УДК 519.6:631.1

М.В. АРТЮХ, аспірантка, УІПА, Харків;
О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ПРО ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЕЛАСТИЧНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Пропонуються формулювання і доведення теорем про виробничі функції від двох змінних, частинні коефіцієнти еластичності яких є функціями однієї або двох змінних. Наведено приклад виробничої функції, що пов'язана з управлінням урожайністю овочів в залежності від вологості ґрунту та концентрації добрив.

Предлагаются формулировка и доказательство теорем о производственных функциях от двух переменных, частные коэффициенты, эластичности которых являются функциями одной или двух переменных. Приведен пример производственной функции, которая связана с управлением урожайностью овощей в зависимости от влажности грунта и концентрации удобрений.

In this paper the formulation and the proof of theorems of production functions from two variables is offered, particular which factors of elasticity are functions of one or two variables. The example of production function which is connected with management of productivity of vegetables depending on humidity of a ground and concentration of fertilizers is offered.

Вступ. Виробничі функції є широко розповсюдженими функціями при моделюванні в економіці. Найбільш поширені у застосуваннях виробничі функції кількох змінних мають сталі частинні коефіцієнти еластичності. Але на практиці виникають ситуації, коли частинні коефіцієнти еластичності деяких виробничих функцій можуть бути відомими функціями однієї або двох змінних. Враховуючи, що дивідіра 2-го роду має чіткий економічний зміст, пропонується використовувати для аналізу виробничих функцій дивідіріальні та мультигральні числення другого роду.

Аналіз останніх досліджень з побудови виробничих функцій із заданими коефіцієнтами еластичності. В теперішній час існує багато виробничих функцій, які використовуються для математичного моделювання економічних процесів [1,4]. Але на практиці виникають ситуації, коли коефіцієнти еластичності цих функцій можуть бути змінними. Тому актуальною є розробка теорії побудови виробничих функцій із змінними коефіцієнтами еластичності.

Математичний апарат дивідіріальних та мультигральних числень, розроблених в праці [2] відрізняється тим, що дивідіра 2-го роду

$$\overleftrightarrow{\frac{\delta u(x)}{\delta x}} := \lim_{h \to 1} \overleftrightarrow{\frac{u(x \times h) : u(x)}{h}}$$

має чіткий економічних зміст – вона є коефіцієнтом еластичності функції

$u(x)$ в залежності від x (тут і далі знак «$\longleftrightarrow$» означає логарифмування: він використовується з метою досягнення повної аналогії з похідною).

Зокрема, це виробничі функції для дослідження економіки управління врожайністю овочів в залежності від вологості ґрунту та в залежності від концентрації добрив [3]. Наприклад, процес, який описується функцією $u(x, y)$, яка має коефіцієнти еластичності, що залежать від змінних x та y: якщо $u(x, y)$ – врожайність овочів, $x\left(л/м^3\right)$ – вологість ґрунту, $y\left(кг/м^3\right)$ – концентрація добрив (мінеральних, органічних), то коефіцієнт еластичності $E_x[u] = xu'_x / u$ є величиною, яка залежить від x при фіксованому y. Оскільки легко зрозуміти, що при малій вологості ґрунту для підвищення врожайності можна збільшувати обсяги зрошення ґрунту, а для випадку, коли вологість досягає деякої оптимальної величини, врожайність для заданого y буде найвищою. Аналогічно коефіцієнт еластичності $E_y[u] = xu'_y / u$ є величиною, яка залежить від y при фіксованому x, оскільки легко зрозуміти, що при малій концентрації добрив у ґрунті для підвищення врожайності можна збільшувати обсяги внесення добрив, а для випадку, коли концентрація добрив у ґрунті досягає деякої оптимальної величини, врожайність для заданого x буде найвищою і т.д..

Тому актуальною є розробка теорії побудови виробничих функцій частинні коефіцієнти еластичності яких залежать від однієї або двох змінних з використанням дивідіріального та мультигрального числення для конкретних галузей економіки народного господарства.

