

Ю. А. ПЛАКСІЙ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРЬОХЧАСТОТНОЇ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ КВАТЕРНІОННОЇ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА. ДРУГИЙ ТИП МОДЕЛІ

Запропонований новий тип неперервної моделі обертання твердого тіла, оснований на трьохчастотному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одномоментно змінюються у часі. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделі. Результати представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Запропонована модель може бути застосована в якості еталонної для оцінювання похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

Вступ і постановка задачі. Розглядається алгоритмічний аспект забезпечення розв'язання задачі визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних системах орієнтації* (БІСО). На теперішній час розроблено значну кількість алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації, орієнтованих на використання первинної інформації про обертання рухомого об'єкта на такті обчислень [1]. Оскільки в БІСО алгоритми визначення орієнтації виконують роль *аналітичної платформи*, дослідження похибок алгоритмів на етапі проектування БІСО і вибір найкращого алгоритма для конкретного об'єкта, що має здійснювати певні обертальні рухи, є актуальною практичною задачею.

Для оцінювання похибок алгоритмів визначення орієнтації зазвичай застосовують еталонні моделі обертання твердого тіла (дискретні і неперервні), які встановлюють зв'язок між кватерніоном орієнтації і *квазікоординатами* [2], що формуються на виході вимірювачів кутової швидкості на такті $[t_{n-1}, t_n]$:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де ω_i , $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}$ на осі зв'язаної системи координат.

Неперервні еталонні моделі забезпечують точний зв'язок між квазікоординатами (1) і кватерніоном орієнтації, оскільки при цьому результати моделювання не містять похибок від метода чисельного інтегрування рівнянь моделі, як це має місце у випадку *дискретних еталонних моделей* [3]. Широке застосування на практиці отримали неперервні еталонні моделі, основані на випадках точних розв'язків в елементарних функціях сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (моделі *кінчного руху* [4] та *регулярної прецесії* [5]). Модель регулярної прецесії також використовують для оптимізації алгоритмів [5]. Розширення класу неперервних еталонних моделей, відмінних від існуючих, є актуальною задачею точного аналізу алгоритмів.

Неперервна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятим аналітичним представленням кватерніона орієнтації моделі $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$. Використання тригонометричних функцій (синусів і косинусів) кутів в представленні кватерніона автоматично забезпечує виконання умови його нормування $\|\Lambda(t)\| = 1$.

Проекції вектора кутової швидкості обертального руху, яким відповідає кватерніон орієнтації $\Lambda(t)$, знайдуться з оберненого кінематичного рівняння [2]:

$$\omega(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (2)$$

де $\omega(t) = (0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$, $\tilde{\Lambda}(t) = (\lambda_0(t), -\lambda_1(t), -\lambda_2(t), -\lambda_3(t))^T$, $\dot{\Lambda}(t) = d\Lambda(t)/dt$.

Моделювання квазікоординат (1) відбувається за формулою:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

де $\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t) dt$, $\theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t) dt$, $i = 1, 2, 3$ – компоненти вектора *позірнього повороту* $\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt$,

обчислені аналітично в моменти часу t_n і t_{n-1} .

Неперервні еталонні моделі обертання твердого тіла, відмінні від випадку регулярної прецесії, представлені в роботах [6, 7]. В роботі [8] запропоновано перший тип узагальненої трьохчастотної кінематичної моделі обертання твердого тіла. В даній роботі пропонується другий тип неперервної трьохчастотної моделі обертання твердого тіла, оснований на узагальненні тригонометричної кінематичної моделі, яка представлена в [3].

Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі. Задамо компоненти кватерніона орієнтації моделі обертання у загальному вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \sin \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_1(t) = \eta \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t) - \xi \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t); \\ \lambda_2(t) &= \eta \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \xi \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_3(t) = \sin \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) - \cos \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t),\end{aligned}\quad (4)$$

де η, ξ – параметри, для яких має місце тотожність $\eta^2 + \xi^2 = 1$; $\varphi(t), \psi(t), \phi(t)$ – неперервні функції часу.

Для цього представлення кватерніона орієнтації у відповідності до формул (2) отримаємо, що проекції вектора модельної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= 0,5\dot{\varphi}(t) \sin(2\psi(t) + 2\phi(t))(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)) + 0,5\dot{\varphi}(t) \sin(2\phi(t) - 2\psi(t))(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)) - \\ &- \eta\dot{\phi}(t) \sin(2\psi(t)) \cos \varphi(t) - \xi\dot{\phi}(t) \sin(2\psi(t)) \sin \varphi(t) + 2\eta\dot{\psi}(t) \cos(2\phi(t)) \sin \varphi(t) - 2\xi\dot{\psi}(t) \cos(2\phi(t)) \cos \varphi(t) + \\ &+ 2\eta\dot{\phi}(t) \cos \varphi(t) + 2\xi\dot{\phi}(t) \sin \varphi(t); \\ \omega_2(t) &= \dot{\varphi}(t) \sin(2\psi(t))(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)) + \dot{\varphi}(t) \cos(2\psi(t)) \sin(2\phi(t))(\eta \cos \varphi(t) + \xi \sin \varphi(t)) + \\ &+ 2\dot{\psi}(t) \cos(2\phi(t))(\eta \cos \varphi(t) + \xi \sin \varphi(t)) - 2\dot{\phi}(t)(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)); \\ \omega_3(t) &= 2\dot{\varphi}(t)(\cos^2 \psi(t) \cos^2 \phi(t) + \sin^2 \psi(t) \sin^2 \phi(t)) - 2\dot{\psi}(t) \sin(2\phi(t)).\end{aligned}\quad (5)$$

Зауважимо що, на відміну від проекцій $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$, проекція $\omega_3(t)$ не залежить від параметрів η і ξ .

