МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
для студентів університетів технічних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»,
протокол №1 від 15.02.2024 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2024

УДК 516.1
В31

Рецезенти:
В. Сорокін, д.т.н., проф. Харківського національного університету міського господарства ім. О. М. Бекетова;
І. Жовтоніжко, к.п.н., доц. Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна

Веретельник В. В.
В31 Аналітична геометрія : навч. посіб. / В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко. — Харків : НТУ «ХПІ», 2024. — 251 с.

ISBN 978-617-05-0499-9

Навчальний посібник містить матеріал з дисципліни аналітична геометрія. Теоретичний матеріал доповнено прикладами розв'язання задач. Також наведено основні відомості з теорії визначників та розв'язання систем алгебраїчних лінійних рівнянь.

Призначено для студентів університетів технічних спеціальностей.

Іл. 106. Бібліогр.: 2 назв.

УДК 516.1

ISBN 978-617-05-0499-9

© В. В. Веретельник,
© Г. М. Тимченко,
© НТУ «ХПІ», 2024

Вступ

Навчальний посібник відповідає силабусам з дисциплін «Вища математика» та «Аналітична геометрия». Головна мета — надати студентам певний обсяг теоретичного матеріалу, а також практичних навичок з основних питань для розв'язання задач з розділу «Аналітична геометрія», допомогти студентам в їх самостійній роботі.

У кожному розділі наведено достатня кількість розв'язаних задач та прикладів, пояснюючих та закріплюючих теоретичний матеріал.

Серед розв'язаних задач чимало таких, які можна назвати типовими; в будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі з боку викладача оволодіти основними методами розв'язання задач даного розділу. Наприкінці кожного розділу наведено добірку завдань для самостійної роботи.

Також наведено основні відомості з теорії визначників та розв'язання систем алгебраїчних лінійних рівнянь. .

1. Координати на прямій та площині

Системи координат дозволяють задати за допомогою чисел положення будь-якої точки простору, площини або прямої лінії. Це дає можливість проводити розрахунки над координатами, тобто вирішувати геометричні завдання як аналітично, так і чисельно. Найбільш поширеною є прямокутна декартова система координат.

1.1. Вісь

Задамо на прямій довільним чином *додатний напрям*, інший напрям на цій прямій будемо вважати *від'ємним*.

Означення 1. Пряма, на який задано напрям, називається *віссю*.

Зображати вісь будемо стрілкою, яка вказує додатний напрям. Наприклад, на рис.1.1 зображена вісь l.

Рис. 1.1. Вісь l

1.2. Напрямлені відрізки

Задамо в просторі дві точки A і B, та проведемо через них пряму. Точки A і B обмежують на прямій відрізок AB (рис.1.2).

Задамо *масштабний відрізок* — одиницю виміру.

Означення 2. Відстань між початком A і кінцем B відрізка AB називається *довжиною відрізка*.

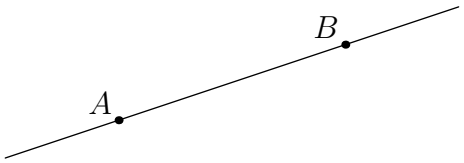

Рис. 1.2. Відрізок прямої AB

Довжина відрізка є додатним числом, що отримується виміром цього відрізка за допомогою масштабного відрізка.

Відрізок, обмежений точками A і B, а також його довжину позначають AB або BA.

Упорядкуємо ці точки: нехай точка A буде початковою, а точка B — кінцевою, тобто задамо на побудованому відрізку *напрям*, причому будемо вважати, що відрізок спрямовано від початкової точки A до кінцевої точки B.

Означення 3. Відрізок, на якому задано напрям, називається *напрямленим відрізком.*

Будемо позначати напрямлений відрізок з початком у точці A і кінцем у точці B двома буквами зі стрілкою: $\overrightarrow{AB}$. На рисунках напрямлений відрізок будемо зображати стрілкою (рис.1.3).

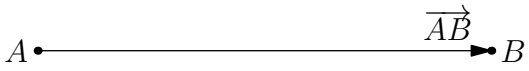

Рис. 1.3. Напрямлений відрізок

Зауважемо, що напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, це різні напрямлені відрізки, тому що $\overrightarrow{AB}$ — це напрямлений відрізок, обмежений точками A і B, початком якого є точка A; $\overrightarrow{BA}$ — це напрямлений відрізок, обмежений точками A і B, початком якого є точка B.

Означення 4. Відстань між початком A і кінцем B напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ називається *довжиною напрямленого відрізка* і позначається символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Означення 5. Напрямлений відрізок, у якого початкова і кінцева точки збігаються, називається *нульовим.*

Довжина нульового відрізка дорівнює нулю, а напрям невизначено.

Розглянемо напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$, якій розміщується на осі $\overrightarrow{l}$.

Означення 6. *Величиною напрямленого відрізка* $\overrightarrow{AB}$ певної осі, називається число, що дорівнює довжині напрямленого відрізка, яке береться зі знаком плюс, якщо напрям цього відрізка збігається з додатним напрямом осі, і зі знаком мінус, якщо напрями відрізка і осі протилежні.

Позначається величина напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ символом AB.

Звернемо увагу на те, що величина напрямленого відрізка є величиною алгебраїчною, тобто це число зі знаком, і вона відрізняється від довжини напрямленого відрізка. Очевидно, що довжина напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ дорівнює модулю величини цього відрізка: $|AB|$. Отже, напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ мають однакові довжини

$$|AB| = |BA|$$

але величини AB і BA мають різні знаки, тому

$$AB = -BA.$$

Зауваження 1. Величину напрямленого відрізка можно розглядати тільки тоді, коли відрізок належить осі.

1.3. Координати на прямій. Числова вісь

Визначемо на осі x деяку точку O, відносно якої будемо визначати положення усіх точок осі. Цю точку будемо називати *початок координат*.

Призначемо *масштабний відрізок*, довжина якого приймається за одиницю. Завдання масштабного відрізку дозволяє вимірювати відстані.

Означення 7. Вісь, на який задано початок координат та масштабний відрізок, називається *числовою віссю*.

Зазвичай числову вісь позначають двома літерами, явно вказуючи початок координат. Наприклад, вісь Ox — числова вісь з початкомом координат у точці O.

Розглянемо довільну точку M числової осі Ox. Зрозуміло, що положення точки M відносно початку координат O цілком визначається напрямленим відрізком $\overrightarrow{OM}$. Дійсно, кожній точці M числової осі відповідає відрізок з початком у точці O і кінцем у точці M і, навпаки, кожному напрямленому відрізку $\overrightarrow{OM}$ з початком в точці O відповідає точка M — кінець цього

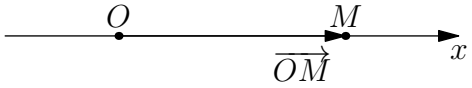

Рис. 1.4. Числова вісь Ox

відрізка (рис.1.4). Отже, положення кожної точки M числової осі можна визначити числом — величиною напрямленого відрізка $\overrightarrow{OM}$.

Означення 8. *Координатою точки* M на числовій осі називається таке число x, модуль якого дорівнює відстані від початку координат (точки O) до точки M і має знак «+», якщо точка M розміщена у додатному напряму осі відносно початку координат O, та знак «−», якщо точка M міститься у від'ємному напряму.

То, що точка M має координату x, позначається так: $M(x)$.

Таким чином, координата точки M на числовій осі Ox це *величина напрямленого відрізка* $\overrightarrow{OM}$.

Очевидно, що початок координат O має координату, яка дорівнює нулю, тобто $O(0)$. На рисунку рис.1.5 зображені точки $O(0)$, $N(-3)$ і $M(2)$, які розміщуються на числовій осі Ox. Звернемо увагу, що точка $N(-3)$ розміщується у від'ємному напряму осі відносно початка координат на відстані три одиниці від початку координат, а точка $M(2)$ — на відстані дві одиниці у додатному напряму осі.

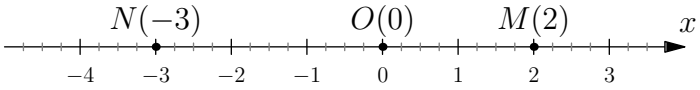

Рис. 1.5. Координати точок

Зауваження 2. Кожній точці на числовій осі відповідає дійсне число — її координата, і навпаки, кожному дійсному числу відповідає єдина точка осі, координатою якої є це число і ця відповідність взаємно-однозначна.

Координати точок дозволяють з'ясувати відносне розташування точок на осі та обчислити відстань між ними. Наприклад, нехай задано дві точки $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$. Відстань між цими точками — це довжина напрямленого відрізка $\overrightarrow{M_1M_2}$. Отже,

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1, M_2}\right| = \left|\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1\right| = |x_2 - x_1|\,.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати на осі точки $O(0)$, $A(-2)$, $B(3)$ і $C(5)$.

2. Знайти довжину відрізків AB, BA, AC.

3. Знайти величини напрямлених відрізків $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

4. Знайти величини напрямлених відрізків $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$.

1.4. Декартові координати на площині

Означення 9. Дві взаємно перпендикулярні числові осі Ox і Oy з загальним початком координат і масштабним відрізком утворюють *прямокутну декартову систему координат на площині.*

Вісь Ox називається *вісь абсцис*, а вісь Oy — *віссю ординат.*

Розрізняють праву та ліву систему координат.

Означення 10. Якщо найкоротший поворот осі абсцис навколо початку координат до додатного напряму осі ординат здійснюється проти руху годинникової стрілки, то система координат називається *правою*; якщо за рухом годинникової стрілки, то — *лівою.*

На рис.1.6 зображено праву систему координат Oxy. Вибір орієнтації системи координат, зазвичай, не має значення, хоча іноді це виявляється важливим.

Нехай на площині визначена прямокутна декартова система координат Oxy. Виберемо довільну точку площини, позначимо її літерою M. Побудуємо проєкції точки M на осі координат (рис.1.6).

Означення 11. *Прямокутною проєкцією* точки M на вісь l називається основа M' перпендикуляра MM', опущеного з точки M на вісь l.

Опустимо з точки M перпедикуляри на осі координат. Позначимо основи цих перпендикулярів на координатних осях як M_x і M_y. Точки M_x і M_y є проєкціями точки M на відповідних осях координат і, навпаки, якщо відомі

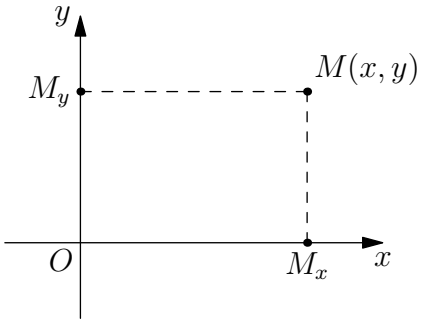

Рис. 1.6. Координати точки на площині

на осях координат точки M_x і M_y, то можна побудувати єдину точку M, для якої точки M_x і M_y є проєкціями. Отже, положення точки M на площині визначається положенням її проєкцій M_x і M_y, тобто величинами напрямлених відрізків $x = OM_x$ і $y = OM_y$.

Означення 12. *Декартовими прямокутними координатами* x і y точки M на площині називаються величини напрямлених відрізків $x = OM_x$ і $y = OM_y$.

Координати x та y точки M будемо позначати так: $M(x, y)$.

Декартову координату x називають *абсцисою* точки M, координату y — *ординатою* точки M.

Зауважимо, що модулі координат точки $M(x, y)$ у прямокутній декартовій системі — це відстань від точки $M(x, y)$ до відповідних координатних осей. Так $|x|$ дорівнює відстані від точки $M(x, y)$ до осі Oy, тобто довжині відрізка MM_y, $|y|$ дорівнює відстані від точки $M(x, y)$ до осі Ox, тобто довжині відрізка MM_x (рис.1.6).

Точки M_x і M_y як точки площини xOy мають координати $M_x(x, 0)$ і $M_y(0, y)$; початок координат — $O(0, 0)$.

Отже, *завдання на площині системи координат дозволяє за допомогою кожної упорядкованої пари чисел* (x, y) *однозначно визначити точку на площині і, навпаки, кожній точці площини можна поставити у відповідність впорядковану пару чисел — її координати.*

Приклад 1. Побудувати точку $M(2,5; -2)$.

Розв'язання. Точка $M(2,5; -2)$ має таки координати: $x = 2,5$ і $y = -2$. Тому відкладаємо у додатному напряму осі Ox відрізок довжиною $2,5$ одиниці. Отримаємо точку M'. Через цю точку M' проводимо пряму, яка паралельна осі Oy, і відкладаємо на цій прямій в від'ємному напрямку осі Oy від

точки M' відрізок довжиною 2 одиниці. Кінець цього відрізка буде точка $M(2,5;-2)$ (рис.1.7). □

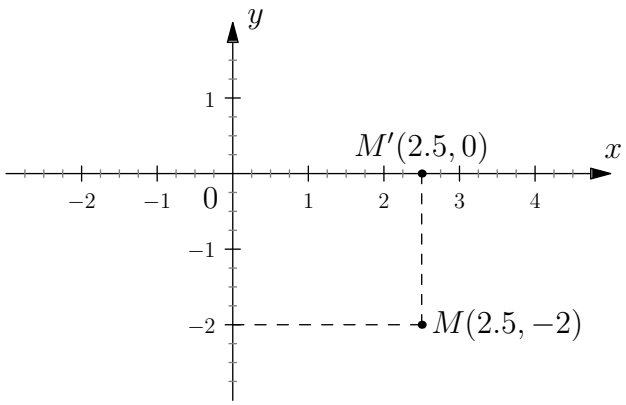

Рис. 1.7. Побудова точки

Вісь Ox розбиває площину на дві напівплощини: верхню, на якій ординати точок додатні, та нижню, на якій ординати від'ємні. Аналогічно вісь Oy ділить площину на праву (абсциси додатні) і ліву (абсциси від'ємні) напівплощини. Разом осі координат ділять площину на чотири квадранти (рис.1.8).

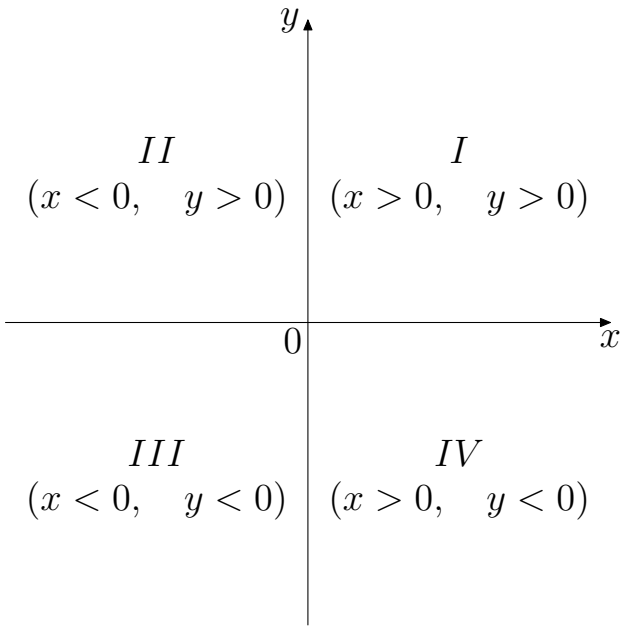

Рис. 1.8. Квадранти

1.5. Відстань між двома точками

Обчислимо відстань між двома довільними точками $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$ площини Oxy. Побудуємо відрізок AB. Очевидно, що відстань між точками A і B дорівнює довжині цього відрізка.

Опустимо з точок A і B на вісі координат перпендикуляри. Основи перпендикулярів на осі Ox позначимо як A' і B', це прямокутні проєкції точок A і B на вісь Ox. Проєкції точок A і B на вісь Oy позначимо як A'' і B'' (рис.1.5.). Очевидні координати цих проєкцій:

$$A'(x_A; 0), \qquad B'(x_B; 0),$$
$$A''(0; y_A), \qquad B''(0; y_B).$$

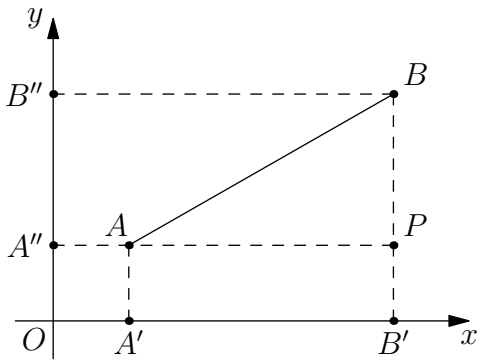

Рис. 1.9. Відстань між точками

Одержаний трикутник $\triangle ABP$ прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$|AB| = \sqrt{AP^2 + BP^2}.$$

Тому що, довжини катетів AP і BP дорівнюють довжинам відповідних відрізков $A'B'$ і $A''B''$:

$$|AP| = |A'B'| = |x_B - x_A|,$$
$$|BP| = |A''B''| = |y_B - y_A|$$

остаточно одержимо відстань між точками A і B:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \tag{1.1}$$

Приклад 2. Знайти довжину відрізка MN, якщо точки M і N мають таки координати: $M(-3; -2)$ і $N(1; 1)$ (рис.1.10).

Розв'язання. За формулою (1.1) маємо:

$$|MN| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} =$$
$$= \sqrt{(1-(-3))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

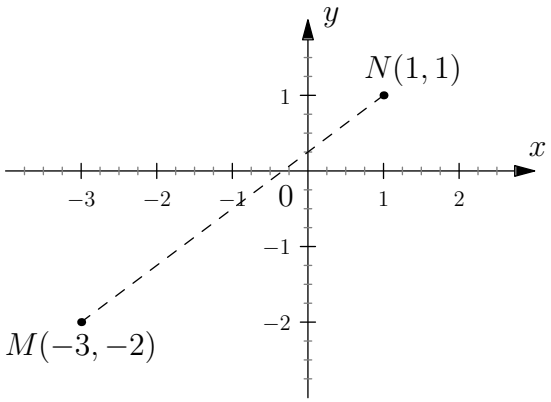

Рис. 1.10. Довжина відрізка MN

□

1.6. Косокутна декартова система

Системи координат дозволяють задати за допомогою чисел положення будь-якої точки площини або прямої лінії. Це дає можливість проводити розрахунки над координатами, тобто вирішувати геометричні завдання як аналітично, так і чисельно. Найбільш поширеною є прямокутна декартова система координат. Однак, при розгляді спеціальних задач, можуть виявитися зручнішими інші системи координат.

Означення 13. Дві числові осі Ox і Oy із загальним початком координат O та загальним масштабним відрізком, що перетинаються у початку координат під будь-яким кутом (крім 0 і π), утворюють *косокутну декартову систему координат на площині*. Вісь Ox називається *віссю абсцис*, а вісь Oy — *віссю ординат*.

Розглянемо на площині довільну точку M і побудуємо косокутні проєкції точки M на осі координат Ox та Oy: паралельно осям координат через точку M проведемо прямі. Точки перетину цих прямих з осями координат,

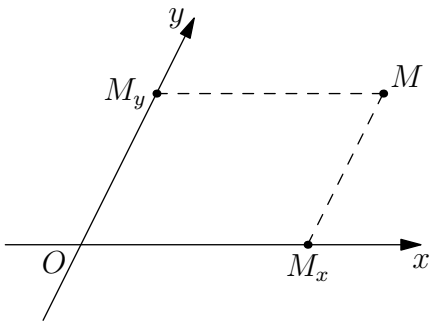

Рис. 1.11. Косокутні координати

тобто точки M_x і M_y, називаються *косокутними проєкціями* точки M на осі координат.

Таким чином, на осях координат отримаємо відрізки OM_x і OM_y.

Означення 14. Величини напрямлених відрізків $x = OM_x$ і $y = OM_y$ називаються *косокутними координатами* точкі M. Цей факт позначають так: $M(x, y)$.

Якщо точка M має координати $M(x, y)$, то точки M_x і M_y мають координати $M_x(x, 0)$, $M_y(0, y)$. Тому косокутні координати x і y точки M можна розглядати, як координати точок M_x і M_y на числових осях Ox і Oy.

Зауважимо, що працювати з косокутною декартовою системою координат складніше, ніж з прямокутною (теорема косинусів складніша за теорему Піфагора).

1.7. Полярна система координат

Виберемо на площині довільну точку O і назвемо її *полюсом*. Проведемо з полюса у довільному напряму промінь — *полярну вісь* і задамо масштабний відрізок для вимірювання довжин на площині.

Розглянемо довільну точку площини M. Очевидно, що її положення буде повністю визначено, якщо задати відстань ρ між полюсом O і точкою M, а також кут φ, що утворює напрямлений відрізок $\overrightarrow{OM}$ з полярною віссю.

Означення 15. *Полярними координатами* точки M називаються два числа ρ і φ. Число ρ дорівнює відстані від полюса O до точки M і називається *полярним радіусом*, число φ називається *полярним кутом*, це кут, на який треба повернути полярну вісь навколо полюса, щоб поєднати напрям полярної осі з напрямом напрямленого відрізка $\overrightarrow{OM}$, (рис.1.12).

