МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою
«Елементи векторної алгебри»

з навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №3 від 26.10.22

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Елементи векторної алгебри» з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей ВІТВ/уклад.: В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, І. О. Веретельник. — Харків: НТУ «ХПІ», 2022. — 60 с.

Укладачі: В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, І. О. Веретельник.

Рецензент доц. С. М. Решетнікова.

Кафедра прикладної математики

Вступ

Методичні вказівки відповідають навчальним (робочим) програмам з дисципліни «Вища математика». Головна мета — надати студентам певний мінімум теоретичного матеріалу, а також практичних навиків з основних питань для розв'язання задач за темою «Елементи векторної алгебри», допомогти студентам в їх самостійній роботі.

У кожному розділі наведено достатня кількість розв'язаних задач та прикладів, пояснюючих та закріплюючих теоретичний матеріал. Серед розв'язаних задач чимало таких, які можна назвати типовими; в будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі з боку викладача оволодіти основними методами розв'язання задач даного розділу. Наприкінці наведено добірку індивідуальних завдань. Також розібрані зразки виконання індивідуальних завдань.

1. Вектори. Основні поняття

1.1. Направлені відрізки

Такі фізичні величини, як сила, швидкість визначаються не тільки своїм чисельним значенням, а й напрямом дії. Такі величини називаються *векторними*. Побудуємо геометричний аналог фізичного вектора.

Задамо в просторі дві точки A і B, та проведемо через них пряму. Точки A і B обмежують на прямій відрізок AB (рис. 1.1).

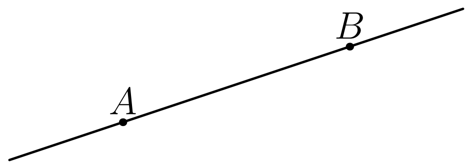

Рис. 1.1. Відрізок прямої

Упорядкуємо ці точки: нехай точка A буде початковою, а точка B — кінцевою, тобто задамо на побудованому відрізку *напрям*.

Означення 1. Відрізок, на якому задано напрям, називається *направленим відрізком* або *вектором*.

Позначається направлений відрізок з початком в точці A і кінцем в точці B символом $\overrightarrow{AB}$. Якщо не важливо, які точки будуть кінцевими, вектор можна позначати однією буквою: $\vec{a}$ або $\vec{A}$ (рис. 1.2).

На рисунках вектор зображається стрілкою.

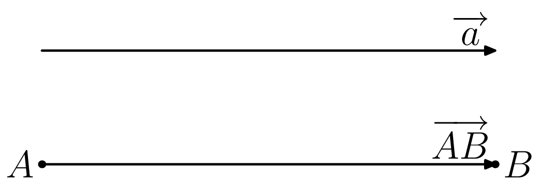

Рис. 1.2. Направлений відрізок

Початкова точка A називається *точкою прикладання* вектора.

Означення 2. Відстань між початком A і кінцем B направленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ називається *довжиною* направленого відрізка або *модулем* вектора та позначається символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Звернемо увагу на те, що *кожен направлений відрізок визначається напрямом та довжиною.*

Означення 3. Направлений відрізок, у якого початкова та кінцева точки збігаються, називається *нульовим.*

Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрям невизначено.

Означення 4. Два вектори $\overrightarrow{A}$ і $\overrightarrow{B}$ називаються *рівними*, якщо вони можуть бути суміщені шляхом паралельного перенесення. Позначаються рівні вектори так:

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}.$$

Таким чином, якщо два вектори рівні, то:

- вони лежать на одній і тій самій прямій або на паралельних прямих;
- вони спрямовані в одну і ту ж сторону;
- рівні їх довжини.

1.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами називаються операції додавання векторів та множення вектора на число.

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два довільні вектори. Визначимо операцію додавання цих векторів. Точку прикладання вектора $\vec{b}$ помістимо шляхом паралельного перенесення в кінець вектора $\vec{a}$ (рис 1.3).

Означення 5 (Правило трикутника)**.** *Сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a}+\vec{b}$, що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$.

Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма. Прикладемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ до загального початку O (рис 1.4).

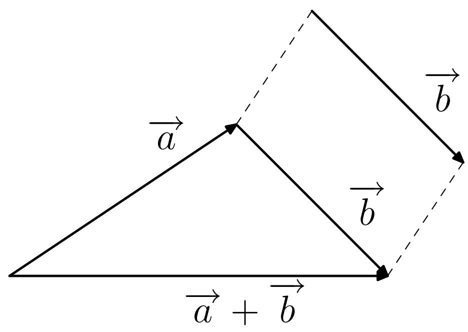

Рис. 1.3. Правило трикутника

Означення 6 (Правило паралелограма)**.** *Сумою* двох векторів, прикладених до спільної точки, буде вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах, і закріплений в тій же точці, що вихідні вектори.

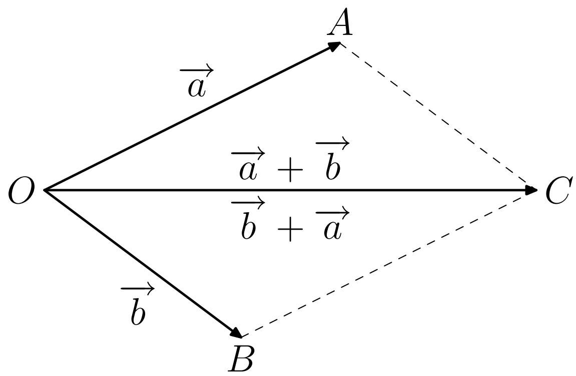

Рис. 1.4. Правило паралелограма

Операція додавання векторів має такі властивості:

1. Операція додавання *комутативна*:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}, \tag{1.1}$$

тобто, сума векторів не залежить від порядку доданків.

2. Операція додавання векторів *асоціативна*:

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right), \tag{1.2}$$

тобто при складанні трьох і більше доданків їх можна групувати у довільному порядку.

3. Існує *нульовий* вектор $\overrightarrow{0}$ такий, що для будь–якого вектора $\overrightarrow{a}$ виконується умова:
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a} \tag{1.3}$$
(особлива роль нульового вектора).

4. Для кожного вектора $\overrightarrow{a}$ існує *протилежний* йому вектор $\overrightarrow{a}_-$ такий, що
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}_- = \overrightarrow{0}. \tag{1.4}$$
Зауважимо, що вектор протилежний до вектора $\overrightarrow{a}$ має туж саму довжину, що й вектор $\overrightarrow{a}$, але має протилежний напрям.

Означення 7. *Добутком* вектора $\overrightarrow{a}$ на дійсне число α називається такий вектор $\overrightarrow{b} = \alpha \cdot \overrightarrow{a}$, який паралелен до вектора $\overrightarrow{a}$, має довжину $|\alpha||\overrightarrow{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\overrightarrow{a}$, якщо α додатне, і має протилежний напрям, якщо α від'ємне.

Геометричний сенс множення вектора $\overrightarrow{a}$ на число α полягає у «розтягуванні» в $|\alpha|$ разів вектора $\overrightarrow{a}$.

Зауважимо, що якщо $0 < |\alpha| < 1$, то вектор $\overrightarrow{a}$ стискається, а не розтягується, причому, якщо α від'ємне, то крім «розтягування» вектор $\overrightarrow{a}$ ще змінює свій напрям на протилежний (рис. 1.5).

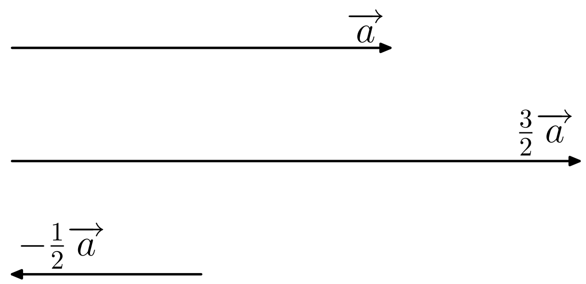

Рис. 1.5. Добуток вектора на число

Операція множення вектора на число має такі властивості:

1. Розподільна властивість операції множення на число відносно чисельного множника:
$$\alpha\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}.$$

2. Розподільна властивість операції множення на число відносно векторного множника:
$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}.$$

3. Асоціативна властивість відносно чисельного множника:

$$\alpha\left(\beta\overrightarrow{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\overrightarrow{a}.$$

4. Особливість чисельного множника одиниця:

$$1\cdot\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}.$$

Тут α і β довільні дійсні числа.

Означення 8. *Різницею* $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається такий вектор $\overrightarrow{c}$, якій у сумі з вектором $\overrightarrow{b}$ буде дорівнювати вектору $\overrightarrow{a}$ (рис 1.6).

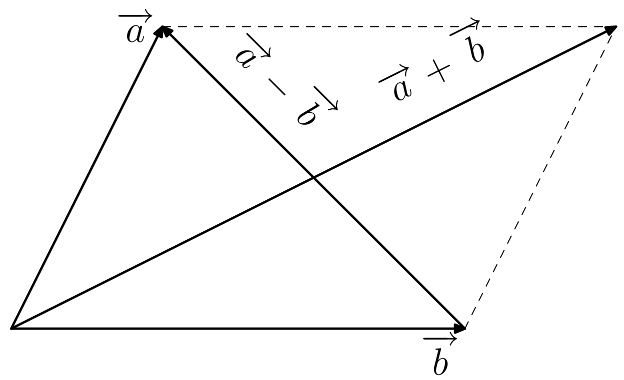

Рис. 1.6. Різниця та сума векторів

Таким чином, якщо

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b},$$

тоді

$$\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$$

і навпаки.

Зауважимо, що різницю можна обчислювати за правилом:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}_{-} = \overrightarrow{a} + (-1)\overrightarrow{b}.$$

Завдання для самостійної роботи

Побудувати два довільні вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$.

1. Знайти їх суму та різницю.

2. Знайти вектор $\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.

1.3. Числова вісь

Задамо на прямій довільним чином *додатний напрям*, інший напрям на цій прямій будемо вважати *від'ємним.*

Означення 9. Пряма, на якій задано напрям, називається *віссю.*

Зображати вісь будемо стрілкою, яка вказує додатний напрям (рис.1.7).

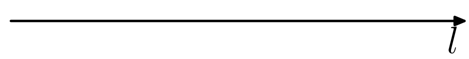

Рис. 1.7. Вісь l

Визначемо на осі деяку точку O (початок координат) та масштабний відрізок, довжина якого приймається за одиницю.