Розглянемо кінематичну модель (4) в умовах, коли кути $\varphi(t), \psi(t), \phi(t)$ змінюються з часом лінійно, а саме: $\varphi(t) = k_1 t, \psi(t) = k_2 t, \phi(t) = k_3 t$. Маємо:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_1(t) = \eta \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) - \xi \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \\ \lambda_2(t) &= \eta \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \xi \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t).\end{aligned}\quad (6)$$

За цих умов отримаємо у відповідності до (5) після нескладних перетворень проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі у вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= 0,25\eta k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25\eta k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\eta k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) + \\ &+ 0,25\xi k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\xi k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\xi k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - \\ &- 0,25\eta k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5\eta k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5\eta k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + \\ &+ 0,25\xi k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5\xi k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5\xi k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + \\ &+ \eta k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \eta k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2\xi k_3 \cos(k_1 t) + \xi k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\ &+ \xi k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2\xi k_3 \sin(k_1 t); \\ \omega_2(t) &= 0,25\eta k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\eta k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\eta k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \\ &+ 0,25\xi k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25\xi k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\xi k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) + \\ &+ 0,25\eta k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5\eta k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5\eta k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) - \\ &- 0,25\xi k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5\xi k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5\xi k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + \\ &+ \eta k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \eta k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2\xi k_3 \sin(k_1 t) + \xi k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \\ &+ \xi k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2\xi k_3 \cos(k_1 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 + 0,5k_1 \cos((2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((2k_2 - 2k_3)t) - 2k_2 \sin(2k_3 t).\end{aligned}\quad (7)$$

Щоб отримати компоненти вектора позірного повороту $\bar{\theta}(t)$, проінтегруємо вирази для $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на інтервалі $[0, t]$, в результаті маємо:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{0,25\eta k_1}{k_1 + 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25\eta k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + \\ &+ \frac{0,25\eta k_1}{k_1 - 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\ &- \frac{0,25\xi k_1}{-k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\ &- \frac{0,25\eta k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_2)t) + \frac{0,5\eta k_1}{2k_2 + k_1} (\cos((2k_2 + k_1)t) - 1) - \frac{0,5\eta k_1}{2k_2 - k_1} (\cos((2k_2 - k_1)t) - 1) - \\ &- \frac{0,25\xi k_1}{-k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \frac{0,5\xi k_1}{k_1 - 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2)t) - \frac{0,5\xi k_1}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) - \\ &- \frac{\eta k_2}{k_1 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_3)t) - 1) - \frac{\eta k_2}{k_1 - 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_3)t) - 1) + \frac{2\xi k_3}{k_1} \sin(k_1 t) + \frac{\xi k_2}{k_1 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_3)t) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi k_2}{k_1 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_3)t) + \frac{2\xi k_3}{k_1} (\cos(k_1 t) - 1); \\
 \theta_2(t) = & - \frac{0,25\eta k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25\eta k_1}{-k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\
 & - \frac{0,25\eta k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \frac{0,25\xi k_1}{k_1 + 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - \\
 & - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,25\xi k_1}{k_1 - 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \\
 & - \frac{0,25\eta k_1}{-k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \frac{0,5\eta k_1}{k_1 - 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2)t) - \frac{0,5\eta k_1}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) - \\
 & - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,5\xi k_1}{2k_2 + k_1} (\cos((2k_2 + k_1)t) - 1) + \frac{0,5\xi k}{2k_2 - k_1} (\cos((2k_2 - k_1)t) - 1) + \\
 & + \frac{\eta k_2}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) + \frac{\eta k_2}{k_1 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_3)t) + \frac{2\xi k_3}{k_1} (\cos(k_1 t) - 1) - \\
 & - \frac{\xi k_2}{k_1 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_3)t) - 1) - \frac{\xi k_2}{k_1 - 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_3)t) - 1) + \frac{2\xi k_3}{k_1} \sin(k_1 t); \\
 \theta_3(t) = & k_1 t + \frac{0,25k_1}{k_2 + k_3} \sin((2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,25k_1}{k_2 - k_3} \sin((2k_2 - 2k_3)t) + \frac{k_2}{k_3} 2k_2 (\cos(2k_3 t) - 1). \tag{8}
 \end{aligned}$$

Моделювання квазікоординат (1) в еталонній моделі відбувається в аналітичному вигляді за формулою (3) з використанням формул (8).

Отримаємо розрахункові формули компонент вектора позірного повороту у випадку, коли $\eta = 1$, $\xi = 0$. Відповідно до (6) компоненти модельного кватерніона при цьому мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_1(t) = \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \\
 \lambda_2(t) &= \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t), \tag{9}
 \end{aligned}$$

а проєкції вектора кутової швидкості будуть такі:

$$\begin{aligned}
 \omega_1(t) &= 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \\
 & - 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + 0,25k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2k_3 \cos(k_1 t) + k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2k_3 \sin(k_1 t); \\
 \omega_2(t) &= 0,25k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \\
 & + 0,25k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2k_3 \sin(k_1 t); \\
 \omega_3(t) &= k_1 + 0,5k_1 \cos((2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((2k_2 - 2k_3)t) - 2k_2 \sin(2k_3 t). \tag{10}
 \end{aligned}$$