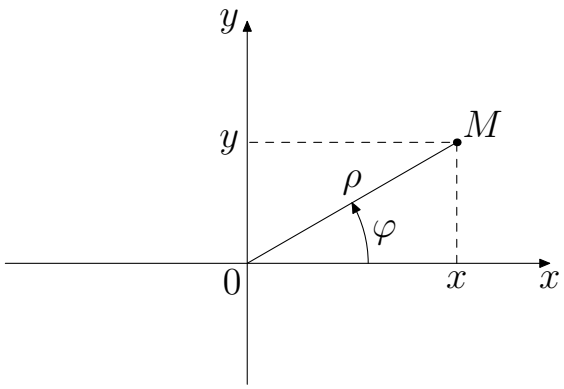

Рис. 1.12. Полярні координати

Те, що точка M має полярні координати ρ і φ записується так: $M(\rho, \varphi)$.

Таким чином, щоб побудувати точку за її полярними координатами, треба з полюса провести промень таким чином, щоб він утворивал з полярною віссю полярний кут і відкласти на цьому промені від полюса полярний радіус.

Зазвичай передбачається, що

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Додатним вважається поворот, який відбувається «проти руху годинникової стрілки». Якщо точка M збігається з полюсом, то полярний кут вважається *невизначеним.*

Зауваження 3. Іноді зручно вимірювати полярний кут φ так, як це прийнято в тригонометрії, тобто з урахуванням знаку і з точністю до доданка виду $\pm 2\pi n$.

З кожною полярною системою координат можна зв'язати деяку прямокутну декартову систему координат. При цьому природним вважається, що використовується загальний масштабний відрізок і початок декартової системи координат збігається з полюсом полярної системи, а вісь абсцис збігається з полярною віссю (рис.1.12). Позначимо координати точки M у декартовій системі координат через x і y. Очевидні такі формули:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \tag{1.2}$$

Звідси можна отримати і зворотні співвідношення

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.3}$$

Зауваження 4. При знаходженні полярного кута φ точки M за її декартовими координатами x і y необхідно враховувати квадрант, у якому розміщується точка M. Справа в тому, що арктангенс повертає значення лише в межах інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, маємо:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{якщо} \quad x > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{якщо} \quad x < 0, \quad y \geqslant 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{якщо} \quad x < 0, \quad y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad x = 0, \quad y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad x = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Приклад 3. Знайти полярні координати точки $M(-2; 2)$.

Розв'язання. Знайдемо полярний радіус точки M:

$$\rho = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Знайдемо полярний кут:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{2}{-2} = -1, \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Звернемо увагу, що абсциса точки M від'ємна, а ордината додатна, тобто точка M міститься у другому квадранті. Таким чином, маємо

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Отже, точка M має таки полярні координати: $M\left(2\sqrt{2}\,; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис.1.13).

□

Приклад 4. Знайти декартові координати точки $A\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$

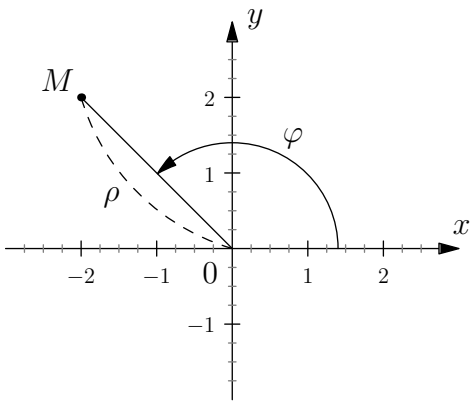

Рис. 1.13. Полярні координати точки $M\left(2\sqrt{2}\,;\frac{3\pi}{4}\right)$

Розв'язання. За формулами (1.2) одержимо:

$$x = \rho\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$
$$y = \rho\sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Точка $A\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ зображена на рис.1.14. □

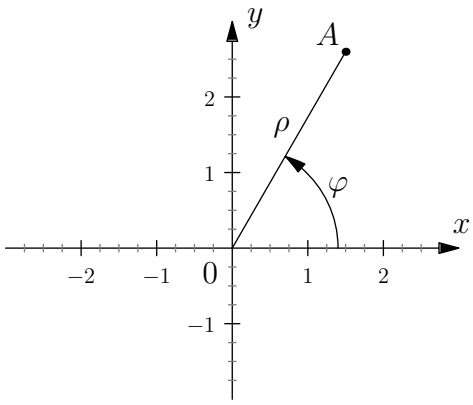

Рис. 1.14. Декартові координати точки $A\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати на площині точки $O(0,0)$, $A(-2,3)$, $B(3,2)$ і $C(2,-3)$.

2. Знайти довжину відрізків AB, BA, AC.

3. Знайти величини напрямлених відрізків $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

4. Знайти полярні координати точок A, B, C.

Питання для самоперевірки

1. Що таке напрямлений відрізок?

2. Що називається довжиною напрямленого відрізка?

3. Що таке вісь? Числова вісь?

4. Як визначаються координати точок на прямій?

5. Як визначаються декартові координати точок на площині?

6. За якою формулою обчислюються відстань між двома точками на площині?

7. Що таке полярна система координат?

8. Формули зв'язку координат у декартовій та полярній системах координат.

2. Вектори

Такі фізичні величини, як сила, швидкість визначаються не тільки своїм чисельним значенням, а й напрямом дії. Такі величини називаються *векторними*. Побудуємо геометричний аналог фізичного вектора.

2.1. Поняття вектора

Означення 16. Вектором називається *напрямлений відрізок*.

Позначається вектор з початком в точці A і кінцем в точці B символом $\overrightarrow{AB}$. Якщо не важливо, які точки будуть кінцевими, вектор можна позначати однією буквою: $\vec{a}$ або $\vec{A}$. Зображається вектор стрілкою (рис. 2.1).

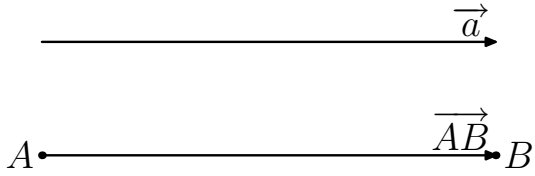

Рис. 2.1. Вектор

Початкова точка вектора називається *точкою прикладання* вектора.

Означення 17. Відстань між початком A і кінцем B вектора $\overrightarrow{AB}$ називається *довжиною* або *модулем вектора* і позначається символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Звернемо увагу на те, що *кожен вектор визначається напрямом та довжиною*.

Означення 18. Вектор, у якого кінцева точка збігається з точкою прикладання, називається *нульовим*.

Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрям невизначено.

В геометрії розглядаються *вільні вектори*. У вільних векторів точка прикладання *не закріплена*, тобто будь-який вільний вектор можна переносити паралельно самому собі.

Означення 19. Два вектори $\overrightarrow{A}$ і $\overrightarrow{B}$ називаються *рівними*, якщо вони можуть бути суміщені шляхом паралельного перенесення. Позначаються рівні вектори так:

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}.$$

Таким чином, якщо два вектори рівні, то:

- вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих;
- вони спрямовані в один бік;
- вони мають рівні довжини.

2.2. Додавання векторів. Множення вектора на число

Операції додавання векторів та множення вектора на число називаються *лінійними операціями* над векторами.

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два довільні вектори. Визначимо операцію додавання цих векторів. Точку прикладання вектора $\vec{b}$ помістимо шляхом паралельного перенесення в кінець вектора $\vec{a}$ (рис 2.2).

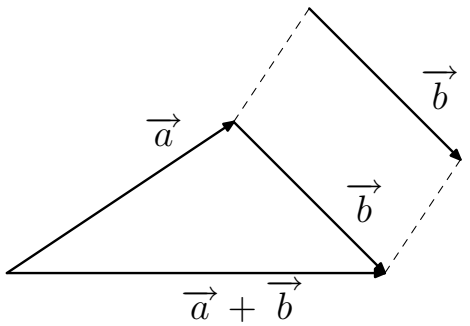

Рис. 2.2. Правило трикутника

Означення 20 (Правило трикутника)**.** *Сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a}+\vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$.

Операція додавання векторів має такі властивості:

1. *Комутативна*

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}, \tag{2.1}$$

тобто, сума векторів не залежить від порядку доданків.

2. *Сполучна*

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right), \tag{2.2}$$

тобто при складанні трьох і більше доданків їх можна групувати у довільному порядку.

3. Існує *нульовий вектор* $\overrightarrow{0}$ такий, що для будь–якого вектора $\overrightarrow{a}$ виконується умова:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a} \tag{2.3}$$

(особлива роль нульового вектора).

4. Для кожного вектора $\overrightarrow{a}$ існує *протилежний* йому вектор $\overrightarrow{a}_-$ такий, що

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}_- = \overrightarrow{0}. \tag{2.4}$$

Доведемо властивості операції додавання векторів.

1. Прикладемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ до загального початку O. Позначимо кінці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ буквами A і B і розглянемо паралелограм $OACB$ (рис 2.3).

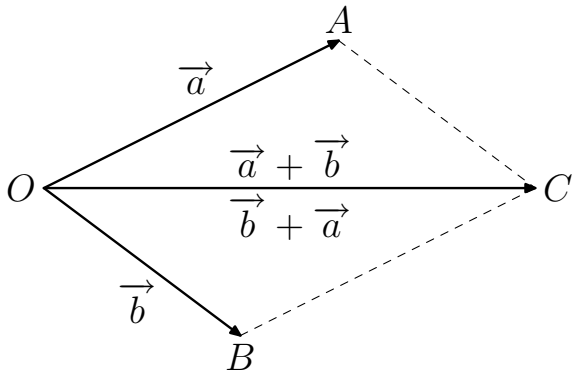

Рис. 2.3. Правило паралелограма

За означенням рівності векторів (стр. 19) маємо:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} \quad \text{і} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}.$$

Розглянемо трикутник $\triangle OAC$. За означенням суми векторів (стр. 20) маємо, що діагональ паралелограма OC дорівнює такій сумі векторів: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Аналогічно, з трикутника $\triangle OBC$ встановимо, що та ж сама діагональ паралелограма дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.

Отже,

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a},$$

що і потрібно було довести.

З правила трикутника випливає інше правило додавання векторів — *правило паралелограма.*

Означення 21 (Правило паралелограма)**.** *Сумою* двох векторів, прикладених до спільної точки, буде вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах, і закріплений в тій же точці, що вихідні вектори (рис 2.3).

2. Розглянемо три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$. Прикладемо вектор $\overrightarrow{a}$ до довільної точки O. Початок вектора $\overrightarrow{b}$ помістимо у кінець вектора $\overrightarrow{a}$, а початок вектора $\overrightarrow{c}$ у кінець вектора $\overrightarrow{b}$. Позначимо кінцеві точки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ буквами A, B і C відповідно (рис. 2.4).

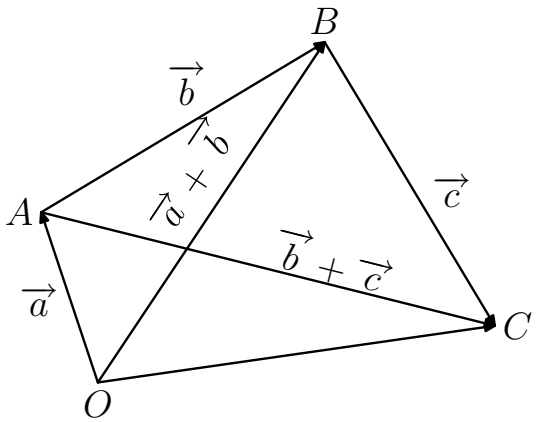

Рис. 2.4. Асоціативність суми векторів

З чотирикутника $OABC$ випливає

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

Таким чином, рівність правих частин доводить, що

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right).$$

3. Ця властивість безпосередньо випливає з визначення суми векторів та з візначення нульового вектора (стр.18). Додамо два вектора $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{AC}$. Якщо вектор $\overrightarrow{AC}$ нульовий, то точка C збігається з точкою A і трикутник OAC вироджується у відрізок OA. Отже, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{OA}$.

4. Для доведення цієї властивості достатньо визначити вектор протилежний до вектора $\overrightarrow{a}$.

Означення 22. Вектор $\overrightarrow{a}_-$ називається *протилежним* до вектора $\overrightarrow{a}$, якщо він має туж саму довжину, що й вектор $\overrightarrow{a}$, паралельний до вектора $\overrightarrow{a}$ і має протилежний напрям.

Наприклад, на рис. 2.5 вектори $\overrightarrow{A}$ і $\overrightarrow{B}$ рівні, а вектори $\overrightarrow{A}$ і $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{B}$ і $\overrightarrow{C}$ — взаємно протилежні.

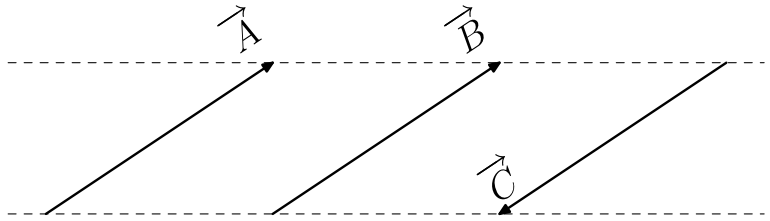

Рис. 2.5. Рівні та протилежні вектори

Отже, якщо додати до вектора $\overrightarrow{a}$ протилежний до нього вектор $\overrightarrow{a}_-$, то одержимо нульовий вектор.

Означення 23. *Добутком* вектора $\overrightarrow{a}$ на дійсне число α називається такий вектор $\overrightarrow{b} = \alpha \cdot \overrightarrow{a}$, який паралельний до вектора $\overrightarrow{a}$, має довжину $|\alpha||\overrightarrow{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\overrightarrow{a}$, якщо α додатне, і має протилежний напрям, якщо α від'ємне.

Геометричний сенс множення вектора $\overrightarrow{a}$ на число α полягає в «розтягуванні» в $|\alpha|$ разів вектора $\overrightarrow{a}$.

Зауважимо, що якщо $0 < |\alpha| < 1$, то вектор $\overrightarrow{a}$ стискається, а не розтягується, причому, якщо α від'ємне, то крім «розтягування» вектор $\overrightarrow{a}$ ще змінює свій напрям на протилежний (рис. 2.6).

Операція множення вектора на число має такі властивості:

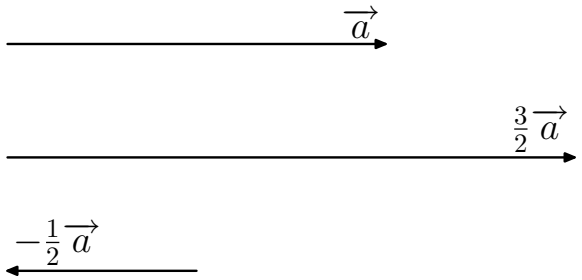

Рис. 2.6. Добуток вектора на число

1. Розподільна властивість чисельного множника відносно суми векторів:

$$\alpha\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\alpha\overrightarrow{a}+\alpha\overrightarrow{b}. \tag{2.5}$$

2. Розподільна властивість векторного множника відносно суми чисел:

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{a}. \tag{2.6}$$

3. Асоціативна властивість відносно чисельних множників:

$$\alpha(\beta\overrightarrow{a})=(\alpha\beta)\overrightarrow{a}. \tag{2.7}$$

4. Особливість чисельного множника одиниця:

$$1\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}. \tag{2.8}$$

Тут α і β довільні дійсні числа.

Доведення першої властивості випливає з подібності паралелограмів, які зображені на рис. 2.7. Насправді, прикладемо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ до загального початку і побудуємо на цих векторах паралелограм, діагональ якого буде дорівнювати $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$. Помноживши вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ на число α, одержимо паралелограм зі сторонами $\alpha\overrightarrow{a}$ і $\alpha\overrightarrow{b}$ та діагоналлю $\alpha\overrightarrow{a}+\alpha\overrightarrow{b}$.

З іншого боку, це подібні паралелограми, тому, якщо сторони вихідного паралелограма були помножені на число α, то діагональ вихідного паралелограма $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ за подібністю також треба помножити на число α. Отже, маємо:

$$\alpha\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\alpha\overrightarrow{a}+\alpha\overrightarrow{b}$$

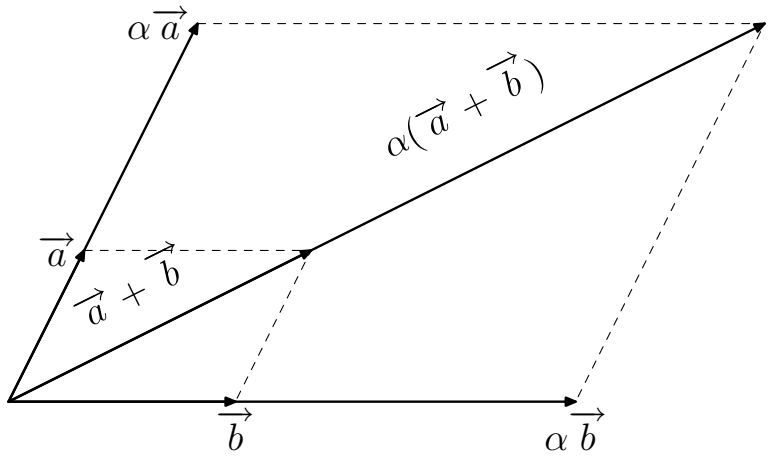

Рис. 2.7. Множення суми векторів

При доведенні останніх трьох властивостей звернемо увагу, що в обох частинах цих рівностей містяться вектори, які лежать на тій самій прямій.

Доведемо третю властивість. Порівняємо довжини векторів, що містяться у лівій та правій частинах рівності (2.7). Ліворуч маємо:

$$|\alpha\,(\beta\,\overrightarrow{a})\,| = |\alpha||\,(\beta\,\overrightarrow{a})\,| = |\alpha||\beta||\,\overrightarrow{a}\,|.$$

Тут двічі було використовано визначення операції множення вектора на число. Довжина вектора, якій міститься у правій частині рівності (2.7), дорівнює:

$$|\,(\alpha\beta)\,\overrightarrow{a}\,| = |\alpha\beta||\,\overrightarrow{a}\,| = |\alpha||\beta||\,\overrightarrow{a}\,|.$$

З цих рівностей випливає, що довжини векторів в обох частинах рівні.

Далі, вектори в обох частинах рівності лежать на тій самій прямій, тому вони спрямовані або в один бік, або в протилежні боки.

Якщо обидва числа α і β додатні, то при множенні на ці числа напрям векторів не змінюється. Таким чином, ліва частина дорівнює провій частині, тому що і довжини векторів і напрями векторів збігаються.

Якщо обидва числа α і β від'ємні, то ліворуч вектор при множенні двічі змінює напрям на протилежний, тобто повертається до вихідного напряму. Праворуч множимо на додатне число (добуток двох від'ємних чисел), яке при множенні напрям вектора не змінює.

Якщо одне з цих чисел від'ємне, а друге додатне, то і ліворуч, і праворуч вектор один раз змінює напрям на протилежний. Отже, вектор $\alpha\,(\beta\,\overrightarrow{a})$ дорівнює вектору $(\alpha\cdot\beta)\,\overrightarrow{a}$.

Аналогічно можна довести властивості 2 і 3.

Зауваження 5. За означенням добутку вектора на число та протилежного вектора випливає, що вектор $\overrightarrow{a}_{-}$ протилежний до вектора $\overrightarrow{a}$ можна уявити у такому вигляді:

$$\overrightarrow{a}_{-} = (-1) \cdot \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}. \tag{2.9}$$

Дійсно, вектори $\overrightarrow{a}$ и $(-1) \cdot \overrightarrow{a}$ мають однакові довжини:

$$|(-1) \cdot \overrightarrow{a}| = |(-1)| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|$$

і завдяки множнику (-1) протилежні напрями.

Означення 24. *Різницею* $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається такий вектор $\overrightarrow{c}$, який при додованні до вектора $\overrightarrow{b}$ буде дорівнювати вектору $\overrightarrow{a}$.

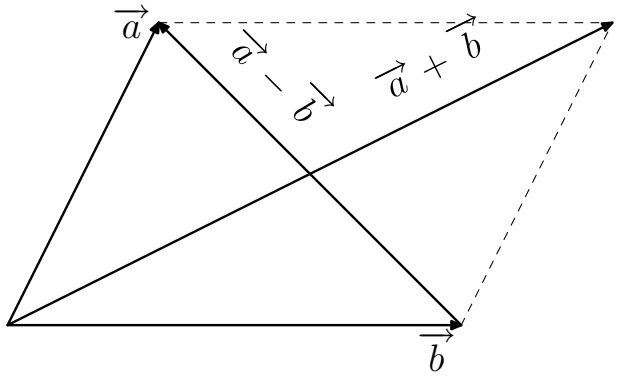

Рис. 2.8. Різниця та сума векторів

Таким чином, якщо

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b},$$

тоді

$$\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$$

і навпаки.

