімей твірних має однопорожнинний гіперболоїд обертання?
4. Скільки прямолінійних твірних можна провести через точку, що належить однопорожнинному гіперболоїду обертання?

5. Скільки прямих ліній виділяє на однопорожнинному гіперболоїді обертання площина, дотична до нього?

6. Яка крива лежить у перерізі однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною, що перетинає його вісь обертання під кутом, відмінним від кута нахилу твірних до осі обертання?

7. Яка крива лежить у перерізі однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною, що складає з його віссю обертання кут, рівний куту нахилу твірних до осі обертання?

8. Яка крива лежить у перерізі однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною, віддаленою від осі обертання на відстань, меншу відстані твірної до тієї ж осі?

9. Яка крива лежить у перерізі однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною, віддаленою від осі обертання на відстань, рівну відстані твірної до тієї ж осі?

10. Яка крива лежить у перерізі однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною, віддаленою від осі обертання на відстань, більшу відстані твірної до тієї ж осі?

## РОЗДІЛ 11

### Гелікоїд і його зв'язки зі спіраллю Архімеда і евольвентою кола

Гелікоїдом називатимемо гвинтову поверхню, що описується прямою лінією, яка обертається з постійною кутовою швидкістю довкола нерухомої осі, перетинає або схрещується з нею під постійним кутом і одночасно переміщається уздовж неї поступально з постійною швидкістю. Звідси випливає, що кожна точка прямої лінії, що утворює гелікоїд, описує в просторі гвинтову лінію, причому всі гвинтові лінії мають загальну вісь, звану віссю гвинтової поверхні. Тому, перш ніж перейти до побудови гелікоїду, розглянемо циліндрову гвинтову лінію і її чудові властивості.

Називатимемо циліндровою гвинтовою лінією просторову криву, утворену рівномірним поступальним рухом точки уздовж твірної прямого кругового циліндра, тоді як його твірна здійснює рівномірний обертальний рух довкола осі поверхні. Циліндр, по якому переміщується точка, називатимемо твірним циліндром, а його вісь – віссю гвинтової лінії.

Побудуємо циліндрову гвинтову лінію. Задамо в просторі точку  $A$  і пряму лінію  $i$  – вісь гвинтової лінії. Передбачимо, що в одиницю часу точка здійснює повний оберт довкола осі і переміщається в напрямі, паралельному осі, на відстань, рівну висоті  $h$  твірного циліндра. Оскільки точка здійснює рівномірний обертальний і рівномірний поступальний рухи, в рівні одиниці часу вона буде обертатися на один і той же кут і підніматися на одну і ту ж висоту. Тому розділимо кут повного оберту точки, рівний  $360^\circ$ , на 12 рівних частин і на таке ж число рівних частин розділимо висоту  $h$  твірного циліндра або крок гвинтової лінії. Проведемо через точки ділення кола вертикальні лінії, а через точки ділення висоти твірного циліндра – горизонтальні лінії. Виділимо точки перетину

відповідних вертикальних і горизонтальних ліній і отримаємо фронтальну проекцію циліндрової гвинтової лінії. Покажемо на рис. 1 проекції твірного циліндра і циліндрової гвинтової лінії.

Побудуємо розгортку твірного циліндра у вигляді прямокутника, висота якого дорівнює висоті твірного циліндра, а його ширина – добутку числа  $\pi$  на діаметр твірного циліндра  $d$ . Розділимо ширину розгортки на 12 рівних частин і через точки ділення проведемо меридіани твірного циліндра, що проходять через виділені точки циліндрової гвинтової лінії. Перенесемо на розгортку точки циліндрової гвинтової лінії і виявимо, що на розгортці твірного циліндра циліндрова гвинтова лінія відображується у вигляді прямої лінії. Це пояснюється тим, що довжина відрізка прямої лінії, на яке точка переміщується по меридіану, пропорційна довжині дуги кола, яку проходить точка при повороті довкола осі гвинтової лінії. Крім того, кут нахилу образу циліндрової гвинтової лінії на розгортці твірного циліндра до її основи відповідає куту нахилу циліндрової гвинтової лінії до площини, перпендикулярної її осі. Звідси випливає, що якщо через точку циліндрової гвинтової лінії провести дотичну до неї, то кут нахилу дотичної буде рівним куту нахилу образу циліндрової гвинтової лінії на розгортці твірного циліндра.

Відмітимо, що побудова дотичної до циліндрової гвинтової лінії полегшується тим, що нам заздалегідь відома горизонтальна проекція дотичної. Дійсно, горизонтальна проекція дотичної проходить перпендикулярно радіусу кола, в яке проектується циліндрова гвинтова лінія. Фронтальна проекція дотичної знаходиться за допомогою напрямного конусу, твірні якого складають з площиною, перпендикулярній осі циліндрової гвинтової лінії, кут, рівний куту її нахилу. Покажемо на рис. 1 допоміжний напрямний конус і розгортку твірного циліндра з нанесеним на неї образом циліндрової гвинтової лінії.

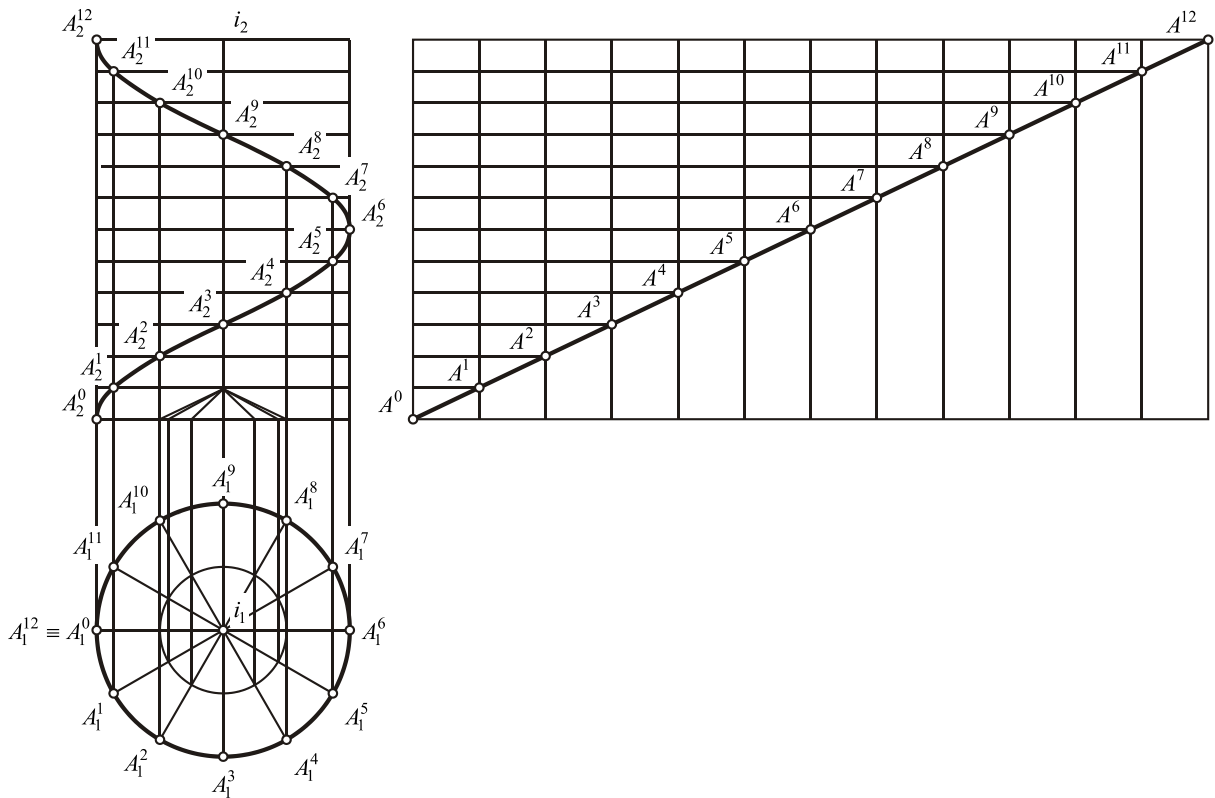


Рис. 1. Циліндрова гвинтова лінія та її образ на розгортці твірного циліндра

Таким чином, циліндрова гвинтова лінія має такі чудові властивості: образом циліндрової гвинтової лінії на розгортці твірного циліндра є пряма лінія;

кут нахилу дотичної, проведеної в будь-якій точці циліндрової гвинтової лінії, до площини, перпендикулярної її осі, дорівнює куту нахилу циліндрової гвинтової лінії до тієї ж площини, вимірюваного кутom нахилу образу циліндрової гвинтової лінії на розгортці твірного циліндра до його основи.

Звідси випливає, що циліндрова гвинтова лінія є лінією, дотична до якої складає постійний кут з відповідним меридіаном твірного циліндра.

Тепер ми можемо повернутися до розв'язання задачі про побудову гелікоїду. Розглянемо косий закритий гелікоїд, тобто лінійчату гвинтову поверхню, твірна якого перетинає її вісь під постійним кутom. Нехай

початковим положенням відрізка  $AB$  прямої лінії є твірна  $A^0B^0$ . Покажемо на рис. 2 побудову косою закритого гелікоїда, утвореного переміщенням відрізка  $AB$  прямої лінії, точка  $A$  якого описує гвинтову лінію, а точка  $B$  – ковзає по осі  $i$  гвинтової лінії. Перетнемо косий закритий гелікоїд площиною  $\Omega$ , що перпендикулярна осі гвинтової поверхні і проходить через нижню основу твірного циліндра гвинтової лінії. Побудуємо на рис. 2 горизонтальну проекцію перерізу лінійчатої гвинтової поверхні площиною  $\Omega$  і отримаємо чудову плоску криву лінію, звану спіраллю Архімеда. Крім того, на рис. 2 показано сім'ю спіралей Архімеда, отриманих за умови, що початкові положення відрізка  $AB$  прямої лінії задані твірними  $A^1B^1$ ,  $A^2B^2$ ,  $A^3B^3$  і так далі.

Таким чином, косий закритий гелікоїд має таку чудову властивість: якщо січна площина перпендикулярна осі гвинтової поверхні, то її перерізом є спіраль Архімеда.

Розглянемо прямий закритий гелікоїд, тобто лінійчату гвинтову поверхню, твірна якого перетинає її вісь під прямим кутом. Покажемо на рис. 3 прямий закритий гелікоїд.

Уявимо, що існує множина поверхонь, твірні яких проходять через гвинтову лінію і її вісь, наприклад, розглянутий нами косий закритий гелікоїд. Так от, французький математик Жан Менье в 1776 році довів, що серед всіх поверхонь, яких можна «натягнути» на гвинтову лінію і її вісь, прямий закритий гелікоїд має найменшу площу. Більш того, в 1842 році французький математик Е. Каталан довів, що прямий закритий гелікоїд – це єдина лінійчата поверхня, яка має найменшу площу серед всіх поверхонь із заданою границею.

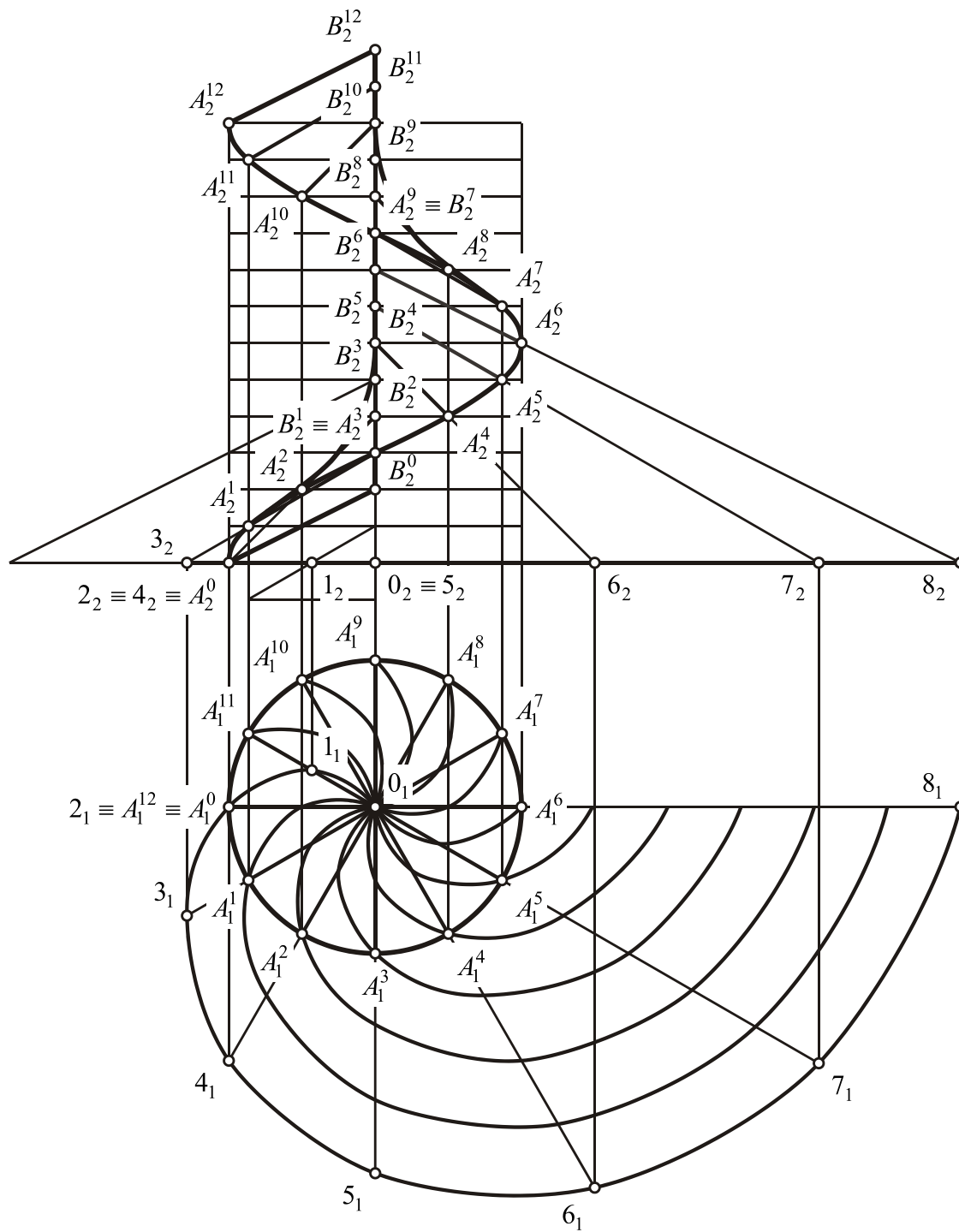


Рис. 2. Косий закритий гелікоїд

Таким чином, прямий закритий гелікоїд має таку чудову властивість: прямий закритий гелікоїд є єдиною лінійчатою поверхнею, що являє мінімальну поверхню.