Означення 10. Вісь, на який задано початок координат та масштабний відрізок, називається *числовою віссю.*

Звичайно числову ось позначають двома літерами, явно вказуя початок координат. Наприклад, вісь Ox — числова вісь з початком координат в точці O.

Означення 11. *Координатою точки* M на числовій осі називається таке число x, модуль якого дорівнює відстані від початку координат (точки O) до точки M і має знак «+», якщо точка M розміщена у додатному напрямі відносно початку координат O, та знак «−», якщо точка M міститься у від'ємному напряму (рис.1.8).

То, що точка M має координату x, позначається так: $M(x)$.

Очевидно, що початок координат має координату, яка дорівнює нулю, тобто $O(0)$. На рисунку рис.1.8 зображені точки $O(0)$, $N(-3)$ і $M(2)$.

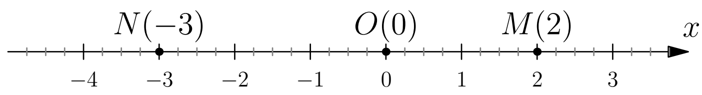

Рис. 1.8. Числова вісь та координати точок

Зауваження 1. Кожній точці на числовій осі відповідає дійсне число — її координата, і навпаки, кожному дійсному числу відповідає єдина точка осі, координатою якої є це число і ця відповідність взаємно-однозначна.

Означення 12. Вектор, що визначає напрям, називається *напрямним вектором.*

Означення 13. Вектор одиничної довжини, що визначає напрям вектора $\overrightarrow{a}$, називається *одиничним вектором* або *ортом* і позначається символом $\overrightarrow{a}^0$.

З очевидної рівності

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} \tag{1.5}$$

випливає, що кожен вектор визначається *довжиною* $|\overrightarrow{a}|$ і *напрямом* $\overrightarrow{a}^0$:

$$\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{a}^0. \tag{1.6}$$

Додатний напрям осі зручно визначати *ортом осі.* Наприклад, позначимо орт осі Ox як вектор $\vec{i}$ (рис. 1.9). Його довжина дорівнює одиниці, тобто $\left|\vec{i}\right| = 1$.

Рис. 1.9. Радіус-вектор точки на числовій осі

Зауважемо, що положення довільної точки M осі x щодо початку координат O однозначно визначається спрямованим відрізком $\overrightarrow{OM}$, прикладенним до початку координат O. Такий вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіус-вектором точки* M. Насправді, напрям вектора $\overrightarrow{OM}$ вказує в якому напряму осі (додатному або від'ємному) щодо точки O зміщена точка M, а довжина вектора $\overrightarrow{OM}$ дорівнює відстані від початку координат до точки M (рис. 1.9).

1.4. Кут між векторами

Розглянемо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Прикладемо їх до спільного початку в точці O (рис.1.10).

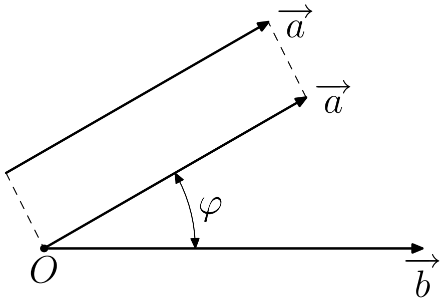

Рис. 1.10. Кут між векторами

Означення 14. *Кутом* φ *між двома векторами* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший кут, на який треба повернуть один з векторів навколо їх спільного початку, щоб їх напрямки збіглись.

Позначати кут φ між вектором $\vec{a}$ і вектором $\vec{b}$ будемо символом $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$. Очевидно, що $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

1.5. Проєкція вектора

Означення 15. *Прямокутною проєкцією точки* A на вісь l називається основа A' перпендикуляра AA', опущеного з точки A на вісь l (рис. 1.11).

Нехай у просторі задана деяка вісь l і направлений відрізок $\overrightarrow{AB}$. Опустимо на вісь l перпендикуляри з кінцевих точок направленого відрізка $\overrightarrow{AB}$. Їх основами будуть точки A' і B' (рис. 1.11).

Означення 16. *Прямокутною проєкцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називається довжина відрізка $A'B'$ осі l, яка взята зі знаком плюс, якщо кут φ між вектором $\overrightarrow{AB}$ та віссю l гострий, і зі знаком мінус, якщо кут тупий.

Позначається проєкція символом $\text{Пр}_l\overrightarrow{AB}$.
Отже, маємо

$$\text{Пр}_l\overrightarrow{AB} = \pm|A'B'|.$$

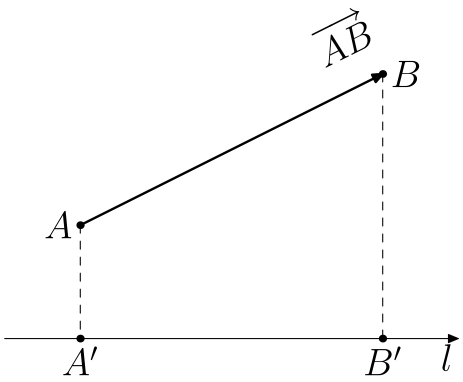

Рис. 1.11. Прямокутна проєкція вектора на вісь

Теорема 1. *Проєкція вектора на вісь дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між вектором та віссю*

$$Пр_l\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\varphi.$$

Властивості проєкції:

1. Проєкція суми векторів на вісь дорівнює сумі проєкцій цих векторів на дану вісь:
$$\text{Пр}_l(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \text{Пр}_l\,\overrightarrow{a} + \text{Пр}_l\,\overrightarrow{b}\,.$$
2. Проєкція добутку вектора $\overrightarrow{a}$ на число λ дорівнює добутку проєкції вектора $\overrightarrow{a}$ на це число λ:
$$\text{Пр}_l(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda\,\text{Пр}_l\,\overrightarrow{a}\,.$$

Наслідок 1. *Проєкцією ламаної на вісь є проєкція направленого відрізка, що замикає цю ламану.*

Завдання для самостійної роботи

Провести вісь l та вектор $\overrightarrow{AB}$, якій має довжину 6 одиниць та утворює з віссю кут $\dfrac{\pi}{6}$. Побудувати та знайти проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l.

Що зміниться, якщо кут буде дорівнювати $\dfrac{4\pi}{6}$?

2. Координати вектора

2.1. Система координат

Означення 17. Три взаємно перпендикулярні числові осі Ox, Oy, Oz з загальним початком координат і масштабним відрізком, утворюють *прямокутну декартову систему координат у просторі* (див. рис.2.1).

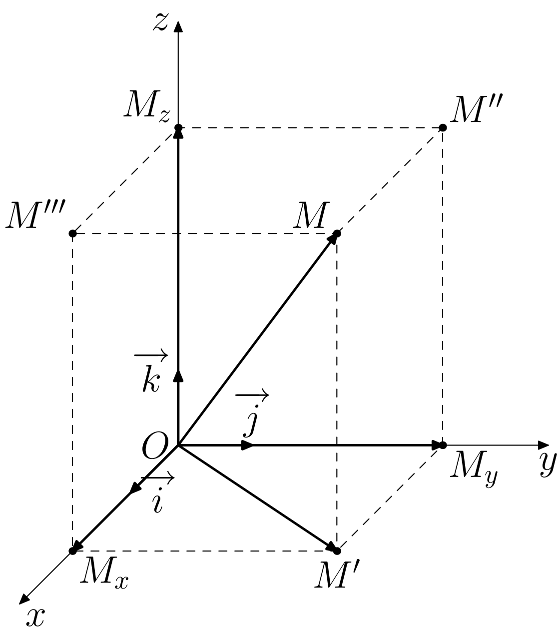

Рис. 2.1. Координати у просторі

Вісь Ox називається *віссю абсцис*, вісь Oy — *віссю ординат* і вісь Oz — *віссю аплікат*. Кожні дві координатні осі визначають *координатну площину*. Таким чином маємо три взаємно перпендикулярні *координатні площини*: xOy, yOz, zOx.

Орти осей позначають так: вектор $\vec{i}$ — орт осі Ox, вектор $\vec{j}$ — орт осі Oy та вектор $\vec{k}$ — орт осі Oz. Їх модулі дорівнюють одиниці та вони спрямовані у додатному напряму координатних осей. Орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворюють прямокутний базис координатної системи.

Розглянемо довільний вектор $\overrightarrow{a}$. Прикладемо вектор $\overrightarrow{a}$ до початку координат O, кінець вектора $\overrightarrow{a}$ позначимо як точку M. Тоді маємо

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}.$$

Побудуємо проєкції вектора $\overrightarrow{OM}$ на осі координат. Для цього проведемо через точку M три площини, які перпендикулярні координатним осям Ox, Oy, Oz. Точки перетину цих площин з осями координат позначимо відповідно через M_x, M_y, M_z. Одержані відрізки OM_x, OM_y і OM_z є прямокутні проєкції вектора $\overrightarrow{OM}$ на відповідні осі координат.

Означення 18. Проєкції вектора $\overrightarrow{a}$ на відповідні осі координат називаються *координатами вектора.*

Позначимо відповідні координати вектора $\overrightarrow{a}$ числами a_x, a_y, a_z. То, що вектор $\overrightarrow{a}$ має координати a_x, a_y, a_z позначають так

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Очевидно, що

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = OM_x, \tag{2.1}$$

$$a_y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = OM_y, \tag{2.2}$$

$$a_z = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} = OM_z. \tag{2.3}$$

Розглянемо деякі прості приклади. Вектор $\vec{i}$ — орт осі Ox. Його модуль дорівнює одиниці і він не має складових удовж осей Oy та Oz, тому

$$\vec{i} = (1, 0, 0).$$

Аналогично маємо

$$\vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

З рис.2.1 випливає таке розкладання вектора $\overrightarrow{a}$ на складові:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}. \tag{2.4}$$

Розглянемо вектор $\overrightarrow{OM_x}$. Цей вектор спрямовано вздовж осі Ox, тобто паралелено орту $\vec{i}$. Тоді маємо

$$\overrightarrow{OM_x} = x \cdot \vec{i},$$

де x — коефіцієнт пропорційності.