Постановка задачі. В даній роботі розв’язується наступна задача: побудувати і дослідити функції двох змінних $u(x, y)$, частинні коефіцієнти еластичності яких за змінними x та y відповідно є функціями однієї змінної x чи y або двох змінних x, y.

Математична модель. Нижче сформулюємо і доведемо теореми, що стосуються побудови явних формул для функцій двох змінних $u(x, y)$, які мають задані змінні частинні коефіцієнти еластичності.

Теорема 1. *Розв’язок системи дивідіріальних рівнянь*

$$\begin{cases} \overset{\displaystyle \delta u}{\underset{\displaystyle \delta x}{\longleftrightarrow}} = f(y) + x \ln y \cdot g'(x), \\ \overset{\displaystyle \delta u}{\underset{\displaystyle \delta y}{\longleftrightarrow}} = g(x) + y \ln x \cdot f'(y). \end{cases} \tag{1}$$

тобто виробнича функція, може бути представлена у вигляді:

$$u(x,y)=x^{f(y)}y^{g(x)}C\,, \tag{2}$$

де C – довільна стала.

Доведення. Зауважимо, що система (1) еквівалентна системі нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)} = f(y)+x\ln y\cdot g'(x), \\ \dfrac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)} = g(x)+y\ln x\cdot f'(y). \end{cases} \tag{3}$$

Візьмемо дивідіру 2-го роду по x від (2):

$$\frac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)} = \frac{x\left\{f(y)x^{f(y)-1}y^{g(x)}+x^{f(y)}\left[y^{g(x)}\ln y\,g'(x)\right]\right\}\cdot C}{x^{f(y)}y^{g(x)}\cdot C} =$$

$$= \frac{x\cdot f(y)x^{f(y)-1}y^{g(x)}+x\cdot x^{f(y)}y^{g(x)}\ln y\,g'(x)\cdot C}{x^{f(y)}y^{g(x)}\cdot C} =$$

$$= f(y)+x\cdot\ln y\,g'(x)\,.$$

Тобто перше твердження теореми 1 доведено.

Візьмемо дивідіру 2-го роду по *y* від (2):

$$\frac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)} = \frac{y\left\{g(x)y^{g(x)-1}x^{f(y)}+y^{g(x)}\left[x^{f(y)}\ln x\,f'(y)\right]\right\}\cdot C}{x^{f(y)}y^{g(x)}\cdot C} =$$

$$= \frac{y\cdot g(x)y^{g(x)-1}x^{f(y)}+y\cdot y^{g(x)}x^{f(y)}\ln x\,f'(y)}{x^{f(y)}y^{g(x)}} =$$

$$= g(x)+y\ln x\,f'(y)\,.$$

Тобто доведене і друге твердження теореми 1.

Таким чином, теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Виробнича функція $u(x,y)$, яка задовольняє наступним умовам:*

$$\begin{cases} \overset{\longleftrightarrow}{\dfrac{\delta u}{\delta x}} = f(x), \\ \overset{\longleftrightarrow}{\dfrac{\delta u}{\delta y}} = g(y), \end{cases} \tag{4}$$

може бути представлена у вигляді:

$$u(x,y)=e^{\int\frac{f(x)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(y)}{y}dy}\cdot C\,, \tag{5}$$

де C – довільна стала.

Доведення. Система (4) еквівалентна такій системі нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)}=f(x), \\ \dfrac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)}=g(y). \end{cases} \tag{6}$$

Візьмемо дивідиру 2-го роду по x, отримаємо:

$$\xrightarrow[\delta x]{\delta u(x,y)}=\frac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)}=\frac{x\cdot e^{\int\frac{f(x)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(y)}{y}dy}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\cdot C}{e^{\int\frac{f(x)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(y)}{y}dy}\cdot C}=f(x)\,.$$

Тобто перше твердження теореми 2 доведено.
Візьмемо дивідиру 2-го роду по y, отримаємо:

$$\xrightarrow[\delta y]{\delta u(x,y)}=\frac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)}=\frac{y\cdot e^{\int\frac{f(x)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(y)}{y}dy}\cdot\dfrac{g(y)}{y}\cdot C}{e^{\int\frac{f(x)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(y)}{y}dy}\cdot C}=g(y)\,.$$

Тобто доведене і друге твердження теореми 2.
Таким чином, теорема 2 доведена.