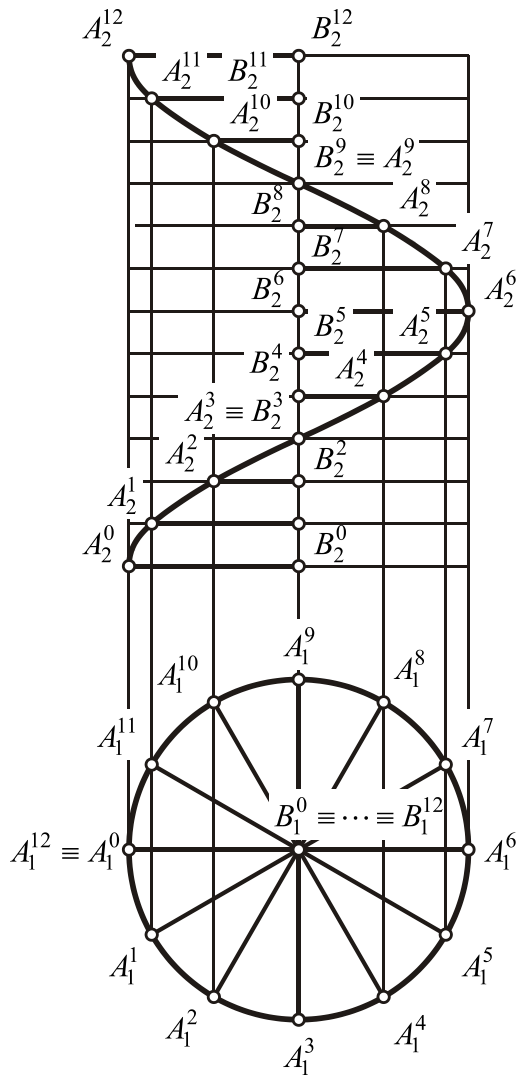


Рис. 3. Прямий закритий гелікоїд

Розглянемо тепер косий відкритий гелікоїд, тобто лінійчату гвинтову поверхню, твірна якого схрещується з її віссю під постійним кутом. Нехай кут нахилу твірною до площини, перпендикулярної осі гвинтової поверхні, дорівнює куту нахилу гвинтової лінії до тієї ж площини. Звідси випливає, що твірна даного косоного відкритого гелікоїда є дотичною до гвинтової лінії. Покажемо на рис. 4 гвинтову лінію, яку розглядатимемо як напрямну. Крім того, на рис. 4 показаний напрямний конус, твірні якого складають з площиною, перпендикулярній осі циліндрової гвинтової лінії, кут, рівний куту її нахилу. Нехай початковим положенням твірною є твірна, дотична до гвинтової лінії в точці  $A^0$ . Побудуємо за допомогою напрямного конуса

проекції дотичних до гвинтової лінії і отримаємо сім'ю твірних косою відкритого гелікоїда. Перетнемо косий відкритий гелікоїд площиною  $\Omega$ , що перпендикулярна осі гвинтової поверхні і проходить через нижню основу твірного циліндра. Побудуємо на рис. 4 горизонтальну проекцію перерізу лінійчатої гвинтової поверхні площиною  $\Omega$  і отримаємо чудову плоску криву лінію, звану евольвентою кола. Крім того, на рис. 4 показана сім'я евольвент кола, побудованих за умови, що початкові положення твірною задані твірними, дотичними до гвинтової лінії в точках  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  і так далі.

Таким чином, косий відкритий гелікоїд, твірні якого дотикаються гвинтовій лінії, має таку чудову властивість:

якщо січна площина перпендикулярна осі гвинтової поверхні, то її перерізом є евольвента кола.

Крім того, косий відкритий гелікоїд, утворений сім'єю дотичних до гвинтової лінії, є торсом, тобто лінійчатою поверхнею, твірні якої стосуються тієї, що направляє. Звідси випливає, що косий відкритий гелікоїд, утворений сім'єю дотичних до гвинтової лінії, є поверхнею, що розгортається. Це чудова властивість виділяє косий відкритий гелікоїд, твірні якого дотикаються гвинтовій лінії, серед інших лінійчатих поверхонь, тому що, окрім прямого кругового циліндра, прямого кругового конуса і косою відкритого гелікоїда, твірні якого дотикаються гвинтовій лінії, не існує інших лінійчатих поверхонь, що є поверхнями, що розгортаються.

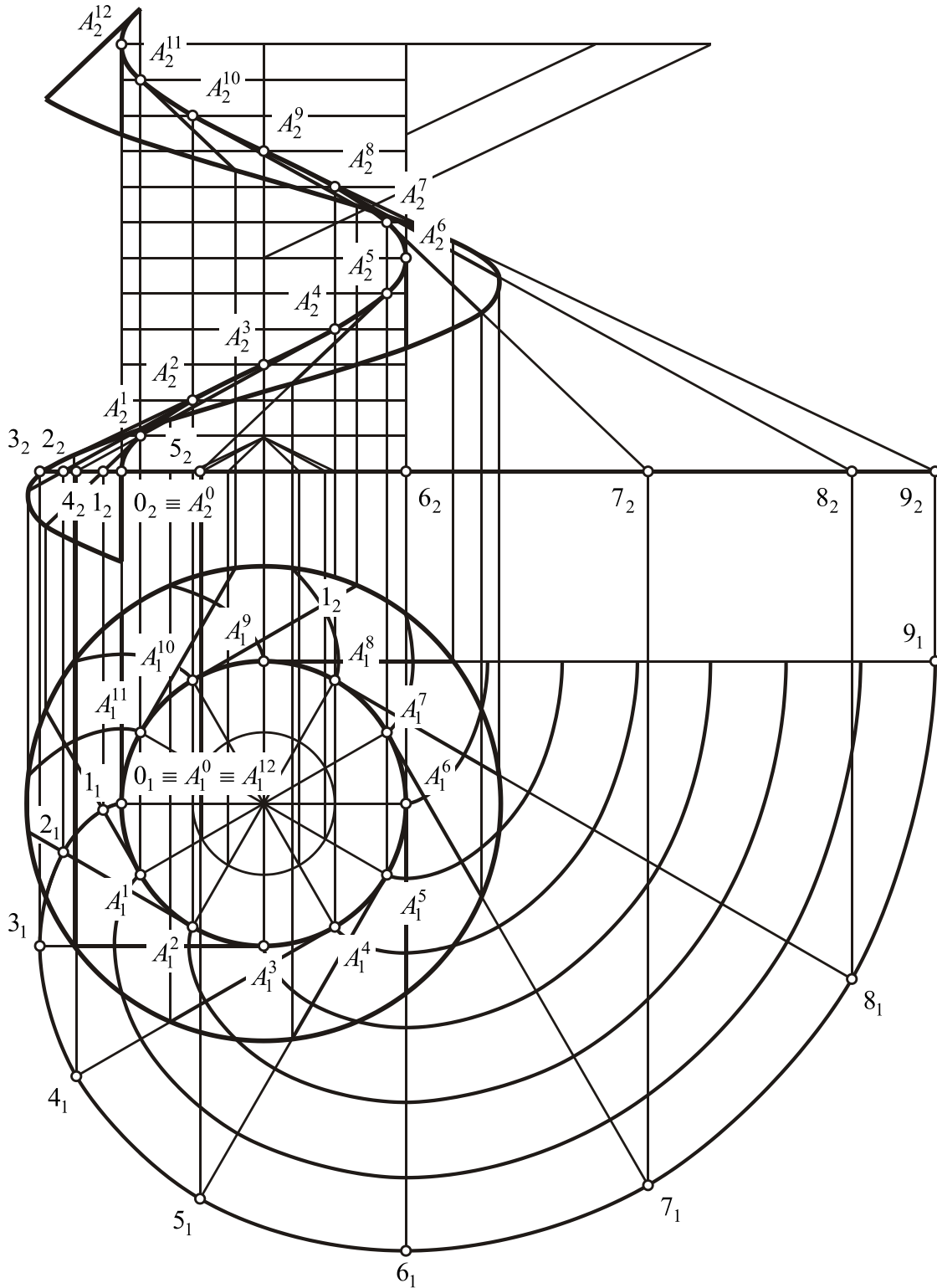


Рис. 4. Косий відкритий гелікоїд у вигляді сім'ї дотичних до гвинтової лінії

Зрозуміло, чудовий зв'язок косоного закритого гелікоїда із спіраллю Архімеда можна пояснити тим, що якщо точка гвинтової лінії здійснює в просторі рівномірний обертальний і рівномірний поступальний рухи, то

точка перетину твірної косою закритою гелікоїдою з площиною, перпендикулярній його осі, також здійснює рівномірний обертальний і рівномірний поступальний рух. Проте якщо твірна гелікоїдою дотикається гвинтовій лінії, то точка перетину твірною з площиною, перпендикулярній його осі, вже не здійснює рівномірного обертального руху. Це можна пояснити тим, що довжина відрізка твірною, кінцями якого є точка дотику гвинтової лінії і точка перетину її з площиною основи циліндра, пропорційна довжині відрізка прямої лінії, кінець якого описує евольвенту кола. Дійсно, якщо дотична до основи циліндра є проекцією твірної, дотичною до гвинтової лінії, а довжина відрізка, що описує евольвенту кола, дорівнює довжині дуги кола, то можна передбачити, що довжина відрізка твірної гелікоїдою від точки дотику гвинтової лінії до точки перетину її з площиною основи циліндра буде пропорційна довжині дуги гвинтової лінії.

Проте, чудові зв'язки косою закритою гелікоїдою із спіраллю Архімеда і косою відкритою гелікоїдою, твірні якого дотикаються гвинтовій лінії, з евольвентою кола наводять на думку про те, що існує загальний закон утворення поверхонь, а закони, за якими утворюються гелікоїди, є його окремими випадками.

### **Контрольні запитання**

1. Яку поверхню описує пряма лінія, яка обертається з постійною кутовою швидкістю довкола нерухомої осі, перетинає або схрещується з нею під постійним кутом і одночасно переміщається уздовж неї поступально з постійною швидкістю?

2. У яку лінію перетвориться циліндрова гвинтова лінія на розгортці твірною циліндра?

3. Які властивості має кут нахилу дотичної, проведеної в будь-якій точці циліндрової гвинтової лінії, до площини, перпендикулярної її осі?

4. Як називається лінійчата гвинтова поверхня, твірна якої перетинає її вісь під постійним кутом?

5. Яка крива є лінією перетину косою закритого гелікоїда з площиною, перпендикулярній його осі?

6. Як називається лінійчата гвинтова поверхня, твірна якою перетинає її вісь під прямим кутом?

7. Яку властивість має площа прямого закритого гелікоїду?

8. Як називається лінійчата гвинтова поверхня, твірна якої схрещується з її віссю під постійним кутом?

9. Яка крива є лінією перетину косою відкритого гелікоїда, твірні якого дотикаються гвинтовій лінії, з площиною, перпендикулярній його осі?

10. Яка властивість розгортки косою відкритого гелікоїда, твірні якого дотикаються гвинтовій лінії, ставить його в один ряд з прямим круговим циліндром і прямим круговим конусом?

## РОЗДІЛ 12

### Гіперболічний параболоїд і його зв'язки з параболою і гіперболою

Окрім однопорожнинного гіперболоїда, є ще одна чудова поверхня, яку визначають три прямолінійні напрямні, а саме: гіперболічний параболоїд. Аби перетворити однопорожнинний гіперболоїд в гіперболічний параболоїд, необхідно напрямні однопорожнинного гіперболоїда перетворити на три прямі, що схрещуються і паралельні одній площині. Площину, паралельну трьом напрямним гіперболічного параболоїду, називатимемо першою площиною паралелізму. Множина прямих ліній, що перетинають три напрямні гіперболічного параболоїду, визначає першу сім'ю його твірних. При цьому прямі лінії, що входять в першу сім'ю твірних гіперболічного параболоїда, також паралельні деякій площині, яку називатимемо другою площиною паралелізму.

Дамо наочне доведення тому, що твірні гіперболічного параболоїду паралельні деякій площині. Нехай прямолінійними напрямними служать дві діагоналі  $DE$  і  $BG$ , що схрещуються і лежать у протилежних гранях  $ADEH$  і  $BCFG$  деякого куба, і пряма лінія  $KL$ , що проходить через центр його симетрії і перпендикулярна грані  $CDGH$ . Виділимо на одній з діагоналей точку і побудуємо площину, що проходить через дану точку і протилежну діагональ. Знайдемо точку перетину напрямної, що проходить через центр симетрії куба, з побудованою площиною. Проведемо через точку, виділену на діагоналі, і побудовану точку пряму, яка перетикне другу діагональ, тому що належить площині, що проходить через другу діагональ. Ця пряма і буде твірною гіперболічного параболоїду. Якщо на першій діагоналі вибрати ряд довільних точок і повторити приведені вище дії, то отримаємо сім'ю твірних гіперболічного параболоїду, що перетинають все три його напрямні. Покажемо на рис. 1 отриману сім'ю

твірних і побачимо, що всі прямі лінії, що входять в дану сім'ю, паралельні двом іншим протилежним граням  $ABEF$  і  $CDGH$  куба.

Отже, у гіперболічного параболоїда є дві площини паралелізму.

Крім того, рис. 1 наочно доводить, що якщо узяти дві діагоналі  $DE$  і  $BG$ , що належать протилежним граням куба  $ADEH$  і  $BCFG$ , що схрещуються, і через його центр симетрії перпендикулярно граням  $ABEF$  і  $CDGH$  провести пряму лінію  $KL$ , то точки їх перетину площиною, паралельної грані  $CDGH$ , лежатимуть на одній прямій лінії.

Виділимо з першої сім'ї твірних гіперболічного параболоїда три довільні прямі лінії і розглянемо їх як три напрямні, що задають гіперболічний параболоїд. Нехай його напрямними будуть дві діагоналі  $BE$  і  $DG$ , проведені в протилежних гранях  $ABEF$  і  $CDGH$  куба, що схрещуються, і пряма лінія  $MN$ , що проходить через центр симетрії куба і перпендикулярна граням  $ADEH$  і  $BCFG$ , а площиною паралелізму – грань  $ADEH$ . Покажемо на рис. 1 результат побудови лінійчатої поверхні за трьома другим напрямним і другій площині паралелізму і побачимо, що три другі напрямні гіперболічного параболоїда задають другу сім'ю твірних, в яке входять три що його перші напрямні. Крім того, рис. 1 показує, що фронтальна проекція лінійчатої поверхні з другою сім'єю твірних точнісінько відповідає фронтальній проекції лінійчатої поверхні з першою сім'єю твірних. Це означає, що обидві сім'ї твірних належать одній і тій же поверхні.

Отже, у гіперболічного параболоїда є дві сім'ї твірних.