З'ясуємо зміст цього коефіцієнту. Довжина вектора $\overrightarrow{OM_x}$ дорівнює

$$\left|\overrightarrow{OM_x}\right| = \left|x \cdot \vec{i}\right| = |x| \cdot \left|\vec{i}\right| = |x|\,,$$

тобто модуль коефіцієнта x дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM_x}$.

Далі, якщо вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює гострий кут з віссю Ox, то вектор $\overrightarrow{OM_x}$ спрямовано у додатному напряму осі Ox і коефіцієнт x більший за нуль. Якщо вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює тупий кут з віссю Ox, то вектор $\overrightarrow{OM_x}$ спрямовано у від'ємному напряму та коефіцієнт x менший за нуль. Таким чином, коефіцієнт x є проєкція вектора $\overrightarrow{OM}$ на вісь Ox, тобто x є координатою вектора $\overrightarrow{OM}$. Звернемо увагу, що вектор $\overrightarrow{OM_x}$ не має складових удовж осей Oy та Oz.

Отже,

$$\overrightarrow{OM_x} = a_x\vec{i} = (a_x, 0, 0)\,.$$

Аналогічно розглядаються інші складові вектора $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM_y} = a_y\vec{j} = (0, a_y, 0)\,,$$
$$\overrightarrow{OM_z} = a_z\vec{k} = (0, 0, a_z)\,.$$

Таким чином, маємо таке розкладання вектора $\overrightarrow{a}$ за ортами координатної системи:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}. \tag{2.5}$$

Довжина вектора $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.6}$$

Нехай вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$ утворює з координатними осями відповідні кути α, β, γ, які називаються *напрямними* (рис.2.2). Тоді за означенням проєкції маємо

$$a_x = OM_x = |\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,$$
$$a_y = OM_y = |\overrightarrow{OM}|\cos\beta,$$
$$a_z = OM_z = |\overrightarrow{OM}|\cos\gamma.$$

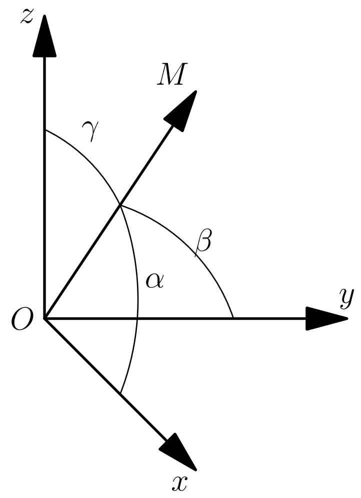

Рис. 2.2. Напрямні кути

Величини

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$$

називаються *напрямними косинусами* вектора $\overrightarrow{OM}$.

Знайдемо орт вектора $\overrightarrow{OM}$, для цього поділимо вектор $\overrightarrow{OM}$ на його модуль $\left|\overrightarrow{OM}\right|$:

$$\overrightarrow{OM}^0 = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{\overrightarrow{OM_x}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} + \frac{\overrightarrow{OM_y}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} + \frac{\overrightarrow{OM_z}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} =$$
$$= \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\vec{i} + \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\vec{j} + \frac{a_z}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

Зауваження 2. Напрямні косинуси вектора є координатами його орта.

Тому, що

$$\left|\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = 1,$$

то маємо умову, яку задовільняють напрямні кути вектора:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад 1. Знайти довжину і напрям вектора $\vec{a} = (1, -2, 3)$.

Розв'язання.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$\square$

Отже, *задавши координати вектора, завжди можна визначити його довжину та напрям, тобто сам вектор.*

Положення будь–якої точці M визначається її *радіус–вектором* $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат O, а кінець — з точкою M.

Означення 19. *Координатами* x*,* y*,* z *точки* M називаються проєкції її радіус–вектора $\overrightarrow{OM}$ на відповідні координатні осі.

То що точка M має координати x, y, z позначається так: $M(x, y, z)$.

2.2. Дії над векторами в координатній формі

2.2.1. Рівність векторів

Два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні, якщо рівні їх координати, тобто

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

2.2.2. Множення вектора на число

Помножимо вектор

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

на число λ:

$$\lambda\vec{a} = \lambda\,(a_x, a_y, a_z) = \lambda\left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right) = \lambda a_x\vec{\imath} + \lambda a_y\vec{\jmath} + \lambda a_z\vec{k} =$$
$$= (\lambda a_x)\vec{\imath} + (\lambda a_y)\vec{\jmath} + (\lambda a_z)\vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Таким чином, *щоб помножити вектор на число, потрібно помножити на це число всі його координати.*

2.2.3. Додавання векторів

Додамо до вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

вектор

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}.$$

Тоді одержимо:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) =$$
$$= a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} + b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k} =$$
$$= (a_x + b_x)\vec{\imath} + (a_y + b_y)\vec{\jmath} + (a_z + b_z)\vec{k} =$$
$$= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Таким чином, *щоб скласти два вектори, потрібно скласти відповідні координати цих векторів.*

Приклад 2. Знайти суму $\vec{F}$ двох векторів $\vec{a} = (1, -2, 3)$ і $\vec{b} = (4, 5, -6)$.

Розв'язання. Сума двох векторів дорівнює:

$$\vec{F} = \vec{a} + \vec{b} = (1, -2, 3) + (4, 5, -6) = (1 + 4, -2 + 5, 3 - 6) = (5, 3, -3).$$

□

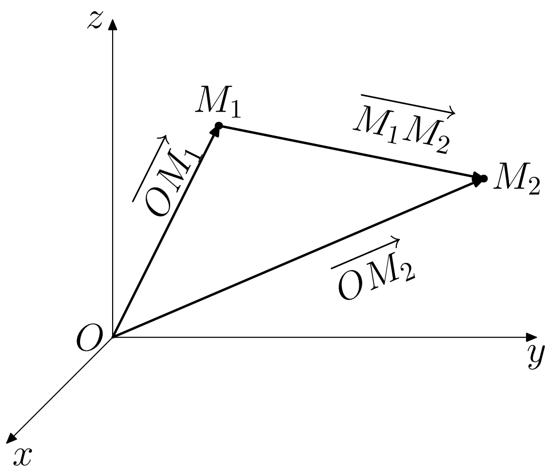

Рис. 2.3. Координати вектора, що задані двома точками

2.2.4. Координати вектора, що задані двома точками

Нехай є дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Дві точки визначають направлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ відносно базису $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

Враховуючи, що кожна точка визначається власним радіус-вектором, за правилом трикутника додавання векторів маємо (рис. 2.3):

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Таким чином, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ дорівнює різниці векторів $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{OM_1}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

Вектори $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ є радіус–векторами точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тому

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k},$$

Тоді одержимо

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}\right) = \\ = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \\ = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (2.7)$$

Таким чином, *щоб знайти координати вектора, заданого двома точками, потрібно з координат кінцевої точки відняти координати його початкової точки.*

Приклад 3. Знайти відстань між двома точками $M(1,-2,3)$ і $N(4,5,-6)$ та напрям прямої, що їх з'єднує.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}$:

$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M) = (4-1, 5-(-2), -6-3) = (3, 7, -9).$

Відстань між точками M і N дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-9)^2} = \sqrt{9 + 49 + 81} = \sqrt{139}.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\cos\alpha = \frac{MN_x}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{3}{\sqrt{139}},$$
$$\cos\beta = \frac{MN_y}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{7}{\sqrt{139}},$$
$$\cos\gamma = \frac{MN_z}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{-9}{\sqrt{139}}.$$

□

2.3. Колінеарність векторів

Означення 20. Вектори, що лежать на одній і тій самій прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними.*

Зауваження 3. Нульовий вектор, через невизначеність свого напряму, вважається колінеарним будь-якому вектору.

Теорема 2 (умова колінеарності)**.** *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні та вектор $\vec{b} \neq 0$, то існує таке число λ, що*

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}. \tag{2.8}$$

Нехай вектори

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \text{i} \quad \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

колінеарні. Тоді враховуючи правило множення вектора на число

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \lambda \overrightarrow{b} = \lambda(b_x, b_y, b_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)$$

і умову рівності векторів, з (2.8) одержимо

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z. \tag{2.9}$$

Звідси випливає умова колінеарності у координатній формі:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda. \tag{2.10}$$

Таким чином, *якщо вектори колінеарні, то їх координати утворюють пропорцію. І навпаки, якщо координати векторів утворюють пропорцію, то вектори колінеарні.*

Приклад 4. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = (2, -1, 3)$ і $\vec{b} = (-6, 3, -9)$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умови колінеарності (2.10):

$$\frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9}.$$

Координати векторів утворюють пропорцію, тому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

□

2.4. Ділення відрізка у даному відношенні

Нехай дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ обмежують відрізок M_1M_2. Треба знайти таку точку $M(x, y, z)$, яка буде ділити відрізок M_1M_2 в даному відношенні, тобто відношення величин відрізків M_1M і MM_2 дорівнює даному числу λ:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \tag{2.11}$$

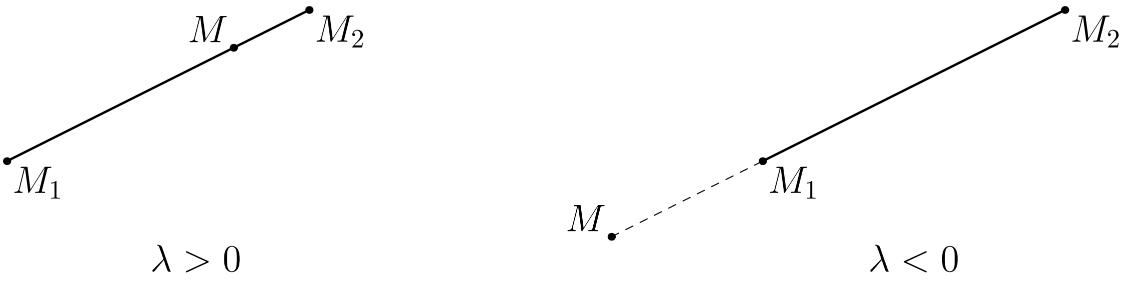

Рис. 2.4. Ділення відрізка

Ці відрізки зображені на рис. 2.4. Число λ може бути як додатним, так і від'ємним. Якщо $\lambda = 0$, тоді, як випливає з формули (2.11), точка M збігається з точкою M_1. Звернемо увагу на те, що точка M не може збігатися с точкою M_2, тому $\lambda \neq -1$.