Проєкції вектора позірного повороту $\bar{\theta}(t)$ знайдуться з формул (8) у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \theta_1(t) &= \frac{0,25k_1}{k_1 + 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + \\
 & + \frac{0,25k_1}{k_1 - 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,5k_1}{2k_2 + k_1} (\cos((2k_2 + k_1)t) - 1) + \\
 & + \frac{0,5k_1}{2k_2 - k_1} (\cos((2k_2 - k_1)t) - 1) - \frac{k_2}{k_1 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_3)t) - 1) - \frac{k_2}{k_1 - 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_3)t) - 1) + \frac{2k_3}{k_1} \sin(k_1 t); \\
 \theta_2(t) &= - \frac{0,25k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25k_1}{-k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\
 & - \frac{0,25k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25k_1}{-k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \\
 & + \frac{0,5k_1}{k_1 - 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2)t) - \frac{0,5k_1}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) + \frac{k_2}{k_1 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_3)t) + \frac{k_2}{k_1 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_3)t) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2k_3}{k_1} (\cos(k_1 t) - 1); \\
 \theta_3(t) = & k_1 t + \frac{0,5k_1}{2k_2 + 2k_3} \sin((2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,5k_1}{2k_2 - 2k_3} \sin((2k_2 - 2k_3)t) + \frac{k_2}{k_3} (\cos(2k_3 t) - 1). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Розглянемо випадок представлення еталонної моделі при $\eta = 0$, $\xi = 1$. Отримаємо з (6) компоненти модельного кватерніона у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0(t) = & \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_1(t) = -\sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \\
 \lambda_2(t) = & \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Для цієї кінематичної моделі проекції вектора абсолютної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \omega_1(t) = & 0,25k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \\
 & + 0,25k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2k_3 \sin(k_1 t); \\
 \omega_2(t) = & 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \\
 & - 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2k_3 \cos(k_1 t); \\
 \omega_3(t) = & k_1 + 0,5k_1 \cos((2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((2k_2 - 2k_3)t) - 2k_2 \sin(2k_3 t). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Якщо порівняти вирази (10) і (13) для проекцій векторів кутових швидкостей моделей, що відповідають кватерніонам орієнтації (9) і (12), то отримаємо, що друга проекція вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (12) така сама, як перша проекція вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (9), а перша проекція вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (12) відрізняється від другої проекції вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (9) тільки знаком. Треті проекції векторів кутових швидкостей для обох кінематичних моделей однакові. Відповідні співвідношення мають місце і для компонент векторів позірних поворотів моделей.

Сукупність формул (8), (3) і (6), як і формул (11), (3), (9) задають *опорну еталонну модель* обертання твердого тіла. Якщо належним чином задати в цих формулах значення параметрів k_1 , k_2 , k_3 і такт обчислень Δt , отримаємо конкретну еталонну модель. Вибір параметрів k_1 , k_2 , k_3 може бути оснований на результаті відповідних апроксимацій реального руху об'єкта.

Чисельна реалізація узагальненої еталонної моделі. Побудуємо еталонну модель на основі формул (11), (3), (9) для декількох значень параметрів k_1 , k_2 , k_3 і такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с.

Для значень параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$ результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат θ_{ni}^* від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлені на рис. 1 та рис. 2 відповідно. Залежності квазікоординат від часу мають періодичний характер. Як видно з рис.2, траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$ має такий же вигляд, як і траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$, також мають місце од-

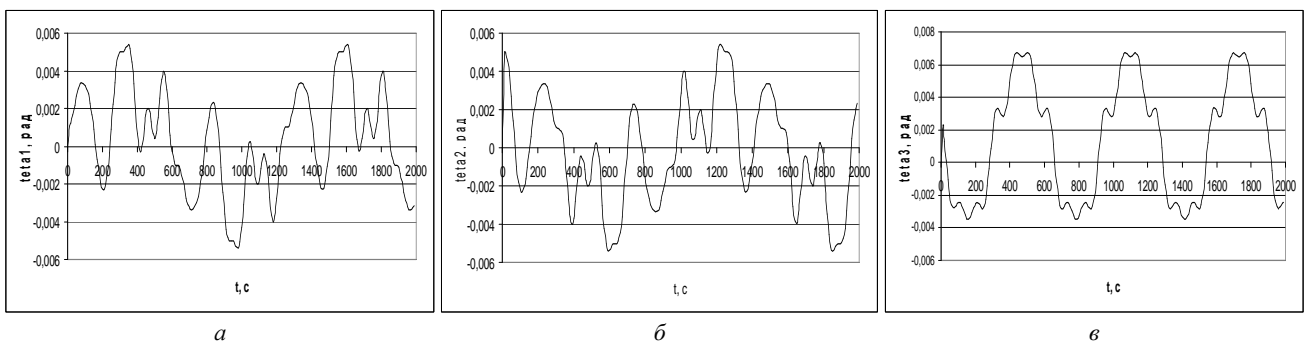


Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$:

a – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

накові траєкторії $\lambda_3(\lambda_1)$ і $\lambda_3(\lambda_2)$. Однак це ще не свідчить про те, що отримані в моделі залежності $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ однакові, оскільки траєкторія $\lambda_2(\lambda_1)$ не представляє собою пряму лінію (бісектрису першої і третьої чверті), а має більш складну залежність (рис. 2, *з*). Кожна траєкторія має вісь симетрії.