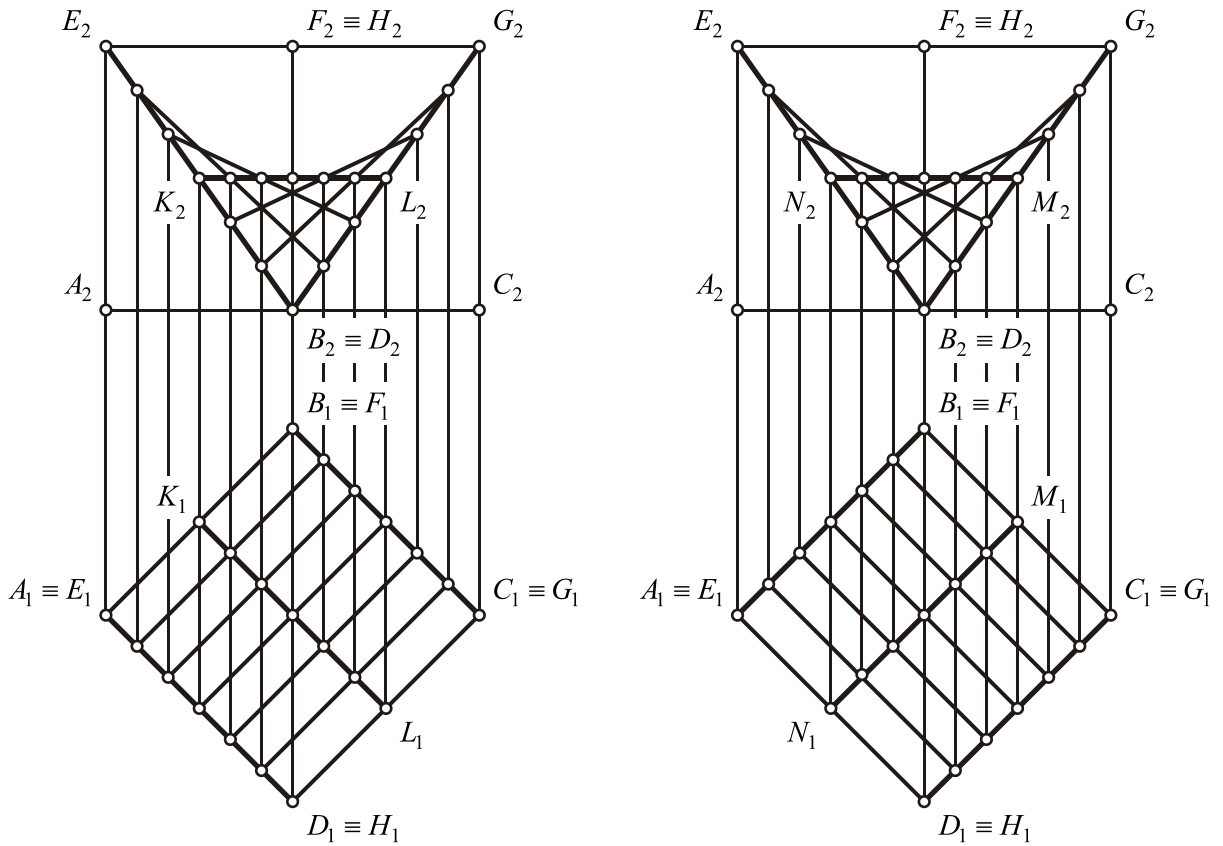


Рис. 1. Гіперболічний параболоїд з трьома напрямними  $DE$ ,  $BG$  і  $KL$ , паралельними площині  $ADEH$  (зліва), і трьома напрямними  $BE$ ,  $DG$ , і  $MN$ , паралельними площині  $ABEF$  (справа)

Розглянемо чудову властивість гіперболічного параболоїда, яка полягає в тому, що через кожен його точку можна провести дві прямі лінії, що належать першій і другій сім'ям твірних. Дійсно, якщо дві сім'ї твірних утворюють одну і ту ж поверхню, то серед твірних, що належать першій і другій сім'ям, завжди можна знайти дві прямі лінії, що перетинаються в одній її точці. Це чудова властивість виділяє гіперболічний параболоїд серед інших лінійчатих поверхонь, тому що, окрім площини, гіперболічного параболоїда і однопорожнинного гіперболоїда, не існує інших лінійчатих поверхонь, через кожен точку яких можна провести більш за одну пряму.

Звідси випливає, що площина, дотична, до гіперболічного параболоїда виділяє на ньому дві прямі лінії, що належать двом сім'ям

твірних і перетинаються в точці дотику. При цьому площина, що проходить через одну пряму лінію, що належить однієї сім'ї твірних, перетинає гіперболічний параболоїд по тій же прямій лінії.

Попри те, що спосіб побудови гіперболічного параболоїда як сім'ї прямих ліній, що перетинають три прямолінійні напрямні, зумовлює його зв'язок з однопорожнинним гіперболоїдом, на практиці застосовують інший спосіб його побудови. Це зумовлено тим, що лише на рис. 1 можна легко побудувати пряму лінію, що перетинає три прямі лінії. Дійсно, аби на рис. 1 побудувати твірну, необхідно через точки двох діагоналей  $DE$  і  $BG$ , що лежать у протилежних гранях куба  $ADEH$  і  $BCFG$ , що схрещуються, на горизонтальній площині проєкції провести пряму лінію, паралельну проєкції його третьої грані  $CDGH$ . Побудова сім'ї прямих ліній, що перетинають три прямі лінії, в загальному випадку є достаньку громіздкою і складною задачею. Якщо замість третьої напрямної взяти пряму лінію, що належить першій площині паралелізму і віддалену у нескінченність, то перейдемо до другого, простішого способу задання гіперболічного параболоїда, а саме: способу його задання за допомогою двох прямолінійних напрямних і площини паралелізму. Виділимо в другій сім'ї твірних дві довільні прямі лінії, паралельні деякій площині. Оскільки довільна пряма лінія, що перетинає дві задані прямі, обов'язково перетикне пряму лінію, віднесену у нескінченність, положення другої площини паралелізму може бути вибране довільно. Отже, дві прямі лінії, що схрещуються, паралельні одній площині, визначають множину гіперболічних параболоїдів, форма яких залежить від вибору другої площини паралелізму. Проте незалежно від вибору другої площини паралелізму гіперболічний параболоїд завжди має дві взаємно перпендикулярні площини симетрії, що перетинають його поверхню по двох параболах.

Візьмемо куб і проведемо в його протилежних гранях  $ADEH$  і  $BCFG$  діагоналі  $DE$  і  $BG$ , що є двома прямими, що схрещуються. Нехай дані прямі, що схрещуються, будуть напрямними, а одна з інших граней куба, наприклад  $CDGH$ , – площиною паралелізму гіперболічного параболоїду. Покажемо на рис. 2, дві сім'ї прямолінійних твірних, паралельних двом площинам паралелізму  $ABEF$  і  $CDGH$ , і дамо наочне уявлення про те, як прямі лінії, що входять в першу сім'ю твірних, перетинаються в одній точці з прямими лініями, що належать другій сім'ї твірних. Площинами симетрії гіперболічного параболоїда, показаного на рис. 2, є діагональні площини куба  $ACEG$  і  $BDFH$ , а віссю симетрії – пряма лінія, по якій перетинаються площини симетрії. Відмітимо, що площини симетрії гіперболічного параболоїда, показаного на рис. 2, збігаються з площинами, яким належать лінія звуження, що проходить через точки  $E$  і  $G$ , і лінія звуження, що проходить через точки  $B$  і  $D$ . При цьому обидві лінії звуження гіперболічного параболоїда є параболами з рівними відстанями від фокуса до директриси.

Крім того, рис. 2 показує, що зображення гіперболічного параболоїду не зміняться, якщо напрямними будуть діагоналі  $BE$  і  $DG$ , що лежать у двох інших гранях куба  $ABEF$  і  $CDGH$ , що схрещуються, а площиною паралелізму – грань куба  $ADEH$ , паралельна другій сім'ї твірних. Отже, якщо другою площиною паралелізму буде одна з площин, яким належать перші напрямні, а другими напрямними будуть діагоналі, що схрещуються і лежать у двох гранях куба, паралельних першій площині паралелізму, то отримаємо той же гіперболічний параболоїд, що і в першому випадку.

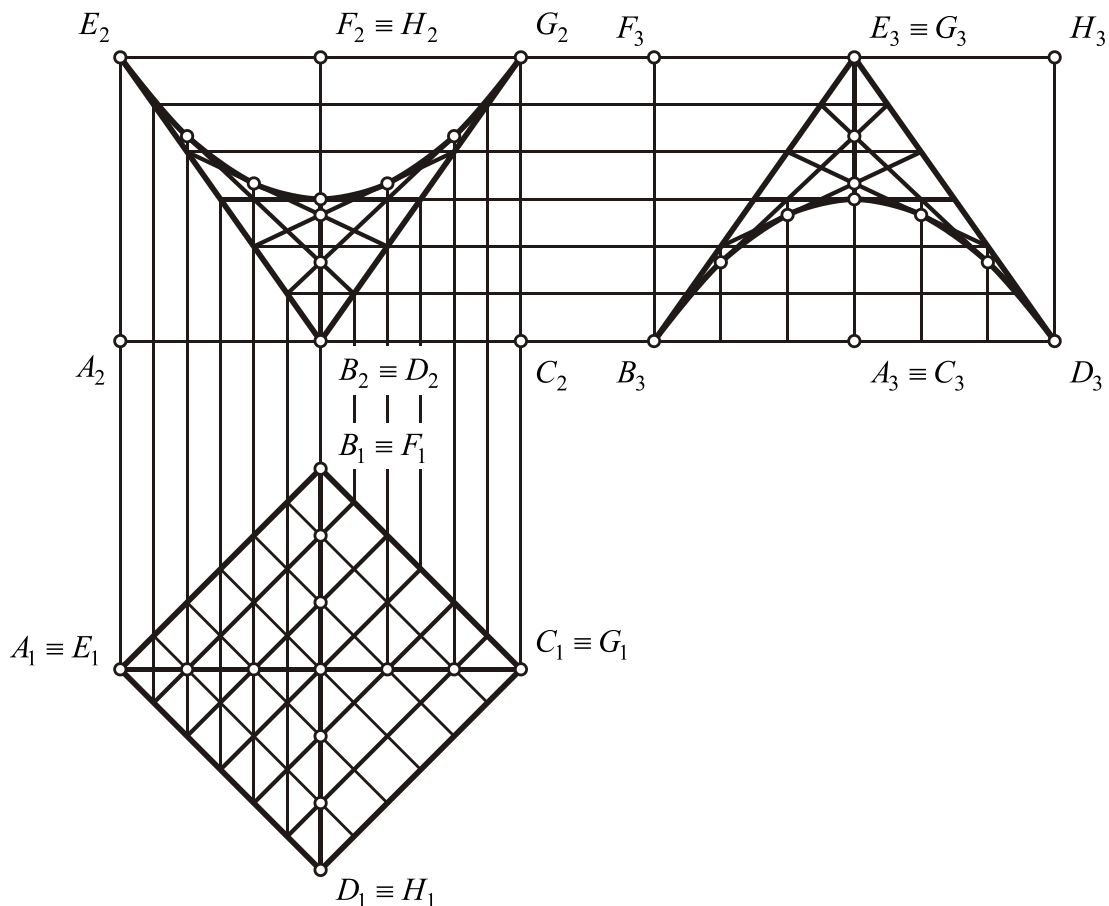


Рис. 2. Гіперболічний параболоїд з двома напрямними  $DE$  і  $BG$  і площиною паралелізму  $CDGH$

Розглянемо метаморфози гіперболічного параболоїда, засновані на таких його чудових властивостях:

якщо січна площина паралельна осі симетрії гіперболічного параболоїда, то його перерізом є парабола або пряма лінія;

якщо січна площина перпендикулярна осі симетрії гіперболічного параболоїда, то його перерізом є гіпербола або дві прямі лінії, що перетинаються і є асимптотами двох сімей гіпербол, які можна виділити на його поверхні.

Наприклад, на рис. 3 поданий геометричний образ, який приймає гіперболічний параболоїд, якщо його перетнути двома паралельними площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ , паралельними осі симетрії, і однією площиною  $\Omega$ ,

перпендикулярною осі симетрії. На рис. 4 поданий геометричний образ, який приймає гіперболічний параболоїд, якщо його розітнути двома паралельними площинами  $\Omega^1$  і  $\Omega^2$ , перпендикулярними осі симетрії, а на рис. 5 – геометричний образ, який приймає гіперболічний параболоїд, якщо його перетнути чотирма площинами  $\Sigma^1$ ,  $\Sigma^2$ ,  $\Sigma^3$  і  $\Sigma^4$ , паралельними осі симетрії. Звернемо увагу на рис. 4, який наочно доводить, що якщо січна площина проходить нижче за «сідло» поверхні, то утворюється одна сім'я гіпербол, а якщо січна площина проходить вище за «сідло» поверхні, то утворюється інша сім'я гіпербол. Загальним для обох сімей гіпербол є те, що їх асимптотами є прямі лінії  $a$  і  $b$ , за якими площина  $\Omega^3$ , перпендикулярна осі симетрії поверхні, дотикається її «сідла». Крім того, рис. 3–5 показують, що одна сім'я твірних виділяє у відповідних січних площинах лише по одній половині параболи або гіперболи. Отже, аби на рис. 3–5 отримати повноцінні зображення гіперболічного параболоїду, необхідно розглядати дві сім'ї твірних і дві площини паралелізму.

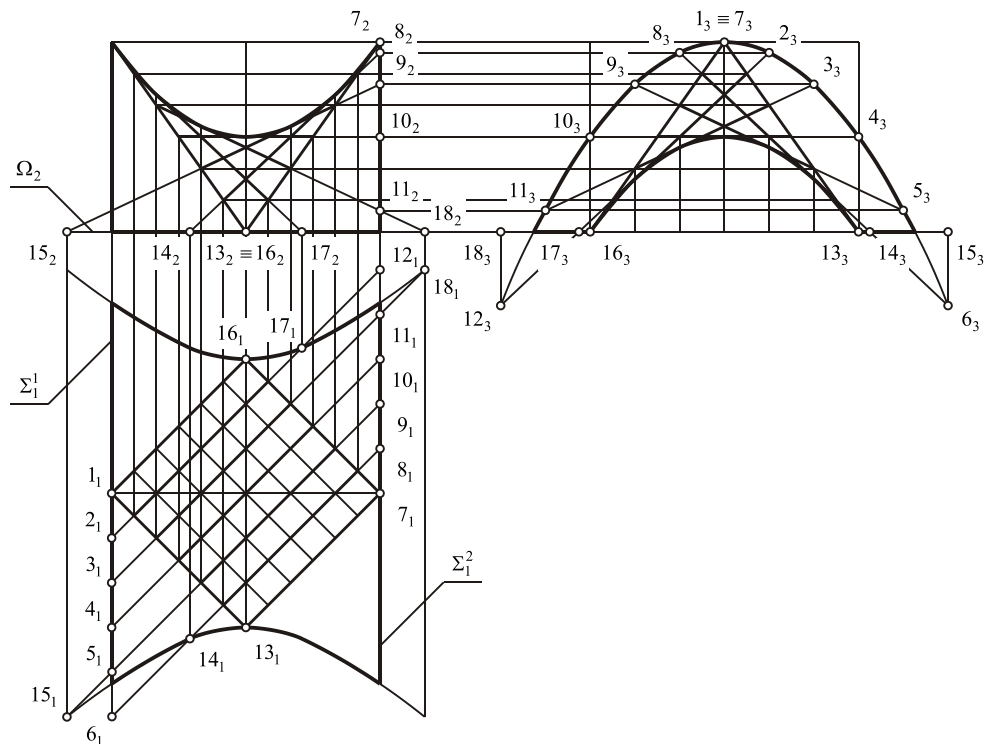


Рис. 3. Гіперболічний параболоїд, усічений двома паралельними площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ , паралельними осі симетрії, і однією площиною  $\Omega$ , перпендикулярній осі симетрії