Зауважимо, що різницю можна обчислювати за правилом:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}_{-} = \overrightarrow{a} + (-1)\overrightarrow{b}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати два довільні вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$.

2. Знайти їх суму та різницю.

3. Знайти вектор $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.

2.3. Колінеарні вектори

Означення 25. Вектори, що лежать на одній і тій самій прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*.

Зауваження 6. Нульовий вектор, через невизначеність свого напряму, вважається колінеарним будь-якому вектору.

Теорема 1 (умова колінеарності)**.** *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні та вектор $\vec{b} \neq 0$, то існує таке число λ, що*

$$\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}. \tag{2.10}$$

Візьмемо на прямій три точки O, P, M. Можливі два варіанти їхнього взаємного розташування (рис 2.9).

Рис. 2.9. Колінеарні вектори

Розглянемо спрямовані відрізки (вектори) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OP}$ та $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OM}$. Вони колінеарні, тому що лежать на одній прямій. Очевидний зв'язок між довжинами цих векторів:

$$|\overrightarrow{OP}| = |\lambda||\overrightarrow{OM}|.$$

Тут число $|\lambda|$ — коефіцієнт «розтягування» вектора $\overrightarrow{OM}$.

За правилом множення вектора на число, число λ буде додатне, якщо вектори $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{OM}$ мають один і той же напрямок, і число λ буде від'ємне, якщо ці вектори спрямовані в протилежні сторони. Таким чином, *якщо два вектора лежать на одній і тій самій прямій, вони пов'язані співвідношенням*

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Цей висновок можна поширити на будь-які колінеарні вектори, оскільки, за умовою рівності векторів, ці вектори паралельним перенесенням завжди можна розташувати на одній і тій самій прямій.

2.4. Компланарні вектори

Означення 26. Вектори, що лежать в одній і тій самій площині або в паралельних площинах, називаються *компланарними.*

Зауваження 7. Нульовий вектор, через невизначеність свого напряму, вважається паралельним будь-якій площині.

2.5. Кут між векторами

Розглянемо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Прикладемо їх до спільного початку в точці O (рис 2.10).

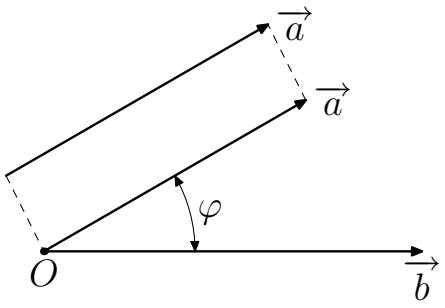

Рис. 2.10. Кут між векторами

Означення 27. *Кутом φ між двома векторами $\vec{a}$* і $\vec{b}$ називається найменший кут, на який треба повернути один з векторів навколо їх спільного початку, щоб їх напрямки збіглись.

Позначати кут φ між вектором $\vec{a}$ і вектором $\vec{b}$ будемо символом $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$. Очевидно, що $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

2.6. Проєкція вектора

Означення 28. *Прямокутною проєкцією точки* A на вісь l називається основа A' перпендикуляра AA', який проведено з точки A на вісь l (рис. 2.11).

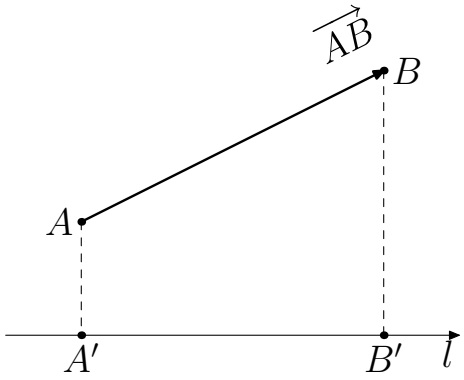

Рис. 2.11. Прямокутна проєкція вектора на вісь

Нехай у просторі задана деяка вісь l і напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$. Опустимо з кінцевих точок напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ на вісь l перпендикуляри. Їх основами будуть точки A' і B' (рис. 2.11).

Означення 29. *Прямокутною проєкцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називається довжина відрізка $A'B'$ осі l, яка взята зі знаком плюс, якщо кут φ між вектором $\overrightarrow{AB}$ та віссю l гострий, і зі знаком мінус, якщо кут тупий.

Позначається проєкція символом $\mathrm{Пр}_l\overrightarrow{AB}$.

Отже, маємо

$$\mathrm{Пр}_l\overrightarrow{AB} = \pm|A'B'|.$$

Теорема 2. *Проєкція вектора на вісь дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між вектором та віссю*

$$Пр_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

Доведення. Помістимо шляхом паралельного перенесення вектор $\overrightarrow{AB}$ таким чином, щоб його точка прикладання збігалась з проєкцією точки A на вісь l (на рис. 2.12 і рис. 2.13 проєкція точки A позначена як A').

Очевидно, що

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B''}.$$

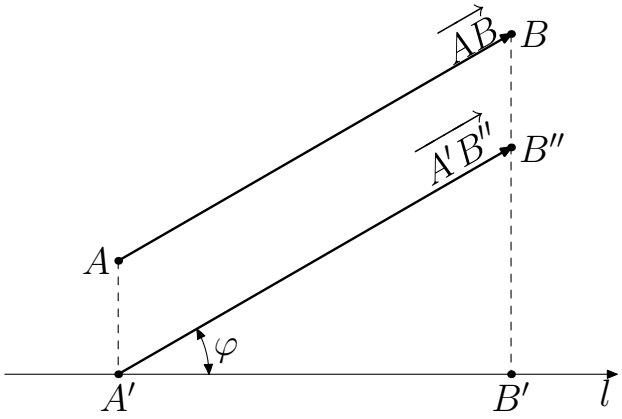

Рис. 2.12. Обчислення проєкції вектора

1. Якщо кут φ, якій вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з віссю l гострий, то з трикутника $\triangle A'B''B'$ маємо (рис. 2.12):

$$\mathrm{Пр}_l\overrightarrow{AB} = |A'B'| = |A'B''|\cos\varphi = |AB|\cos\varphi.$$

2. Якщо кут φ тупий, тоді (рис. 2.13):

$$\mathrm{Пр}_l\overrightarrow{AB} = -\,|A'B'| = -|A'B''|\cos\psi = \\ = -|A'B''|\cos(\pi-\varphi) = |A'B''|\cos\varphi = |AB|\cos\varphi.$$

3. Якщо кут φ прямий, тобто $\varphi = \pi/2$, то проєкція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь дорівнює нулю.

□

Наслідок 1. *Проєкція вектора на вісь додатна, якщо вектор утворює гострий кут з віссю, від'ємна — якщо вектор утворює з віссю тупий кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут прямий.*

Властивості проєкції:

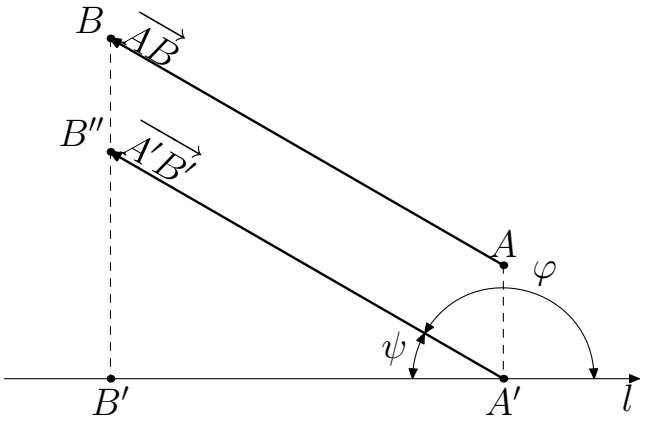

Рис. 2.13. Обчислення проєкції вектора

1. Проєкція суми векторів на вісь дорівнює сумі проєкцій цих векторів на дану вісь. Наприклад,

$$\Pr_l(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \Pr_l \overrightarrow{a} + \Pr_l \overrightarrow{b} + \Pr_l \overrightarrow{c}. \tag{2.11}$$

2. Проєкція добутку вектора $\overrightarrow{a}$ на число λ дорівнює добутку проєкції вектора $\overrightarrow{a}$ на це число λ, тобто

$$\Pr_l(\lambda \overrightarrow{a}) = \lambda \Pr_l \overrightarrow{a}. \tag{2.12}$$

Доведемо першу властивість. Розглянемо суму трьох векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}.$$

За визначенням проєкції вектора на вісь маємо (рис. 2.14):

$$\begin{aligned} \Pr_l \overrightarrow{p} &= |AD|, \quad & \Pr_l \overrightarrow{a} &= |AB|, \\ \Pr_l \overrightarrow{b} &= |BC|, \quad & \Pr_l \overrightarrow{c} &= -|CD|, \end{aligned} \tag{2.13}$$

де $|AD|$, $|AB|$, $|BC|$ і $|CD|$ — довжини відповідних напрямлених відрізків. Звернемо увагу, що проєкція вектора $\overrightarrow{c}$ на вісь l від'ємна.

Точки A, B, C і D визначають напрямлені відрізки $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$, які лежать на осі l (рис. 2.14). Очевидно, що:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

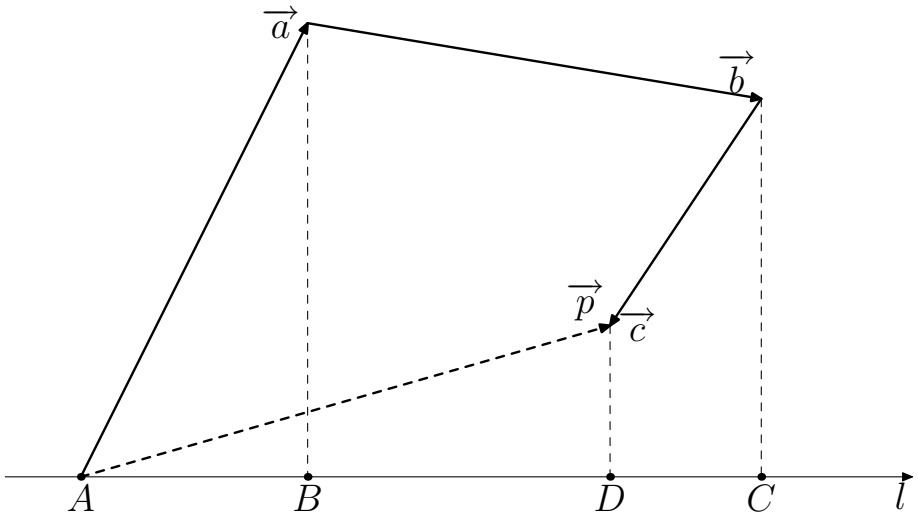

Рис. 2.14. Проєкція суми векторів

Позначимо орт осі l як вектор $\overrightarrow{e}$ (див. стор.37). Тоді, одержимо:

$$|AD|\,\overrightarrow{e} = |AB|\,\overrightarrow{e} + |BC|\,\overrightarrow{e} - |CD|\,\overrightarrow{e} = (|AB| + |BC| - |CD|)\,\overrightarrow{e}.$$

Звідси випливає, що

$$|AD| = |AB| + |BC| - |CD|\,.$$

або, враховуючи (2.13), остаточно маємо:

$$\mathrm{Пр}_l\,\overrightarrow{p} = \mathrm{Пр}_l\,\overrightarrow{a} + \mathrm{Пр}_l\,\overrightarrow{b} + \mathrm{Пр}_l\,\overrightarrow{c},$$

що і треба було довести.

Наслідок 2. *Проєкцією ламаної на вісь є проєкція напрямленого відрізка, що замикає цю ламану.*

Аналогично можна довести і другу властивість.

Завдання для самостійної роботи

Провести вісь l та вектор $\overrightarrow{AB}$, якій має довжину 6 одиниць та утворює з віссю кут $\pi/6$. Побудувати та знайти проєкцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l.

Що зміниться, якщо кут буде дорівнювати $4\pi/6$.

Питання для самоперевірки

1. Що таке вектор, його довжина? Які вектори називаються рівними?

2. Лінійні дії над векторами, їх властивості, правила трикутника та паралелограма.

3. Які вектори називають колінеарними, компланарними?

4. Сформулюйте умову колініарності двох векторів.

5. Що таке кут між векторами?

6. Проекція вектора на вісь та її властивості.

7. Як обчислюється проєкція вектора на вісь? У якому випадку проєкція вектора на вісь дорівнює нулю?

3. Метод координат

3.1. Лінійна залежність

Означення 30. *Лінійною комбінацією векторів* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\ldots$, $\overrightarrow{d}$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$, тобто вираз виду

$$\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} + \quad \ldots \quad + \delta\overrightarrow{d}. \tag{3.1}$$

Числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ називаються *коефіцієнтами лінійної комбінації.*

Зауважимо, що лінійна комбінація це теж вектор.

Означення 31. Система векторів називається *лінійно незалежною*, якщо жоден із векторів системи неможна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів системи.

Означення 32. Система векторів називається *лінійно залежною*, якщо хоча б один із векторів цієї системи можна виразити у вигляді лінійної комбінації інших векторів.

Таким чином, будь-яка система векторів буде або лінійно незалежною або лінійно залежною.

З виразу (2.10) випливає, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то вектор $\vec{a}$ лінійно виражається через вектор $\vec{b}$. Отже *колінеарні вектори лінійно залежні.*

Правильне і зворотне твердження: *якщо два вектори лінійно залежні, то вони колінеарні.*

Насправді, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні, то один з них лінійно виражається через інший. Наприклад, нехай $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Тоді за теоремою 1 (стр.26) ці вектори є колінеарними.

Таким чином, маємо наступну теорему:

Теорема 3. *Для того, щоб два вектори були лінійно залежними необхідно і достатньо, щоб вони були колінеарними.*

З цієї теореми випливає достатня умова лінійної незалежності двох векторів.

Теорема 4. *Якщо два вектори неколінеарні, то вони лінійно незалежні.*

Зауваження 8. Нульовий вектор колінеарен будь-якому вектору. Тому, якщо один з двох векторів є нульовим, то ці вектори лінійно залежні.

Теорема 5. *Для того, щоб три вектори були лінійно залежними необхідно і достатньо, щоб вони були компланарними.*

Доведення. Якщо один із векторів дорівнює нулю, або два вектори з трьох колінеарні, то така система трьох векторів лінійно залежна і теорема доведена.

Необхідність. Нехай три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежні. Це означає, що хоча б один з цих векторів можна виразити через інші, наприклад вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \tag{3.2}$$

Прикладемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ до загального початку. Тоді з рівності (3.2) випливає, що вектор $\vec{c}$ дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\alpha\vec{a}$ і $\beta\vec{b}$ (рис. 3.1). Отже, вони лежать в одній і тій самій площині, тобто компланарні.

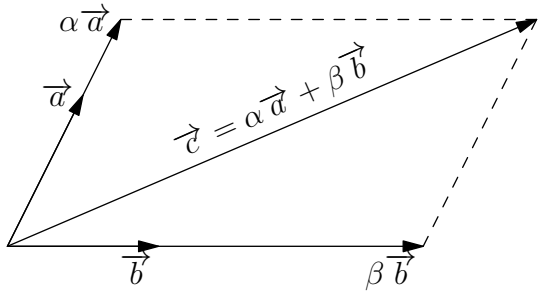

Рис. 3.1. Лінійна залежність компланарних векторів

Достатність. Нехай тепер вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, причому не дорівнюють нулю та попарно неколінеарні. Приведемо їх до спільного початку. На цих векторах можна побудувати паралелограм з діагоналлю, яка збігається з одним із векторів, позначимо його як вектор $\vec{c}$, і зі сторонами, спрямованими вздовж двох інших векторів (рис. 3.1). Тоді за правилом паралелограма отримаємо, що

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Отже, вектор $\vec{c}$ є лінійна комбінація векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Таким чином, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні. Теорему доведено. □

Наслідок 3. *Будь-який із трьох компланарних векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації двох інших.*

З теореми 5 випливає достатня умова лінійної незалежності трьох векторів.

Теорема 6. *Для того, щоб три вектори були лінійно незалежними, вони мають бути некомпланарними.*

Теорема 7. *Будь-які чотири вектори лінійно залежні.*

Доведення. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ не дорівнюють нулю, некомпланарні та попарно неколінеарні. Побудуємо на трьох векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ паралелепіпед з діагоналю, яка дорівнює четвертому вектору $\vec{d}$. Тоді

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

що й доводить їх лінійну залежність. □

Наслідок 4. *Будь-який із чотирьох некомпланарних, попарно неколінеарних векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації інших трьох векторів.*

3.2. Базис та координати вектора

Означення 33. *Базисом* називається лінійно незалежна система векторів, у вигляді лінійної комбінації яких можна уявити будь-який вектор.

Всі вектори, які колінеарні деякому напрямку, задовольняють умову

$$\vec{a} = \lambda\vec{e}, \quad \vec{e} \neq 0,$$

де $\vec{e}$ — напрямний вектор цього напряму.

Отже, всі вектори, що лежать на одній прямій (або на паралельних прямих), лінійно залежні та лінійно виражаються через один із векторів. Таким чином, *кожен ненульовий вектор $\vec{e}$ утворює базис у множині геометричних векторів, колінеарних деякому напрямку.*

З теорем 4 і 5 випливає, що система будь-яких двох відмінних від нуля неколінеарних векторів $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ лінійно незалежна та будь-який із векторів, компланарних векторам $\vec{e_1}$ і $\vec{e_2}$, можна представити у вигляді лінійної комбінації цих векторів:

$$\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}.$$

Тому, *упорядкована пара неколінеарних, відмінних від нуля векторів* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ *утворює базис у множині геометричних векторів, компланарних певній площині.*

Аналогічно, з теорем 6, 7 та наслідка з теореми 7, випливає, що три некомпланарні вектори лінійно незалежні і у вигляді лінійної комбінації цих трьох векторів можна уявити будь-який вектор. Отже, *упорядкована трійка некомпланарних, попарно неколінеарних векторів* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ *утворює базис у множині геометричних векторів.*

Таким чином, будь-який геометричний вектор $\vec{a}$ може бути представлений у вигляді

$$\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}. \tag{3.3}$$

Цей вираз називається *розкладом вектора* $\vec{a}$ *за базисом* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, а числа x_1, x_2, x_3 *координатами вектора* $\vec{a}$ *в базисі* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

Теорема 8. *Розкладання вектора за базисом єдине.*

Доведення. Припустимо, що є два розкладання вектора $\vec{a}$ за базисом

$$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3},$$

тобто

$$\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3},$$
$$\vec{a} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}.$$

Віднімаючи другу рівність від першої, отримаємо таку лінійну комбінацію базисних векторів:

$$(x_1 - y_1)\vec{e_1} + (x_2 - y_2)\vec{e_2} + (x_3 - y_3)\vec{e_3} = 0.$$

Оскільки вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ утворюють базис, всі вони лінійно незалежні і жоден вектор цієї системи не виражається у вигляді лінійної комбінації інших векторі, тому всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю. Звідси випливає, що

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Справді, якщо допустити протилежне, тобто. що хоча б одна з дужок відмінна від нуля, наприклад $x_1 - y_1 \neq 0$, то система векторів $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ буде лінійно залежною, тому що тоді вектор $\vec{e_1}$ буде лінійно виражатися через вектори $\vec{e_2}$ і $\vec{e_3}$.

Теорему доведено. □

Через єдиність розкладання вектора за базисом кожен вектор однозначно представляється трьома числами — координатами вектора:

$$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3).$$

Означення 34. Вектори рівні, якщо рівні їхні координати.

Означення 35. Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину.

Для ортонормованого базису прийнято позначення

$$\vec{e_1} = \vec{\imath}, \quad \vec{e_2} = \vec{\jmath}, \quad \vec{e_3} = \vec{k}.$$

Зауваження 9. Координати a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ у прямокутному базисі $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ збігаються з прямокутними проекціями вектора $\vec{a}$ на відповідні базисні орти $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

3.3. Координати вектора на прямій

Нагадаємо, що *віссю* називається пряма, на який визначено додатний напрям. *Числовою віссю* називається вісь, на який задано початок координат та масштабний відрізок.

Напрям у просторі можна задати вектором.

Означення 36. Вектор, що визначає напрям, називається *напрямним вектором*.

Для задання напряму довжина вектора не має значення, тому зручно скористатися вектором одиничної довжини.

Означення 37. Вектор одиничної довжини називається *одиничним вектором* або *ортом*.

Позначимо орт вектора $\overrightarrow{a}$ як $\overrightarrow{a}^0$. Тоді маємо

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}, \quad |\overrightarrow{a}^0| = 1. \tag{3.4}$$

Звідси випливає

$$\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{a}^0, \tag{3.5}$$

тобто кожен вектор визначається *довжиною вектора* $|\overrightarrow{a}|$ і *напрямом* $\overrightarrow{a}^0$.