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{MM_2}$ колінеарні, тому,

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}.$$

Цієї векторної рівності відповідає три рівняння:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \tag{2.12}$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \tag{2.13}$$

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \tag{2.14}$$

Звідси випливає, що точка M має такі координати:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{2.15}$$

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, то за формулами (2.15) одержимо координати середини відрізка M_1M_2:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{2.16}$$

Приклад 5. Знайти середину відрізка, якій поєднує точки $M(0; 1; 2)$ і $N(-3; 1; 2)$.

Розв'язання. За формулами (2.16) одержимо

$$x = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{0 + (-3)}{2} = -\frac{3}{2},$$

$$y = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

$$z = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Отже, точка $A\left(-\dfrac{3}{2}; 1; 2\right)$ ділить відрізок MN пополам. $\square$

2.5. Розкладання вектора

За правилом паралелограма можна складати вектори. Тобто, якщо на двох векторах побудувати паралелограм, тоді діагональ паралелограма можна уявити як суму цих векторів. Але це правило можна розглядати і як розклад одного вектора по двох іншім. Розглянемо такий приклад.

Приклад 6. Розкласти вектор $\overrightarrow{c} = (2; 6)$ по векторах $\overrightarrow{a} = (2; 0)$ і $\overrightarrow{b} = (3; 3)$.

Розв'язання. На площині xOy побудуємо вектори $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ (рис. 2.5).

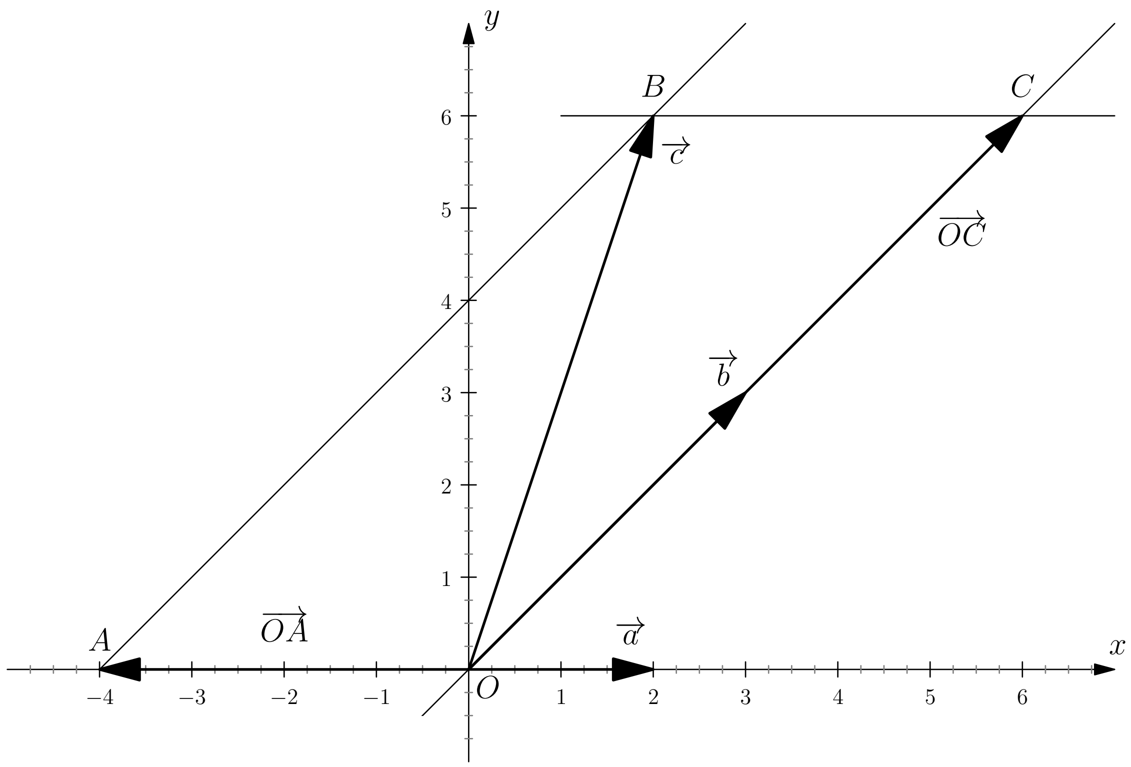

Рис. 2.5. Розкладання вектора

На цих векторах побудуємо паралелограм, сторони якого паралельні векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, а діагональ збігається з вектором $\overrightarrow{c}$. Для цього через кінцеві точки вектора $\overrightarrow{c}$ проведемо прямі, які паралельні векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.

Позначимо точки перетину прямих як O, A, B і C. Очевидно, що

$$O = (0,0), \quad A = (-4,0), \quad B = (2,6), \quad C = (6,6).$$

З паралелограма $OABC$ випливає, що

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.$$

Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{OA}$ мають протилежні напрямі та вектор $\overrightarrow{OA}$ має вдвічі більшу довжину ніж вектор $\overrightarrow{a}$, тому

$$\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{a}.$$

З рисунка також випливає, що

$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{b}.$$

Отже, маємо таке розкладання вектора $\overrightarrow{c}$ по векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = -2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}. \tag{2.17}$$

Цю задачу можна розв'язати аналітично. Уявимо вектор $\overrightarrow{c}$ у вигляді *лінійної комбінації векторів* $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}. \tag{2.18}$$

Тут числа α і β називаються *коефіцієнтами лінійної комбінації.*

Запишемо рівність (2.18) у координатній формі:

$$(2;6) = \alpha(2;0) + \beta(3;3).$$

Якщо прирівняти відповідні координати у лівій та правій частинах рівності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів α і β

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 2, \\ \qquad\ 3\beta = 6. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $\alpha = -2$, $\beta = 2$. Підставляючи знайдені коефіцієнти у (2.18), одержимо теж саме розкладання (2.17).

Зауваження 4. Побудувати на площині розкладання вектора $\overrightarrow{c}$ по двох векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ можна тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ не колінеарні.

$\square$

Приклад 7. Написати розкладання вектора $\overrightarrow{q} = (2;7;5)$ по векторах

$$\overrightarrow{a} = (1;0;1), \quad \overrightarrow{b} = (1;-2;0), \quad \overrightarrow{c} = (0;3;1).$$

Розв'язання. Розкласти вектор $\overrightarrow{q}$ по векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ це означає представити вектор $\overrightarrow{q}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{q} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}.$$

Тут α, β, γ — коефіцієнти лінійної комбінації.

Підставимо координати векторів у цю рівність:

$$\alpha(1;0;1) + \beta(1;-2;0) + (0;3;1) = (2;7;5).$$

Звідси, прирівнюючи координати векторів у правій та лівій частинах рівності, одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -2\beta + 3\gamma = 7, \\ \alpha + \gamma = 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \|A_3 - A_1 \to A_3\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \|A_3 \leftrightarrow A_2\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \|A_3 - 2A_2 \to A_3\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Відновимо за перетвореною матрицею систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -\beta + \gamma = 3, \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

Звідси випливає:

$$\gamma = 1, \quad \beta = -2, \quad \alpha = 4.$$

Отже, маємо таке розкладання вектора $\overrightarrow{q}$ по векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 2\,\overrightarrow{b} + 4\,\overrightarrow{c}.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти початок вектора $\overrightarrow{a} = (2; -3; -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $B(1; -1; 2)$.

2. Перевірити колінеарність векторів

$$\vec{a} = -6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}.$$

3. Знайти орт вектора $\overrightarrow{a} = (6; -2; -3)$.

4. Знайти середину відрізка AB, якщо $A(2; 3; 6)$ та $B(5; 2; 8)$.

5. Знайти розкладання вектора $\overrightarrow{c} = (11; -6; 5)$ по векторах $\overrightarrow{p} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{q} = (-1; 1; -2)$, $\overrightarrow{c} = (2; 1; -3)$.

3. Скалярний добуток векторів

3.1. Скалярний добуток

Означення 21. *Скалярним добутком* двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Позначається скалярний добуток як $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ або $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$.

Таким чином,

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}). \tag{3.1}$$

Нагадаємо, що проєкція вектора на вісь дорівнює добутку довжині вектора на косинус кута між напрямами вектора та осі, тобто

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}) \quad \text{або} \quad \text{Пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}).$$

Тоді одержимо, що

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a}. \tag{3.2}$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проєкцію іншого на вісь, співнаправлену з першим вектором.

3.2. Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток двох векторів незалежить від порядку множників (комутативний закон), тобто

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}). \tag{3.3}$$

2. Чисельний множник можна виносити за знак скалярного добутку:

$$(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}). \tag{3.4}$$

3. Виконується дистрибутивний закон множення відносно додавання, тобто при скалярному множенні суми векторів на вектор можна «розкрити дужки»:
$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}). \tag{3.5}$$

4. Скалярний добуток векторів дотатно–визначений:
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \geqslant 0, \tag{3.6}$$
причому $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) > 0$, якщо $\overrightarrow{a} \neq 0$, і $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$, якщо $\overrightarrow{a} = 0$.

Зауваження 5. Якщо множники скалярного добутку рівні між собою, тобто
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b},$$
то кут між векторами дорівнює нулю і скалярний добуток вектора на себе можна розглядати як квадрат довжини даного вектора:
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{a}|\cos 0 = |\overrightarrow{a}|^2.$$
Отже, можна знайти довжину вектора за допомогою скалярного добутка:
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}. \tag{3.7}$$

Приклад 8. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) = \pi/3$.

Розв'язання. Довжину вектора $\vec{c}$ обчислимо за формулою (3.7):
$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c})}.$$
Знайдемо скалярний квадрат вектора $\vec{c}$:
$$\begin{aligned}(\vec{c}, \vec{c}) = (2\vec{a} + 3\vec{b}, 2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4(\vec{a}, \vec{a}) + 6(\vec{a}, \vec{b}) + 6(\vec{b}, \vec{a}) + 9(\vec{b}, \vec{b}) =& \\ = 4(\vec{a}, \vec{a}) + 12(\vec{a}, \vec{b}) + 9(\vec{b}, \vec{b}) =& \\ = 4\,|\vec{a}|^2 + 12\,|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) + 9\left|\vec{b}\right|^2 =& \\ = 4 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 3^2 =& \\ = 4 \cdot 16 + 12 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 9 = 64 + 72 + 81 = 217.&\end{aligned}$$

Отже, маємо
$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{217}.$$
$\square$

3.3. Геометричні властивості скалярного добутку

1. Кут між двома векторами буде гострий тільки коли скалярний добуток цих векторів додатний, і навпаки, скалярний добуток цих векторів додатний, коли кут між двома векторами буде гострий.