Теорема 3. *Якщо виробнича функція $u(x,y)$ має коефіцієнти еластичності:*

$$\begin{cases} \xleftrightarrow[\delta x]{\delta u(x,y)}=f(x,y)+x\cdot\left(\displaystyle\int\frac{g(x,y)}{y}dy\right)'_x, \\ \xleftrightarrow[\delta y]{\delta u(x,y)}=g(x,y)+y\cdot\left(\displaystyle\int\frac{f(x,y)}{x}dx\right)'_y, \end{cases} \tag{7}$$

вона може бути представлена у вигляді:

$$u(x,y)=e^{\int\frac{f(x,y)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(x,y)}{y}dy}\cdot C\,, \tag{8}$$

де C *– довільна стала.*

Доведення. Система (7) еквівалентна такій системі нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)} = f(x,y) + x\cdot\left(\displaystyle\int \frac{g(x,y)}{y}dy\right)'_x, \\ \dfrac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)} = g(x,y) + y\cdot\left(\displaystyle\int \frac{f(x,y)}{x}dx\right)'_y. \end{cases} \tag{9}$$

Візьмемо дивідіру 2-го роду по x, отримаємо:

$$\overleftrightarrow{\frac{\delta u(x,y)}{\delta x}} = \frac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)} =$$

$$= \frac{x\left[\dfrac{f(x,y)}{x}e^{\int\frac{f(x,y)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(x,y)}{y}dy} + e^{\int\frac{f(x,y)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(x,y)}{y}dy}\cdot\left(\displaystyle\int\frac{g(x,y)}{y}dy\right)'_x\right]C}{e^{\int\frac{f(x,y)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(x,y)}{y}dy}\cdot C} =$$

$$= f(x,y) + x\cdot\left(\int \frac{g(x,y)}{y}dy\right)'_x.$$

Тобто перше твердження теореми 3 доведено.
Візьмемо дивідіру 2-го роду по y, отримаємо:

$$\overleftrightarrow{\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}} = \frac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)} =$$

$$\frac{y\left[\dfrac{g(x,y)}{y}e^{\int\frac{f(x,y)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(x,y)}{y}dy} + e^{\int\frac{f(x,y)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(x,y)}{y}dy}\cdot\left(\displaystyle\int\frac{f(x,y)}{x}dx\right)'_y\right]C}{e^{\int\frac{f(x,y)}{x}dx}\cdot e^{\int\frac{g(x,y)}{y}dy}\cdot C} =$$

$$= g(x,y) + y\cdot\left(\int \frac{f(x,y)}{x}dx\right)'_y.$$

Тобто друге твердження теореми 3 доведено.

Таким чином, теорема 3 доведена.

Теорема 4. *Якщо виробнича функція $u(x,y)$ має частинні коефіцієнти еластичності, які залежать від обох змінних наступного вигляду:*

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{\dfrac{\delta u(x,y)}{\delta x}} = f(x) + x\cdot\ln x\cdot f_x'(x) + \ln y, \\ \overleftrightarrow{\dfrac{\delta u(x,y)}{\delta y}} = g(y) + y\cdot\ln y\cdot g_y'(y) + \ln x, \end{cases} \tag{10}$$

тоді вона має бути представлена у вигляді:

$$u(x,y) = x^{f(x)}\cdot y^{g(y)}\cdot x^{\ln y}\cdot C, \tag{11}$$

де C – довільна стала.