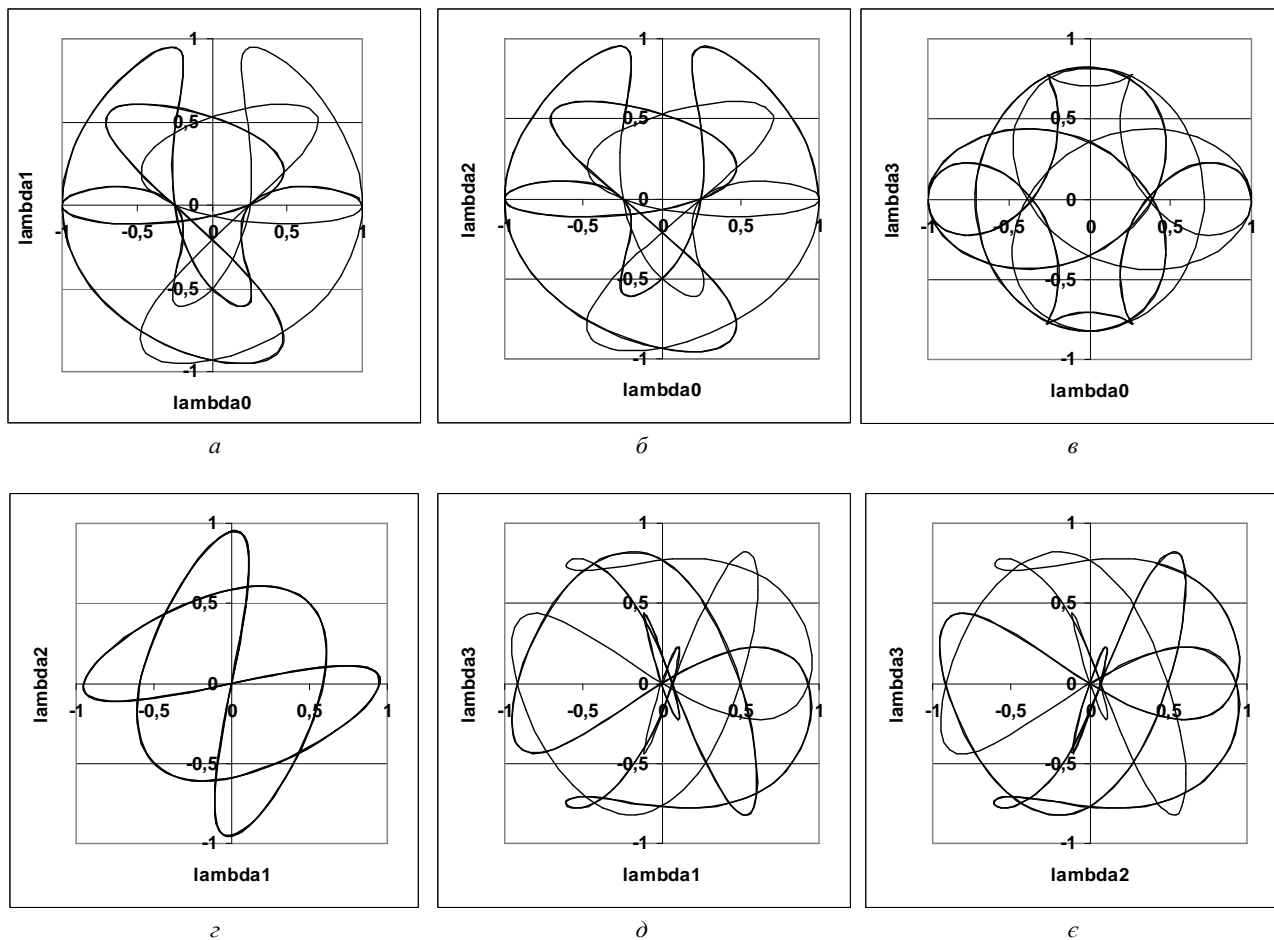


Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$:

$a - \lambda_1(\lambda_0)$; $б - \lambda_2(\lambda_0)$; $в - \lambda_3(\lambda_0)$; $г - \lambda_2(\lambda_1)$; $д - \lambda_3(\lambda_1)$; $е - \lambda_3(\lambda_2)$.

Залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі (11), (3), (9) при значеннях параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,03$ на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 3. Зауважимо, що аналогічний вигляд мають і залежності проєкцій модельної кутової швидкості від часу, бо в першому наближенні $\theta_{ni}^* = \omega_i \Delta t$, $i = 1, 2, 3$.

Відповідні траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для цього випадку наведені на рис. 4. На відміну від попереднього випадку, всі отримані траєкторії мають різний вигляд. Характерно, що всі траєкторії окрім $\lambda_3(\lambda_0)$ і $\lambda_2(\lambda_1)$ є симетричними: траєкторії $\lambda_1(\lambda_0)$ і $\lambda_2(\lambda_0)$ симетричні відносно вертикальної осі, а траєкторії $\lambda_3(\lambda_1)$ і $\lambda_3(\lambda_2)$ – відносно горизонтальної осі.

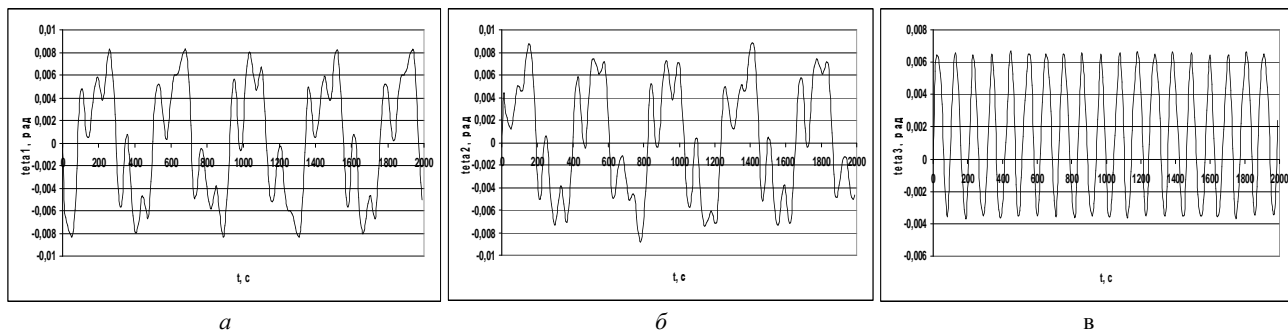


Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9)

при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,03$:

a – по першій осі; $б$ – по другій осі; $в$ – по третій осі.