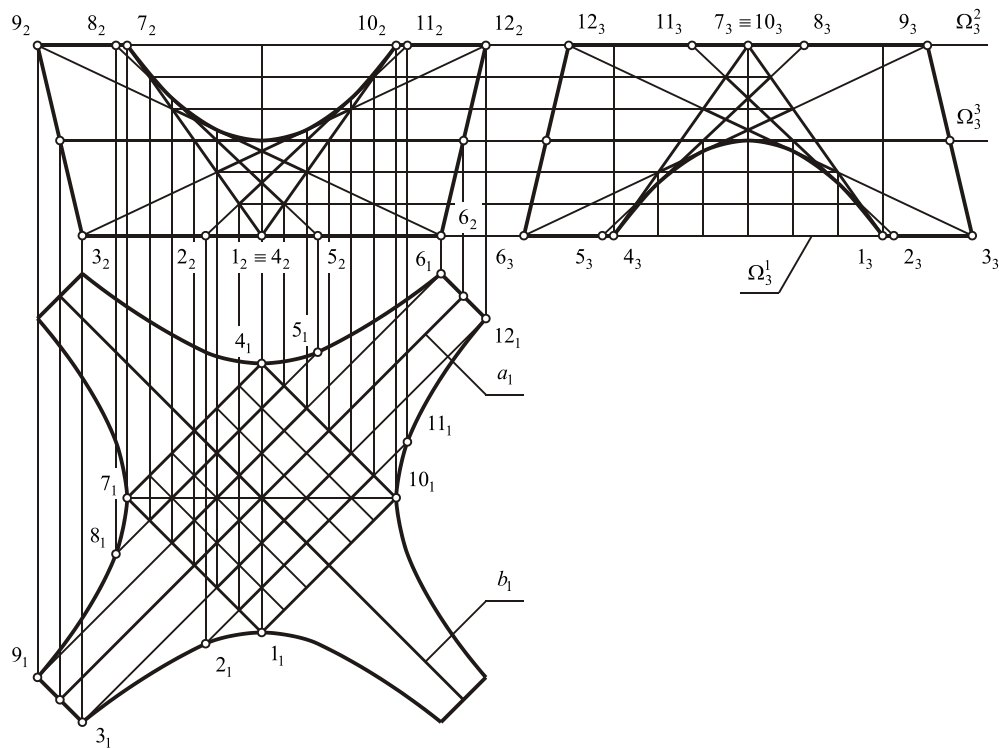


Рис. 4. Гіперболічний параболоїд, усічений двома паралельними площинами  $\Omega^1$  і  $\Omega^2$ , перпендикулярними осі симетрії

Візьмемо той же куб, що і в попередніх випадках, і знову розглянемо дві діагоналі  $DE$  і  $BG$ , що належать його протилежним граням  $ADEH$  і  $BCFG$  і схрещуються, як напрямні гіперболічного параболоїда. Нехай в даному випадку площиною паралелізму є площина  $ACEG$ , що проходить через протилежні ребра куба  $AE$  і  $CG$  і паралельна фронтальній площині проєкцій. Покажемо на рис. 6 результат переміщення твірної паралельно вибраної площини паралелізму і відзначимо, що особливістю отриманого гіперболічного параболоїда є те, що його фронтальна проєкція подібна до фронтальної проєкції гіперболічного параболоїда, показаного на рис. 2. Відмітимо, що ця подібність не порушується навіть тим, що на рис. 6 лінія звуження, що проходить через точки  $P$  і  $Q$ , гіперболічного параболоїда

при погляді зверху зображується у вигляді діагоналі його горизонтальної проєкції, а не у вигляді прямої лінії, паралельній фронтальній площині проєкцій. Крім того, як показує рис. 6, лінія звуження, що проходить через точки  $P$  і  $Q$ , і лінія звуження, що проходить через точки  $B$  і  $D$ , на профільній площині проєкцій зображуються у вигляді парабол з рівними відстанями від фокуса до директриси. До речі, однієї з площин симетрії гіперболічного параболоїда, поданого на рис. 6, є площина, що проходить через точки  $P$  і  $Q$ , і перпендикулярна горизонтальній площині проєкцій, тобто площина, що виділяє лінію звуження, що проходить через ті ж точки  $P$  і  $Q$ . Проте друга площина симетрії не збігається з площиною, в якій лежить лінія звуження, що проходить через точки  $B$  і  $D$ , тому що, як було сказано вище, площини симетрії перпендикулярні одна одній.

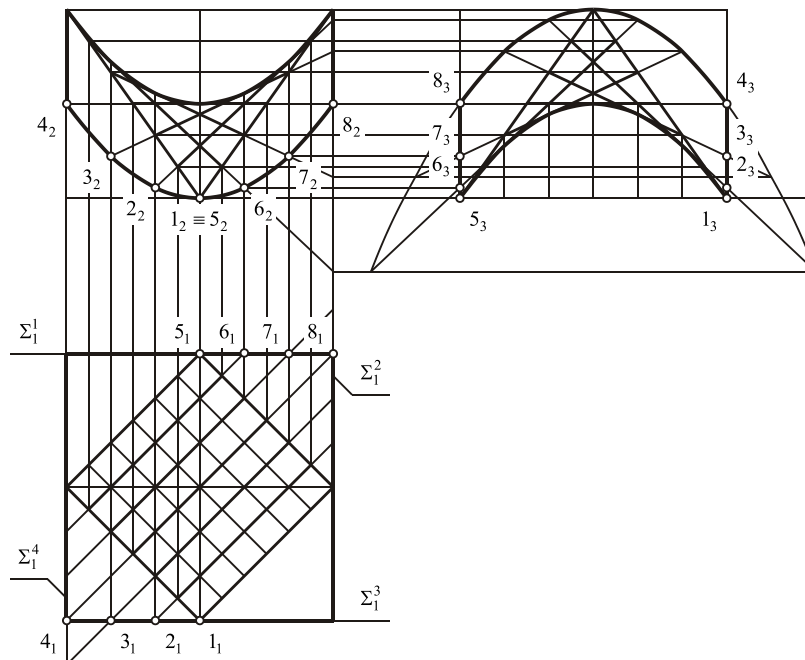


Рис. 5. Гіперболічний параболоїд, усічений чотирма площинами  $\Sigma^1$ ,  $\Sigma^2$ ,  $\Sigma^3$  і  $\Sigma^4$ , паралельними осі симетрії

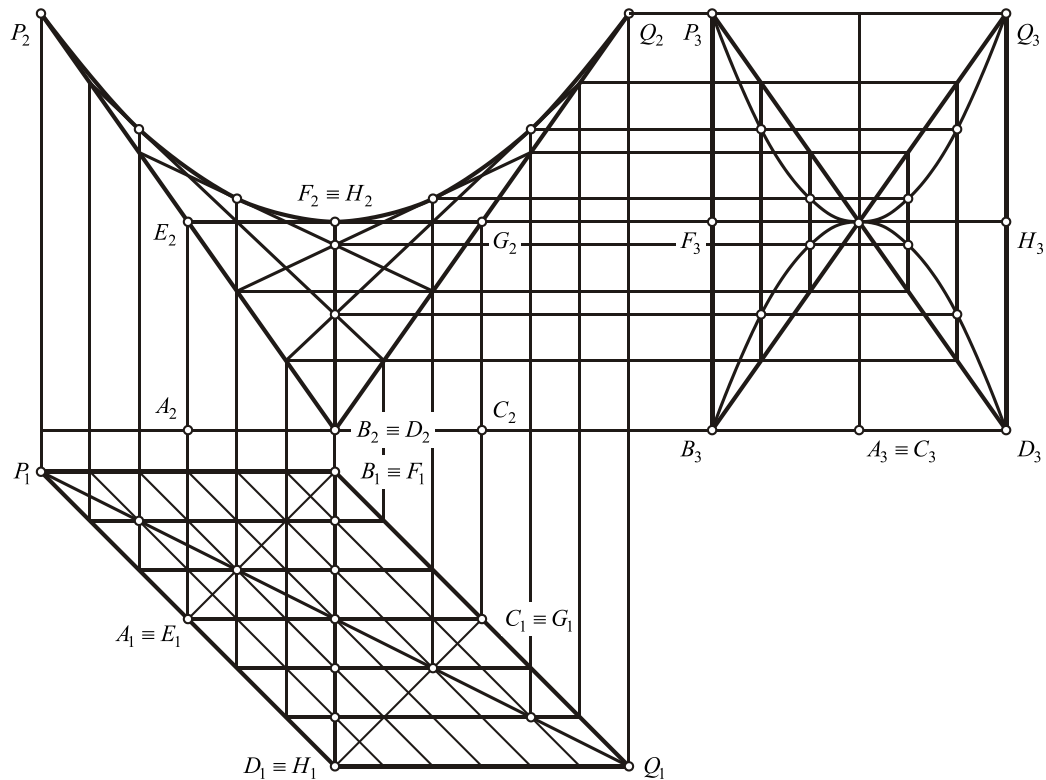


Рис. 6. Гіперболічний параболоїд з двома напрямними  $DE$  і  $BG$  і площиною паралелізму  $ACEG$

Наступна чудова властивість гіперболічного параболоїда полягає в тому, що переміщення в просторі прямої лінії по трьох нерухомих прямих лініях, паралельних одній площині, – це не єдиний спосіб його побудови. Гіперболічний параболоїд можна отримати за допомогою паралельного переносу в просторі параболі, що лежить в одній з його площин симетрії. Якщо вершина параболі у всіх своїх положеннях дотикається параболі, що має ту ж відстань від фокуса до директриси, але належить іншій площині симетрії, отримаємо ту ж поверхню, що була задана трьома прямими, що схрещуються, або двома прямими, що схрещуються, і площиною паралелізму. Це твердження випливає з розгляду рис. 3, який наочно доводить, що у ліній звуження гіперболічного параболоїда і парабол, що виділяються площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ , відстані від фокуса до директриси рівні. Отже, гіперболічний параболоїд є як лінійчатою поверхнею з двома прямолінійними напрямними і площиною паралелізму,



площині, що проходить через напрямну. Якщо дану поверхню паралельного переносу перетнути площиною, перпендикулярною осям парабол, то отримуємо поверхню, звану еліптичним параболоїдом. Ця назва пояснюється тим, що у загальному випадку перерізом еліптичного параболоїда площиною, перпендикулярній його осі симетрії, є еліпс. Якщо напрямна і твірна поверхні паралельного переносу є параболами з рівними параметрами, то еліптичний параболоїд перетвориться у параболоїд обертання. Звідси випливає, що параболоїд обертання є окремим випадком еліптичного параболоїда, в якого напрямна і твірна є параболами з різними відстанями від фокуса до директриси. Покажемо на рис. 8 параболоїд обертання, побудований як поверхня паралельного переносу, в якій напрямна  $n$  і твірна  $t$  є параболами з рівними параметрами. Розглянемо рис. 8, який наочно доводить, що точки перетину твірних з площиною, перпендикулярною осям парабол, дійсно утворюють коло.

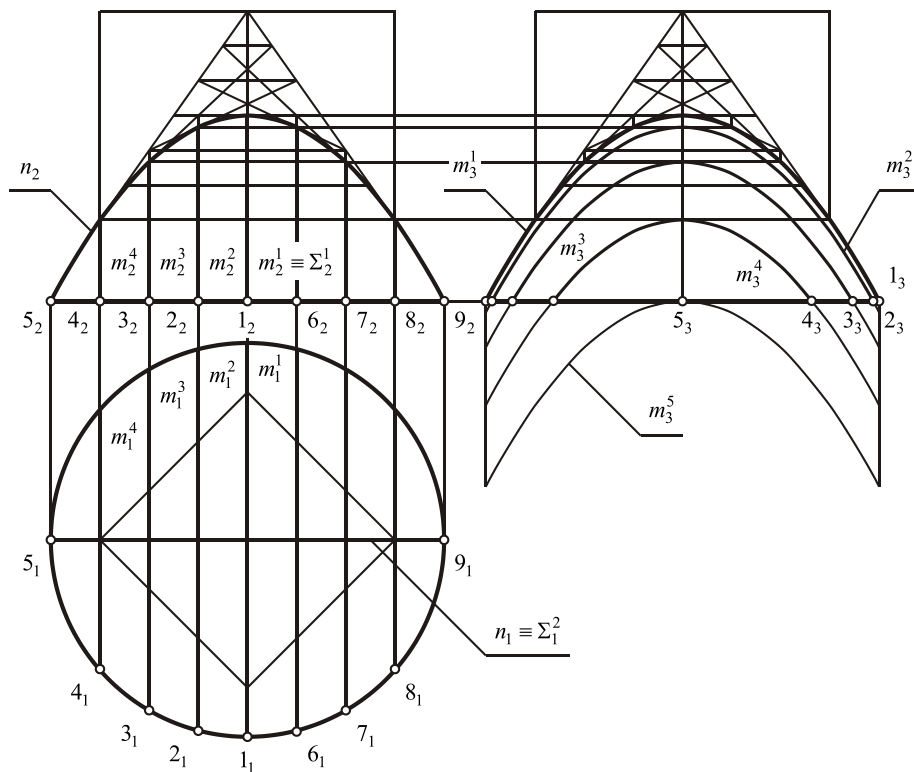


Рис. 8. Параболоїд обертання як поверхня паралельного переносу із твірною  $t$ , паралельній площині  $\Sigma^1$ , і напрямною  $n$ , що лежить у площині

$$\Sigma^2$$

Звернемо увагу, що якщо параболоїд обертання можна побудувати як поверхню паралельного переносу, в якій напрямна і твірна є параболою з рівними параметрами, то сферу не можна отримати за допомогою паралельного переносу кола, діаметр якого дорівнює діаметру сфери. Дійсно, на рис. 8 перерізи параболоїда обертання площинами, паралельними його осі симетрії, є відрізками парабол з рівними відстанями від фокуса до директриси, тоді як перерізи сфери площинами, паралельними одній з її осей симетрії, є колами з різними діаметрами. Це чудова властивість виділяє параболоїд обертання серед інших поверхонь обертання.

Проте повернемося до гіперболічного параболоїда. Як було показано вище, поверхня, утворена паралельним переносом параболи, називається еліптичним параболоїдом, тому що її перерізом площиною, перпендикулярній її осі симетрії, є еліпс. Отже, лінійчата поверхня з двома прямолінійними напрямними і площиною паралелізму тому і називається гіперболічним параболоїдом, що якщо розглядати її як поверхню паралельного переносу, то її перерізом площиною, перпендикулярній її осі симетрії, є гіпербола.

Попри те, що рис. 2–6 наочно доводять чудові властивості, якими володіє гіперболічний параболоїд, їх не можна пояснити. Наприклад, чому прямі лінії, що перетинають три нерухомі прямі лінії, паралельні деякій площині, утворюють множину прямих ліній, паралельних іншій площині? Чому в перерізах поверхні, утвореної переміщенням в просторі прямої лінії по двох іншим прямим лініям, площинами, перпендикулярними або паралельними її осі симетрії, утворюються гіперболи або параболи, а не будь-які інші лінії? Зрозуміло, можна довести, що гіперболічний параболоїд є поверхнею другого порядку і тому його перерізами є

гіперболи або параболи, але пояснити, чому прямі лінії, що перетинають дві нерухомі прямі лінії і паралельні деякій площині, утворюють поверхню другого порядку, на нашу думку, не можна.

До речі, оскільки гіперболічний параболоїд у всіх напрямках тягнеться у нескінченність, його перерізом будь-якою площиною не може бути еліпс. Тому не існує такої поверхні обертання, яку можна за допомогою розтягування або стискування перетворити на гіперболічний параболоїд, – дійсно, на будь-якій поверхні обертання завжди можна виділити кола, які при розтягуванні або стискуванні перетворюються в еліпси. Це чудова властивість відрізняє гіперболічний параболоїд від однопорожнинного гіперболіда обертання, який можна отримати за допомогою розтягування з двопорожнинного прямого кругового конуса.

### **Контрольні запитання**

1. Як називається поверхня, яка утворюється переміщенням у просторі прямої лінії, що перетинає три прямі лінії, що схрещуються і паралельні одній площині?

2. Скільки площин паралелізму має гіперболічний параболоїд?