2. Кут між двома векторами буде тупий тільки коли скалярний добуток цих векторів буде від'ємний, і навпаки, скалярний добуток цих векторів від'ємний, коли кут між двома векторами буде тупий.

3. Якщо кут між векторами прямий, або один з векторів дорівнює нулю, тоді скалярний добуток дорівнює нулю, і навпаки, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то кут між векторами прямий.

Зауваження 6. Тому що напрям нульового вектора невизначено, то нульовий вектор вважають перпендикулярним будь–якому вектору.

3.4. Координатна форма скалярного добутку

Теорема 3. *Якщо два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задані координатами*
$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z),$$
то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат:
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3.8}$$

Доведення. Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задано декартовими координатами:
$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, \tag{3.9}$$
$$\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}. \tag{3.10}$$

Скориставшись алгебраїчними властивостями скалярного добутка, обчислимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}) =& \\ = a_xb_x(\vec{\imath},\vec{\imath}) + a_xb_y(\vec{\imath},\vec{\jmath}) + a_xb_z(\vec{\imath},\vec{k}) +& \\ + a_yb_x(\vec{\jmath},\vec{\imath}) + a_yb_y(\vec{\jmath},\vec{\jmath}) + a_yb_z(\vec{\jmath},\vec{k}) +& \\ + a_zb_x(\vec{k},\vec{\imath}) + a_zb_y(\vec{k},\vec{\jmath}) + a_zb_z(\vec{k},\vec{k}).&\end{aligned} \tag{3.11}$$

Розглянемо скалярні добутки ортів координатних осей прямокутної декартової системи координат. За формулою (3.1) одержимо:

$$(\vec{\imath},\vec{\imath}) = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\imath}| \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

$$(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\jmath}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Інші добутки обчислюються аналогічно. Таким чином, маємо:

$$\begin{array}{lll} (\vec{\imath},\vec{\imath}) = 1, & (\vec{\imath},\vec{\jmath}) = 0, & (\vec{\imath},\vec{k}) = 0, \\ (\vec{\jmath},\vec{\imath}) = 0, & (\vec{\jmath},\vec{\jmath}) = 1, & (\vec{\jmath},\vec{k}) = 0, \\ (\vec{k},\vec{\imath}) = 0, & (\vec{k},\vec{\jmath}) = 0, & (\vec{k},\vec{k}) = 1. \end{array} \tag{3.12}$$

Підставляючи у (3.11) рівності (3.12), одержимо формулу (3.8):

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

□

3.5. Застосування скалярного добутку

Скалярний добуток застосовується для обчислення довжин векторів, проєкцій векторів та кутів між векторами.

1. Довжину вектора можна обчислити за формулою:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{3.13}$$

2. Кут між векторами дорівнює

$$\cos(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (3.14)$$

3. Умова перпендикулярності векторів

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (3.15)$$

4. Проєкція вектора

   Проєкція вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на напрям вектора $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (3.16)$$

   Проєкція вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на вісь l

$$\text{Пр}_{\vec{l}}\vec{a} = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma. \qquad (3.17)$$

   Тут вектор $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — орт осі l.

5. Складова вектора в напряму іншого вектора

   Складова вектора $\vec{a}$ в напряму вектора $\vec{b}$ дорівнює проєкції вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$, помноженої на орт вектора $\vec{b}$ (рис.3.1).

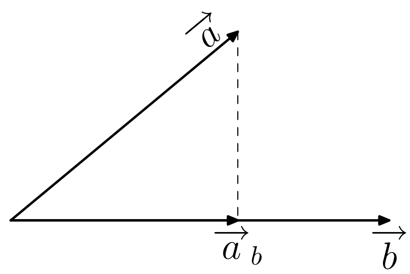

Рис. 3.1. Складова вектора

Враховуючи формулу (3.2), одержимо таку формулу:

$$\vec{a}_b = \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (\vec{a}, \vec{b})\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}. \qquad (3.18)$$

Приклад 9. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (2, -1, 3)$ і $\vec{b} = (1, 3, -2)$.

Розв'язання. Кут між векторами можна одержати за формулою (3.14):

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}.$$

Обчислимо скалярний добуток:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 2 - 3 - 6 = -7.$$

Знайдемо модулі векторів:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14},$$
$$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}.$$

Підставляючи знайдені величини в формулу (3.14), одержимо:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-7}{14} = -\frac{1}{2}.$$

□

Приклад 10. Довести, що діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$, заданого координатами вершин $A(-4; -6; -4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(1; 2; -3)$, $D(12; -2; 3)$, взаємно перпендикулярні (рис.3.2).

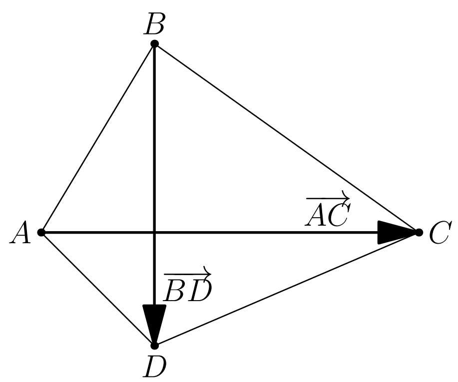

Рис. 3.2. Чотирекутник $ABCD$

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, що лежать на діагоналях даного чотирикутника:

$$\overrightarrow{AC} = (1-(-4); 2-(-6); -3-(-4)) = (5; 8; 1),$$
$$\overrightarrow{BD} = (12-1; -2-5; 3-2) = (11; -7; 1).$$

За формулою (3.8) знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 5 \cdot 11 + 8 \cdot (-7) + 1 \cdot 1 = 55 - 56 + 1 = 0.$$

Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, і відповідно діагоналі чотирикутника $ABCD$, взаємно перпендикулярні.

□

Приклад 11. Знайти складову сили $\overrightarrow{F} = (1; -8; -7)$, яка діє в напрямку вектора $\overrightarrow{a} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Розв'язання. Складова вектора $\overrightarrow{F}$ в напряму вектора $\overrightarrow{a}$ дорівнює проєкції вектора $\overrightarrow{F}$ на напрям вектора $\overrightarrow{a}$, помноженої на орт вектора $\overrightarrow{a}$:

$$\overrightarrow{F}_a = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{F}) \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}.$$

Тоді маємо:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{F}) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) + 1 \cdot (-7) = 2 - 16 - 7 = -21,$$

$$|\overrightarrow{a}|^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9.$$

Отже,

$$\overrightarrow{F}_a = \frac{-21}{9}\left(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}\right) = -\frac{14}{3}\vec{\imath} - \frac{14}{3}\vec{\jmath} - \frac{7}{3}\vec{k} = \left(-\frac{14}{3}; -\frac{14}{3}; -\frac{7}{3}\right).$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Дано два вектори

$$\vec{a} = (2, -1, -2), \quad \vec{b} = (0, 3, 4).$$

Обчислити:
 1) скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$;
 2) $(2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$;
 3) $\left|2\vec{a} - \vec{b}\right|$;
 4) проєкцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;
 5) $\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$.

2. Перевірити колінеарність та перпендикулярність векторів

$$\vec{a} = -6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}.$$

3. Дано вершини четирикутника

$$A(1; -2; 2), \quad B(1; 4; 0), \quad C(-4; 1; 1), \quad D(-5; -5; 3).$$

Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.

4. Знайти кум між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}, \quad \vec{b} = -2\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

5. Надано вектори

$$\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}.$$

Знайти $\text{Пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a}$ та $\text{Пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b}$.

4. Векторний добуток векторів

4.1. Векторний добуток

Означення 22. Три вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ називаються *впорядкованою трійкою*, якщо вказано, який з цих векторів є першим, який є другим, а який — третім.

Означення 23. Якщо найкоротший поворот від додатного напрямку вектора $\overrightarrow{a}$ до вектора $\overrightarrow{b}$ буде видно з додатного боку вектора $\overrightarrow{c}$ проти руху годинникової стрілки, то *трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ називаєтьcя правою, якщо — по ходу годинникової стрілки, то— лівої*

На рисунках приведені права і ліва трійки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

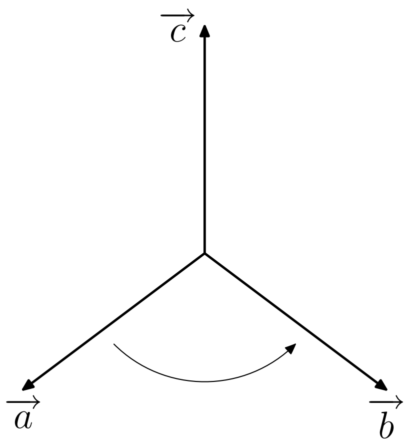

Рис. 4.1. Права трійка

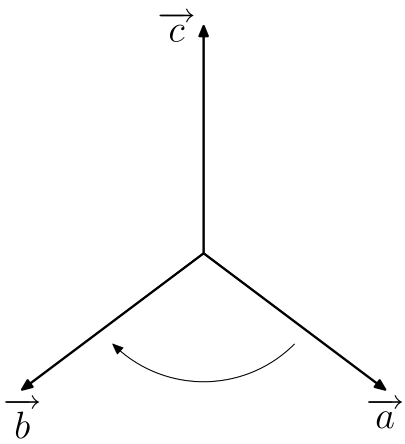

Рис. 4.2. Лева трійка

Часто для визначення орієнтації трійки застосовують *правило правої руки*: якщо вектори розташовуються так, що першому вектору можна поставити у відповідність великий палець правої руки, другому — вказівний, а третьому — середній, то це права трійка. Якщо напрями векторів відповідають пальцях лівої руки, то трійка векторів — ліва.

Якщо взяти три некомпланарних вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, то можна побудувати таки шість трійок:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}, \quad \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}.$$

Тут перші три трійки мають ту ж орієнтацію, що і трійка векторів $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$, а інші трійки — протилежну.

Зауважимо, що якщо вектори в трійці переставляти циклічно, то орієнтація не змінюється. Якщо поміняти місцями два сусідніх вектори, то орієнтація зміниться на протилежну.