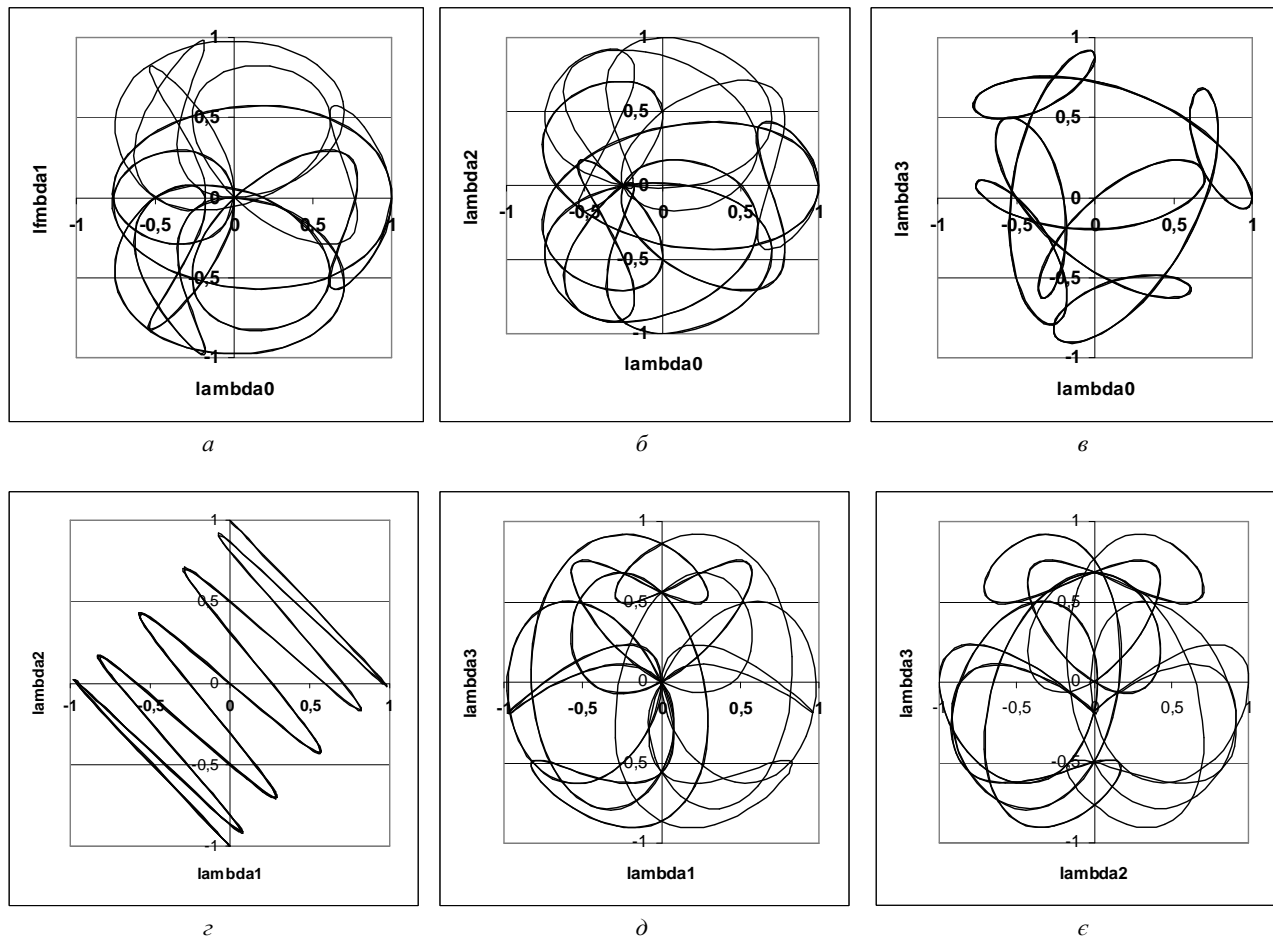


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,03$:
 $a - \lambda_1(\lambda_0)$; $b - \lambda_2(\lambda_0)$; $v - \lambda_3(\lambda_0)$; $z - \lambda_2(\lambda_1)$; $d - \lambda_3(\lambda_1)$; $e - \lambda_3(\lambda_2)$.

Представляють інтерес реалізації еталонних моделей при кратних значеннях параметрів. На рис. 5 представлені залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі (11), (3), (9) при значеннях параметрів $k_1 = 0,048$, $k_2 = 0,012$, $k_3 = 0,012$ на інтервалі часу 2000 с. В даному випадку виконуються одночасно умови: $k_2 = k_3$, $k_1 = 2k_2 + 2k_3$. На рис. 6 представлені отримані при цьому траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Всі траєкторії, окрім траєкторії $\lambda_2(\lambda_1)$, не мають симетрії. Як видно з рис. 6, траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$ має такий же вигляд, як і траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$, траєкторії $\lambda_3(\lambda_1)$ і $\lambda_3(\lambda_2)$ також однакові. Характер траєкторії $\lambda_2(\lambda_1)$ на рис. 6, з свідчить про те, що залежності $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ для вказаних значень параметрів k_i ідентичні. На відміну від наведених вище реалізацій еталонної моделі (11), (3), (9) отримані траєкторії в цьому випадку мають *регулярний* характер.