3. Скільки сімей твірних має гіперболічний параболоїд?

4. Скільки прямолінійних твірних можна провести через точку, що належить гіперболічному параболоїду?

5. Скільки прямих ліній виділяє на гіперболічному параболоїді площина, дотична до нього в точці перетину з його віссю симетрії?

6. Як називається поверхня, яка утворюється переміщенням у просторі прямої лінії, що паралельна одній площині і перетинає дві прямі лінії, що схрещуються і паралельні іншій площині?

7. Які криві є перерізами гіперболічного параболоїда площиною, паралельній його осі симетрії?

8. Які криві є перетинами гіперболічного параболоїда площиною, перпендикулярній його осі симетрії?

9. Як називається поверхня, яка утворюється паралельним переносом у просторі параболи, що дотикається вершиною параболи з тими ж параметрами, що проходить через вісь симетрії першої параболи і перпендикулярної її площини, з гілками, оберненими у бік, протилежний до першої параболи?

10. Як називається поверхня, яка утворюється паралельним переносом у просторі параболи, що дотикається вершиною параболи, що проходить через вісь симетрії першої параболи і перпендикулярної її площини, з гілками, оберненими у той ж бік, що і перша парабола?

## РОЗДІЛ 13

### Однопорожнинний гіперболоїд і його зв'язки з еліпсом, параболою і гіперболою

Якщо на площині пряма лінія може перетнути множину прямих ліній, то у просторі число довільних прямих ліній, які можна перетнути однією прямою лінією, дорівнює трьом.

Доведемо, що якщо у просторі задано три прямі лінії, не паралельні одній площині, і на одній прямій лінії вибрати довільну точку, то існує єдина пряма лінія, що проходить через вибрану точку і перетинає дві інші прямі лінії. Задамо у просторі три прямі лінії  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , не паралельні одній площині. Візьмемо на прямій лінії  $a$  довільну точку  $A$ . Проведемо через неї множину прямих ліній, що перетикаються з прямою лінією  $c$ . При цьому множина прямих ліній утворює у просторі площину, що перетикає пряму лінію  $b$  у точці  $B$ . Отже, через точку  $A$  можна провести пряму лінію, що проходить через точку  $B$  і перетикає пряму лінію  $c$ . Оскільки точка  $A$  була вибрана на прямій лінії  $a$  довільно, через кожну точку прямої лінії  $a$  можна провести єдину пряму лінію, що перетикає прямі лінії  $b$  і  $c$ . Виберемо на прямій лінії  $a$  множину точок, проведемо через них прямі лінії, що перетинають прямі  $b$  і  $c$ , й отримаємо множину прямих ліній, що утворюють лінійчасту поверхню.

Звідси випливає, що три прямі лінії  $a$ ,  $b$  і  $c$ , не паралельні одній площині, задають у просторі лінійчасту поверхню.

Введемо у простір три прямі лінії, не паралельні одній площині, і розглянемо їх як напрямні лінійчатої поверхні. Візьмемо куб і проведемо в його протилежних гранях  $ADEH$  і  $BCFG$  діагоналі  $DE$  і  $BG$ , що схрещуються. Нехай дані прямі, що схрещуються, будуть двома

напрямними лінійчатої поверхні, а її третьою напрямною буде пряма лінія  $KL$ , що проходить через центр симетрії куба і перпендикулярна ребрам  $BF$  і  $DH$ . Виберемо на діагоналі  $DE$  довільну точку і побудуємо фронтальну проекцію твірної лінійчатої поверхні, що перетинає діагональ  $BG$ . Побудуємо горизонтальну проекцію твірною, що проходить через горизонтальні проекції точок її перетину з діагоналями  $DE$  і  $BG$ . Виділимо точку перетину горизонтальних проекцій твірної і прямої  $KL$ . Оскільки фронтальні проекції виділеної точки перетину і прямої  $KL$  збігаються, фронтальна проекція твірною перетинає фронтальні проекції діагоналей  $DE$ ,  $BG$  і прямої  $KL$ . Якщо на діагоналі  $DE$  вибрати ряд довільних точок і повторити приведені вище дії, то отримаємо сім'ю твірних лінійчатій поверхні, які перетинають всі три напрямні.

Покажемо на рис. 1 отриману сім'ю твірних і побачимо, що кривою, що огинає їх профільні проекції, є еліпс. Звідси випливає, що дана лінійчата поверхня має порожнину, проекція якої на площину, паралельну прямій  $KL$  і вертикальній осі симетрії куба, утворює еліпс. Водночас час слід зауважити, що дана лінійчата поверхня не є неперервною, тому що її порожнина має розрив, що проходить по прямій лінії, заданій діагоналлю нижньої основи куба, паралельної напрямної  $KL$ . Дійсно, чим ближче фронтальна проекція твірною наближається до вертикальної лінії, тим швидше точки її перетину з напрямними  $DE$  і  $BG$  спрямовуються у нескінченність, і в граничному положенні твірна збігається з діагоналлю нижньої основи куба, паралельної напрямної  $KL$ . Зрозуміло, неперервність лінійчатої поверхні можна відновити, якщо в сім'ю твірних ввести додаткову твірну у вигляді діагоналлі нижньої основи куба, паралельної напрямної  $KL$ . Таким чином, існування лінії розриву є першою чудовою властивістю даної лінійчатої поверхні.

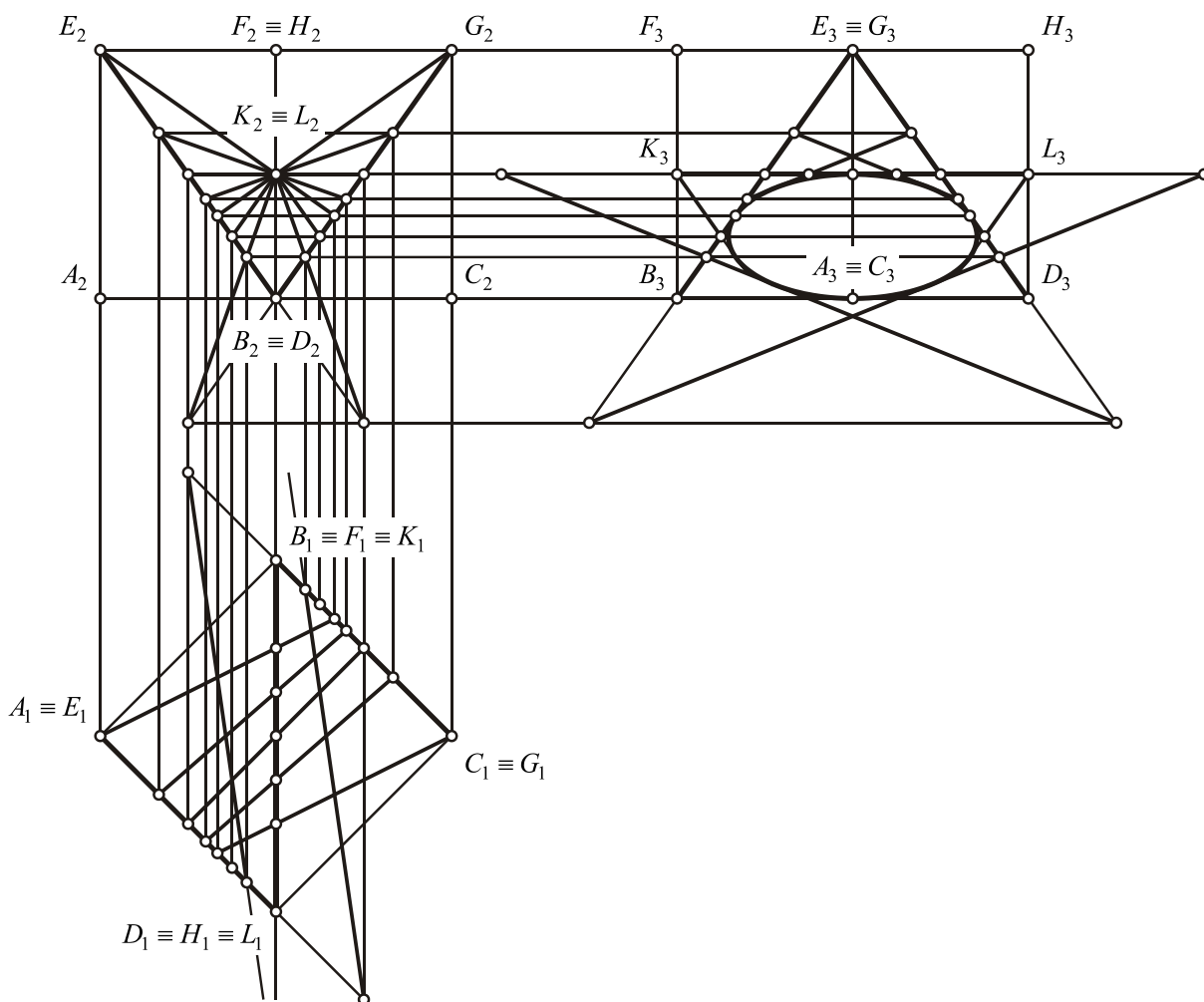


Рис. 1. Лінійчата поверхня з трьома напрямними прямими лініями  $DE$ ,  $BG$  і  $KL$

Виконаємо проекцію лінійчатої поверхні на площину, паралельну вертикальній осі симетрії куба і його граням  $ADEH$  і  $BCFG$ . Покажемо на рис. 2 дану проекцію і виявимо, що, окрім діагоналей  $DE$ ,  $BG$  і прямій  $KL$ , твірні лінійчатої поверхні перетинають і четверту пряму лінію, що належить грані  $ABCD$  і перпендикулярну граням  $ADEH$  і  $BCFG$ . Позначимо цю пряму лінію як  $MN$  і покажемо її на рис. 2. Оскільки лінійчата поверхня може мати не більше трьох напрямних, чотири прямі лінії  $DE$ ,  $BG$ ,  $KL$  і  $MN$ , які перетинає кожна її твірна, утворюють чотири сполучення напрямних  $DE$ ,  $BG$  і  $KL$ ;  $BG$ ,  $KL$  і  $MN$ ;  $MN$ ,  $DE$  і  $BG$ ;  $KL$ ,

$MN$  і  $DE$ . При цьому, як показує рис. 2, всі чотири сполучення напрямних задають одну і ту ж сім'ю твірних. Виберемо, наприклад, сполучення напрямних  $DE$ ,  $BG$ ,  $KL$  і побудуємо твірну, що перетинає пряму лінію  $MN$  в деякій точці. Якщо вибрати будь-яке сполучення напрямних, що включає пряму лінію  $MN$ , і через точку, виділену на прямій лінії  $MN$ , провести пряму лінію, що перетинає напрямні  $DE$ ,  $BG$  і  $KL$ , то отримаємо ту ж саму твірну. Дійсно, як було сказано вище, якщо у просторі задано три прямі лінії, то через точку, узятую на одній прямій лінії, можна провести не більш за одну пряму лінію, що перетинає дві інші прямі лінії. Таким чином, друга чудова властивість даної лінійчатої поверхні полягає в тому, що кожна її твірна одночасно перетинає чотири прямі лінії.

Визначимо форму, яку приймає порожнина даної лінійчатої поверхні. Перетнемо лінійчату поверхню площиною  $\Omega$ , паралельною двом прямим лініям  $KL$  і  $MN$  і, що схрещуються і проходять через центр симетрії проекції її «горловини», на площину, паралельну напрямною  $KL$ . Покажемо на рис. 3 горизонтальну проекцію перерізу лінійчатої поверхні площиною  $\Omega$  і виявимо, що її порожнина є поверхнею, обрис якої на горизонтальній площині проекцій обмежений кривою лінією, що нагадує «кособоку» гіперболу. При цьому горизонтальні проекції прямих ліній  $KL$  і  $MN$ , що схрещуються, є асимптотами, подібними до тих асимптот, які можна спостерігати в «класичній» гіперболі. Крім того, на рис. 3 показана дійсна вісь  $l$  «кособокої» гіперболи, що є бісектрисою кута, заданого горизонтальними проекціями напрямних  $KL$  і  $MN$ .

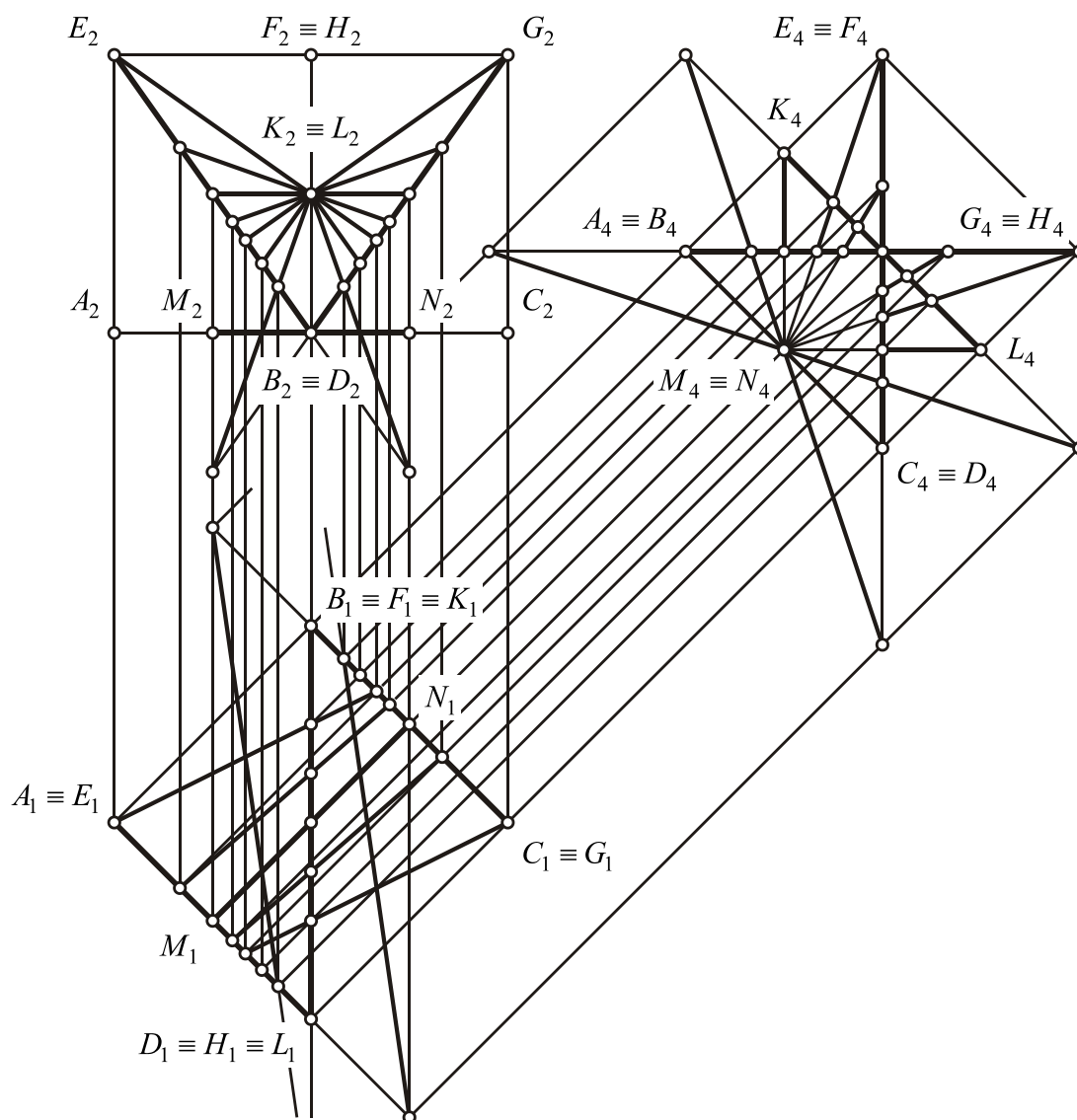


Рис. 2. Проекція лінійчатої поверхні на площину, паралельну вертикальній осі симетрії куба і його граням  $ADEH$  і  $BCFG$



поверхні, тобто горизонтальні проєкції всіх твірних лінійчатій поверхні лежать поза областями площини, що містяться усередині гілок «кособокої» гіперболи. Тому «кособока» гіпербола, що лежить у перерізі лінійчатої поверхні площиною, що проходить через центр симетрії профільної проєкції її порожнини, є обрисом лінійчатої поверхні на горизонтальній площині проєкцій.