Означення 24. *Векторним добутком* двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається третій вектор $\overrightarrow{c}$, який задовольняє таким умовам:

1) вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярний кожному з векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, тобто

$$\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b};$$

2) трійка векторів $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$ — права;

3) довжина вектора $\overrightarrow{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ на синус кута між ними, тобто

$$|\overrightarrow{c}| = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right| = |\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}). \tag{4.1}$$

Позначається векторний добуток символом $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$.

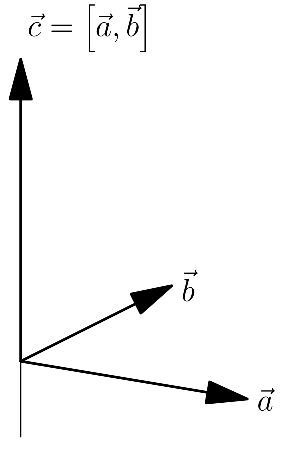

Рис. 4.3. Векторний добуток

4.2. Геометричні властивості векторного добутку

1. Якщо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ колінеарні, то векторний добуток $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$ дорівнює нулю.

2. Якщо два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ приведені до спільного початку, то модуль векторного добутку $\left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Дійсно, розглянемо паралелограм, якій побудовано на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, як на сторонах (рис. 4.4). Його площа дорівнює добутку висоти паралелограма на довжину його основи:

$$S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = h\,|\overrightarrow{a}|\,. \tag{4.2}$$

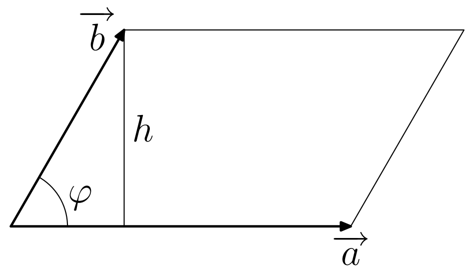

Рис. 4.4. Площа паралелограма

Висота паралелограма, яка опущена на сторону $\overrightarrow{a}$, буде обчислюватися за формулою:

$$h = \left|\overrightarrow{b}\right| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}). \tag{4.3}$$

На рисунку позначено кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, як $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}})$. Тоді маємо

$$S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right|.$$

4.3. Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. При перестановці співмножників векторний добуток змінює знак, тобто
$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]; \tag{4.4}$$

2. Чисельний множник λ можна виносити за знак векторного добутку:
$$\left[\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]; \tag{4.5}$$

3. Виконується дистрибутивний закон множення відносно додавання, тобто при векторному множенні суми векторів на вектор можна «розкрити дужки»:
$$\left[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] + \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]. \tag{4.6}$$

4.4. Координатна форма векторного добутку

Теорема 4. *Якщо два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задані координатами*
$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z),$$
то векторний добуток обчислюється за формулою
$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Доведення. Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задано декартовими координатами:
$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{4.8}$$
$$\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}. \tag{4.9}$$

Обчислимо векторний добуток:

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] &= \left[a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right] = \\ &= a_x b_x\left[\vec{\imath}, \vec{\imath}\right] + a_x b_y\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right] + a_x b_z\left[\vec{\imath}, \vec{k}\right] + \\ &+ a_y b_x\left[\vec{\jmath}, \vec{\imath}\right] + a_y b_y\left[\vec{\jmath}, \vec{\jmath}\right] + a_y b_z\left[\vec{\jmath}, \vec{k}\right] + \\ &+ a_z b_x\left[\vec{k}, \vec{\imath}\right] + a_z b_y\left[\vec{k}, \vec{\jmath}\right] + a_z b_z\left[\vec{k}, \vec{k}\right].\end{aligned} \tag{4.10}$$

Розглянемо векторні добутки ортів координатних осей прямокутної декартової системи координат. За означенням векторного добутку маємо:

$$|[\vec{\imath}, \vec{\imath}]| = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\imath}| \cdot \sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0, \quad \text{тобто} \quad [\vec{\imath}, \vec{\imath}] = 0.$$

Далі, вектор $[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]$ перпендикулярен обом множникам: як вектору $\vec{\imath}$, так і вектору $\vec{\jmath}$. Його довжина дорівнює одиниці:

$$|[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]| = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\jmath}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \quad \text{тобто} \quad |[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]| = 1.$$

Крім того вектори $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ та $[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]$ утворюють праву трійку. Таким вектором може бути тільки вектор $\vec{k}$ (рис.4.5). Отже, маємо:

$$[\vec{\imath}, \vec{\jmath}] = \vec{k}.$$

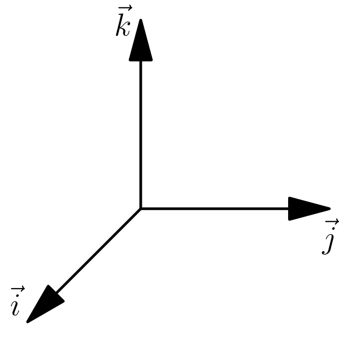

Рис. 4.5. Орті

Звернемо увагу, якщо розглядати добуток $[\vec{\jmath}, \vec{\imath}]$, то вектори $\vec{\jmath}$, $\vec{\imath}$ і $\vec{k}$ утворюють ліву трійку векторів, тому

$$[\vec{\jmath}, \vec{\imath}] = -\vec{k}.$$

Аналогічно знаходяться інші добутки ортів координатних осей:

$$\begin{aligned}
&[\vec{\imath}, \vec{\imath}] = 0, && [\vec{\imath}, \vec{\jmath}] = \vec{k}, && \left[\vec{\imath}, \vec{k}\right] = -\vec{\jmath}, \\
&[\vec{\jmath}, \vec{\imath}] = -\vec{k}, && [\vec{\jmath}, \vec{\jmath}] = 0, && \left[\vec{\jmath}, \vec{k}\right] = \vec{\imath}, \\
&\left[\vec{k}, \vec{\imath}\right] = \vec{\jmath}, && \left[\vec{k}, \vec{\jmath}\right] = -\vec{\imath}, && \left[\vec{k}, \vec{k}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Підставляючи у (4.10) рівності (4.11), одержимо :

$$\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] &= a_x b_x \cdot 0 + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{\jmath} - \\
&- a_y b_x \vec{k} + a_y b_y \cdot 0 + a_y b_z \vec{\imath} + \\
&+ a_z b_x \vec{\jmath} - a_z b_y \vec{\imath} + a_z b_z \cdot 0 = \\
&= \vec{\imath}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{\jmath}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}\,(a_x b_y - a_y b_x) = \\
&= \vec{\imath}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає формула (4.7), оскільки права частина рівності відповідає розкладанню визначника третього порядку за елементами першого рядка:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

□

4.5. Застосування векторного добутку

1. Векторний добуток застосовується для знаходження вектора $\overrightarrow{c}$, перпендикулярного двом заданим векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{c} = \lambda\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]. \tag{4.12}$$

2. Векторний добуток застосовується для знаходження площі паралелограма (трикутника) та його висоти (рис. 4.4):

$$S = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right|, \quad h = \frac{S}{|\overrightarrow{a}|}. \tag{4.13}$$

Приклад 12. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = (2, -1, 3) \quad \text{і} \quad \vec{b} = (1, 3, -2).$$

Розв'язання. Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}((-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 3) - \vec{\jmath}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) + \vec{k}(2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1) =$$

$$= \vec{\imath}(2 - 9) - \vec{\jmath}(-4 - 3) + \vec{k}(6 + 1) = -7\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 7\vec{k} = (-7, 7, 7).$$

Таким чином маємо:

$$S = \left| \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] \right| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 7^2} = \sqrt{49 + 49 + 49} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}.$$

□

Приклад 13. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен до векторів

$$\vec{a} = (4, -2, -3), \quad \text{і} \quad \vec{b} = (0, 1, 3),$$

та утворює тупий кут з віссю Oy.

Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = 26$.

Розв'язання. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тому він колінеарен векторному добутку цих векторів:

$$\vec{c} = \lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

Тут λ — невизначений коефіцієнт. Обчислимо векторний добуток:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}((-2) \cdot 3 - (-3) \cdot 1) - \vec{\jmath}(4 \cdot 3 - (-3) \cdot 0) + \vec{k}(4 \cdot 1 - (-2) \cdot 0) =$$

$$= \vec{\imath}(-6 + 3) - \vec{\jmath}(12 + 0) + \vec{k}(4 + 0) = -3\vec{\imath} - 12\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (-3, -12, 4)$$

та знайдемо довжину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \left|\lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\lambda| \cdot \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|.$$

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-12)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13.$$

Тому що $|\vec{c}| = 26$, звідси маємо

$$26 = |\lambda| \cdot 13, \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 2, \quad \Rightarrow \quad \lambda \pm 2.$$

Вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy, тому його y–координата повинна бути від'ємна. Тоді $\lambda = 2$. Таким чином, маємо

$$\vec{c} = 2 \cdot (-3, -12, 4) = (-6, -24, 8).$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Дано два вектори $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (0, 3, 4)$. Обчислити:
   1) векторний добуток $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$;
   2) модуль векторного добутку $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$;
   3) $\left[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}\right]$;

2. Обчислити площу трикутника $\triangle ABC$, якщо

$$A(1; 2; 0), \quad B(3; 0; -3), \quad C(5; 2; 6).$$

3. Обчислити довжину висоти AD, яка опущена з вершини A на сторону BC трикутника $\triangle ABC$, якщо

$$A(1; -1; 2), \quad B(5; -6; 2), \quad C(1; 3; -1).$$

4. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярен до векторів $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 4)$ та задовольняє умові

$$\vec{c}\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}\right) = 0.$$

5. Мішаний добуток векторів

5.1. Мішаний добуток

Означення 25. *Мішаним добутком* упорядкованої трійки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ називається число, що обчислюється за формулою $\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right)$.