Зауваження 10. Щоб знайти орт вектора, потрібно цей вектор поділити на його модуль.

Нехай задана вісь Ox. Додатний напрям осі зручно визначати ортом осі. Позначимо орт осі Ox як вектор $\overrightarrow{i}$. Очевидно, що $\left|\overrightarrow{i}\right| = 1$ (рис.3.2).

Рис. 3.2. Вектор $\vec{a}$ на осі Ox

Розглянемо вектор $\overrightarrow{a}$ з початком в точці A і кінцем в точці B, який лежить на осі Ox. Очевидно, що вектор $\overrightarrow{a}$ визначається напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}. \tag{3.6}$$

Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{i}$ спрямовані вздовж осі Ox, тому колінеарні. Отже, за умовою колінеарності векторів маємо:

$$\overrightarrow{a} = x \cdot \overrightarrow{i}, \tag{3.7}$$

де x — коефіцієнт пропорційності.

З'ясуємо зміст цього коефіцієнту. Знайдемо довжину вектора $\overrightarrow{a}$:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|x \cdot \overrightarrow{i}\right| = |x| \cdot \left|\overrightarrow{i}\right| = |x|. \tag{3.8}$$

Отже, модуль коефіцієнта x дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{a}$.

Далі, якщо вектор $\overrightarrow{a}$ спрямован так саме, що і орт $\overrightarrow{i}$, то коефіцієнт x більший за нуль. Якщо вектор $\overrightarrow{a}$ спрямован протилежно орту $\overrightarrow{i}$, то коефіцієнт x менший за нуль. Таким чином, коефіцієнт x визначає як напрям, так і довжину вектора $\overrightarrow{a}$, тобто повністю визначає вектор $\overrightarrow{a}$ на осі Ox.

Коефіцієнт x називається *координатою вектора* $\overrightarrow{a}$ на осі Ox.

Зауваження 11. Коефіцієнт x дорівнює величині напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$.

Очевидно, що положення довільної точки M числової осі Ox щодо початку координат O однозначно визначається вектором $\overrightarrow{OM}$, прикладенним до початку координат O і кінцем у точці M. Такий вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіус-вектором* точки M. Насправді, напрям вектора $\overrightarrow{OM}$ вказує в якому напряму осі (додатному або від'ємному) щодо точки O зміщена точка M, а довжина вектора $\overrightarrow{OM}$ дорівнює відстані від початку координат до точки M (рис. 3.3).

Рис. 3.3. Радіус-вектор точки M на числовій осі Ox

3.4. Декартові координати на площині

Означення 38. Дві взаємно перпендикулярні числові осі Ox і Oy з загальним початком координат і масштабним відрізком утворюють *прямокутну декартову систему координат на площині.*

Вісь Ox називається *віссю абсцис*, а вісь Oy — *віссю ординат.* Їх орти позначають символами $\vec{i}$ і $\vec{j}$. Модулі ортів $\vec{i}$ і $\vec{j}$ дорівнюють одиниці та вони спрямовані у додатному напряму координатних осей.

Задамо на площині прямокутну декартову систему координат xOy і розглянемо довільний вектор $\overrightarrow{a}$, який компланарний цій площини.

Паралельним перенесенням помістимо точку прикладання вектора $\overrightarrow{a}$ до початку координат O. Кінець вектора $\overrightarrow{a}$ позначимо як точку M (рис. 3.4). Тоді маємо

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}.$$

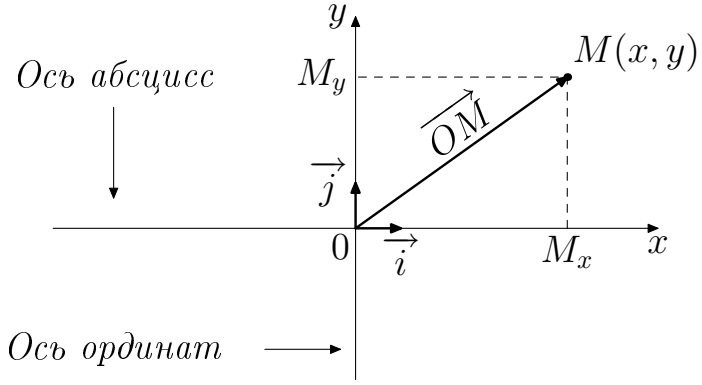

Рис. 3.4. Координати вектора на площині

Побудуємо прямокутні проєкції вектора $\overrightarrow{OM}$ на осі координат. Для цього опустимо з кінця вектора $\overrightarrow{OM}$ перпендикуляри на осі Ox і Oy, основи яких позначимо літерами M_x і M_y відповідно. Одержані відрізки OM_x і OM_y визначають прямокутні проєкції вектора $\overrightarrow{OM}$ на відповідні осі координат (рис.3.4).

Означення 39. Проєкції вектора на відповідні осі координат називаються *координатами вектора.*

Позначимо відповідні координати вектора $\overrightarrow{a}$ числами a_x, a_y. То, що вектор $\overrightarrow{a}$ має координати a_x, a_y позначають так

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y).$$

Отже, маємо

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = OM_x, \tag{3.9}$$

$$a_y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = OM_y. \tag{3.10}$$

Розглянемо найпростіші приклади. Вектор $\vec{i}$ — орт осі Ox. Його довжина дорівнює одиниці, він спрямован вздовж осі Ox і не має складової вздовж осі Oy, тому

$$\vec{i} = (1, 0).$$

Аналогично

$$\vec{j} = (0, 1).$$

З прямокутника OM_xMM_y за правилом паралелограма отримаємо

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}. \tag{3.11}$$

Вираз (3.11) називається *розкладом вектора* $\overrightarrow{OM}$ *на складові* $\overrightarrow{OM_x}$ і $\overrightarrow{OM_y}$.

Розглянемо вектор $\overrightarrow{OM_x}$. Цей вектор спрямовано вздовж осі Ox, тобто паралелено орту $\vec{i}$. Тоді маємо

$$\overrightarrow{OM_x} = x \cdot \vec{i},$$

де x — коефіцієнт пропорційності.

З'ясуємо зміст цього коефіцієнту. Довжина вектора $\overrightarrow{OM_x}$ дорівнює

$$\left|\overrightarrow{OM_x}\right| = \left|x \cdot \vec{i}\right| = |x| \cdot \left|\vec{i}\right| = |x|,$$

тобто модуль коефіцієнта x дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM_x}$.

Далі, якщо вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює гострий кут з віссю Ox, то вектор $\overrightarrow{OM_x}$ спрямовано у додатному напряму осі Ox і коефіцієнт x більший за нуль.

Якщо вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює тупий кут з віссю Ox, то вектор $\overrightarrow{OM_x}$ спрямовано у від'ємному напряму та коефіцієнт x менший за нуль. Таким чином, коефіцієнт x є проєкція вектора $\overrightarrow{OM}$ на вісь Ox, тобто x є координатою вектора $\overrightarrow{OM}$. Звернемо увагу, що вектор $\overrightarrow{OM_x}$ не має складових удовж осей Oy та Oz.

Отже,

$$\overrightarrow{OM_x} = a_x\vec{i} = (a_x, 0)\,.$$

Аналогічно розглядається складова $\overrightarrow{OM_y}$:

$$\overrightarrow{OM_y} = a_y\vec{j} = (0, a_y)\,.$$

Таким чином, маємо таке розкладання вектора $\overrightarrow{a}$ за ортами координатної системи:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}. \tag{3.12}$$

або

$$\overrightarrow{OM} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \tag{3.13}$$

Вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$, що задають напрям осей координат, називаються *базисними векторами*, а вираз (3.13) — *розкладанням вектора* $\overrightarrow{OM}$ *за базисом* $\vec{i}$, $\vec{j}$.

З виразу (3.13) випливає, що *вектор* $\overrightarrow{OM}$ *однозначно визначається своїми координатами* a_x *та* a_y.

Виразимо довжину вектора $\overrightarrow{OM}$ через його координати. З прямокутника OM_xMM_y за теоремою Піфагора отримаємо

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{OM_x^2 + OM_y^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{3.14}$$

Нехай вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$ утворює з координатними осями відповідні кути α, β, які називаються *напрямними*. Тоді за означенням проєкції маємо

$$a_x = OM_x = |\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,$$
$$a_y = OM_y = |\overrightarrow{OM}|\cos\beta.$$

Величини

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{OM}\right|},$$

називаються *напрямними косинусами* вектора $\overrightarrow{OM}$.

Знайдемо орт вектора $\overrightarrow{OM}$, для цього поділимо вектор $\overrightarrow{OM}$ на його модуль $\left|\overrightarrow{OM}\right|$:

$$\overrightarrow{OM}^0 = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{OM_x}{|\overrightarrow{OM}|}\,\vec{i} + \frac{OM_y}{|\overrightarrow{OM}|}\,\vec{j} = \\ = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}.$$

Зауваження 12. Напрямні косинуси вектора є координатами його орта.

Тому, що

$$\left|\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = 1,$$

то маємо умову, яку задовільняють напрямні кути вектора:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Виберемо довільну точку площини, позначимо її літерою M. Положення точки M щодо початку координат O однозначно визначається вектором $\overrightarrow{OM}$, закріпленим у точці O. Справді, вектор $\overrightarrow{OM}$ вказує на якій відстані і у якому напряму від початку координат знаходиться точка M.

Означення 40. Вектор $\overrightarrow{OM}$, прикладений до початку координат O з кінцем у точці M, називається *радіус-вектором точки* M.

Таким чином, радіус-вектор точки задає положення точки тому координати точки збігаються з координатами її радіус-вектора і можна дати таке означення координат точки.

Означення 41. *Координатами* x, y *точки* M називаються проєкції її радіус–вектора $\overrightarrow{OM}$ на відповідні координатні осі.

3.5. Декартові координати у просторі

Означення 42. Три взаємно перпендикулярні числові осі Ox, Oy, Oz з загальним початком координат і масштабним відрізком, утворюють *прямокутну декартову систему координат у просторі* (див. рис.3.5).

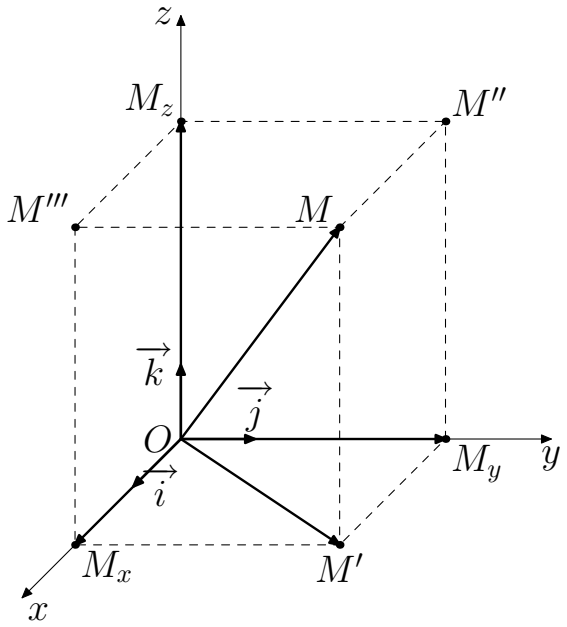

Рис. 3.5. Координати у просторі

Вісь Ox називається *віссю абсцис*, вісь Oy — *віссю ординат* і вісь Oz — *віссю аплікат*. Кожні дві координатні осі визначають *координатну площину*. Таким чином маємо три взаємно перпендикулярні *координатні площини*: xOy, yOz, zOx.

Орти осей позначають так: вектор $\vec{i}$ — орт осі Ox, вектор $\vec{j}$ — орт осі Oy та вектор $\vec{k}$ — орт осі Oz. Їх модулі дорівнюють одиниці та вони спрямовані у додатному напряму координатних осей. Орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворюють прямокутний базис координатної системи.

Розглянемо довільний вектор $\overrightarrow{a}$. Прикладемо вектор $\overrightarrow{a}$ до початку координат O, кінець вектора $\overrightarrow{a}$ позначимо як точку M. Тоді маємо

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}.$$

Побудуємо проєкції вектора $\overrightarrow{OM}$ на осі координат. Для цього проведемо через точку M три площини, які перпендикулярні координатним осям Ox, Oy, Oz. Точки перетину цих площин з осями координат позначимо відповідно через M_x, M_y, M_z. Одержані відрізки OM_x, OM_y і OM_z визначають прямокутні проєкції вектора $\overrightarrow{OM}$ на відповідні осі координат.

Означення 43. Проєкції вектора $\overrightarrow{a}$ на відповідні осі координат називаються *координатами вектора*.

Позначимо відповідні координати вектора $\overrightarrow{a}$ числами a_x, a_y, a_z. То, що вектор $\overrightarrow{a}$ має координати a_x, a_y, a_z позначають так

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Отже, маємо

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = OM_x, \tag{3.15}$$

$$a_y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = OM_y, \tag{3.16}$$

$$a_z = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{a} = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} = OM_z. \tag{3.17}$$

Розглянемо деякі прості приклади. Вектор $\vec{i}$ — орт осі Ox. Його модуль дорівнює одиниці і він не має складових удовж осей Oy та Oz, тому

$$\vec{i} = (1, 0, 0).$$

Аналогично маємо

$$\vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

З рис.3.5 випливає таке розкладання вектора $\overrightarrow{a}$ на складові:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}. \tag{3.18}$$

Розглянемо вектор $\overrightarrow{OM_x}$. Цей вектор спрямовано вздовж осі Ox, тобто паралелено орту $\vec{i}$. Тоді маємо

$$\overrightarrow{OM_x} = x \cdot \vec{i},$$

де x — коефіцієнт пропорційності.

З'ясуємо зміст цього коефіцієнту. Довжина вектора $\overrightarrow{OM_x}$ дорівнює

$$\left|\overrightarrow{OM_x}\right| = \left|x \cdot \vec{i}\right| = |x| \cdot \left|\vec{i}\right| = |x|,$$

тобто модуль коефіцієнта x дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM_x}$.

Далі, якщо вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює гострий кут з віссю Ox, то вектор $\overrightarrow{OM_x}$ спрямовано у додатному напряму осі Ox і коефіцієнт x більший за нуль. Якщо вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює тупий кут з віссю Ox, то вектор $\overrightarrow{OM_x}$ спрямовано у від'ємному напряму та коефіцієнт x менший за нуль. Таким чином,

коефіцієнт x є проєкція вектора $\overrightarrow{OM}$ на вісь Ox, тобто x є координатою вектора $\overrightarrow{OM}$. Звернемо увагу, що вектор $\overrightarrow{OM_x}$ не має складових удовж осей Oy та Oz.

Отже,

$$\overrightarrow{OM_x} = a_x\vec{i} = (a_x, 0, 0)\,.$$

Аналогічно розглядаються інші складові вектора $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM_y} = a_y\vec{j} = (0, a_y, 0)\,,$$
$$\overrightarrow{OM_z} = a_z\vec{k} = (0, 0, a_z)\,.$$

Таким чином, маємо таке розкладання вектора $\overrightarrow{a}$ за ортами координатної системи:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}. \tag{3.19}$$

Довжина вектора $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{3.20}$$

Нехай вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$ утворює з координатними осями відповідні кути α, β, γ, які називаються *напрямними* (рис.3.6). Тоді за означенням проєкції маємо

$$a_x = OM_x = |\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,$$
$$a_y = OM_y = |\overrightarrow{OM}|\cos\beta,$$
$$a_z = OM_z = |\overrightarrow{OM}|\cos\gamma.$$

Величини

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$$

називаються *напрямними косинусами* вектора $\overrightarrow{OM}$.

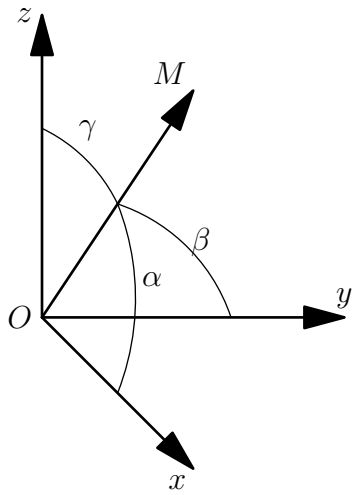

Рис. 3.6. Напрямні кути

Знайдемо орт вектора $\overrightarrow{OM}$, для цього поділимо вектор $\overrightarrow{OM}$ на його модуль $\left|\overrightarrow{OM}\right|$:

$$\overrightarrow{OM}^0 = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{\overrightarrow{OM_x}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} + \frac{\overrightarrow{OM_y}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} + \frac{\overrightarrow{OM_z}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} =$$

$$= \frac{a_x}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\,\vec{i} + \frac{a_y}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\,\vec{j} + \frac{a_z}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\,\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

Зауваження 13. Напрямні косинуси вектора є координатами його орта.

Тому, що

$$\left|\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = 1,$$

то маємо умову, яку задовільняють напрямні кути вектора:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад 5. Знайти довжину і напрям вектора $\vec{a} = (1, -2, 3)$.

Розв'язання.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

□

Отже, *задавши координати вектора, завжди можна визначити його довжину та напрям, тобто сам вектор.*

Положення будь–якої точці M визначається її *радіус–вектором* $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат O, а кінець — з точкою M.

Означення 44. *Координатами x, y, z точки M* називаються проєкції її радіус–вектора $\overrightarrow{OM}$ на відповідні координатні осі.

То що точка M має координати x, y, z позначається так: $M(x, y, z)$.

3.6. Дії над векторами в координатній формі

3.6.1. Рівність векторів

Два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні, якщо рівні їх координати, і навпаки, якщо рівні координати векторів, то ці вектори рівні. Отже,

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

3.6.2. Множення вектора на число

Помножимо вектор

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

на число λ:

$$\lambda\vec{a} = \lambda\,(a_x, a_y, a_z) = \lambda\left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right) = \lambda a_x\vec{\imath} + \lambda a_y\vec{\jmath} + \lambda a_z\vec{k} =$$
$$= (\lambda a_x)\vec{\imath} + (\lambda a_y)\vec{\jmath} + (\lambda a_z)\vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Таким чином, *щоб помножити вектор на число, потрібно помножити на це число всі його координати.*

3.6.3. Додавання векторів

Додамо до вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

вектор

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}.$$

Тоді одержимо:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = \\ = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} + b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k} = \\ = (a_x + b_x)\vec{\imath} + (a_y + b_y)\vec{\jmath} + (a_z + b_z)\vec{k} = \\ = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).\end{aligned}$$

Таким чином, *щоб скласти два вектори, потрібно скласти відповідні координати цих векторів.*

Приклад 6. Знайти рівнодіючу $\vec{F}$ векторів $\vec{a} = (1, -2, 3)$ і $\vec{b} = (4, 5, -6)$.