Перетнемо лінійчату поверхню площиною  $\Sigma^1$ , що проходить через ребро  $AE$  куба і паралельною прямій  $KL$ , і площиною  $\Sigma^2$ , що проходить через ребро  $CG$  куба і паралельною тій же прямій лінії. Побудуємо профільні проєкції перерізів лінійчатої поверхні площинами,  $\Sigma^1$ ,  $\Sigma^2$  і отримаємо на профільній площині проєкцій дві параболи, симетричні відносно профільної проєкції вертикальної осі куба. Покажемо на рис. 4 обрис лінійчатої поверхні на горизонтальній площині проєкцій і профільні проєкції її перерізів площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ . Звернемо увагу, що вершини парабол лежать в точках, горизонтальні проєкції яких збігаються з точками перетину горизонтальних проєкцій площин  $\Sigma^1$ ,  $\Sigma^2$  з обрисом лінійчатої поверхні на горизонтальній площині проєкцій.

Перетнемо тепер лінійчату поверхню площиною  $\Sigma^1$ , що проходить через грань  $CDGH$  куба, і площиною  $\Sigma^2$ , що проходить через грань  $ABEF$  куба. Побудуємо проєкції перерізів лінійчатої поверхні площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$  на площину, паралельну напрямної  $MN$ , і отримаємо дві параболи, симетричні відносно проєкції вертикальної осі куба. Покажемо на рис. 5 параболи, отримані в результаті перетину лінійчатої поверхні площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ . Звернемо увагу, що проєкціями її порожнин, показаних на рис. 5 і рис. 1, є два еліпси з рівними фокусними відстанями і рівними сумами відстаней від їх точок до їх фокусів. Таким чином, лінійчата поверхня



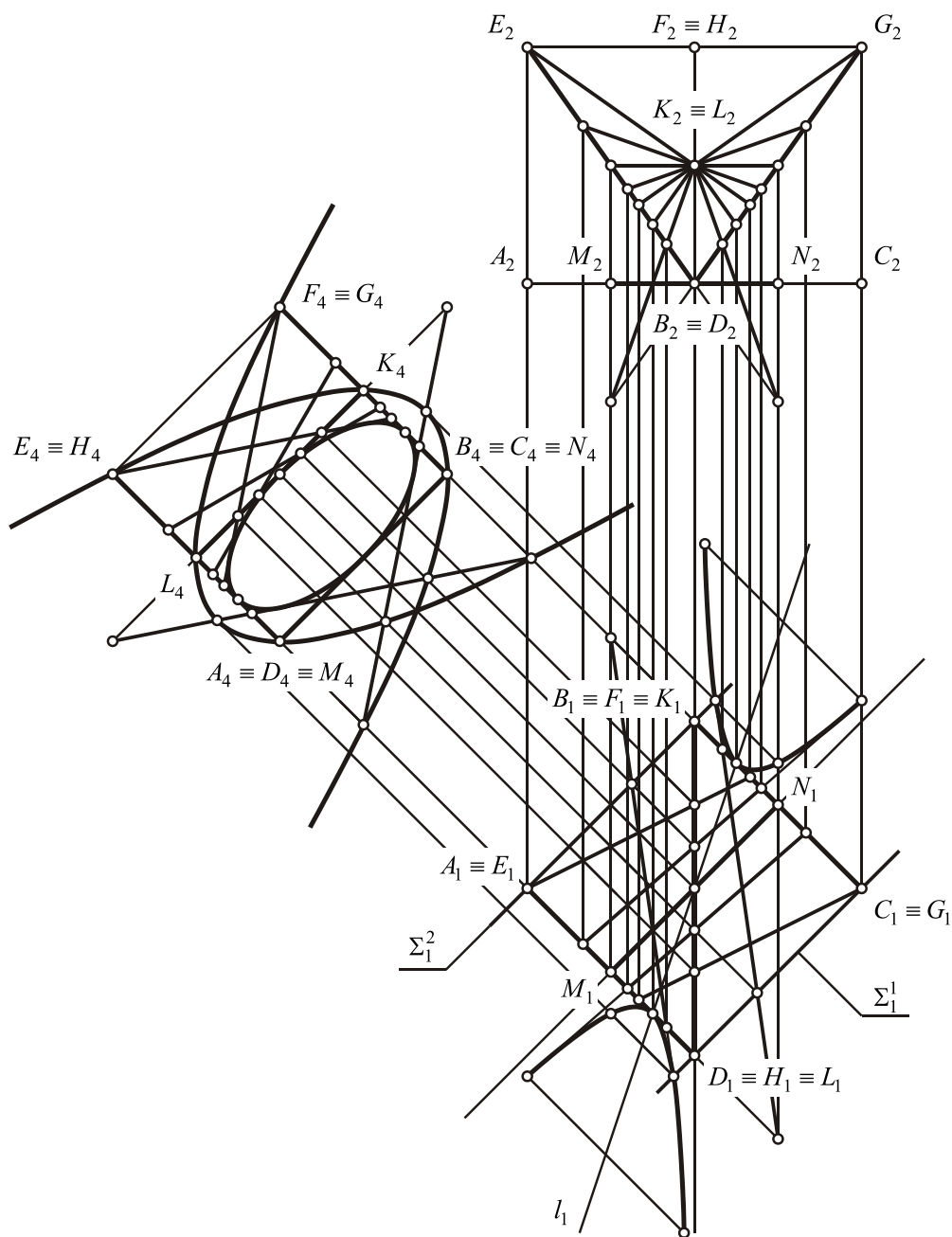


Рис. 5. Проекції перерізів лінійчатої поверхні площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ , паралельними напрямної  $MN$

Продовжимо вивчення властивостей даної лінійчатої поверхні. Пересічемо її площиною  $\Sigma^1$ , що проходить через вертикальну вісь симетрії куба і перпендикулярною напрямної  $KL$ . Побудуємо на рис. 6 проекцію перерізу лінійчатої поверхні площиною  $\Sigma^1$  на площину, перпендикулярну напрямної  $KL$ , і побачимо гіперболу з центром, суміщеному з центром

симетрії «горловини» поверхні, з вертикальною дійсною віссю і горизонтальною уявною віссю. При цьому вершини гіперболи дотикаються «горловини» лінійчатої поверхні, проекції якої на площини, паралельні напрямним  $KL$  і  $MN$  зображуються у вигляді еліпсів. Візьмемо площину  $\Sigma^2$ , що проходить через вертикальну вісь симетрії куба і перпендикулярну напрямної  $MN$ . Побудуємо на тому ж рисунку проекцію лінії перетину площини  $\Sigma^2$  з лінійчатою поверхнею на площину, перпендикулярну напрямною  $MN$ . При цьому, як показує рис. 6, проекцією перерізу є гіпербола з центром на прямій лінії, що проходить через центр симетрії «горловини» поверхні, з вертикальною дійсною віссю і горизонтальною уявною віссю.

Перетнемо тепер дану лінійчату поверхню площиною  $\Sigma$ , що проходить через ребро куба  $DH$  і перпендикулярною напрямної  $KL$ . Побудуємо на рис. 7 проекцію перерізу поверхні площиною  $\Sigma$  на площину, перпендикулярну напрямної  $KL$ , і виявимо гіперболу, у якої дійсна вісь розташовується горизонтально, а уявна вісь – вертикально. Візьмемо площину  $\Sigma$ , перпендикулярну напрямної  $MN$  і покажемо її на рис. 8. Нехай площина  $\Sigma$  відстоїть від вершини «кособокої» гіперболи на відстань, при якій довжина відрізка прямої лінії, що сполучає точки її перетину з «кособокою» гіперболою, дорівнює відстані між вершинами гіперболи, показаної на рис. 7. Побудуємо на рис. 8 проекцію лінії її перетину з лінійчатою поверхнею на площину, перпендикулярну напрямною  $MN$ . При цьому, як показує рис. 8, проекцією перерізу є гіпербола, у якої дійсна вісь розташовується горизонтально, а уявна вісь – вертикально. Крім того, центр гіперболи також належить прямій лінії, що проходить через центр симетрії «горловини» лінійчатої поверхні. Звернемо увагу, що, як показують рис. 6–8, Попри те, що січні площини займають

різне положення у просторі, їх перерізи лінійчатої поверхні є гіперболами з рівними відстанями між їх вершинами і рівними відстанями між їх фокусами. Єдине, що відрізняє гіперболи, показані на рис. 6, від гіпербол, показаних на рис. 7–8, – це різні напрями їх дійсних і уявних осей.

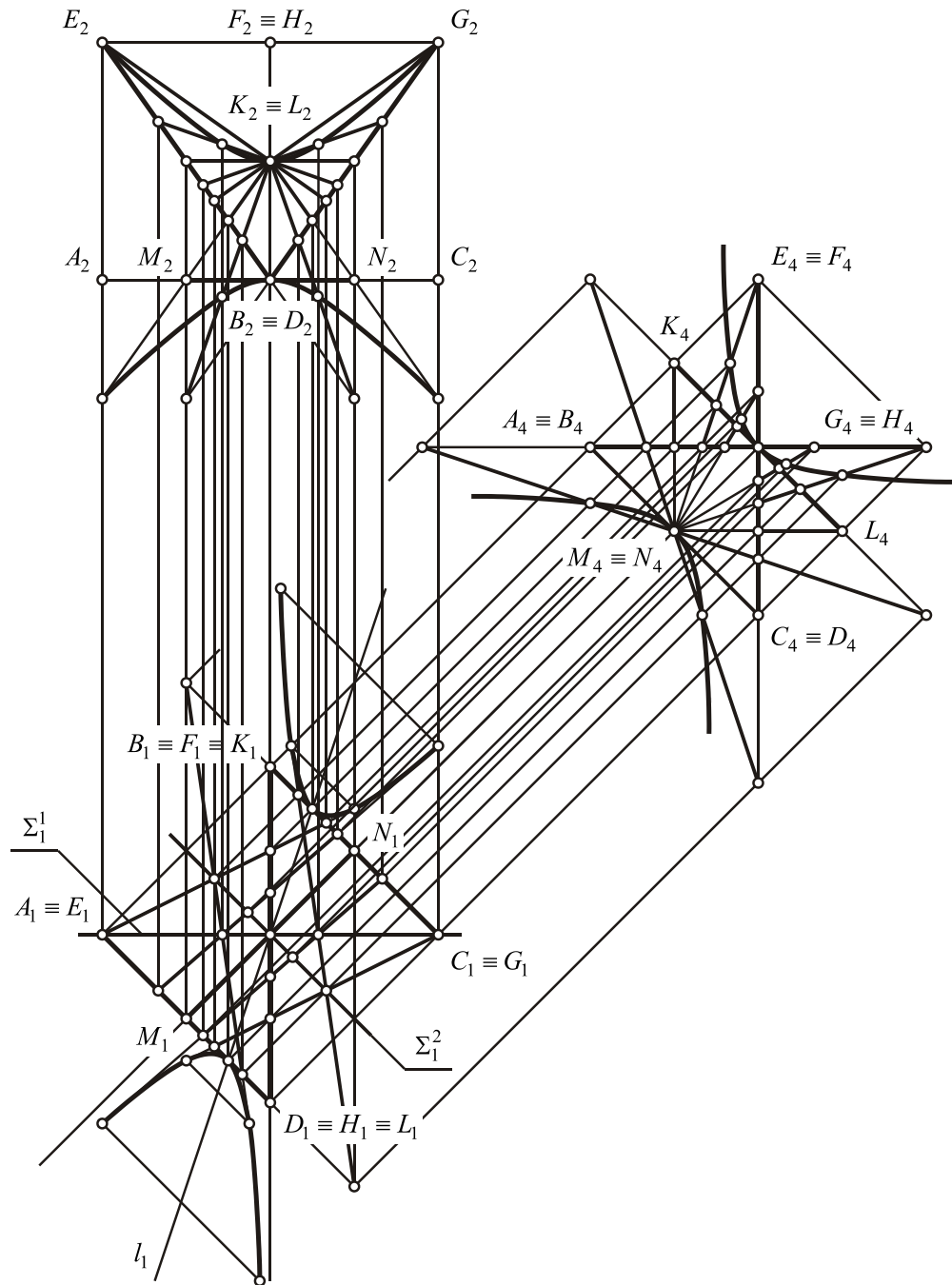


Рис. 6. Проекції перерізу лінійчатої поверхні площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ , перпендикулярними напрямним  $KL$  і  $MN$

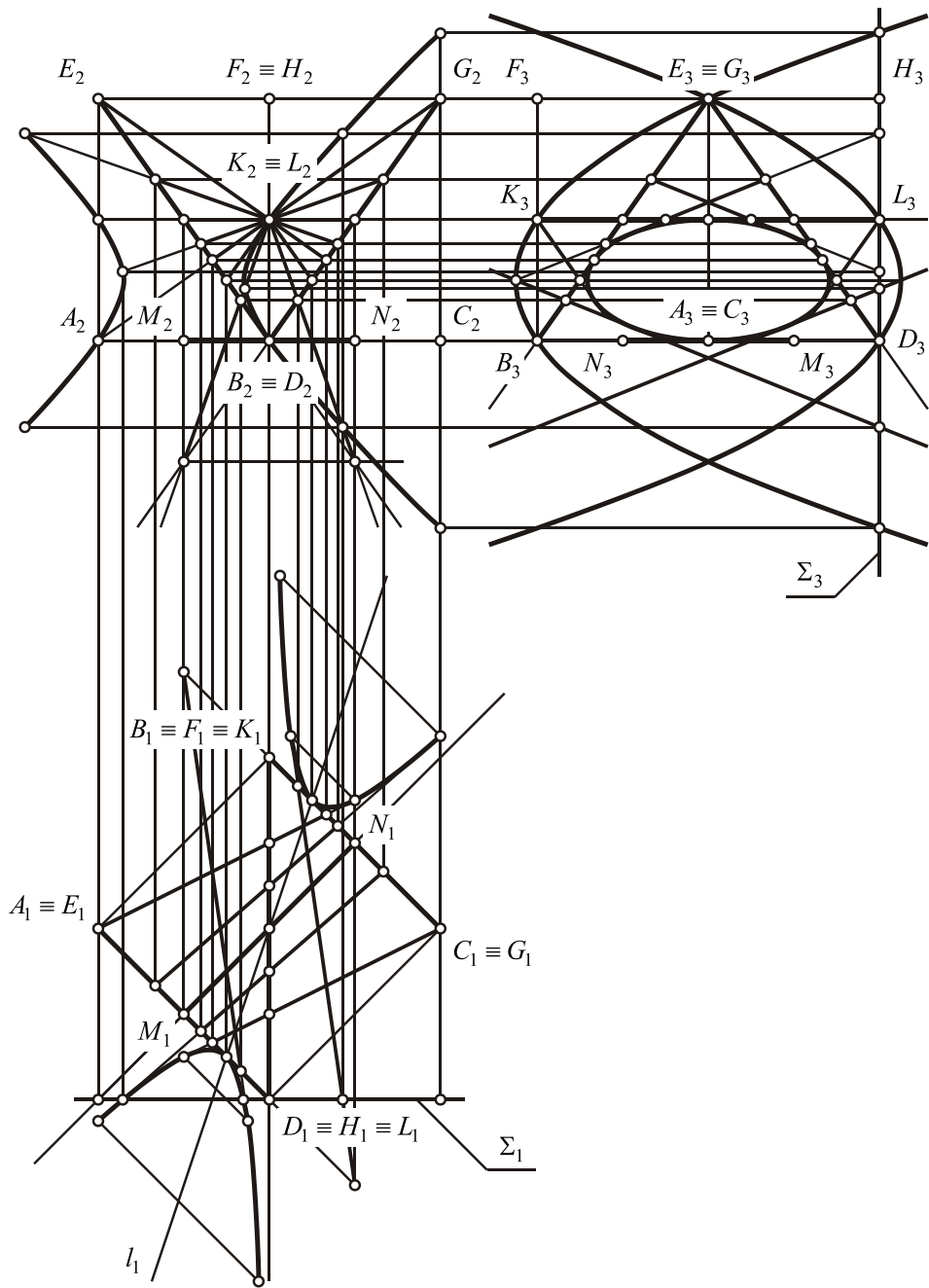


Рис. 7. Проекція перерізу лінійчатої поверхні площиною  $\Sigma$ , що проходить через ребро куба  $DH$  і перпендикулярною напрямної  $KL$