Теорема 5. *Мішаний добуток $\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right)$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на прикладених до загального початку векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, що береться зі знаком плюс, якщо трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ права і зі знаком мінус, якщо трійка векторів ліва.*

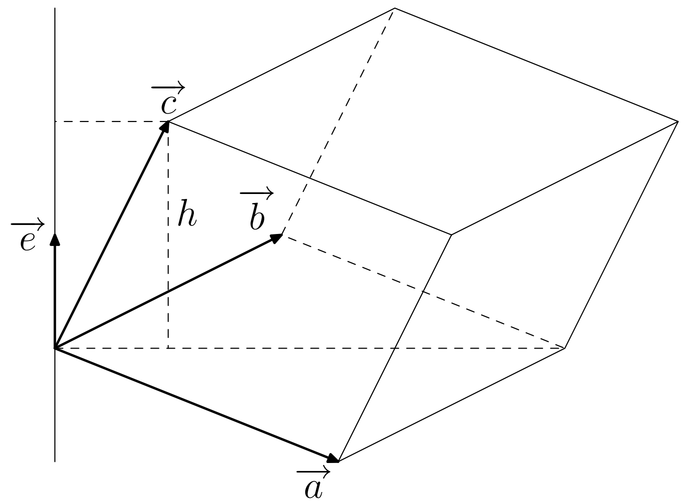

Рис. 5.1. Об'єм паралелепіпеда

5.2. Компланарні вектори

Означення 26. Вектори, що лежать в одній і тій самій площині або в паралельних площинах, називаються *компланарними*.

Зауваження 7. Нульовий вектор, через невизначеність свого напряму, вважається паралельним будь-якій площині.

З теореми 5 випливає *умова компланарності*:

Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Дійсно, якщо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ компланарні, то вектор $\overrightarrow{c}$ лежить в площині, яка визначається векторами $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$. Тому

$$\text{Пр}_{\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]}\overrightarrow{c} = 0$$

і, відповідно, мішаний добуток векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ дорівнює нулю.

5.3. Властивості мішаного добутку

Теорема 5 дозволяє розглядати мішаний добуток трьох векторів як орієнтований об'єм (об'єм зі знаком). Це твердження повністю характеризує мішаний добуток та його властивості.

1. *Циклічна перестановка векторів у мішаному добутку не змінює його величини*, тобто

$$\left(\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right],\overrightarrow{c}\right) = \left(\left[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right],\overrightarrow{a}\right) = \left(\left[\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}\right],\overrightarrow{b}\right). \tag{5.1}$$

   Справді, трійки векторів $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}$ мають ту ж саму орієнтацію та їм відповідає той самий паралелепіпед.

2. *Немає значення, які з векторів у мішаному добутку утворюють векторний добуток*:

$$\left(\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right],\overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a},\left[\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\right]\right),$$

   тому зазвичай мішаний добуток векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ записують так:

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}.$$

   Обидві сторони цього виразу представляють об'єм паралелепіпеда, побудованого на тих самих векторах, причому вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ і $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ утворюють трійки однієї орієнтації.

3. *Перестановка місцями двох векторів у мішаному добутку змінює знак добутку.* Наприклад,

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right) = -\left(\left[\vec{b},\vec{a}\right],\vec{c}\right). \tag{5.2}$$

Справді, праворуч і ліворуч знаходяться трійки різної орієнтації.

5.4. Координатна форма мішаного добутку

Теорема 6. *Нехай три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані декартовими прямокутними координатами*

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z),$$

тоді мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{5.3}$$

Звернемо увагу, що формулу (5.3) не важко довести, якщо врахувати формулу для векторного добутку (див. стор. 40):

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{\imath}\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Тоді, обчислюючи скалярний добуток, одержимо:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right) = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

5.5. Застосування мішаного добутку

1. Мішаний добуток застосовується для перевірки компланатності векторів.

2. Мішаний добуток застосовується для знаходження об'єма паралелепіпеда (піраміди), побудованого на трьох векторах.

   Об'єм паралелепіпеда обчислюється за формулою:

$$V = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.$$

   Об'єм піраміди обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{6}\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.$$

Приклад 14. Довести, що вектори $\vec{a} = (3, 5, 8)$, $\vec{b} = (1, 4, 1)$ і $\vec{c} = (4, 9, 9)$ компланарні.

Розв'язання. Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю, тому обчислимо мішаний добуток.

$$\left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\,(4 \cdot 9 - 1 \cdot 4) - 5\,(1 \cdot 9 - 1 \cdot 4) + 8\,(1 \cdot 9 - 4 \cdot 4) =$$

$$= 3\,(36 - 4) - 5\,(9 - 4) + 8\,(9 - 16) =$$

$$= 3 \cdot 32 - 5 \cdot 8 + 8 \cdot (-7) = 96 - 40 - 56 = 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. □

Приклад 15. Знайти об'єм піраміди з вершинами у точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ і $C(1; 2; 4)$ та її висоту, яка опущена з вершини O на грань ABC (рис. 5.2).

Розв'язання. Побудуємо три вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$. Очевидно,що

$$\overrightarrow{OA} = (5; 2; 0), \quad \overrightarrow{OB} = (2; 5; 0), \quad \overrightarrow{OC} = (1; 2; 4).$$

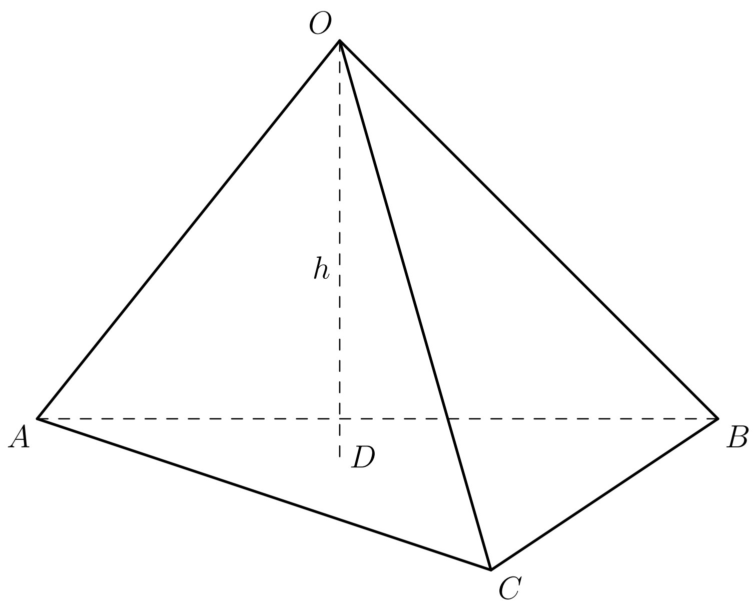

Рис. 5.2. Піраміда

Тоді об'єм піраміди $OABC$ дорівнює

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\right|. \tag{5.4}$$

Обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 5\,(5 \cdot 4 - 0 \cdot 1) - 2\,(2 \cdot 4 - 0 \cdot 1) =$$
$$= 5\,(20 - 0) - 2\,(8 - 0) = 5 \cdot 20 - 2 \cdot 8 = 100 - 16 = 84.$$

Об'єм піраміди обчислюєтьс за формулою:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14.$$

Об'єм піраміди можна також обчислити за формулою

$$V = \frac{1}{3}\,S \cdot h.$$

Тут h — висота піраміди, S — площа основи. Звідси випливає, що

$$h = \frac{3V}{S}.$$

Знайдемо вектори, на яких побудовано основу піраміди:

$$\overrightarrow{AB} = (2-5; 5-2; 0-0) = (-3; 3; 0),$$
$$\overrightarrow{AC} = (1-5; 2-2; 4-0) = (-4; 0; 4).$$

Визначимо площу основи:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec\imath & \vec\jmath & \vec k \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec\imath \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \vec\jmath \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = \vec k \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec\imath(3\cdot 4 - 0\cdot 0) - \vec\jmath((-3)\cdot 4 - 0\cdot(-4)) + \vec k((-3)\cdot 0 - 3\cdot(-4)) =$$
$$= \vec\imath(12-0) - \vec\jmath(-12-0) + \vec k(0+12) = 12\vec\imath + 12\vec\jmath + 12\vec k.$$

Таким чином маємо:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = 6\sqrt{3}.$$

Знайдемо висоту піраміди:

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot 14}{6\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити об'єм тетраедра, якщо його вершини знаходяться в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

2. Надано вершини тетраедра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти довжину висоти, яка опущена з вершини D.

3. Довести, що точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$, $D(5; 0; -6)$ лежать в одній і тій самій площині.

4. Довести, компланарність векторів

$$\overrightarrow{a} = -\vec\imath + 2\vec\jmath + 2\vec k, \quad \overrightarrow{b} = 2\vec\imath - 3\vec\jmath - 4\vec k, \quad \overrightarrow{c} = -3\vec\imath + 12\vec\jmath + 6\vec k.$$

6. Індивідуальні завдання

1. Дано три точки. Обчислити:
1) модуль вектора $\vec{a}$;
2) скалярний добуток $\vec{a}\,\vec{b}$;
3) проєкцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

1.1. $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$,

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CB}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.2. $A(4,3,-2)$, $B(-3,-1,4)$, $C(2,2,1)$,

$$\vec{a} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{CB}.$$

1.3. $A(-2,-2,4)$, $B(1,3,-2)$, $C(1,4,2)$,

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.4. $A(2,4,3)$, $B(3,1,-4)$, $C(-1,2,2)$,

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.5. $A(2,4,5)$, $B(1,-2,3)$, $C(-1,-2,4)$,

$$\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.6. $A(-1,-2,4)$, $B(-1,3,5)$, $C(1,4,2)$,

$$\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.7. $A(1,3,2)$, $B(-2,4,-1)$, $C(1,3,-2)$,