Розв'язання. Рівнодіюча двох векторів дорівнює сумі цих векторів:

$$\vec{F} = \vec{a} + \vec{b} = (1, -2, 3) + (4, 5, -6) = (1 + 4, -2 + 5, 3 - 6) = (5, 3, -3).$$

□

3.6.4. Координати вектора, що задані двома точками

Нехай є дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Дві точки визначають напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ відносно базису $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

Враховуючи, що кожна точка визначається власним радіус-вектором, за правилом трикутника додавання векторів маємо (рис. 3.7):

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Таким чином, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ дорівнює різниці векторів $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{OM_1}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

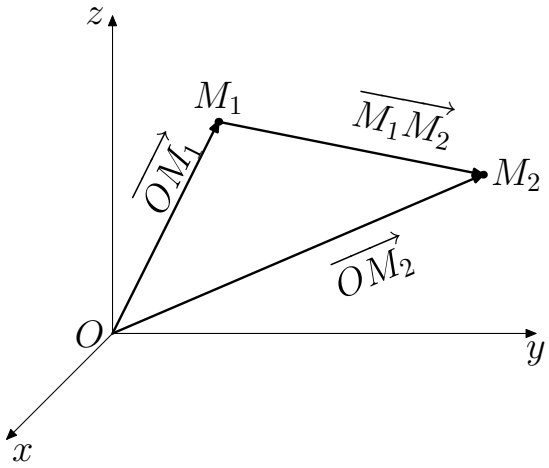

Рис. 3.7. Координати вектора

Вектори $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ є радіус–векторами точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тому

$$\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k},$$

Тоді одержимо

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}\right) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k} =$$
$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (3.21)$$

Таким чином, *щоб знайти координати вектора, заданого двома точками, потрібно з координат кінцевої точки відняти координати його початкової точки.*

Приклад 7. Знайти відстань між двома точками $M(1, -2, 3)$ і $N(4, 5, -6)$ та напрям прямої, що їх з'єднує.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M) = (4 - 1, 5 - (-2), -6 - 3) = (3, 7, -9).$$

Відстань між точками M і N дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-9)^2} = \sqrt{9 + 49 + 81} = \sqrt{139}.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\cos\alpha = \frac{MN_x}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{3}{\sqrt{139}},$$
$$\cos\beta = \frac{MN_y}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{7}{\sqrt{139}},$$
$$\cos\gamma = \frac{MN_z}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{-9}{\sqrt{139}}.$$

□

3.7. Колінеарність векторів

Нагадаємо, що вектори, які лежать на одній і тій самій прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними.*

За умовою колінеарності (2.10) якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні та вектор $\vec{b} \neq 0$, то існує таке число λ, що

$$\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}. \tag{3.22}$$

Нехай вектори

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \text{і} \quad \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

колінеарні. Тоді враховуючи правило множення вектора на число

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) = \lambda \overrightarrow{b} = \lambda(b_x, b_y, b_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)$$

і умову рівності векторів, з (3.22) одержимо

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z. \tag{3.23}$$

Звідси випливає умова колінеарності у координатній формі:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda. \tag{3.24}$$

Таким чином, *якщо вектори колінеарні, то їх координати утворюють пропорцію. І навпаки, якщо координати векторів утворюють пропорцію, то вектори колінеарні.*

Приклад 8. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = (2, -1, 3)$ і $\vec{b} = (-6, 3, -9)$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умови колінеарності (3.24):

$$\frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9}.$$

Координати векторів утворюють пропорцію, тому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. □

3.8. Ділення відрізка у даному відношенні

Нехай дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ обмежують відрізок M_1M_2. Треба знайти таку точку $M(x, y, z)$, яка буде ділити відрізок M_1M_2 в даному відношенні, тобто відношення величин відрізків M_1M і MM_2 дорівнює даному числу λ:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \tag{3.25}$$

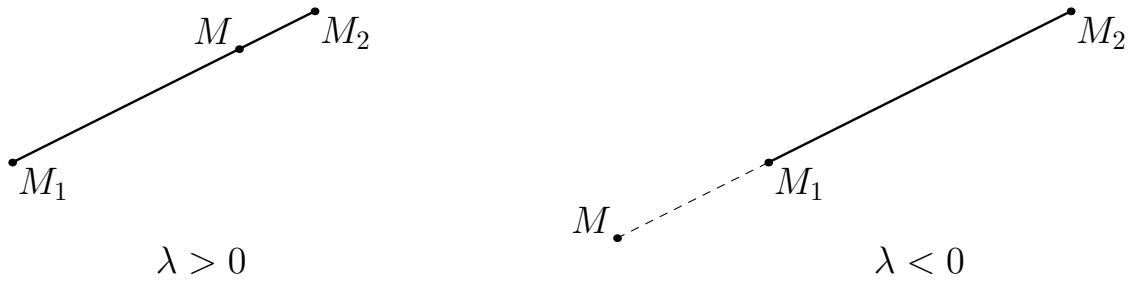

Рис. 3.8. Ділення відрізка

Ці відрізки зображені на рис. 3.8. Число λ може бути як додатним, так і від'ємним. Якщо $\lambda = 0$, тоді, як випливає з формули (3.25), точка M збігається з точкою M_1. Звернемо увагу на те, що точка M не може збігатися с точкою M_2, тому $\lambda \neq -1$.

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{MM_2}$ колінеарні, тому,

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}.$$

Цієї векторної рівності відповідає три рівняння:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \tag{3.26}$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \tag{3.27}$$

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \tag{3.28}$$

Звідси випливає, що точка M має такі координати:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{3.29}$$

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, то за формулами (3.29) одержимо координати середини відрізка M_1M_2:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3.30}$$

Приклад 9. Знайти середину відрізка MN, якщо $M(0; 1; 2)$ і $N(-3; 1; 2)$.

Розв'язання. За формулами (3.30) одержимо

$$x = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{0 + (-3)}{2} = -\frac{3}{2},$$

$$y = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1,$$

$$z = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2.$$

Отже, точка $A\left(-\frac{3}{2}; 1; 2\right)$ ділить відрізок MN навпіл. □

3.9. Розкладання вектора

За правилом паралелограма можна додавати вектори. Тобто, якщо на двох векторах побудувати паралелограм, тоді діагональ паралелограма можна уявити як суму цих векторів. Але це правило можна розглядати і як розклад одного вектора по двох іншім. Розглянемо такий приклад.

Приклад 10. Розкласти вектор $\overrightarrow{c} = (2; 6)$ за векторами $\overrightarrow{a} = (2; 0)$ і $\overrightarrow{b} = (3; 3)$.

Розв'язання. На площині xOy побудуємо вектори $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ (рис. 3.9).

На цих векторах побудуємо паралелограм, сторони якого паралельні векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, а діагональ збігається з вектором $\overrightarrow{c}$. Для цього через кінцеві точки вектора $\overrightarrow{c}$ проведемо прямі, які паралельні векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.

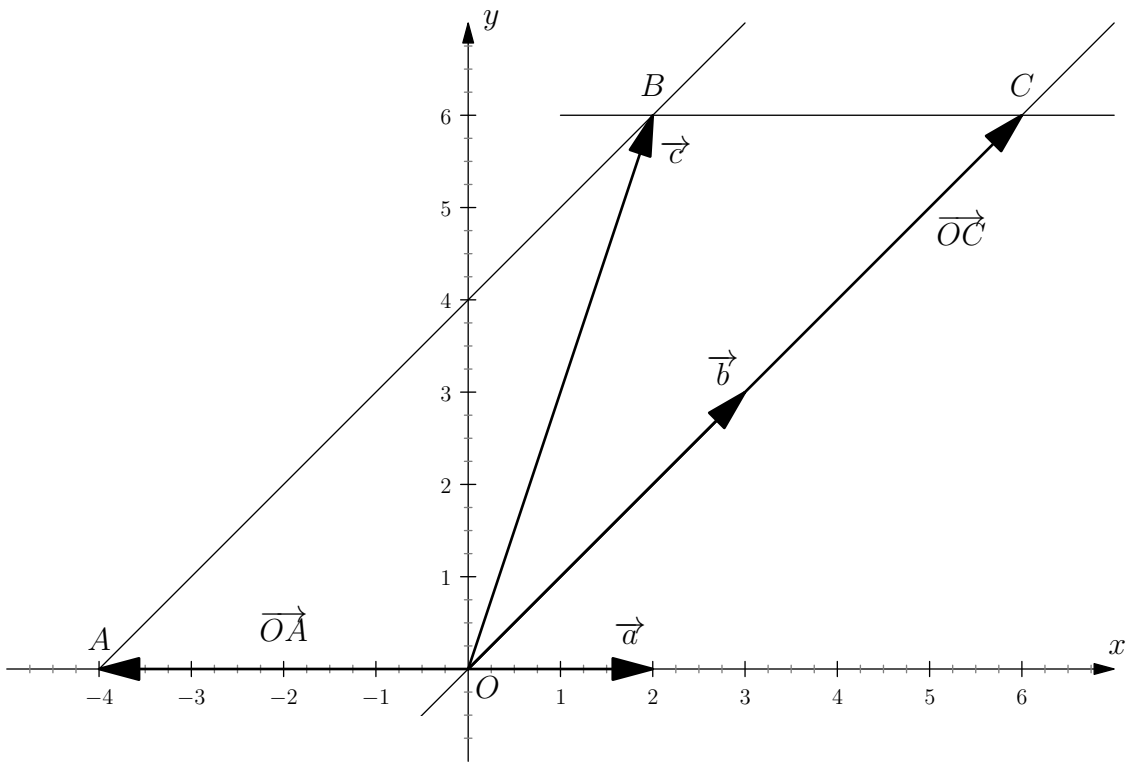

Рис. 3.9. Розкладання вектора

Позначимо точки перетину прямих як O, A, B і C. Очевидно, що

$$O = (0,0), \quad A = (-4,0), \quad B = (2,6), \quad C = (6,6).$$

З паралелограма $OABC$ випливає, що

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.$$

Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{OA}$ мають протилежні напрямі та вектор $\overrightarrow{OA}$ має вдвічі більшу довжину ніж вектор $\overrightarrow{a}$, тому

$$\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{a}.$$

З рисунка також випливає, що

$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{b}.$$

Отже, маємо таке розкладання вектора $\overrightarrow{c}$ за векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = -2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}. \tag{3.31}$$

Цю задачу можна розв'язати аналітично. Уявимо вектор $\overrightarrow{c}$ у вигляді *лінійної комбінації векторів* $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}. \tag{3.32}$$

Тут числа α і β називаються *коефіцієнтами лінійної комбінації.*

Запишемо рівність (3.32) у координатній формі:

$$(2;6) = \alpha(2;0) + \beta(3;3).$$

Якщо прирівняти відповідні координати у лівій та правій частинах рівності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів α і β

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 2, \\ \qquad 3\beta = 6. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $\alpha = -2$, $\beta = 2$. Підставляючи знайдені коефіцієнти у (3.32), одержимо теж саме розкладання (3.31).

Зауваження 14. Побудувати на площині розкладання вектора $\overrightarrow{c}$ по двох векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ можна тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ неколінеарні.

□

Приклад 11. Написати розкладання вектора $\overrightarrow{q} = (2;7;5)$ по векторах

$$\overrightarrow{a} = (1;0;1), \quad \overrightarrow{b} = (1;-2;0), \quad \overrightarrow{c} = (0;3;1).$$

Розв'язання. Розкласти вектор $\overrightarrow{q}$ по векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ це означає представити вектор $\overrightarrow{q}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{q} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}.$$

Тут α, β, γ — коефіцієнти лінійної комбінації.

Підставимо координати векторів у цю рівність:

$$\alpha(1;0;1) + \beta(1;-2;0) + \gamma(0;3;1) = (2;7;5).$$

Звідси, прирівнюючи координати векторів у правій та лівій частинах рівності, одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \qquad = 2, \\ \quad -2\beta + 3\gamma = 7, \\ \alpha \qquad + \gamma = 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \|A_3 - A_1 \to A_3\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \|A_3 \leftrightarrow A_2\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \|A_3 - 2A_2 \to A_3\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Відновимо за перетвореною матрицею систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -\beta + \gamma = 3, \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

Звідси випливає:

$$\gamma = 1, \quad \beta = -2, \quad \alpha = 4.$$

Отже, маємо таке розкладання вектора $\overrightarrow{q}$ по векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c}.$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти початок вектора $\overrightarrow{a} = (2; -3; -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $B(1; -1; 2)$.

2. Перевірити колінеарність векторів

$$\vec{a} = -6\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

3. Знайти орт вектора $\overrightarrow{a} = (6; -2; -3)$.

4. Знайти середину відрізка AB, якщо $A(2; 3; 6)$ та $B(5; 2; 8)$.

5. Знайти розкладання вектора $\overrightarrow{c} = (11; -6; 5)$ по векторах $\overrightarrow{p} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{q} = (-1; 1; -2)$, $\overrightarrow{c} = (2; 1; -3)$.

3.10. Інші системи координат

3.10.1. Циліндричні координати

Виберемо в просторі якусь площину P і зафіксуємо в ній полярну систему координат (ρ, φ). Через полюс O перпендикулярно площині P проведемо числову вісь Oz, причому для вимірювання довжин у просторі виберемо той самий масштабний відрізок, що використовується в полярній системі координат.

Розглянемо прямокутні проекції M_z і M_P точки M на вісь Oz і на площину P. Точка M_P як точка площини P має полярні координати (ρ, φ). Точка M_z як точка осі Oz має координату z (рис.3.10).

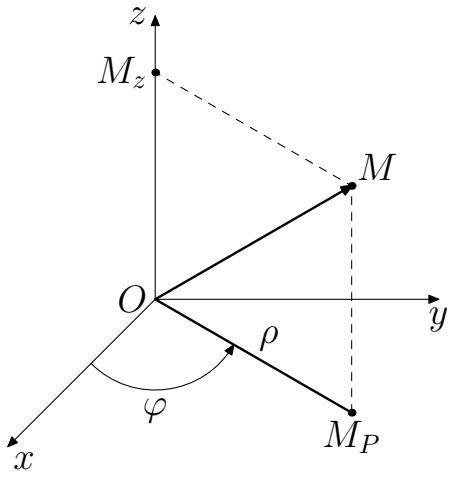

Рис. 3.10. Циліндричні координати

Означення 45. *Циліндричними координатами* точки M у просторі називаються три числа ρ, φ і z, причому передбачається, що

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Факт, що точка M має циліндричні координати ρ, φ і z позначається символом $M(\rho, \varphi, z)$.

Таким чином, циліндричні координати складаються з двох полярних координат ρ, φ та однієї декартової — z.

З циліндричною системою координат природним чином зв'язується прямокутна декартова: помістимо початок декартової системи до полюсу циліндричної системи, вісь абсцис декартової системи направимо вздовж полярної осі,

а вісь аплікат декартової системи вздовж осі Oz циліндричної системи. Перехід від циліндричних координат точки M до декартових визначається співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{3.33}$$

3.10.2. Сферичні координати

Сферичні координати іноді називають полярними координатами у просторі. Основними елементами у цій системі є: точка O (*полюс*), вісь Oz (*полярна вісь*) і напівплощина Ozx, що примикає до полярної осі Oz (*полярна напівплощина*) (рис.3.11).

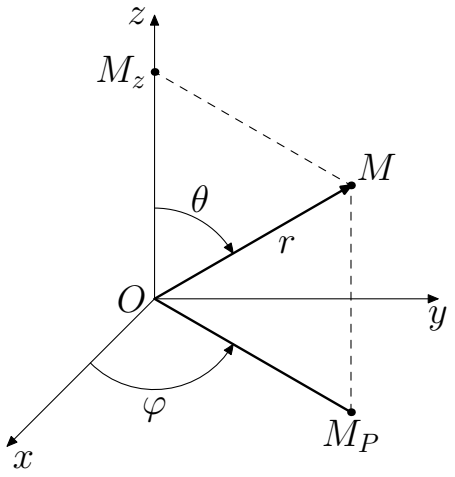

Рис. 3.11. Сферичні координати

Нехай M — довільна точка простору. Позначимо через r довжину радіус–вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M, через θ — кут, який утворює радіус–віктор $\overrightarrow{OM}$ з полярною віссю Oz, і через φ двогранний кут, що складається полярною напівплощиною Ozx з напівплощиною, що примикає до полярної осі Oz і проходить через точку M.

Кут φ будемо відлічувати від полярної напівплощини Ozx, причому додатним будемо важати такий поворот, який із кінця полярної осі Oz будемо бачити проти руху годинникової стрілки.

Означення 46. *Сферичними координатами* точки M у просторі називаються три числа r, φ і θ. Число r називається радіусом, число φ — довготою, число θ — широтою. При цьому передбачається, що

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Те, що точка M має сферичні координати ρ, φ і z позначається символом $M(r, \varphi, \theta)$.

Зв'яжемо зі сферичною системою координат прямокутну декартову систему $Oxyz$: помістимо початок координат декартової системи в полюс, аплікату сумістимо з полярною віссю Oz, вісь абсцис (вісь Ox) помістимо в полярну напівплощину Ozx. Очевидні формули

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{3.34}$$

3.11. Перетворення координат

Координати однієї і тієї ж точки або вектора у різних системах координат різні. Встановимо формули, за якими перетворюються координати під час переходу від однієї прямокутної декартової системи координат до іншої. Будемо вважати, що відомо взаємне розташування старої та нової систем координат.

3.11.1. Паралельний зсув осей координат

Розглянемо дві прямокутні декартові системи координат: стару та нову. Осі старої системи координат позначимо через Ox, Oy, Oz, а осі нової — через $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$.

Нехай нова система координат відрізняється від старої тільки положенням початку координат, а напрями осей в обох системах одні й ті самі. Тоді положення нової системи щодо старої однозначно задаються координатами її початку координат O' у старій системі, які позначимо через a, b, c, тобто маємо $O'(a, b, c)$.

Тому, що напрями координатних осей обох систем збігаються, то відповідні орти також збігаються. Орти координатних осей обох систем позначимо через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Оскільки геометричні вектори є вільними, вони не залежать від положення їх точок прикладання. Отже, *координати векторів не змінюються при паралельному перенесенні координатної системи.*

Виберемо будь-яку точку M. Позначимо координати цієї точки у старій системі через x, y, z, а через x', y', z' — у новій системі.

Встановимо зв'язок між старими та новими координатами точки M. Очевидно, що

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{3.35}$$

Враховуючи, що вектори $\overrightarrow{OM}$ та $\overrightarrow{O'M}$ є радіус-векторами точки M відповідно в старій і новій системах координат, маємо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \\
\overrightarrow{OM'} &= x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}, \\
\overrightarrow{OO'} &= a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}.
\end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази до (3.35), отримаємо шукані *формули перетворення координат точки при паралельному перенесенні координатної системи*:

$$x = a + x', \tag{3.36}$$
$$y = b + y', \tag{3.37}$$
$$z = c + z'. \tag{3.38}$$

Аналогічно, для випадку координат на площині маємо

$$x = a + x', \tag{3.39}$$
$$y = b + y'. \tag{3.40}$$

3.11.2. Поворот осей координат

Розглянемо тепер випадок, коли змінюються напрями ортів координатних осей. Нагадаємо, що паралельне перенесення системи координат не змінює геометричний вектор, тому *будь-яка зміна орта зводиться до його повороту.*

Нехай початки нової та старої систем координат збігаються. Позначимо осі старої системи через Ox, Oy, Oz, а осі нової — через Ox', Oy', Oz'.

Орти осей координат старої системи координат позначимо через $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, а орти нової системи як $\vec{\imath'}$, $\vec{\jmath'}$, $\vec{k'}$.

Нехай орти нової системи $\vec{\imath'}$, $\vec{\jmath'}$, $\vec{k'}$ мають наступні координати щодо старої

системи:

$$\vec{i'} = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) = \alpha_{11}\vec{\imath} + \alpha_{21}\vec{\jmath} + \alpha_{31}\vec{k}, \tag{3.41}$$

$$\vec{j'} = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) = \alpha_{12}\vec{\imath} + \alpha_{22}\vec{\jmath} + \alpha_{32}\vec{k}, \tag{3.42}$$

$$\vec{k'} = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) = \alpha_{13}\vec{\imath} + \alpha_{23}\vec{\jmath} + \alpha_{33}\vec{k}. \tag{3.43}$$

Тут для зручності координати ортів позначені величинами з індесами α_{ls}, причому перший індекс l вказує на номер координати орта нової системи координат, а другий індекс s вказує на номер цього орта.

Очевидно, що величини α_{ls} — це напрямні косинуси s–го орта нової системи щодо ортів старої системи.

Розглянемо довільний вектор $\vec{a}$, його координати щодо старої та нової систем позначимо як x, y, z і x', y', z' відповідно. Тоді маємо

$$\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}. \tag{3.44}$$

Підставляючи сюди замість ортів $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ їх вирази через $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ і порівнюючи коефіцієнти в обох частинах при $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, отримаємо формули, що виражають старі координати вектора $\vec{a}$ через нові:

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'. \end{cases} \tag{3.45}$$

Якщо потрібно знайти нові координати вектора через старі, то треба розв'язати цю лінійну систему (3.45).

Зауважимо, що стара та нова системи координат рівноправні, тому можна було поміняти місцями стару та нову систему, тобто розкладати орти старої системі за ортами нової. Таким чином, система (3.45) завжди повинна мати єдине рішення. Це означає, що визначник

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля.

З іншого боку, рівність нуля цього визначника означала б лінійну залежність ортів $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$, що неможливо за визначенням базисних векторів.

Розглянемо залежність між старими і новими координатами будь-якої точки M. Положення будь-якої точки M однозначно задається її радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Тому координати точки M перетворюються за тими ж формулами (3.45), як і координати вектора $\overrightarrow{OM}$.

Для випадку координат на площині матимемо аналогічні формули перетворення координат вектора:

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y', \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'. \end{cases} \tag{3.46}$$

Зауваження 15. До цього моменту ніде не обговорювалося — яку орієнтацію мають стара та нова системи координат: праву чи ліву. Саме від цих умов залежить, як саме обчислювати напрямні косинуси ортів.