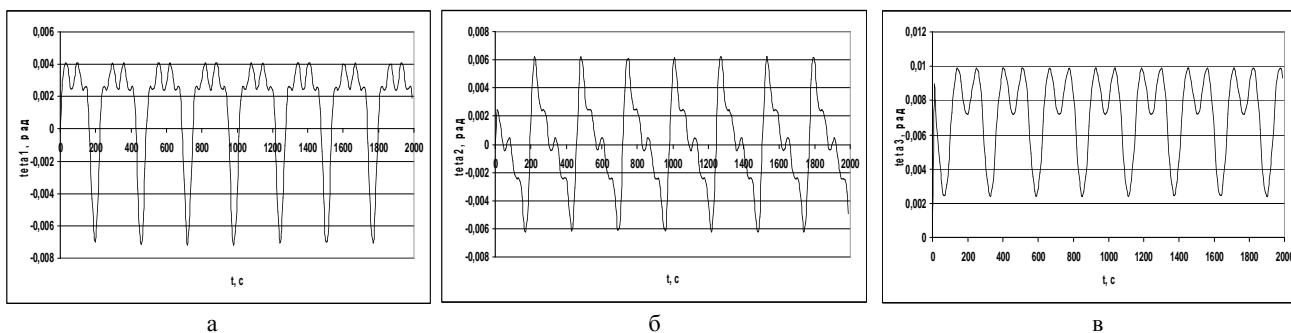


Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9) при $k_1 = 0,048$, $k_2 = 0,012$, $k_3 = 0,012$:
 $a -$ по першій осі; $b -$ по другій осі; $v -$ по третій осі.

На рис. 7 представлені залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі (11), (3), (9) при значеннях параметрів $k_1 = 0,005$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,025$ на інтервалі часу 2000 с. Для цього випадку має місце умова $k_2 = k_3$.

Траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації наведені на рис. 8. Як і в попередньому випадку, траєкторії $\lambda_1(\lambda_0)$ і $\lambda_2(\lambda_0)$ мають однаковий вигляд, траєкторії $\lambda_3(\lambda_1)$ і $\lambda_3(\lambda_2)$ також однакові. Характер траєкторії $\lambda_2(\lambda_1)$ на рис. 8, з дозволяє зробити висновок, що залежності $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ для вказаних значень параметрів k_i ідентичні.