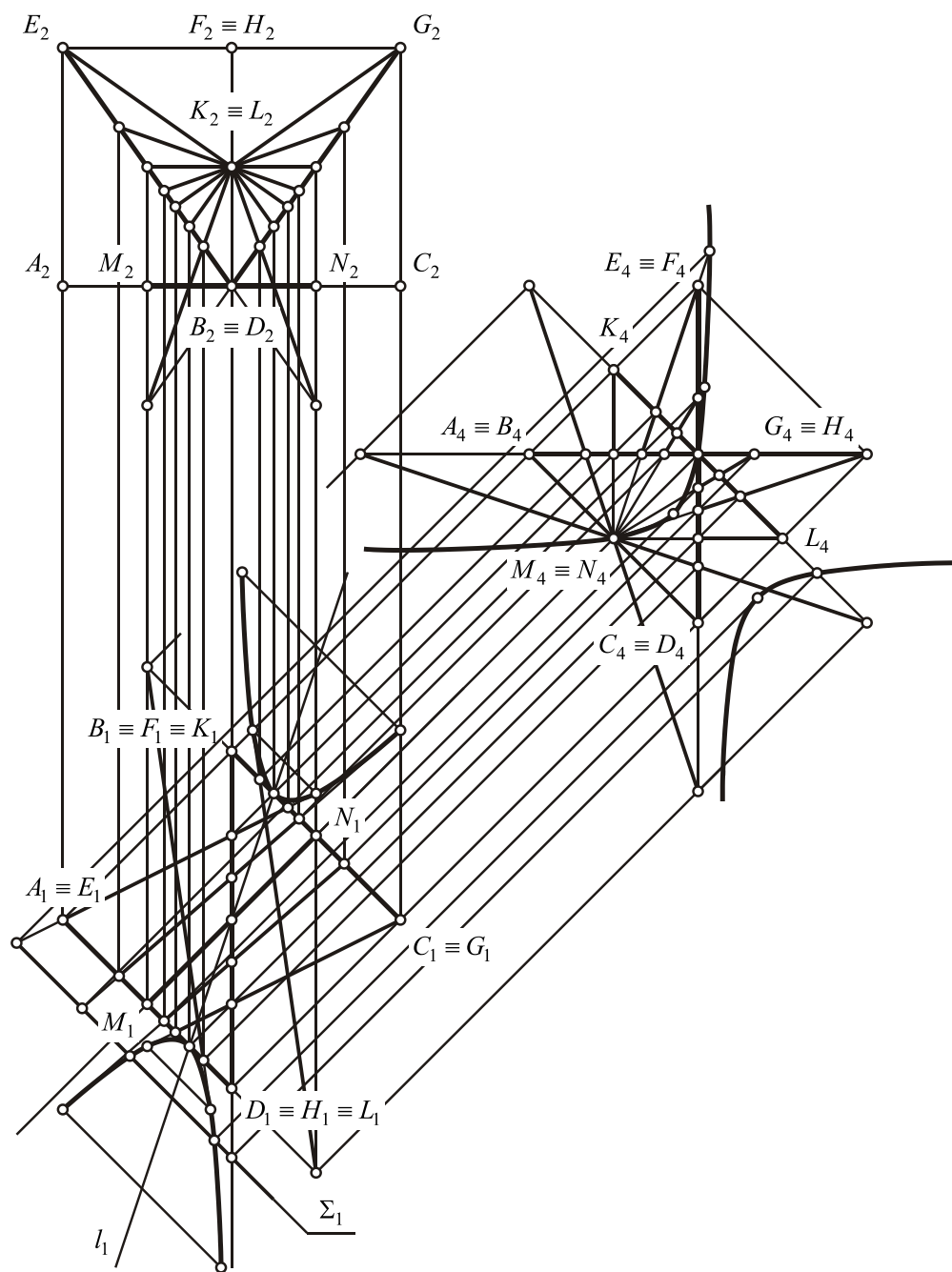


Рис. 8. Проекція перерізу лінійчатої поверхні площиною  $\Sigma$ , що проходить поза кубом і перпендикулярною напрямної  $MN$

Проте на цьому чудові властивості даної поверхні не закінчуються.

Перетнемо її площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ , що проходять через вершини парабол, показаних на рис. 4, і паралельними дійсній осі «кособокої» гіперболи або бісектрисі кута, утвореного горизонтальними проекціями напрямних  $KL$  і  $MN$ . Побудуємо на рис. 9 проекцію перерізу поверхні площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$

на площину, паралельну дійсній осі «кособокої» гіперболи, і отримаємо два еліпси, в яких великі осі збігаються, а малі осі відстоять один від одного на відстань, рівну  $1/3$  відстані між площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ .

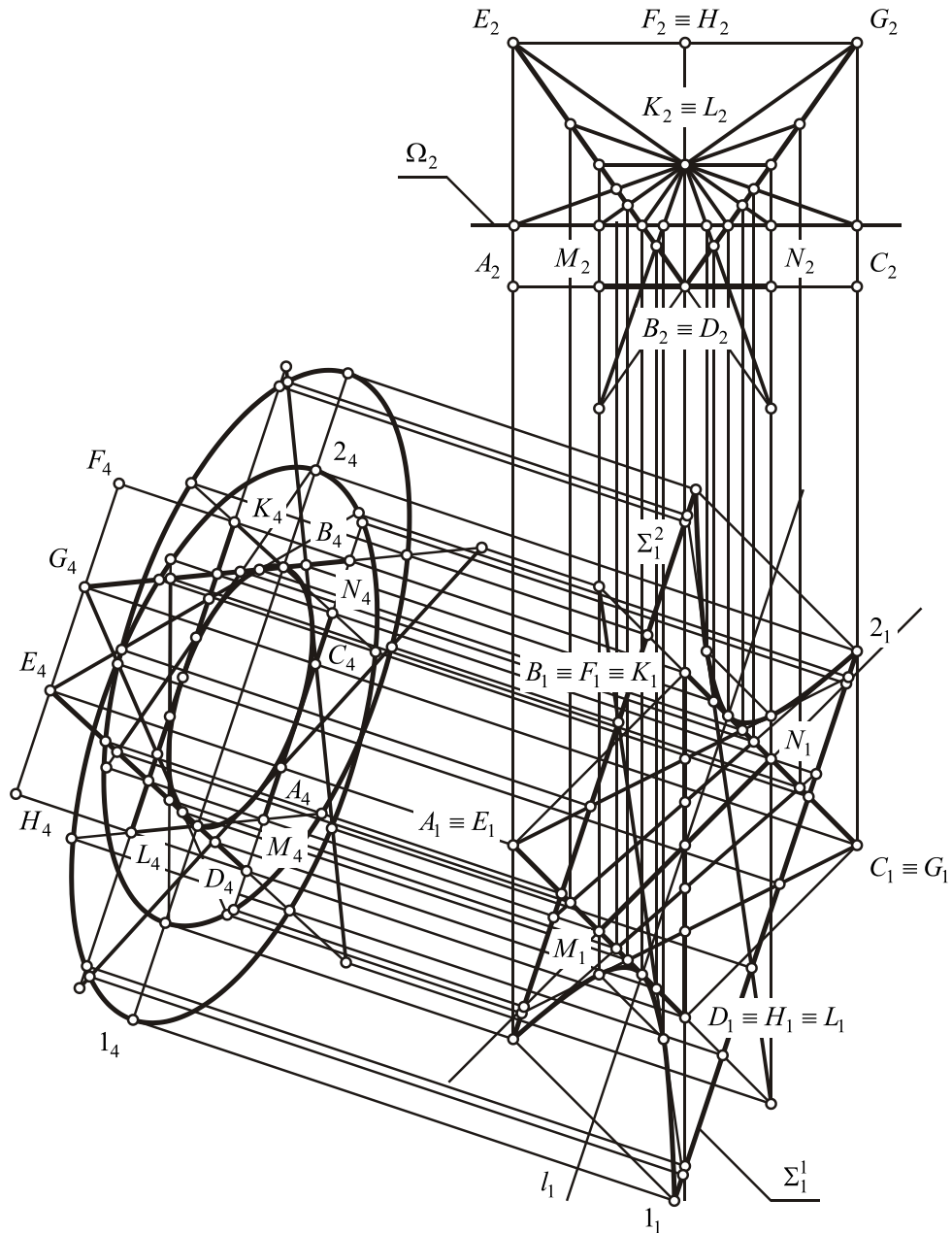


Рис. 9. Проекція перерізу лінійчатої поверхні площинами  $\Sigma^1$  і  $\Sigma^2$ , паралельними дійсній осі «кособокої» гіперболи

Таким чином, рис. 3–9 дають наочне уявлення про такі чудові властивості даної лінійчатої поверхні:

якщо січна площина паралельна двом прямим лініям  $KL$  і  $MN$ , що схрещуються, то перерізом лінійчатої поверхні є «кособока» гіпербола;

якщо січна площина паралельна вертикальній осі куба і напрямної  $KL$  або напрямної  $MN$ , то перерізом лінійчатої поверхні є парабола;

якщо січна площина перпендикулярна напрямною  $KL$  або напрямною  $MN$ , то перерізом лінійчатої поверхні є гіпербола;

якщо січна площина паралельна вертикальній осі куба і дійсної осі «кособокої» гіперболи або бісектрисі кута, утвореного горизонтальними проєкціями напрямних  $KL$  і  $MN$ , то перерізом лінійчатої поверхні є еліпс.

Побудуємо проєкції, які дають наочне уявлення про дану лінійчату поверхню. Виконаємо її проєкцію на площину, перпендикулярну дійсній осі «кособокої» гіперболи або бісектрисі кута, утвореного горизонтальними проєкціями напрямних  $KL$  і  $MN$ . Побудуємо дану проєкцію на рис. 10 і побачимо гіперболу, у якої центр належить осі симетрії «горловини» поверхні, дійсна вісь розташовується вертикально, а уявна вісь – горизонтально. Звернемо увагу, що отримана гіпербола є кривою, що огинає проєкції твірних лінійчатої поверхні на площину, перпендикулярну дійсній осі «кособокої» гіперболи. Звідси випливає, що отримана гіпербола є обрисом проєкції лінійчатої поверхні на площину, перпендикулярну дійсній осі «кособокої» гіперболи або бісектрисі кута, утвореного горизонтальними проєкціями напрямних  $KL$  і  $MN$ . Виберемо на рис. 9–10 проєкцій лінійчатої поверхні на площину, паралельну двом прямим лініям  $KL$  і  $MN$ , що схрещуються, площину, паралельну дійсній осі «кособокої» гіперболи, і площину, перпендикулярну дійсній осі «кособокої» гіперболи. Приведемо ці проєкції у відповідність один одному і отримаємо рис. 11, який дає більш наочне уявлення про дану лінійчату поверхню, ніж рис. 1.

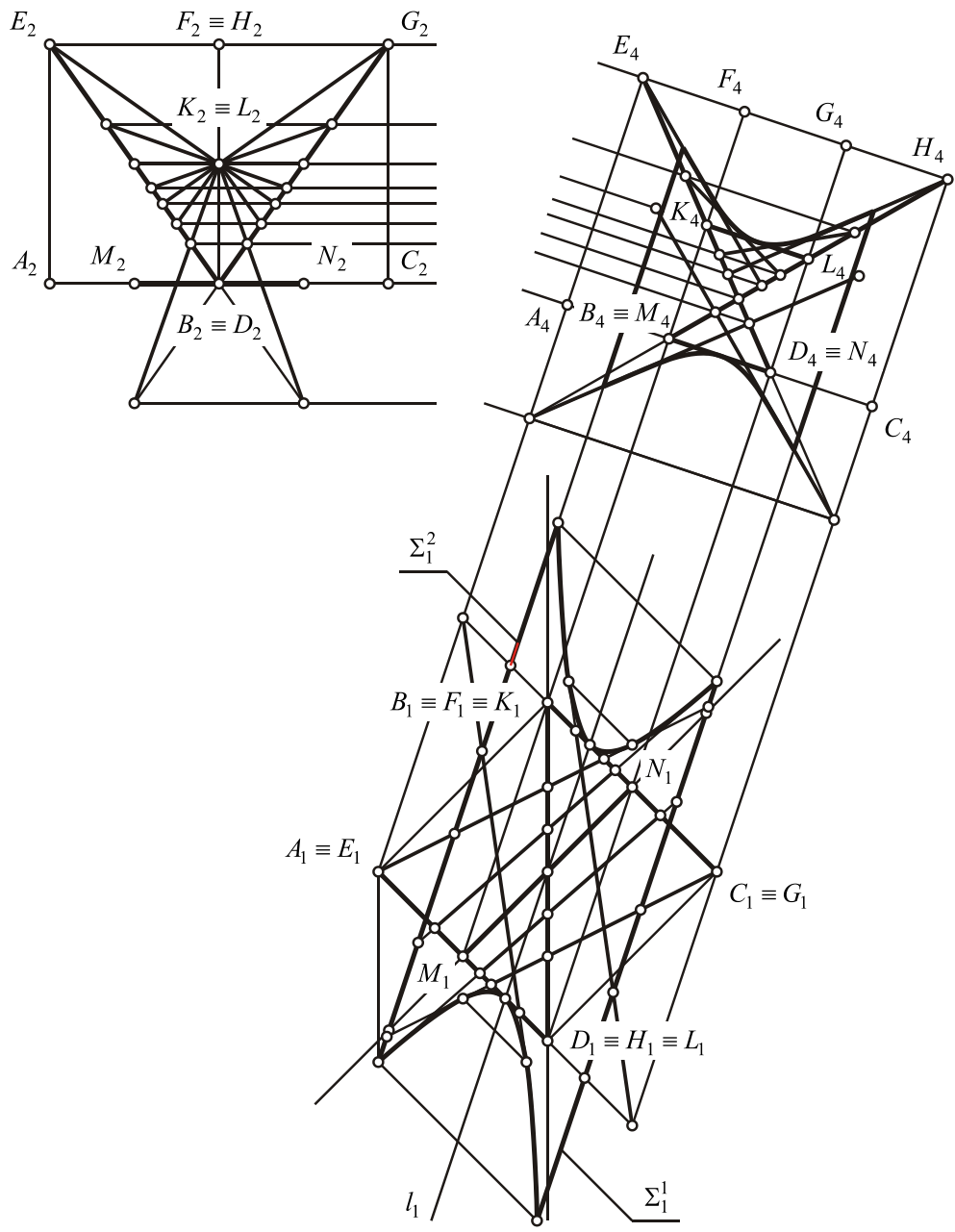


Рис. 10. Проекція лінійчатої поверхні на площину, перпендикулярну дійсній осі «кособокої» гіперболи