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AB}.$$

1.8. $A(2,-4,3)$, $B(-3,-2,4)$, $C(0,0,-2)$,

$$\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{CB}.$$

1.9. $A(3,4,-4)$, $B(-2,1,2)$, $C(2,-3,1)$,

$$\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.10. $A(0,2,5)$, $B(2,-3,4)$, $C(3,2,-5)$,

$$\vec{a} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AB}.$$

1.11. $A(-2,-3,-4)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,4,5)$,

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BC}.$$

1.12. $A(-2,-3,-2)$, $B(1,4,2)$, $C(1,-3,3)$,

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.13. $A(5,6,1)$, $B(-2,4,-1)$, $C(3,-3,3)$,

$$\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AB}.$$

1.14. $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$,

$$\vec{a} = 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$

1.15. $A(3,2,4)$, $B(-2,1,3)$, $C(2,-2,-1)$,

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BC}.$$

1.16. $A(-2,3,-4)$, $B(3,-1,2)$, $C(4,2,4)$,

$$\vec{a} = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{CB}.$$

1.17. $A(4,5,3)$, $B(-4,2,3)$, $C(5,-6,-2)$,

$$\vec{a} = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AB}.$$

1.18. $A(2,4,6)$, $B(-3,5,1)$, $C(4,-5,-4)$,
$$\vec{a} = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BA}.$$
1.19. $A(-4,-2,-5)$, $B(3,7,2)$, $C(4,6,-3)$,
$$\vec{a} = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BC}.$$
1.20. $A(5,4,4)$, $B(-5,2,3)$, $C(4,2,-5)$,
$$\vec{a} = 11\overrightarrow{CA} - 6\overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$
1.21. $A(3,4,6)$, $B(-4,6,4)$, $C(5,-2,-3)$,
$$\vec{a} = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CA}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BC}.$$
1.22. $A(-5,-2,-6)$, $B(3,4,5)$, $C(2,-5,4)$,
$$\vec{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{BC}.$$
1.23. $A(3,4,1)$, $B(5,-2,6)$, $C(4,2,-7)$,
$$\vec{a} = -7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$
1.24. $A(4,3,2)$, $B(-4,-3,5)$, $C(6,4,-3)$,
$$\vec{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$
1.25. $A(-5,4,3)$, $B(4,5,2)$, $C(2,7,-4)$,
$$\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AB}.$$
1.26. $A(6,4,5)$, $B(-7,1,8)$, $C(2,-2,-7)$,
$$\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CB}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AC}.$$
1.27. $A(6,5,-4)$, $B(-5,-2,2)$, $C(3,3,2)$,
$$\vec{a} = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{CB}.$$

1.28. $A(-3,-5,6)$, $B(3,5,-4)$, $C(2,6,4)$,

$$\vec{a}=4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA},\quad \vec{b}=\overrightarrow{CB},\quad \vec{c}=\overrightarrow{BA},\quad \vec{d}=\overrightarrow{AC}.$$

1.29. $A(3,5,4)$, $B(4,2,-3)$, $C(-2,4,7)$,

$$\vec{a}=3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC},\quad \vec{b}=\overrightarrow{AB},\quad \vec{c}=\overrightarrow{BA},\quad \vec{d}=\overrightarrow{AC}.$$

1.30. $A(4,6,7)$, $B(2,-4,1)$, $C(-3,-4,2)$,

$$\vec{a}=5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC},\quad \vec{b}=\overrightarrow{BC},\quad \vec{c}=\overrightarrow{BC},\quad \vec{d}=\overrightarrow{AB}.$$

2. Дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
1) обчислити модуль векторного добутка вказаних векторів;
2) перевірити колінеарність та перпендикулярність вказаних векторів;
3) перевірити компланарність векторів.

2.1. $\vec{a}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{\jmath}+4\vec{k}$, $\vec{c}=5\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-3\vec{k}$,

$$1)\vec{a},\vec{b};\quad 2)\vec{a},\vec{c}.$$

2.2. $\vec{a}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+7\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+21\vec{k}$,

$$1)\vec{a},\vec{b};\quad 2)\vec{b},\vec{c}.$$

2.3. $\vec{a}=2\vec{\imath}-4\vec{\jmath}-2\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$, $\vec{c}=3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-7\vec{k}$,

$$1)\vec{a},\vec{b};\quad 2)\vec{a},\vec{c}.$$

2.4. $\vec{a}=-7\vec{\imath}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+2\vec{k}$,

$$1)\vec{a},\vec{b};\quad 2)\vec{b},\vec{c}.$$

2.5. $\vec{a}=-4\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{\jmath}+5\vec{k}$,

$$1)\vec{a},\vec{b};\quad 2)\vec{b},\vec{c}.$$

2.6. $\vec{a}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{\jmath}-3\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$,

$$1)\vec{a},\vec{b};\quad 2)\vec{a},\vec{c}.$$

2.7. $\vec{a} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{a}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.8. $\vec{a} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{k}$, $\vec{c} = -12\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 9\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{b}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.9. $\vec{a} = -\vec{\imath} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{a}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.10. $\vec{a} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 9\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{\imath} - 8\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{b}; \quad 2)\vec{b}, \vec{a}.$$

2.11. $\vec{a} = 5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{b}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.12. $\vec{a} = -4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} - 3\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{b}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.13. $\vec{a} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{\imath} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{b}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.14. $\vec{a} = -4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{c}; \quad 2)\vec{a}, \vec{b}.$$

2.15. $\vec{a} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 4\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{a}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.16. $\vec{a} = -3\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 8\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} - 8\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{a}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.17. $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -9\vec{\imath} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{b}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.18. $\vec{a} = 9\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 21\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{a}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.19. $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{b}; \quad 2)\vec{a}, \vec{b}.$$

2.20. $\vec{a} = -9\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} - 20\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{b}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.21. $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 6\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{b}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.22. $\vec{a} = 7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 11\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{b}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.23. $\vec{a} = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{b}; \quad 2)\vec{b}, \vec{a}.$$

2.24. $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$,

$$1)\vec{b}, \vec{a}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.25. $\vec{a} = -3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} - \vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{a}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.26. $\vec{a} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}$,

$$1)\vec{c}, \vec{a}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.27. $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{b}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.28. $\vec{a} = 4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{b}; \quad 2)\vec{a}, \vec{c}.$$

2.29. $\vec{a} = -9\vec{\imath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 9\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{b}; \quad 2)\vec{b}, \vec{c}.$$

2.30. $\vec{a} = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 7\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$,

$$1)\vec{a}, \vec{c}; \quad 2)\vec{a}, \vec{b}.$$

Приклад виконання завдання

Завдання 1.30.

1. Дано три точки: $A(4, 6, 7)$, $B(2, -4, 1)$, $C(-3, -4, 2)$. Обчислити:
   1) модуль вектора $\vec{a}$;
   2) скалярний добуток $\vec{a}\,\vec{b}$;
   3) проєкцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$,

   якщо
$$\vec{a} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{AB}.$$

▶ Обчислимо координати направлених відрізків $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (2-4, -4-6, 1-7) = (-2, -10, -6),\\
\overrightarrow{AC} &= (-3-4, -4-6, 2-7) = (-7, -10, -5),\\
\overrightarrow{BC} &= (-3-2, -4-(-4), 2-1) = (-5, 0, 1).
\end{aligned}$$

▶ Знайдемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$$\begin{aligned}
&\vec{a} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} =\\
&\quad = 5(-2, -10, -6) - 2(-7, -10, -5) = (-10, -50, -30) - (-14, -20, -10) =\\
&\quad = (-10+14, -50+20, -30+10) = (4, -30, -20),\\
&\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC} = (-5, 0, 1),\\
&\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (-2, -10, -6).
\end{aligned}$$

▶ Обчислимо модуль вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{4^2 + (-30)^2 + (-20)^2} =$$
$$= \sqrt{16 + 900 + 400} = \sqrt{1316} = 2\sqrt{329}.$$

▶ Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 4 \cdot (-5) + (-30) \cdot 0 + (-20) \cdot 1 =$$
$$= -20 + 0 - 20 = -40.$$

▶ Обчислимо проєкцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$:

$$\text{Пр}_{\vec{d}}\vec{c} = \frac{\vec{c}\,\vec{d}}{|\vec{d}|},$$

$$\vec{c}\,\vec{d} = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z = (-5) \cdot (-2) + 0 \cdot (-10) + 1 \cdot (-6)) =$$
$$= 10 + 0 - 6 = 4,$$
$$|\vec{d}| = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 100 + 36} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35},$$
$$\text{Пр}_{\vec{d}}\vec{c} = \frac{4}{2\sqrt{35}} = \frac{2}{\sqrt{35}}.$$

2. Дано три вектори:

$$\vec{a} = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 4\vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 7\vec{k}, \quad \vec{c} = 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}.$$
$$1)\vec{a}, \vec{c}; \quad 2)\vec{a}, \vec{b}.$$

1) обчислити модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$;
2) перевірити колінеарність та перпендикулярність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
3) перевірити компланарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

▶ 1) Обчислимо модуль векторного дубутку векторів $\vec{a}$, $\vec{c}$:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{\imath}((-6) \cdot (-4) - (-4) \cdot 3) - \vec{\jmath}(5 \cdot (-4) - (-4) \cdot 0) + \vec{k}\,(5 \cdot 3 - (-6) \cdot 0) =$$
$$= \vec{\imath}(24 + 12) - \vec{\jmath}(-20 + 0) + \vec{k}\,(15 + 0) = 36\,\vec{\imath} + 20\,\vec{\jmath} + 15\,\vec{k},$$

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \sqrt{36^2+20^2+15^2} = \sqrt{1296+400+225} = \sqrt{1921}.$$

► 2) Перевіримо колінеарність та перпендикулярність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:
Перевіримо виконання умови колінеарності:

$$\frac{5}{4} \neq \frac{-6}{8} \neq \frac{-4}{-7}.$$

Координати векторів не утворюють пропорцію, тому вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні.

Перевіримо виконання умови перпендикулярності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 5\cdot 4 + (-6)\cdot 8 + (-4)\cdot(-7) = 20 - 48 + 28 = 0.$$

Таким чином, векторі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

► 3) Перевіримо виконання умови компланарности векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 4 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-6)\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 5\,(8\cdot(-4) - (-7)\cdot 3) + 6\,(4\cdot(-4) - (-7)\cdot 0) - 4\,(4\cdot 3 - 8\cdot 0) =$$
$$= 5\cdot(-32+21) + 6\cdot(-16-0) - 4\cdot(12-0) =$$
$$= 5\cdot(-11) + 6\cdot(-16) - 4\cdot 12 =$$
$$= -55 - 96 - 48 = -199 \neq 0.$$

Таким чином, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарні.

Список литературы

1. Тимченко Г. М. Стислий курс вищої математики, частина 1: навч.посіб./ Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, Н. О. Кирилова, О. С. Мазур. — Київ: «Кондор», 2022. — 188 с.

Зміст

Навчальне видання

Методичні вказівки
для самостійної роботи за темою
«Елементи векторної алгебри»
з навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Укладачі:
ВЕРЕТЕЛЬНИК Віктор Володимирович
ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна
ВЕРЕТЕЛЬНИК Ірина Олександрівна

Відповідальний за випуск проф. В. Н. Бурлаєнко
Роботу до видання рекомендував проф. Д. В. Бреславський

В авторській редакції

План 2022 р., поз. 353

Гарнітура Times New Roman Ум. друк. арк. 3 3/4.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронна версія