Зауважимо, що на площині можливий лише один кут повороту, отже, напрямні косинуси будь-якого вектора пов'язані між собою. Позначимо кут між векторами $\vec{\imath}$ і $\vec{\imath'}$, що відраховується у напрямку найкоротшого повороту від осі Ox до осі Oy, через φ. Нехай на площині і старі, і нові системи — праві. Тоді кут між векторами $\vec{\jmath}$ і $\vec{\jmath'}$ також дорівнюватиме φ. Тому старі і нові системи можуть бути поєднані шляхом повороту на кут φ довкола початку координат O (див. рис. 3.12). Таким чином маємо

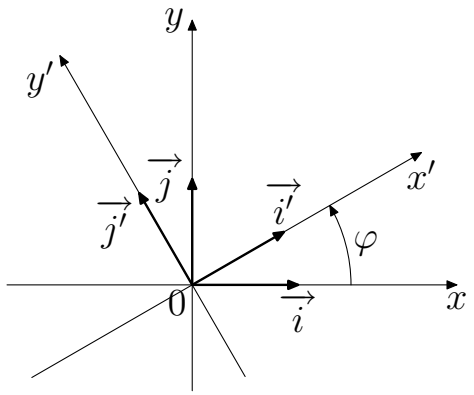

Рис. 3.12. Поворот осей координат на площині

$$\alpha_{11} = \cos\left(\widehat{\vec{i}'\vec{i}}\right) = \cos\varphi,$$
$$\alpha_{12} = \cos\left(\widehat{\vec{i}'\vec{j}}\right) = \cos\left(\pi/2 + \varphi\right) = -\sin\varphi,$$
$$\alpha_{21} = \cos\left(\widehat{\vec{j}'\vec{i}}\right) = \cos\left(\pi/2 - \varphi\right) = \sin\varphi,$$
$$\alpha_{22} = \cos\left(\widehat{\vec{j}'\vec{j}}\right) = \cos\varphi.$$

Враховуючи ці співвідношення, з (3.46) отримаємо формули перетворення координат при повороті системи координат навколо початку на кут φ

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \tag{3.47}$$

Розв'язуя систему (3.47) відносно нових координат x', y', одержимо:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \tag{3.48}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається лінійною комбінацією векторів?

2. Яка система векторів називається лінійно незалежною? Лінійно залежною?

3. Сформулюйте необхідні та достатні умови лінійної незалежності двох ненулевих векторів.

4. Сформулюйте необхідні та достатні умови лінійної незалежності трьох ненулевих векторів.

5. Що називається базисом системи векторів? Як виразити вектор через вектори базису?

6. Що таке координати вектора?

7. Як виконуються лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами у деякому базисі?

8. Що таке напрямний вектор?

9. Що таке орт вектора?

10. Що таке напрямні кути? Як визначаються напрямні косинуси?

11. Що таке радіус-вектор точки?

12. Сформулюйте умову колінеарності двох векторів, що задани своїми координатами.

13. Формула ділення відрізка у даному співвідношенні.

14. Що таке циліндрична система координат.

15. Що таке сферична система координат.

16.Як перетворюються координати вектора при паралельном зсуві системи координат? При повороті системи координат?

4. Добутки векторів

4.1. Скалярний добуток векторів

4.1.1. Означення скалярного добутку

Означення 47. *Скалярним добутком* двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Позначається скалярний добуток як $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ або $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$.

Таким чином,

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right). \tag{4.1}$$

Зауваження 16. Для нульового вектора не визначено напрям, тому формула (4.1) має сенс, коли обидва вектора відрізняються від нуля і можна визначити кут між векторами. Довизначемо скалярний добуток двох векторів: *будемо вважати, що*

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0,$$

коли хоча б один з векторів дорівнює нулю.

Нагадаємо, що проєкція вектора на вісь дорівнює добутку довжині вектора на косинус кута між напрямами вектора та осі, тобто

$$\mathrm{Пр}_{\vec{a}}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) \quad \text{або} \quad \mathrm{Пр}_{\vec{b}}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}).$$

Тоді одержимо, що

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|\,\mathrm{Пр}_{\vec{a}}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\,\mathrm{Пр}_{\vec{b}}\,\overrightarrow{a}. \tag{4.2}$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з цих векторів, помноженому на проєкцію іншого вектора на вісь, співнаправлену з першим вектором.

4.1.2. Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток двох векторів незалежить від порядку множників (комутативний закон), тобто

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right). \tag{4.3}$$

2. Чисельний множник можна виносити за знак скалярного добутку:

$$\left(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right). \tag{4.4}$$

3. Виконується дистрибутивний закон множення відносно додавання, тобто при скалярному множенні суми векторів на вектор можна «розкрити дужки»:

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right). \tag{4.5}$$

4. Скалярний добуток векторів додатно–визначений:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \geqslant 0, \tag{4.6}$$

причому $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) > 0$, якщо $\overrightarrow{a} \neq 0$, і $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$, якщо $\overrightarrow{a} = 0$.

Доведення. 1. Перша властивість випливає безпосередньо з визначення скалярного добутку:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = |\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right) = \left|\overrightarrow{b}\right||\overrightarrow{a}|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right) = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right).$$

2. Для доведення властивостей 2, 3 скористаємось формулами (4.2) і властивостями проєкцій (стр.29):

$$\left(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left|\overrightarrow{b}\right|\operatorname{Пр}_{\vec{b}}(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda\left|\overrightarrow{b}\right|\operatorname{Пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a} = \lambda\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = |\overrightarrow{c}|\operatorname{Пр}_{\vec{c}}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = |\overrightarrow{c}|\operatorname{Пр}_{\vec{c}}\overrightarrow{a} + |\overrightarrow{c}|\operatorname{Пр}_{\vec{c}}\overrightarrow{b} =$$

$$= (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$$

3. Властивість 4 також випливає безпосередньо з визначення скалярного добутка:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|^2 \cos 0.$$

Отже, якщо вектор $\overrightarrow{a}$ відрізняється від нуля, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) > 0$. Нагадаємо, що $\cos 0 = 1$.

Якщо $\overrightarrow{a} = 0$, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$ і навпаки, якщо $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$, то $\overrightarrow{a} = 0$.

Наслідок 5. *З властивостей 2 і 3 випливає, що*

$$\left(\overrightarrow{a}, \lambda \overrightarrow{b}\right) = \left(\lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right) = \lambda \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right) = \lambda \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right);$$
$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right) = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right) + (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}).$$

Таким чином, алгебраїчні властивості 2, 3 виконуються відносно обох множників скалярного добутка.

□

Зауваження 17. Якщо множники скалярного добутку рівні між собою, тобто

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b},$$

то кут між векторами дорівнює нулю і скалярний добуток вектора на себе можна розглядати як квадрат довжини даного вектора:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{a}| \cos 0 = |\overrightarrow{a}|^2.$$

Отже, можна знайти довжину вектора за допомогою скалярного добутка:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}. \tag{4.7}$$

Приклад 12. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right) = \pi/3$.

Розв'язання. Довжину вектора $\vec{c}$ обчислимо за формулою (4.7):

$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c})}.$$

Знайдемо скалярний квадрат вектора $\vec{c}$:

$$(\vec{c},\vec{c}) = \left(2\vec{a}+3\vec{b}, 2\vec{a}+3\vec{b}\right) = 4\left(\vec{a},\vec{a}\right) + 6\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 6\left(\vec{b},\vec{a}\right) + 9\left(\vec{b},\vec{b}\right) =$$
$$= 4\left(\vec{a},\vec{a}\right) + 12\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 9\left(\vec{b},\vec{b}\right) =$$
$$= 4\left|\vec{a}\right|^2 + 12\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right) + 9\left|\vec{b}\right|^2 =$$
$$= 4\cdot 4^2 + 12\cdot 4\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 9\cdot 3^2 =$$
$$= 4\cdot 16 + 12\cdot 12\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 9 = 64 + 72 + 81 = 217.$$

Отже, маємо

$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{217}.$$

□

4.1.3. Геометричні властивості скалярного добутку

1. Кут між двома векторами буде гострий тільки коли скалярний добуток цих векторів додатний, і навпаки, скалярний добуток цих векторів буде додатний, коли кут між двома векторами буде гострий.

2. Кут між двома векторами буде тупий тільки коли скалярний добуток цих векторів від'ємний, і навпаки, скалярний добуток цих векторів буде від'ємний, коли кут між двома векторами буде тупий.

3. Якщо кут між векторами прямий, або один з векторів дорівнює нулю, тоді скалярний добуток дорівнює нулю, і навпаки, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то кут між векторами прямий.

Геометричні властивості випливають з визначення скалярного добутка, тобто з формули (4.1):

$$\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right) = |\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right).$$

При гострих кутах між векторами значення косинуса додатно і тому скалярний добуток додатен. Аналогично, при тупих кутах між векторами значення

косинуса від'ємно і відповідно скалірний добуток від'ємний. Коли кут прямий, то косинус дорівнює нулю та скалярний добуток також дорівнює нулю.

Зауваження 18. Тому що напрям нульового вектора невизначено, то нульовий вектор вважають перпендикулярним будь–якому вектору.

Теорема 9 (Прро нульовий вектор)**.** *Якщо вектор* $\overrightarrow{a}$ *перпендикулярний до будь–якого довільного вектора, то вектор* $\overrightarrow{a}$ *дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ перпендикулярний до будь–якого вектора $\overrightarrow{b}$, тобто виконується умова:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0.$$

Тому що вектор $\overrightarrow{b}$ довільний, то замість вектора $\overrightarrow{b}$ можна розглядати $\overrightarrow{a}$. Тоді одержимо:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0.$$

Звідси за алгебраїсною властивостю 4 скалярного добутку випливає, що

$$\overrightarrow{a} = 0.$$

Теорема доведена. □

Наслідок 6. *Вектори* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$ *рівні тоді і тільки тоді, коли для довільного вектора* $\overrightarrow{c}$ *виконується умова*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right). \tag{4.8}$$

Насправді, з рівності (4.8) випливає, що:

$$\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = 0.$$

Отже, за теоремою про нульовий вектор одержимо:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 0,$$

або $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$. Що і потрібно було довести.

Розглянемо геометричний зміст формули (4.1). Візьмемо два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, які не дорівнюють нулю, та прикладемо їх до загального початку O. Позначимо як точки A і B кінці цих векторів. Очевидно, що кут, якій утворюють вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ — це кут AOB трикутника AOB (рис. 4.1).

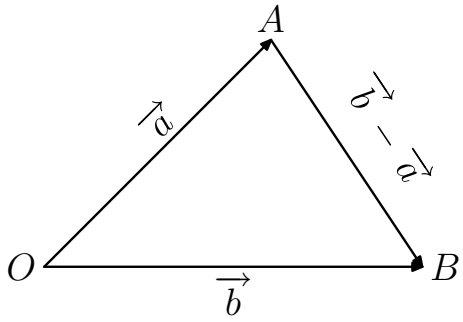

Рис. 4.1. Теорема косинусов

За теоремою косинусів довжини сторін трикутника AOB пов'язані співвідношенням:

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}\right). \tag{4.9}$$

Обчислимо вираз $\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2$, тоді маємо:

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 = \left(\vec{b}-\vec{a},\,\vec{b}-\vec{a}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left(\vec{a},\,\vec{b}\right). \tag{4.10}$$

Порівнюючи праві частини формул (4.9) і (4.10), одержимо:

$$\left(\vec{a},\,\vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}\right).$$

Таким чином, формула скалярного добутка векторів відображає суть теореми косинусів.

4.1.4. Координатна форма скалярного добутку

Теорема 10. *Якщо два вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *задані координатами*

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат:

$$\left(\vec{a},\,\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{4.11}$$

Доведення. Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задано декартовими координатами:

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, \tag{4.12}$$

$$\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}. \tag{4.13}$$

Скориставшись алгебраїчними властивостями скалярного добутка, обчислимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$:

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) &= \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right) = \\ &= a_xb_x\left(\vec{\imath},\vec{\imath}\right) + a_xb_y\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right) + a_xb_z\left(\vec{\imath},\vec{k}\right) + \\ &+ a_yb_x\left(\vec{\jmath},\vec{\imath}\right) + a_yb_y\left(\vec{\jmath},\vec{\jmath}\right) + a_yb_z\left(\vec{\jmath},\vec{k}\right) + \\ &+ a_zb_x\left(\vec{k},\vec{\imath}\right) + a_zb_y\left(\vec{k},\vec{\jmath}\right) + a_zb_z\left(\vec{k},\vec{k}\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Розглянемо скалярні добутки ортів координатних осей прямокутної декартової системи координат. За формулою (4.1) одержимо:

$$\left(\vec{\imath},\vec{\imath}\right) = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\imath}| \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right) = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\jmath}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Інші добутки обчислюються аналогічно. Таким чином, маємо:

$$\begin{array}{lll} \left(\vec{\imath},\vec{\imath}\right) = 1, & \left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right) = 0, & \left(\vec{\imath},\vec{k}\right) = 0, \\ \left(\vec{\jmath},\vec{\imath}\right) = 0, & \left(\vec{\jmath},\vec{\jmath}\right) = 1, & \left(\vec{\jmath},\vec{k}\right) = 0, \\ \left(\vec{k},\vec{\imath}\right) = 0, & \left(\vec{k},\vec{\jmath}\right) = 0, & \left(\vec{k},\vec{k}\right) = 1. \end{array} \tag{4.15}$$

Підставляючи у (4.14) рівності (4.15), одержимо формулу (4.11):

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

□

4.1.5. Застосування скалярного добутку

1. Скалярний добуток застосовується для обчислення довжини вектора:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{4.16}$$

2. Скалярний добуток застосовується для знаходження кута між векторами:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4.17}$$

Звідси випливає умова перпендикулярності векторів:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{4.18}$$

3. Скалярний добуток застосовується для обчислення проєкції вектора.

Проєкція вектора $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на напрям вектора $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ обчислюється за формулою:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a} = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4.19}$$

Якщо напрям задається ортом $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то ця формула спрощується:

$$\text{Пр}_{\vec{l}}\overrightarrow{a} = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma. \tag{4.20}$$

4. Складова вектора в напряму іншого вектора

Складова вектора $\overrightarrow{a}$ в напряму вектора $\overrightarrow{b}$ дорівнює проєкції вектора $\overrightarrow{a}$ на напрям вектора $\overrightarrow{b}$, помноженої на орт вектора $\overrightarrow{b}$ (рис.4.2).

Враховуючи формулу (4.2), одержимо таку формулу:

$$\overrightarrow{a}_b = \text{Пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a}\frac{\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}{\left|\overrightarrow{b}\right|}\frac{\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\frac{\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}. \tag{4.21}$$

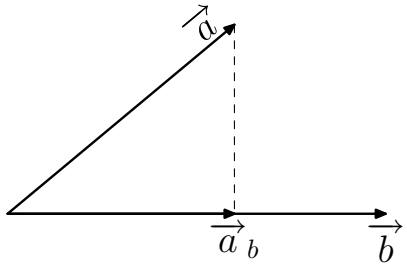

Рис. 4.2. Складова вектора

Приклад 13. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (2, -1, 3)$ і $\vec{b} = (1, 3, -2)$.

Розв'язання. Кут між векторами можна одержати за формулою (4.17):

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|}.$$

Обчислимо скалярний добуток:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 2 - 3 - 6 = -7.$$

Знайдемо модулі векторів:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14},$$
$$\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}.$$

Підставляючи знайдені величини в формулу (4.17), одержимо:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}{|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-7}{14} = -\frac{1}{2}.$$

□

Приклад 14. Довести, що діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$, заданого координатами вершин $A(-4; -6; -4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(1; 2; -3)$, $D(12; -2; 3)$, взаємно перпендикулярні (рис.4.3).

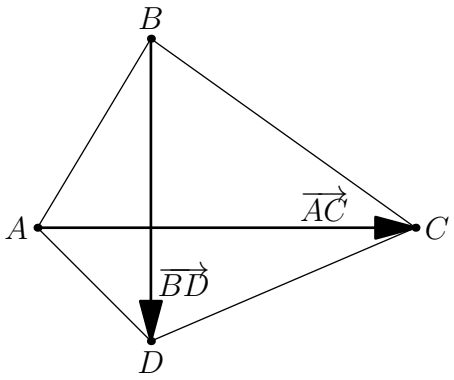

Рис. 4.3. Чотирикутник $ABCD$

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, що лежать на діагоналях даного чотирикутника:

$$\overrightarrow{AC} = (1-(-4); 2-(-6); -3-(-4)) = (5; 8; 1),$$
$$\overrightarrow{BD} = (12-1; -2-5; 3-2) = (11; -7; 1).$$

За формулою (4.11) знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = 5 \cdot 11 + 8 \cdot (-7) + 1 \cdot 1 = 55 - 56 + 1 = 0.$$

Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, і відповідно діагоналі чотирикутника $ABCD$, взаємно перпендикулярні.

□

Приклад 15. Знайти складову сили $\overrightarrow{F} = (1; -8; -7)$, яка діє в напрямку вектора $\overrightarrow{a} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Розв'язання. Складова вектора $\overrightarrow{F}$ в напряму вектора $\overrightarrow{a}$ дорівнює проєкції вектора $\overrightarrow{F}$ на напрям вектора $\overrightarrow{a}$, помноженої на орт вектора $\overrightarrow{a}$:

$$\overrightarrow{F}_a = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{F}\right) \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}.$$

Тоді маємо:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{F}\right) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) + 1 \cdot (-7) = 2 - 16 - 7 = -21,$$

$$|\overrightarrow{a}|^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9.$$

Отже,

$$\overrightarrow{F}_a = \frac{-21}{9}\left(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}\right) = -\frac{14}{3}\vec{\imath} - \frac{14}{3}\vec{\jmath} - \frac{7}{3}\vec{k} = \left(-\frac{14}{3}; -\frac{14}{3}; -\frac{7}{3}\right).$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Дано два вектори $\vec{a} = (2, -1, -2)$ і $\vec{b} = (0, 3, 4)$.
   Обчислити:
   1) скалярний добуток $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;
   2) $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}\right)$;
   3) $\left|2\vec{a} - \vec{b}\right|$;
   4) проєкцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;
   5) $\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$.

2. Перевірити колінеарність та перпендикулярність векторів

$$\vec{a} = -6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}.$$

3. Дано вершини четирикутника

$$A(1; -2; 2), \quad B(1; 4; 0), \quad C(-4; 1; 1), \quad D(-5; -5; 3).$$

Довести, що його діагоналі AC та BD взаємно перпендикулярні.

4. Знайти кум між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}, \quad \vec{b} = -2\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

5. Надано вектори $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$.
   Знайти $\mathrm{Пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a}$ та $\mathrm{Пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b}$.

4.2. Векторний добуток векторів

4.2.1. Означення векторного добутку

Означення 48. Три вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ називаються *впорядкованою трійкою*, якщо вказано, який з цих векторів є першим, який є другим, а який — третім.

Означення 49. Якщо найкоротший поворот від додатного напрямку вектора $\overrightarrow{a}$ до вектора $\overrightarrow{b}$ буде видно з додатного боку вектора $\overrightarrow{c}$ проти руху годинникової стрілки, то *трійка векторів* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *називається правою, якщо за рухом годинникової стрілки, то — лівою.*

На рис.4.4 і рис.4.5 приведені права і ліва трійки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

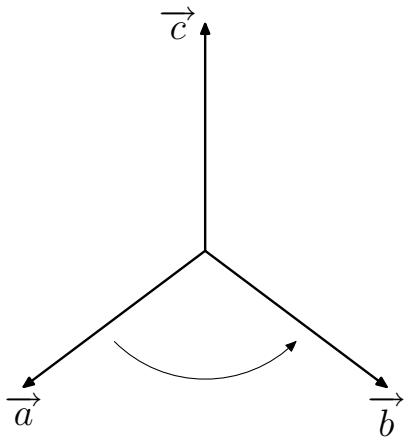

Рис. 4.4. Права трійка

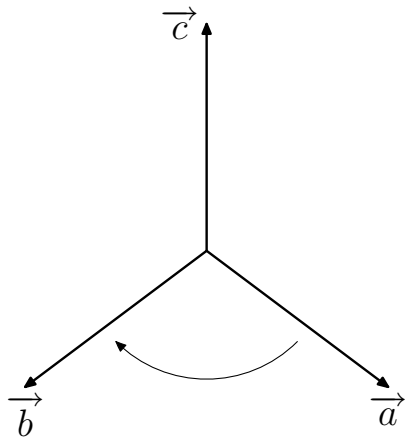

Рис. 4.5. Ліва трійка

Часто для визначення орієнтації трійки застосовують *правило правої руки*: якщо вектори розташовуються так, що першому вектору можна поставити у відповідність великий палець правої руки, другому — вказівний, а третьому — середній, то це права трійка. Якщо напрями векторів відповідають пальцях лівої руки, то трійка векторів — ліва.

Якщо взяти три некомпланарних вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, то можна побудувати таки шість трійок:

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}; \quad \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}; \quad \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}; \quad \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}; \quad \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}; \quad \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}.$$

Тут перші три трійки мають ту ж саму орієнтацію, що і трійка векторів

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c},$$

а останні трійки — протилежну.

Зауважимо, що якщо вектори в трійці переставляти циклічно, то орієнтація не змінюється. Якщо поміняти місцями два сусідніх вектори, то орієнтація зміниться на протилежну.

Означення 50. *Векторним добутком* двох векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається третій вектор $\overrightarrow{c}$, який задовольняє таким умовам (рис.4.6):

1) вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярний кожному з векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, тобто

$$\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b};$$

2) трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ — права;

3) довжина вектора $\overrightarrow{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ на синус кута між ними, тобто

$$|\overrightarrow{c}| = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right| = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}). \tag{4.22}$$

Позначається векторний добуток символом $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$.