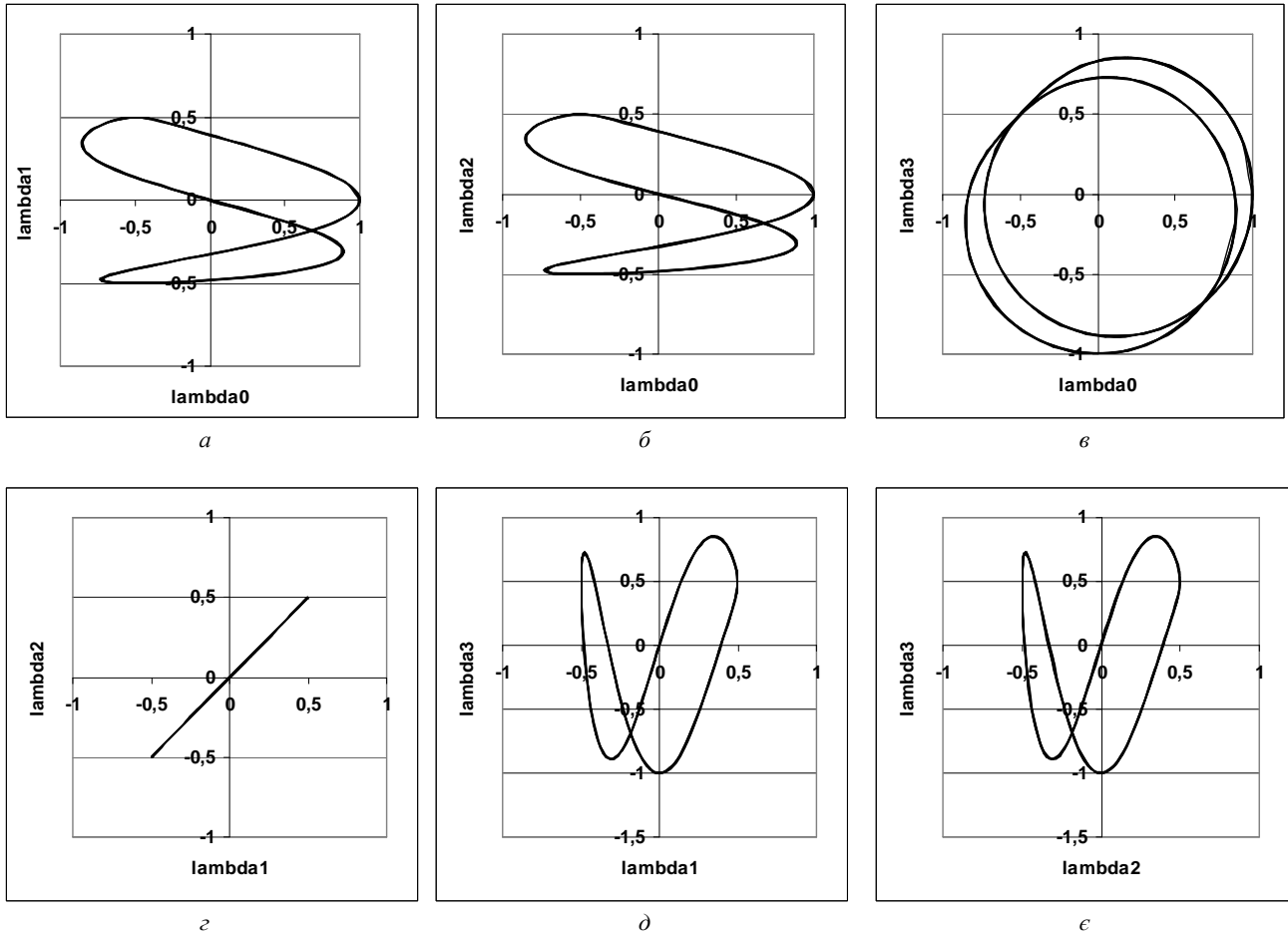


Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,048$, $k_2 = 0,012$, $k_3 = 0,012$:
 а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; в – $\lambda_3(\lambda_0)$; з – $\lambda_2(\lambda_1)$; д – $\lambda_3(\lambda_1)$; е – $\lambda_3(\lambda_2)$.

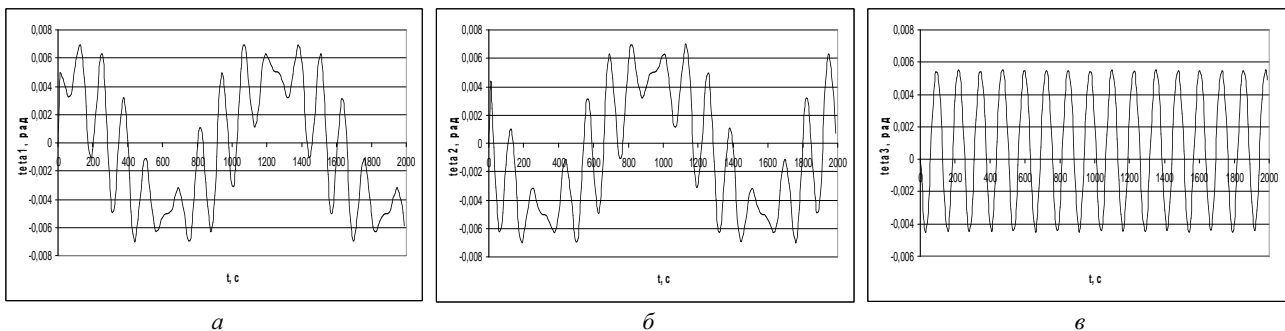


Рис. 7 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9) при $k_1 = 0,005$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,025$:
 а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

В роботі [6] описано результати реалізації еталонної моделі регулярної прецесії і наведено побудовані тра-

екторії $\lambda_i(\lambda_0)$, $i=1, 2, 3$ у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Порівняння результатів реалізації запропонованої узагальненої моделі обертання з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропонована модель суттєво відрізняється від моделі регулярної прецесії і охоплює інші, більш складні обертальні рухи твердого тіла.