Доведення. Система (10) еквівалентна такій системі нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)} = f(x) + x\cdot\ln x\cdot f_x'(x) + \ln y, \\ \dfrac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)} = g(y) + y\cdot\ln y\cdot g_y'(y) + \ln x. \end{cases} \tag{12}$$

Візьмемо дивідіру 2-го роду по x, отримаємо:

$$\overleftrightarrow{\frac{\delta u(x,y)}{\delta x}} = \frac{x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)} = \frac{x\left\{\left(x^{f(x)}\right)_x' y^{g(y)}x^{\ln y} + y^{g(y)}x^{f(x)}\left(x^{\ln y}\right)_x'\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C} =$$

$$= \frac{x\left\{\left[f(x)x^{f(x)-1}x_x' + x^{f(x)}\ln x\cdot f_x'(x)\right]y^{g(y)}x^{\ln y} + y^{g(y)}x^{f(x)}\left[\ln y\cdot x^{\ln y-1}\cdot x_x'\right]\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C} =$$

$$= \frac{x\left\{f(x)x^{f(x)-1}\cdot y^{g(y)}x^{\ln y} + x^{f(x)}\ln x\cdot f_x'(x)\cdot y^{g(y)}x^{\ln y} + y^{g(y)}x^{f(x)}\ln y\cdot x^{\ln y-1}\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C} =$$

$$= f(x) + x\cdot\ln x\cdot f_x'(x) + \ln y\,.$$

Тобто перше твердження теореми 4 доведено.

Візьмемо дивідіру 2-го роду по y, отримаємо:

$$\overleftrightarrow{\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}} = \frac{y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{u(x,y)} = \frac{y\left\{\left(y^{g(y)}\right)_y' x^{f(x)}x^{\ln y} + y^{g(y)}\left(x^{f(x)}x^{\ln y}\right)_y'\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C} =$$

$$=\frac{y\left\{\left[g(y)y^{g(y)-1}y'_y+y^{g(y)}\ln y\cdot g'_y(y)\right]x^{f(x)}x^{\ln y}+y^{g(y)}\left(x^{f(x)}x^{\ln y}\right)'_y\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C}=$$

$$=\frac{y\left\{\left[g(y)y^{g(y)-1}y'_y+y^{g(y)}\ln y\cdot g'_y(y)\right]x^{f(x)}x^{\ln y}\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C}+\frac{y\left\{y^{g(y)}\left(x^{f(x)}x^{\ln y}\right)'_y\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C}=$$

$$=\frac{y\left\{g(y)y^{g(y)-1}y'_y\cdot x^{f(x)}x^{\ln y}+y^{g(y)}\ln y\cdot g'_y(y)\cdot x^{f(x)}x^{\ln y}\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C}+$$

$$+\frac{y\left\{y^{g(y)}\left[\left(x^{f(x)}\right)'_y x^{\ln y}+x^{f(x)}\left(x^{\ln y}\right)'_y\right]\right\}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C}=$$

$$=\frac{y\cdot g(y)y^{g(y)-1}\cdot 1\cdot x^{f(x)}x^{\ln y}+y\cdot y^{g(y)}\ln y\cdot g'_y(y)\cdot x^{f(x)}x^{\ln y}}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C}+$$

$$+\frac{y\cdot y^{g(y)}x^{f(x)}x^{\ln y}\ln x\cdot\frac{1}{y}\cdot C}{x^{f(x)}y^{g(y)}x^{\ln y}\cdot C}=g(y)+y\cdot\ln y\cdot g'_y(y)+\ln x\,.$$

Тобто друге твердження теореми 4 доведено.
Таким чином, теорема 4 доведена.

Перспективи подальших досліджень. В подальшому планується побудувати відповідні виробничі функції для випадку, коли їх коефіцієнти еластичності будуються із врахуванням експериментальних даних.

Висновки. Таким чином, в роботі наведені, сформульовані і доведені теореми, які дозволяють побудувати виробничі функції у вигляді, який явно залежить від частинних коефіцієнтів еластичності цих функцій.

Список літератури: **1.** *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с. **2.** *Литвин О.М.* Дивідіріальні та мультигральні числення. Монографія. – К.: Наук. думка, 2006. – 144 с. **3.** *Муравин Э.А.* Агрохимия. – М.: КолосС, 2003. – 384 с. **4.** *Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л.* Производственные функции в экономическом анализе. – Вильнюс: Минтис, 1984. – 308 с.

Надійшла до редколегії 15.12.2011