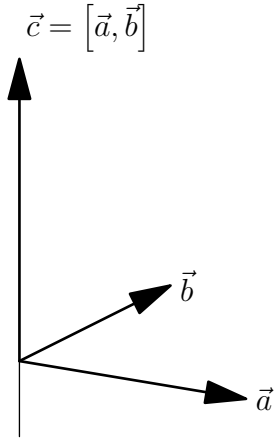

Рис. 4.6. Векторний добуток

4.2.2. Геометричні властивості векторного добутку

1. Якщо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні, то векторний добуток $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$ дорівнює нулю.

2. Якщо два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ приведені до спільного початку, то модуль векторного добутку $\left|\left[\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right]\right|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Доведення. 1. Якщо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні, то кут між векторами або дорівнює нулю, або π. Тоді синус кута $\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}$ і, відповідно, модуль векторного добутку дорівнює нулю.

Виконується і обернене твердження. Нехай векторний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ дорівнює нулю та вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ відрізняються від нуля. Тоді

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) = 0.$$

Звідси випливає, що кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ або дорівнює нулю, або π. Отже маємо, що ці вектори колінеарні.

2. Розглянемо паралелограм, який побудовано на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, як на сторонах (рис.4.7). Його площа дорівнює добутку висоти паралелограма на

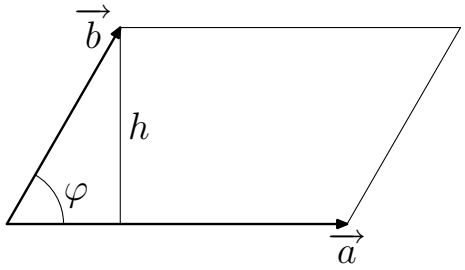

Рис. 4.7. Площа паралелограма

довжину його основи:

$$S(\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}) = h\,|\,\overrightarrow{a}\,|\,. \tag{4.23}$$

Висота паралелограма, яка опущена на сторону $\overrightarrow{a}$, буде обчислюватися за формулою:

$$h = \left|\overrightarrow{b}\right| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}). \tag{4.24}$$

На рисунку рис.4.7 позначено кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, як $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}})$. Тоді маємо

$$S(\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}) = h\,|\,\overrightarrow{a}\,| = |\,\overrightarrow{a}\,|\left|\overrightarrow{b}\right| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}}) = \left|\left[\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right]\right|.$$

□

4.2.3. Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. При перестановці співмножників векторний добуток змінює знак, тобто

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]; \tag{4.25}$$

2. Чисельний множник λ можна виносити за знак векторного добутку:

$$\left[\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]; \tag{4.26}$$

3. Виконується дистрибутивний закон множення відносно додавання, тобто при векторному множенні суми векторів на вектор можна «розкрити дужки»:

$$\left[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] + \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]. \tag{4.27}$$

Доведення цих властивостей розглянемо пізніше.

4.2.4. Координатна форма векторного добутку

Теорема 11. *Якщо два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задані координатами*

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

то векторний добуток обчислюється за формулою

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{4.28}$$

Доведення. Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ задано декартовими координатами:

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{4.29}$$

$$\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}. \tag{4.30}$$

Обчислимо векторний добуток:

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] &= \left[a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right] = \\ &= a_x b_x \left[\vec{\imath}, \vec{\imath}\right] + a_x b_y \left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right] + a_x b_z \left[\vec{\imath}, \vec{k}\right] + \\ &+ a_y b_x \left[\vec{\jmath}, \vec{\imath}\right] + a_y b_y \left[\vec{\jmath}, \vec{\jmath}\right] + a_y b_z \left[\vec{\jmath}, \vec{k}\right] + \\ &+ a_z b_x \left[\vec{k}, \vec{\imath}\right] + a_z b_y \left[\vec{k}, \vec{\jmath}\right] + a_z b_z \left[\vec{k}, \vec{k}\right].\end{aligned} \tag{4.31}$$

Розглянемо векторні добутки ортів координатних осей прямокутної декартової системи координат. За означенням векторного добутку маємо:

$$\left|\left[\vec{\imath}, \vec{\imath}\right]\right| = \left|\vec{\imath}\right| \cdot \left|\vec{\imath}\right| \cdot \sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0, \quad \text{тобто} \quad \left[\vec{\imath}, \vec{\imath}\right] = 0,$$

$$\left|\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right]\right| = \left|\vec{\imath}\right| \cdot \left|\vec{\jmath}\right| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \quad \text{тобто} \quad \left|\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right]\right| = 1.$$

Далі, вектор $\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right]$ перпендикулярний обом множникам: як вектору $\vec{\imath}$, так і вектору $\vec{\jmath}$. Крім того вектори $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ та $\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right]$ утворюють праву трійку. Таким вектором може бути тільки вектор $\vec{k}$ (рис.4.8). Отже, маємо:

$$\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right] = \vec{k}.$$

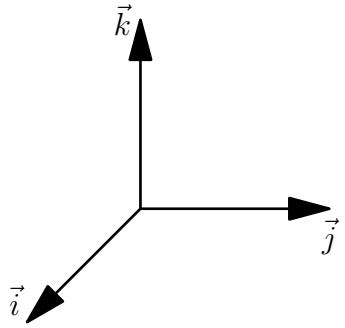

Рис. 4.8. Орти

Звернемо увагу, якщо розглядати добуток $\left[\vec{\jmath}, \vec{\imath}\right]$, то вектори $\vec{\jmath}$, $\vec{\imath}$ і $\vec{k}$ утворюють ліву трійку векторів, тому

$$\left[\vec{\jmath}, \vec{\imath}\right] = -\vec{k}.$$

Аналогічно знаходяться інші добутки ортів координатних осей:

$$\begin{array}{lll} [\vec{i},\vec{i}]=0, & [\vec{i},\vec{j}]=\vec{k}, & \left[\vec{i},\vec{k}\right]=-\vec{j}, \\ [\vec{j},\vec{i}]=-\vec{k}, & [\vec{j},\vec{j}]=0, & \left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}, \\ \left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}, & \left[\vec{k},\vec{j}\right]=-\vec{i}, & \left[\vec{k},\vec{k}\right]=0. \end{array} \tag{4.32}$$

Підставляючи у (4.31) рівності (4.32), одержимо :

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right] &= a_xb_x\cdot 0 + a_xb_y\vec{k} - a_xb_z\vec{j} - \\ &- a_yb_x\vec{k} + a_yb_y\cdot 0 + a_yb_z\vec{i} + \\ &+ a_zb_x\vec{j} - a_zb_y\vec{i} + a_zb_z\cdot 0 = \\ &= \vec{i}(a_yb_z - a_zb_y) - \vec{j}(a_xb_z - a_zb_x) + \vec{k}\,(a_xb_y - a_yb_x) = \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси випливає формула (4.28), оскільки права частина рівності відповідає розкладанню визначника третього порядку за елементами першого рядка:

$$\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

□

4.2.5. Застосування векторного добутку

1. Векторний добуток застосовується для знаходження вектора $\overrightarrow{c}$, перпендикулярного двом заданим векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{c} = \lambda\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]. \tag{4.33}$$

2. Векторний добуток застосовується для знаходження площі паралелограма (трикутника) та його висоти (рис. 4.7):

$$S = \left|\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]\right|, \quad h = \frac{S}{|\overrightarrow{a}|}. \tag{4.34}$$

Приклад 16. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = (2, -1, 3) \quad \text{і} \quad \vec{b} = (1, 3, -2).$$

Розв'язання. Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}((-1)\cdot(-2) - 3\cdot 3) - \vec{\jmath}(2\cdot(-2) - 3\cdot 1) + \vec{k}(2\cdot 3 - (-1)\cdot 1) =$$

$$= \vec{\imath}(2-9) - \vec{\jmath}(-4-3) + \vec{k}(6+1) = -7\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 7\vec{k} = (-7, 7, 7).$$

Таким чином маємо:

$$S = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 7^2} = \sqrt{49+49+49} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}.$$

□

Приклад 17. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів

$$\vec{a} = (4, -2, -3), \quad \text{і} \quad \vec{b} = (0, 1, 3),$$

та утворює тупий кут з віссю Oy.

Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = 26$.

Розв'язання. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тому він колінеарний векторному добутку цих векторів:

$$\vec{c} = \lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

Тут λ — невизначений коефіцієнт. Обчислимо векторний добуток:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}((-2)\cdot 3 - (-3)\cdot 1) - \vec{\jmath}(4\cdot 3 - (-3)\cdot 0) + \vec{k}(4\cdot 1 - (-2)\cdot 0) =$$

$$= \vec{\imath}(-6+3) - \vec{\jmath}(12+0) + \vec{k}(4+0) = -3\vec{\imath} - 12\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (-3, -12, 4)$$

та знайдемо довжину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \left|\lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\lambda| \cdot \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|.$$

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-12)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13.$$

Тому що $|\vec{c}| = 26$, звідси маємо

$$26 = |\lambda| \cdot 13, \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 2, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2.$$

Вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy, тому його y–координата повинна бути від'ємна. Тоді $\lambda = 2$. Таким чином, маємо

$$\vec{c} = 2 \cdot (-3, -12, 4) = (-6, -24, 8).$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Дано два вектори $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (0, 3, 4)$. Обчислити:
   1) векторний добуток $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$;
   2) модуль векторного добутку $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$;
   3) $\left[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}\right]$;

2. Обчислити площу трикутника $\triangle ABC$, якщо

$$A(1; 2; 0), \quad B(3; 0; -3), \quad C(5; 2; 6).$$

3. Обчислити довжину висоти AD, яка проведена з вершини A на сторону BC трикутника $\triangle ABC$, якщо

$$A(1; -1; 2), \quad B(5; -6; 2), \quad C(1; 3; -1).$$

4. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 4)$ та задовольняє умові

$$\vec{c}\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}\right) = 0.$$

4.3. Мішаний добуток векторів

4.3.1. Означення мішаного добутку

Означення 51. *Мішаним добутком* упорядкованої трійки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ називається число, що обчислюється за формулою $\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right)$.

Отже, спочатку обчислюється векторний добуток $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$ векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, який далі скалярно множиться на вектор $\overrightarrow{c}$.

Будь–яка трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, прикладенний до загальної точці, визначає певний паралелепіпед, що дозволяє з'ясувати *геометричний зміст мішаного добутка векторів.*

Теорема 12. *Мішаний добуток* $\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right)$ *дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на прикладених до загального початку векторах* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, *що береться зі знаком плюс, якщо трійка векторів* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *права і зі знаком мінус, якщо трійка векторів ліва.*

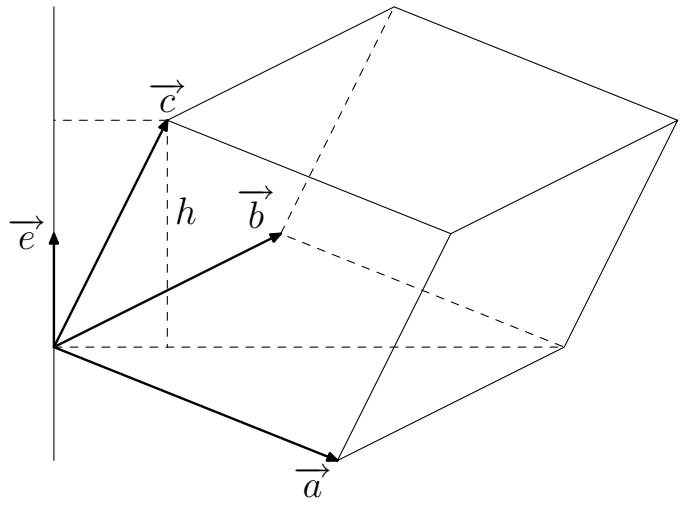

Рис. 4.9. Об'єм паралелепіпеда

Доведення. Розглянемо паралелепіпед, побудований на прикладених до загального початку векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ (рис. 4.9).

Якщо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні, то $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = 0$ і теорема очевидна.

Нехай вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ неколінеарні. Припустимо, що паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ є основою паралелепіпеда.

Позначимо площу паралелограма, побудованого на цих векторах, як S. Очевидно, що

$$S = \left| \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right] \right|.$$

Тоді за визначеням скалярного добутку (4.2) маємо :

$$\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right], \overrightarrow{c} \right) = \left| \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right] \right| \operatorname{Пр}_{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right]} \overrightarrow{c} = S \operatorname{Пр}_{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right]} \overrightarrow{c}. \tag{4.35}$$

Нехай вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ не лежать в одній і тій самій площині. Тоді проєкція вектора $\overrightarrow{c}$ на напрям $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right]$ с точністю до знака дорівнює висоті паралелепіпеда h.

Очевидно, що $\operatorname{Пр}_{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right]} \overrightarrow{c} = +h$, якщо вектори $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right]$ і $\overrightarrow{c}$ лежать з одного боку площини, визначаємого векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. В цьому випадку трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ — права. В протилежному випадку трійка цих векторів ліва і $\operatorname{Пр}_{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right]} \overrightarrow{c} = -h$.

Отже, мішаний добуток векторів з точність до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, що і потрібно було довести.

□

4.3.2. Умова компланарності векторів

Означення 52. Вектори, що лежать в одній і тій самій площині або в паралельних площинах, називаються *компланарними.*

Зауваження 19. Нульовий вектор, через невизначеність свого напряму, вважається паралельним будь-якій площині.

З теореми 12 випливає *умова компланарності*:

Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Дійсно, якщо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ компланарні, то вектор $\overrightarrow{c}$ лежить в площині, яка визначається векторами $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$. Тому

$$\operatorname{Пр}_{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right]} \overrightarrow{c} = 0$$

і, відповідно, мішаний добуток векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ дорівнює нулю.

4.3.3. Властивості мішаного добутку

Теорема 12 дозволяє розглядати мішаний добуток трьох векторів як орієнтований об'єм (об'єм зі знаком). Це твердження повністю характеризує мішаний добуток та його властивості.

1. *Циклічна перестановка векторів у мішаному добутку не змінює його величини*, тобто

$$\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right) = \left(\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right], \overrightarrow{a}\right) = \left([\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}], \overrightarrow{b}\right). \tag{4.36}$$

   Справді, трійки векторів $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$ мають ту ж саму орієнтацію та їм відповідає той самий паралелепіпед.

2. *Перестановка місцями двох векторів у мішаному добутку змінює знак добутку.* Наприклад,

$$\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right) = -\left(\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right], \overrightarrow{c}\right). \tag{4.37}$$

   Насправді, обидві сторони цієї формули є мішані добутки тих самих векторів, тобто представляють об'єм того ж самого паралелепіпеда. Але вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ і $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ утворюють трійки різної орієнтації, тому за теоремою 12 ці мішані добутки мають різні знаки.

3. *Немає значення, які з векторів у мішаному добутку утворюють векторний добуток*:

$$\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right), \tag{4.38}$$

   тому зазвичай мішаний добуток векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ записують так:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.$$

   Насправді, обидві сторони цього виразу представляють орієнтований об'єм паралелепіпеда, побудованого на тих самих векторах, причому вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ і $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ утворюють трійки однієї орієнтації.

4.3.4. Координатна форма мішаного добутку

Теорема 13. *Нехай три вектори* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *і* $\overrightarrow{c}$ *задані декартовими прямокутними координатами*

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \overrightarrow{c} = (c_x, c_y, c_z),$$

тоді мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.39}$$

Звернемо увагу, що формулу (4.39) не важко довести, якщо врахувати координатну форму векторного добутку

$$\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \vec{i}\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Тоді, обчислюючи скалярний добуток, одержимо:

$$\left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right) = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

4.3.5. Застосування мішаного добутку

1. Мішаний добуток застосовується для перевірки компланарності векторів.

2. Мішаний добуток застосовується для знаходження об'єма паралелепіпеда або піраміди.

   Об'єм паралелепіпеда обчислюється за формулою:

   $$V = \left|\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right|.$$

   Об'єм піраміди обчислюється за формулою:

   $$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right|.$$

Приклад 18. Довести, що вектори $\vec{a} = (3, 5, 8)$, $\vec{b} = (1, 4, 1)$ і $\vec{c} = (4, 9, 9)$ компланарні.

Розв'язання. Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю, тому обчислимо мішаний добуток.

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\,(4 \cdot 9 - 1 \cdot 9) - 5\,(1 \cdot 9 - 1 \cdot 4) + 8\,(1 \cdot 9 - 4 \cdot 4) =$$

$$= 3\,(36 - 9) - 5\,(9 - 4) + 8\,(9 - 16) =$$

$$= 3 \cdot 27 - 5 \cdot 5 + 8 \cdot (-7) = 81 - 25 - 56 = 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. □

Приклад 19. Знайти об'єм піраміди з вершинами у точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ і $C(1; 2; 4)$ та її висоту, яка опущена з вершини O на грань ABC (рис. 4.10).

Розв'язання. Побудуємо три вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$. Очевидно, що

$$\overrightarrow{OA} = (5; 2; 0), \quad \overrightarrow{OB} = (2; 5; 0), \quad \overrightarrow{OC} = (1; 2; 4).$$

Тоді об'єм піраміди $OABC$ дорівнює

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\right|. \tag{4.40}$$

Обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\,(5 \cdot 4 - 0 \cdot 2) - 2\,(2 \cdot 4 - 0 \cdot 1) =$$

$$= 5\,(20 - 0) - 2\,(8 - 0) = 5 \cdot 20 - 2 \cdot 8 = 100 - 16 = 84.$$

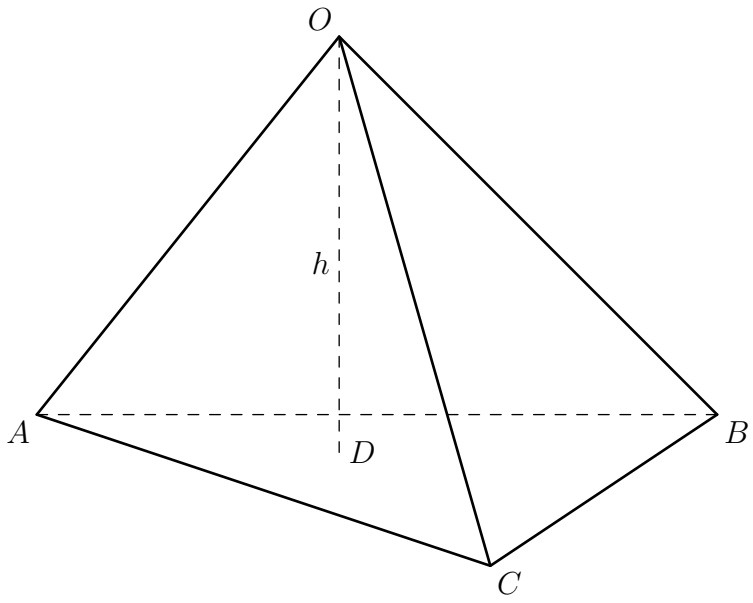

Рис. 4.10. Піраміда

Об'єм піраміди обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6}\cdot 84 = 14.$$

Об'єм піраміди можна також обчислити за формулою

$$V = \frac{1}{3}\,S\cdot h.$$

Тут h — висота піраміди, S — площа основи. Звідси випливає, що

$$h = \frac{3V}{S}.$$

Знайдемо вектори, на яких побудовано основу піраміди:

$$\overrightarrow{AB} = (2-5;5-2;0-0) = (-3;3;0),$$
$$\overrightarrow{AC} = (1-5;2-2;4-0) = (-4;0;4).$$

Визначимо площу основи:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -4 & 4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -4 & 0\end{vmatrix}=$$
$$=\vec{\imath}(3\cdot 4-0\cdot 0)-\vec{\jmath}((-3)\cdot 4-0\cdot(-4))+\vec{k}((-3)\cdot 0-3\cdot(-4))=$$
$$=\vec{\imath}(12-0)-\vec{\jmath}(-12-0)+\vec{k}(0+12)=12\vec{\imath}+12\vec{\jmath}+12\vec{k}=(12;12;12).$$

Таким чином маємо:

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2}=6\sqrt{3}.$$

Знайдемо висоту піраміди:

$$h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot 14}{6\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

□

4.3.6. Доведення алгебраїчних властивостей векторного добутку

Нагадаємо алгебраїчні властивості векторного добутку:

1. $\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]=-\left[\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}\right]$,
2. $\left[\lambda\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]=\lambda\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]$,
3. $\left[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right]=[\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}]+\left[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right]$

Для доведення цих формул скористаємось властивостями мішаного добутку і наслідком теореми про нульовий вектор (стр.68).

Доведемо першу властивість. Розглянемо властивість 3 мішаного добутку (стр.85):

$$\left(\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right],\overrightarrow{c}\right)=-\left(\left[\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}\right],\overrightarrow{c}\right).$$

Припустимо, що вектор $\overrightarrow{c}$ довільний. Тоді за наслідком теореми 9 звідси випливає така рівність:

$$\left[\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{a}\right].$$

Що і потрібно було довести.