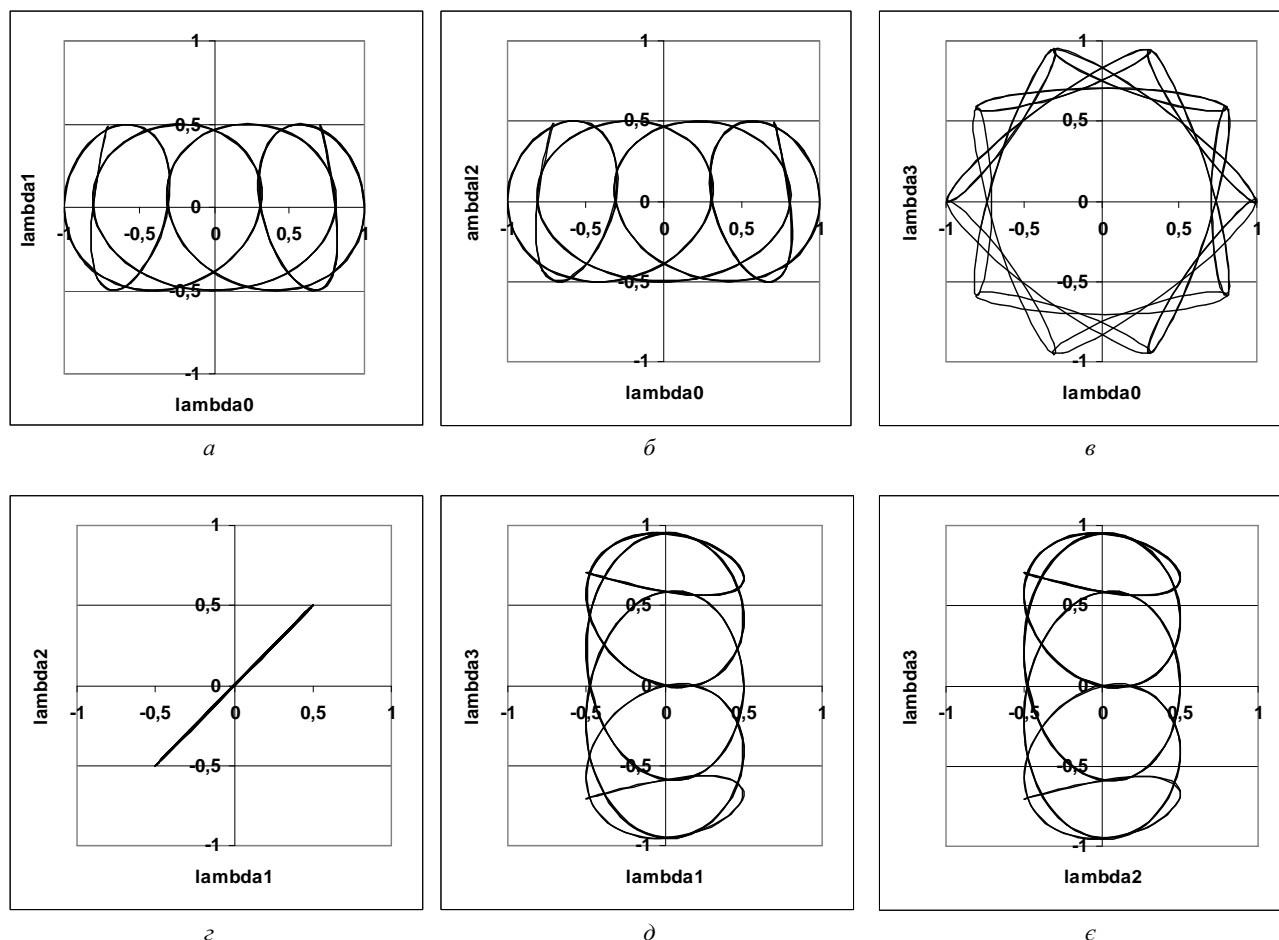


Рис. 8 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,005$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,025$:

$a - \lambda_1(\lambda_0)$; $b - \lambda_2(\lambda_0)$; $c - \lambda_3(\lambda_0)$; $d - \lambda_2(\lambda_1)$; $e - \lambda_3(\lambda_1)$; $f - \lambda_3(\lambda_2)$.

Висновки. Запропонована узагальнена трьохчастотна неперервна модель обертання твердого тіла, яка основана на новому представленні кватерніона орієнтації тригонометричними функціями кутів, що лінійно змінюються у часі. В результаті аналізу побудованих траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації показано, що при належному виборі параметрів моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, які різняться від класичного випадку регулярної прецесії. Представлену еталонну модель обертання твердого тіла можна застосовувати для точного аналізу алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

Список літератури: 1. Литманович Ю. Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург : ЦНИИ «Электроприбор». – 2003. – С. 250 – 260. 2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с. 3. Кузнецов Ю. А., Олейник С. В., Деменков В. А., Плаксий Ю. А. Применение моделей вращения для анализа погрешностей алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов // XVIII Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург : ЦНИИ «Электроприбор». – 2010. – С. 114 – 116. 4. Ткаченко А. И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. 5. Панов А. П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9. 6. Плаксий Ю. А. Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». – Х. : НТУ «ХПІ». – 2013. – №37 (1010). – С. 141 – 147. 7. Плаксий Ю. А. Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». – Х. : НТУ «ХПІ». – 2014. – №6 (1049). – С. 175 – 185. 8. Плаксий Ю. А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі // Вісник НТУ «ХПІ». – Х. : НТУ «ХПІ». – 2015. – №41 (1150). – С. 111 – 119.

References: 1. Litmanovich, Yu. Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialakh Sankt-Peterburgskikh konferencyi za desyatiletie [Progress in developing Strapdown INS in the East and West in the materials of St. Petersburg conference in a decade]. X Sankt-Peterburgskaya Mezhdunar. konf. S.-Peterburg, CNII "Yelectroprigor" Publ., 2003, pp. 250–260. 2. Branets, V. N. and Shmyglevskiy, I. P. Vvedeniye v teoriyu

besplatformennykh inercial'nykh navigacionnykh system [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p. **3.** Kuznetsov, Yu. A., Oleynik, S. V., Demenkov, V. A. and Plakhsy, Yu. A. Primeneniye modeley vrashheniya dlya analiza pogreshnostey algoritmov besplatformennykh inercial'nykh sistem orientacii podvizhnykh ob"ektov [Using rotation models for analyzing the errors of algorithms of strapdown inertial navigation systems of moving objects]. *XVII Sankt-Peterburgskaya Mezhdunar. Konf.* [XVII St. Petersburg International Conference] S.-Peterburg, CNII "Yelektropribor" Publ., 2010, pp. 114–116. **4.** Tkachenko, A. I. O primeneniі parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmakh opredeleniya orientacii ob"ekta [On the application of the Rodrigues-Hamilton parameters in the algorithms of defining object orientation]. *Kibernet. i vychisl. tehn* [Cybernetics and Computing Technique]. Kyiv, 1970, vol. 5, pp. 20–22. **5.** Panov, A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchaye precessii tverdogo tela [Optimization of high-precision quaternion calculation algorithms in the case of rigid body precession]. *Kibernet. i vychisl. tehn* [Cybernetics and Computing Technique]. Kyiv, 1987, vol. 73, pp. 3–9. **6.** Plakhsy, Yu. A. Etalonna trygonometrychna kvaternionna model' precessiyogo typu obertannya tverdogo tela [A quaternion trigonometric precession reference model of a rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2013, no. 37 (1010), pp. 141–147. **7.** Plakhsy, Yu. A. Tr'okhchastotni analitychni etalonnі modeli obertannya tverdogo tela [Three-frequency analytical reference model of a rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014, no. 6 (1049), pp. 175–185. **8.** Plakhsy, Yu. A. Uzagal'nennya tr'okhchastotnoyi trygonometrychnoyi kvaternionnoyi modeli obertannya tverdogo tela. Pershyy typ modeli [Generalization of a three-frequency trigonometrical quaternion model of a rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, no.41 (1150), pp. 111–119.

Надійшла (received) 28.03.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

Плаксій Юрій Андрійович – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ «ХПІ», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plakhsy_yu@gmail.com.

Плаксій Юрій Андреевич – кандидат технических наук, доцент, профессор НТУ «ХПИ», Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plakhsy_yu@gmail.com.

Plakhsy Yuriy Andriyovych – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Professor NTU "KhPI", National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: plakhsy_yu@gmail.com.