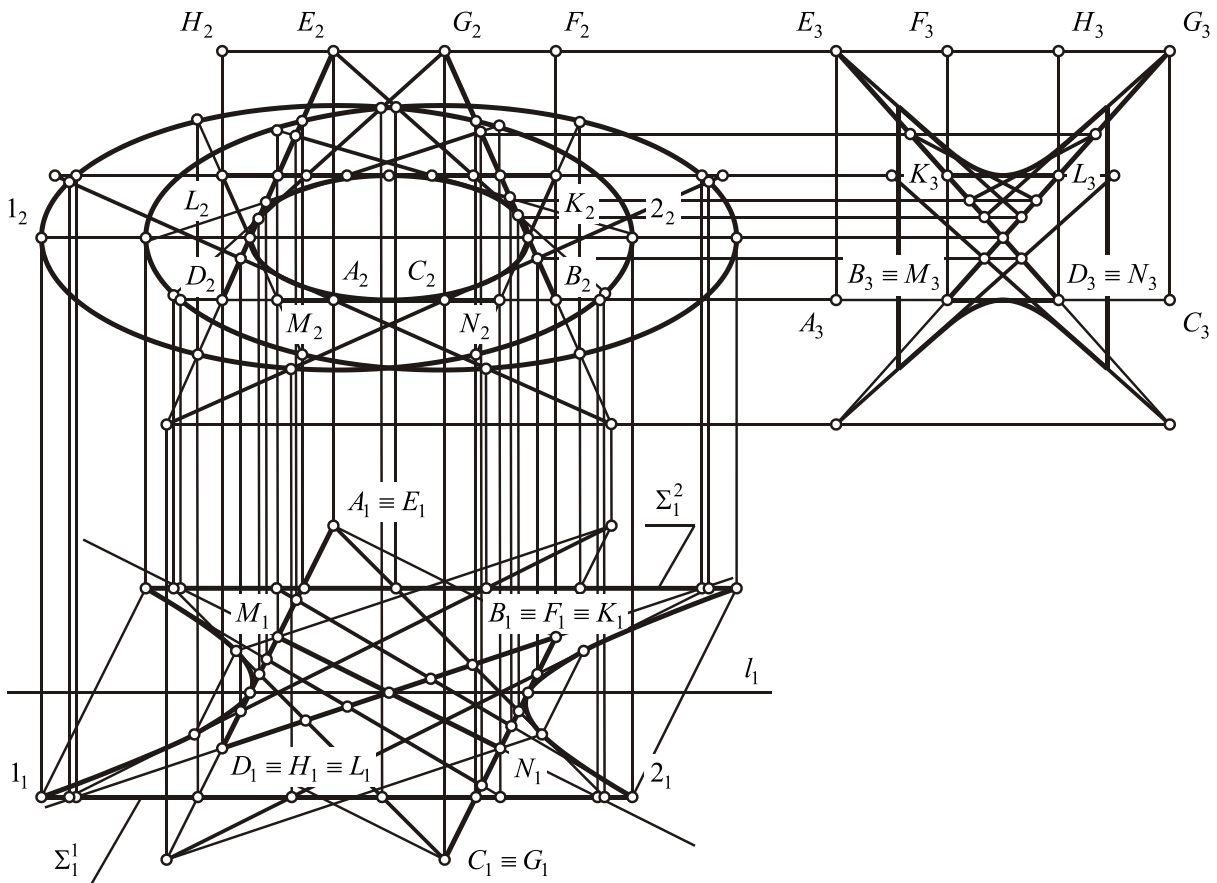


Рис. 11. Лінійчата поверхня з трьома напрямними прямими лініями  $DE$ ,  $BG$  і  $KL$

Побудуємо другу сім'ю твірних. Заздалегідь відмітимо, що обрис лінійчатої поверхні задається або кривою, що огинає проєкції прямих ліній, що входять в сім'ю твірних, або лінією перетину прямолінійних твірних з деякою площиною, що обмежує лінійчату поверхню. Тому друга сім'я твірних належатиме лінійчатій поверхні, утвореній першою сім'єю твірних, якщо після введення другої сім'ї твірних обриси лінійчатої поверхні не зміняться. Розглянемо рис. 11 і знайдемо таке перетворення лінійчатої поверхні, яке залишає її обриси на всіх трьох площинах проєкцій без зміни. Вочевидь, що таким перетворенням є симетрія відносно площини паралелізму двох прямих ліній  $KL$  і  $MN$ , що схрещуються і проходять через центр симетрії поверхні. Звідси випливає, що у даній лінійчатій поверхні напрямні другої сім'ї твірних є не три

довільно вибрані прямі лінії, що входять в першу сім'ю твірних, а три прямі лінії, симетричні трьом першим напрямним відносно площини паралелізму двох прямих ліній  $KL$  і  $MN$ , що схрещуються і проходять через центр симетрії поверхні. Покажемо на рис. 12 другу сім'ю твірних даної лінійчатої поверхні і три її другі напрямні, які для зручності позначені тими ж буквами, що і що перші напрямні.

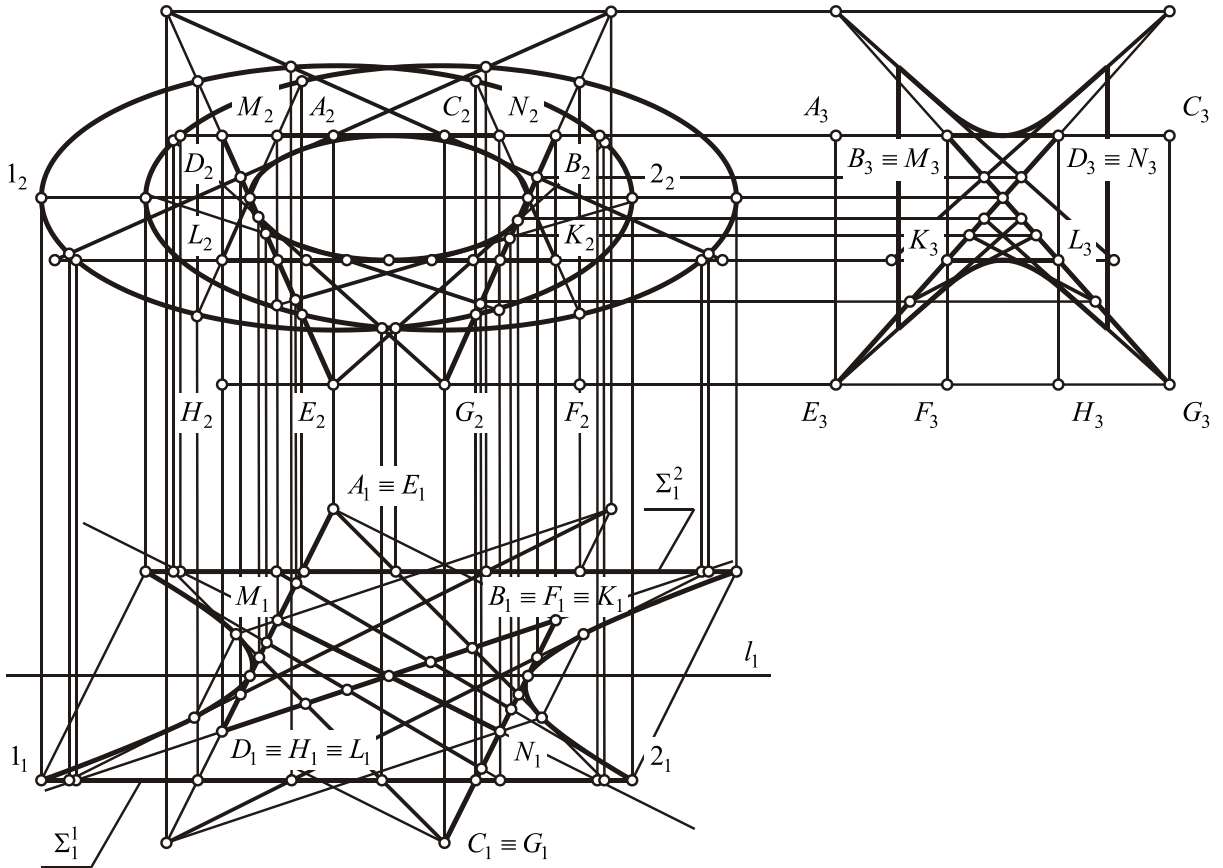


Рис. 12. Лінійчата поверхня з другою сім'єю твірних і трьома напрямними прямими лініями  $DE$ ,  $BG$  і  $KL$

Оскільки дана лінійчата поверхня має другу сім'ю твірних, у неї є ще одна чудова властивість, яка полягає у тому, що через кожну її точку можна провести дві прямі лінії, що належать першій і другій сім'ям твірних. Дійсно, якщо дві сім'ї твірних утворюють одну і ту ж поверхню, то серед твірних, що належать першій і другій сім'ям, завжди можна знайти дві прямі лінії, що перетинаються в одній її точці. Ця чудова

властивість пов'язує дану лінійчату поверхню з такими поверхнями, як площина, гіперболічний параболоїд і однопорожнинний гіперболоїд, тобто з єдиними лінійчатими поверхнями, через кожную точку яких можна провести більше, ніж однієї прямої.

Звідси випливає, що площина, дотична до даної лінійчатої поверхні, виділяє на неї дві прямі лінії, що належать двом сім'ям твірних і перетинаються в точці дотику.

Розглянемо задачу про класифікацію даної лінійчатої поверхні. Зазвичай лінійчата поверхня з трьома напрямними прямими лініями називається однопорожнинним гіперболоїдом. Проте, на наш погляд, дана лінійчата поверхня має істотні відмінності від «класичного» однопорожнинного гіперболоїда, а саме:

дана лінійчата поверхня не є однопорожнинною, тому що, як показує рис. 1, її неперервність порушується лінією розриву, яка збігається з діагоналлю нижньої основи куба, паралельної напрямної  $KL$ . Втім, неперервність лінійчатої поверхні можна відновити, якщо в сім'ю твірних ввести додаткову твірну у вигляді діагоналлі нижньої основи куба, паралельної напрямної  $KL$ ;

дана лінійчата поверхня не є і «класичним» гіперболоїдом. Дійсно, як показує рис. 11, її уявну вісь можна отримати з уявної осі «класичного» гіперболоїду за допомогою зсуву простору у напрямі його дійсної осі з коефіцієнтом пропорційності, рівним  $1/3$ . Звідси випливає, що зсув простору з тим же коефіцієнтом пропорційності перетворює «класичний» гіперболоїд на «кособокий».

До речі, попри те, що у перерізах даної лінійчатої поверхні площинами, що займають різне положення по відношенню до напрямних  $KL$  і  $MN$ , лежать еліпси, параболи і гіперболи, її також не можна віднести і до поверхонь 2-го порядку, оскільки не існує поверхонь 2-го порядку, що

мають розриви. Проте приналежність лінійчатої поверхні до поверхонь 2-го порядку можна відновити, якщо в сім'ю твірних ввести додаткову твірну у вигляді діагоналі нижньої основи куба, паралельної напрямної  $KL$ .

### Контрольні запитання

1. Як називається поверхня, яка утворюється переміщенням у просторі прямої лінії, що перетинає три прямі лінії, що схрещуються і не паралельні одній площині?
2. Яка пряма лінія є лінією розриву однопорожнинного гіперболоїда?
3. Скільки прямих ліній перетинають твірні однопорожнинного гіперболоїда?
4. Яка крива є обрисом однопорожнинного гіперболоїда на горизонтальній площині проєкцій?
5. Які криві є перерізами однопорожнинного гіперболоїда площиною, що перетинає всі його твірні і не паралельною горизонтальній площині проєкцій?
6. Яка крива є обрисом однопорожнинного гіперболоїда на фронтальній площині проєкцій?
7. Яка крива є обрисом однопорожнинного гіперболоїда на профільній площині проєкцій?
8. Яким чином прямі лінії, що входять в другу сім'ю напрямних однопорожнинного гіперболоїда, співвідносяться з прямими лініями, що входять у другу сім'ю напрямних однопорожнинного гіперболоїда?
9. Скільки прямолінійних твірних можна провести через точку, що належить однопорожнинному гіперболоїду?

10. Скільки прямих ліній виділяє на однопорожнинному гіперболоїді площина, дотична до нього в точці перетину з його віссю симетрії?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Савёлов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Справочное руководство / А. А. Савёлов : под редакцией А. П. Нордена. – М. : Физматгиз, 1960. – 294 с.
2. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия / Бубенников А. В., Громов М. Я. – М. : Высшая школа, 1973. – 416 с.
3. Маркушевич А. И. Замечательные кривые / А. И. Маркушевич. – М. : Наука, 1978. – 48 с.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен – М. : Наука, 1981. – 344 с.
5. Гусак А. А., Гусак Г. М. Линии и поверхности / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – 222 с.
6. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С. Н. Кривошапко, В. Н. Иванов. – М. : Либрокком, 2010. – 560 с.

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
РОЗДІЛ 1. Еліпс, парабола и гіпербола	7
РОЗДІЛ 2. Подери еліпса, параболи і гіперболи	24
РОЗДІЛ 3. Конічні перерізи	33
РОЗДІЛ 4. Спіраль Архімеда і логарифмічна спіраль	44
РОЗДІЛ 5. Евольвента колу і її еволюта	53
РОЗДІЛ 6. Кардіоїда і її зв'язки з епіциклоїдою і равником Паскаля	62
РОЗДІЛ 7. Астроїда і її зв'язок з гіпоциклоїдою	77
РОЗДІЛ 8. Ланцюгова лінія	85
РОЗДІЛ 9. Крива Персея і її зв'язки з лемніскатою Бернуллі і овалом Кассині	95
РОЗДІЛ 10. Однопорожнинний гіперболоїд обертання	99
РОЗДІЛ 11. Гелікоїд і його зв'язки зі спіраллю Архімеда і евольвентою кола	109
РОЗДІЛ 12. Гіперболічний параболоїд і його зв'язки з параболою і гіперболою	119
РОЗДІЛ 13. Однопорожнинний гіперболоїд і його зв'язки з еліпсом, параболою і гіперболою	134
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	155

Навчальне видання

НІЦІН Олександр Юрійович

ТЕОРЕТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

для студентів і аспірантів спеціальностей 122«Комп'ютерні науки» і 131  
«Прикладна механіка»

Роботу до видання рекомендувала проф. Шоман О. В.

В авторській редакції

План 2018 р., поз. № 74

Підп. до друку 10.10.2018. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.

Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 7,1.

---

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

---

Самостійне електронне видання