Друга та третя властивості доводяться аналогично. За формулами (4.38) і (4.4) маємо:

$$\left(\left[\lambda\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right],\,\overrightarrow{c}\right) = \left(\lambda\overrightarrow{a},\left[\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right]\right) = \lambda\left(\overrightarrow{a},\left[\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right]\right) = \\ = \lambda\left(\left[\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right],\,\overrightarrow{c}\right) = \left(\lambda\left[\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right],\,\overrightarrow{c}\right),$$

або

$$\left(\left[\lambda\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right],\,\overrightarrow{c}\right) = \left(\lambda\left[\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right],\,\overrightarrow{c}\right).$$

Припустимо, що вектор $\overrightarrow{c}$ довільний. Тоді звідси одержимо:

$$\left[\lambda\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\right].$$

Доведемо третю властивість. Виконаємо очевидні перетворення:

$$\left(\left[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{c}\right],\,\overrightarrow{d}\right) = \left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\left[\overrightarrow{c},\,\overrightarrow{d}\right]\right) = \\ = \left(\overrightarrow{a},\left[\overrightarrow{c},\,\overrightarrow{d}\right]\right) + \left(\overrightarrow{b},\left[\overrightarrow{c},\,\overrightarrow{d}\right]\right) = \\ = \left([\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{c}],\,\overrightarrow{d}\right) + \left(\left[\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{c}\right],\,\overrightarrow{d}\right) = \left([\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{c}] + \left[\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{c}\right],\,\overrightarrow{d}\right).$$

Отже, якщо вектор $\overrightarrow{d}$ довільний, то маємо рівність:

$$\left[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{c}\right] = [\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{c}] + \left[\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{c}\right].$$

Що і треба було довести.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити об'єм тетраедра, якщо його вершини знаходяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

2. Надано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину висоти, яка опущена з вершини D.

3. Довести, що точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$ лежать в одній і тій самій площині.

4. Довести, компланарність векторів

$$\overrightarrow{a} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{b} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}, \quad \overrightarrow{c} = -3\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 6\vec{k}.$$

4.4. Подвійний векторний добуток векторів

Розглянемо три довільних вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$.

Означення 53. Вираз

$$\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right] \tag{4.41}$$

називається *подвійним векторним добутком.*

Подвійний векторний добуток будується таким чином: спочатку вектор $\overrightarrow{b}$ векторно множиться на вектор $\overrightarrow{c}$ і далі третій вектор $\overrightarrow{a}$ векторно множиться на одержаний векторний добуток $\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$.

Можна розглядати і такий подвійний векторний добуток

$$\left[\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{c}\right]. \tag{4.42}$$

Теорема 14. *Для будь-яких трьох векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ подвійний векторний добуток можна уявити у такому вигляді:*

$$\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right] = \overrightarrow{b}\,(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right). \tag{4.43}$$

Доведення. З'ясуємо зміст формули (4.43). За визначенням векторного добутку вектор $\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right]$ перпендикулярний вектору $\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$, який перпендикулярний векторам $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$. Отже, вектори $\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right]$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ лежать у тій самій площині, тобто компланарні.

Якщо вектори $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ неколінеарні, то вектор $\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right]$ можно уявити у вигляді лінійної комбінації векторів $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$:

$$\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right] = \alpha\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{c}.$$

Таким чином, формула (4.43) — це розкладання подвійного векторного добутку по векторах, які векторно перемножуються між собою.

Врахуємо цю обставину спеціальним вибором прямокутної декартової системи координат: вісь Oz направимо вздовж вектора $\overrightarrow{c}$, а вісь Oy розмістимо у площині векторів $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$. Тоді вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ матимуть наступні координати:

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \overrightarrow{b} = (0, b_y, b_z), \quad \overrightarrow{c} = (0, 0, c_z).$$

Обчислимо векторний добуток

$$\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & b_y & b_z \\ 0 & 0 & c_z \end{vmatrix} = (b_y c_z, 0, 0)\,.$$

Тоді

$$\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, a_z b_y c_z, -a_y b_y c_z)\,.$$

З іншого боку,

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = a_z c_z, \quad \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = a_y b_y + a_z b_z.$$

Отже,

$$\overrightarrow{b}\,(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = (0, a_z b_y c_z, a_z b_z c_z) - (0, 0, a_y b_y c_z + a_z b_z c_z) = \\ = (0, a_z b_y c_z, -a_y b_y c_z)\,.$$

Таким чином, права та ліва частини формули (4.43) збігаються, що й потрібно було довести. □

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів. Як записати скалярний добуток векторів через їхні проєкції?

2. Які алгебраїчні та геометричні властивості має скалярний добуток?

3. Як обчислюється скалярний добуток двох векторів, що задані своїми координатами?

4. Сформулюйте умову взаємної перпендикулярності двох векторів. Як записати цю умову в координатній формі?

5. Запишить формулу за якою обчислюється кут між векторами.

6. Як обчислити проєкції вектора на осі координат за допомогою скалярного добутку?

7. Що таке права (ліва) трійка векторів?

8. Сформулюйте означення векторного добутку двох векторів.

9. Які алгебраїчні та геометричні властивості має векторний добуток?

10. Як обчислюється векторний добуток двох векторів, що задані своїми координатами?

11. Як знайти вектор, що спрямован перпендикулярно до двох заданих векторів?

12. Сформулюйте означення мішаного добутку трьох векторів.

13. Як обчислити мішаний добуток трьох векторів, що задані своїми координатами?

14. Які властивості має мішаний добуток? Який його геометричний зміст?

15. Сформулюйте умову компланарності трьох векторів.

5. Аналітична геометрія на площині

Розділ математики, що вивчає властивості геометричних фігур за допомогою алгебри називається *аналітичною геометрією.*

Аналітична геометрія використовує *метод координат*, який ставить у відповідність кожній точці її координати.

5.1. Лінія як множина точок

Кожну лінію можна розглядати, як множину точок (іноді говорять: геометричне місце точок), які зв'язані певними умовами. Наприклад:
1. *Коло радіуса R — це множина точок площини, які рівновіддалені на відстань R від певної точки O, яка називається центром кола.*

На рис. 5.1 зображено коло радіуса R і для довільної точки M цього кола відстань від центру кола O до точки M дорівнює радіусу R: $|OM| = R$.

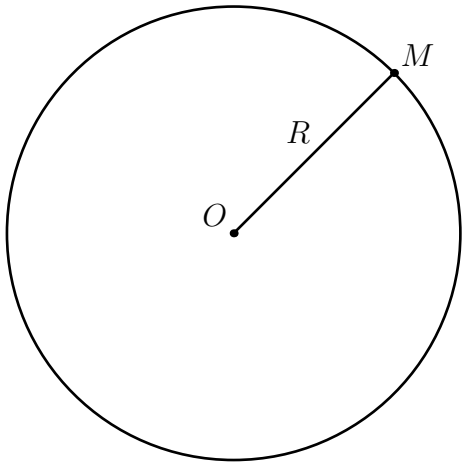

Рис. 5.1. Коло радіуса R

2. *Бісектриса кута — це множина точок, які містяться всередині кута і рівновіддалені від його сторін.*

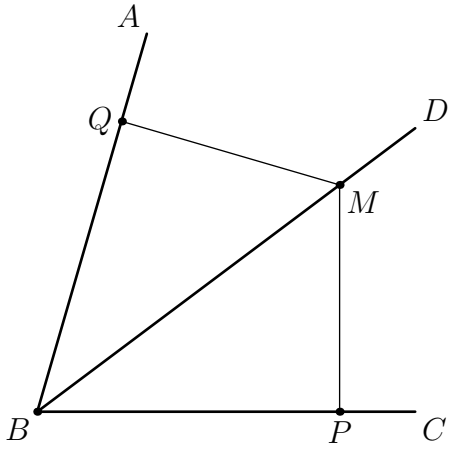

Рис. 5.2. Бісектриса BD кута ABC

Розглянемо кут $\angle ABC$ та побудуємо бісектрису BD цього кута (рис.5.2).

Візьмемо довільну точку M бісектриси й опустимо з цієї точки на сторони кута перпендикуляри MP і MQ. Тоді за означенням бісектриси маємо:

$$|MP| = |MQ|\,.$$

5.2. Рівняння лінії на площині

Рівнянням будемо називати такий вираз

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{5.1}$$

що певні значення змінних x та y задовольняють цей вираз, а деякі значення x і y не задовольняють вираз, тобто рівність (5.1) не виконується.

Визначимо на площині прямокутну декартову систему координат Oxy. Тоді кожній точці M площині можна поставити у відповідність упорядковану пару чисел x та y — координати цієї точки.

Побудуємо на площині Oxy будь-яку лінію L. Координати x та y кожної її точки не можуть бути довільними, вони повинні відповідати певним умовам, які виражають властивості даної лінії. Аналітично це записується у вигляді рівняння, що зв'язує координати x та y кожної точки лінії.

Означення 54. *Рівнянням лінії* L на площині xOy називається рівняння

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{5.2}$$

якщо координати x та y кожній точці цієї лінії задовольняють рівнянню (5.2), а координати будь-який точці, яка не міститься на цієї лінії, цьому рівнянню не задовольняють.

Розглянемо довільну точку M лінії L. Координати цієї точки позначимо як x і y. Коли точка $M(x, y)$ переміщується вздовж лінії L, то її координати x і y змінюються, причому вони завжди задовольняють рівнянню лінії. Довільну точку $M(x, y)$ лінії L називають *поточною точкою лінії*, а її координати x і y — *поточними координатами* (рис.5.3).

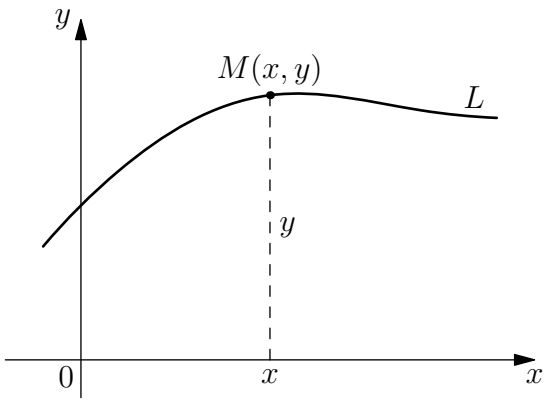

Рис. 5.3. Поточна точка та її координати

Приклад 20. Побудувати рівняння кола радіуса R з центром у початку координат.

Розв'язання. Розглянемо коло радіуса R з центром у початку координат (рис.5.4).

Візьмемо на колі довільну точку $M(x, y)$ (поточна точка) і поєднаємо її відрізком прямої з початком координат $O(0, 0)$. За означенням кола маємо, що відстань від довільної точки кола до центру кола стала величина, яка дорівнює радіусу кола. Отже,

$$|OM| = R.$$

Довжина відрізка OM обчислюється за формулою:

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким чином, маємо:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

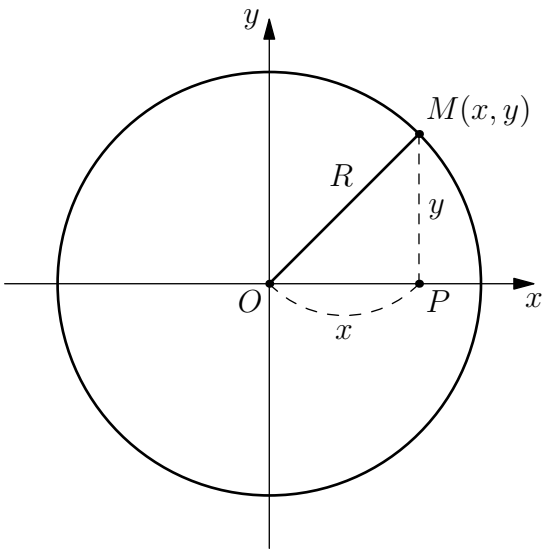

Рис. 5.4. Коло радіуса R з центром у початку координат

Позбавившись радікалу, одержимо шукане *рівняння кола радіуса R з центром у початку координат*:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{5.3}$$

□

Приклад 21. Побудувати рівняння бісектрис координатних кутів.

Розв'язання. Розглянемо бісектрису L першого і третього координатних кутів (рис.5.5).

Візьмемо на бісектрисі довільну точку $M(x, y)$ та опустимо з цієї точки на сторони кута (осі координат Ox і Oy) перпендикуляри MP і MQ, причому їх довжини дорівнюють:

$$|MP| = |y|\,, \quad |MQ| = |x|\,. \tag{5.4}$$

Нагадаємо, що бісектриса кута — це множина точок, які містяться всередині кута і рівновіддалені від його сторін. Тому, за означенням бісектриси, маємо:

$$|MP| = |MQ|\,. \tag{5.5}$$

Враховуючи (5.4), одержимо таке рівняння, якому задовольняють координати точок бісектрис координатних кутів:

$$|y| = |x|\,. \tag{5.6}$$

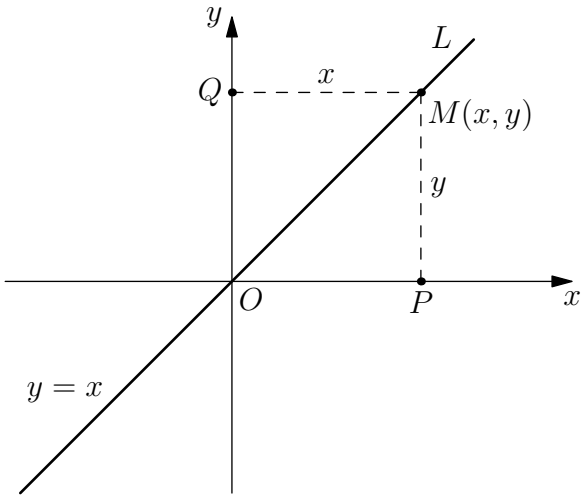

Рис. 5.5. Бісектриса першого координатного кута

В першому квадранті координати x і y всіх точок бісектриси додатні. Тому маємо:

$$|y| = y, \quad |x| = x.$$

Враховуючи ці рівності, з (5.6) випливає таке *рівняння бісектриси першого координатного кута*:

$$y = x. \tag{5.7}$$

У третьому квадранті координати x і y від'ємні, тому

$$|y| = -y, \quad |x| = -x.$$

і тоді одержимо *рівняння бісектриси третього координатного кута*:

$$-y = -x \quad \text{або} \quad y = x,$$

яке збігається з рівнянням (5.7).

В другому та четвертому квадрантах координати x і y точок бісектриси рівні по модулю і мають різні знаки (рис.5.6).

Так у четвертому квадранті ордината точки $M(x, y)$ від'ємна, а абсциса додатна. Тому

$$|y| = -y, \quad |x| = x$$

і маємо таке *рівняння бісектриси четвертого координатного кута*:

$$y = -x. \tag{5.8}$$

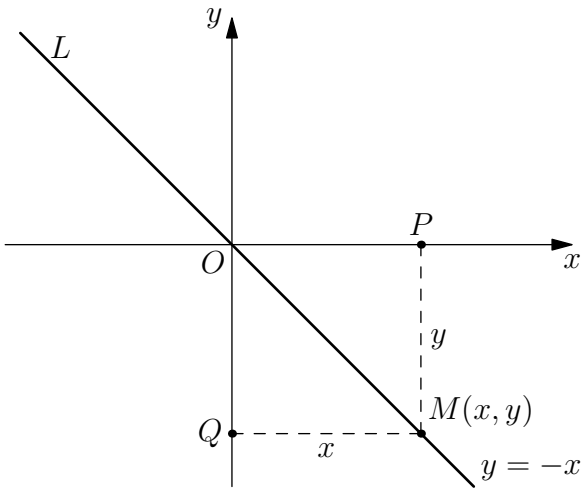

Рис. 5.6. Бісектриса четвертого квадранта

У другому квадранті ординати точок бісектриси додатні, а абсциси від'ємні, тому

$$|y| = y, \quad |x| = -x$$

і одержимо теж саме рівняння $y = -x$, що і у четветому квадранті. □

Приклад 22. Скласти рівняння прямої, яка паралельна осі ординат.

Розв'язання. Нехай пряма L паралельна осі ординат (осі Oy) і перетинає вісь Ox в точці P (рис.5.7).

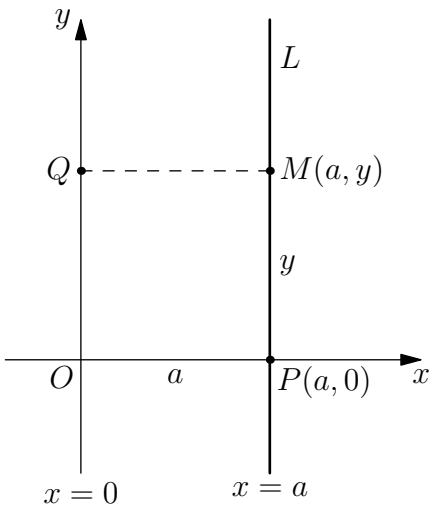

Рис. 5.7. Вертикальна пряма L

Позначимо абсцису точки P як a. Очевидно, що відстань між прямою L та віссю Oy дорівнює $|a|$, тобто $|OP| = |a|$.

Нехай $M(x, y)$ довільна точка прямої L. Опустимо з цієї точки перпендикуляр на вісь Oy, основу якого позначимо як точку Q. Тому що пряма паралельна осі Oy, маємо

$$|MQ| = |OP| = |a|.$$

Тоді абсциса кожній точці $M(x, y)$ прямої L дорівнює a:

$$x = a. \tag{5.9}$$

Це *рівняння прямої L, яка паралельна осі Oy.*

Звернемо увагу, що коли $a > 0$, то пряма L міститься праворуч від осі ординат, коли $a < 0$, то — ліворуч.

У випадку, коли $a = 0$, пряма L збігається з віссю Oy. Отже, маємо таке *рівняння осі ординат (осі Oy)*:

$$x = 0. \tag{5.10}$$

□

Приклад 23. Скласти рівняння прямої, яка паралельна осі абсцис.

Розв'язання. Рівняння прямої, яка паралельна осі абсцис, будується аналогічно. Нехай пряма L паралельна осі абсцис і перетинає вісь Oy в точці Q (рис.5.8).

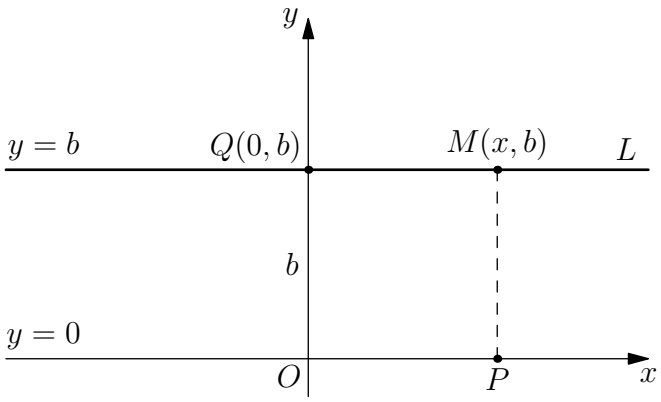

Рис. 5.8. Горизонтальна пряма

Ординату точки Q позначимо як b, тоді відстань між прямою L і віссю Ox дорівнює $|b|$, тобто $|OQ| = |b|$.

Звернемо увагу, що якщо $b > 0$, то пряма L лежить вище осі Ox, якщо $b < 0$, то пряма лежить нижче за вісь Ox.

Нехай $M(x, y)$ довільна точка прямої L. Опустимо з цієї точки перпендикуляр на вісь Ox, основу якого позначимо як точка P. Тому що пряма паралельна осі Ox, маємо

$$|MP| = |OQ| = |b|.$$

Тоді ордината кожної точки $M(x, y)$ прямої L дорівнює b:

$$y = b. \tag{5.11}$$

Це *рівняння прямої, яка паралельна осі* Ox і знаходиться від цієї осі на відстані $|b|$:

Якщо $b = 0$, маємо *рівняння осі абсцис* Ox:

$$y = 0. \tag{5.12}$$

□

5.3. Параметричні рівняння лінії на площині

Можна лінію задати як слід руху точки. Якщо відомо закон руху точки, то у кожен момент часу відомі координати точки x та y які залежать від часу t. Отже, лінія на площині (траєкторія руху) визначається двома функціями часу t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{5.13}$$

Рівняння (5.13) називаються *параметричними рівняннями лінії.* У параметричних рівняннях лінії координати точки x та y визначаються за допомогою допоміжної величини t, яка називається *параметром.*

Приклад 24. Побудувати параметричні рівняння кола радіуса R з центром у початку координат.

Розв'язання. Розглянемо коло радіуса R з центром у початку координат. Нехай $M(x, y)$ довільна точка кола. Позначимо кут, який утворює промінь OM з віссю Ox через t. На рис. 5.9 це кут MOP трикутника $\triangle MOP$. Тоді коор-

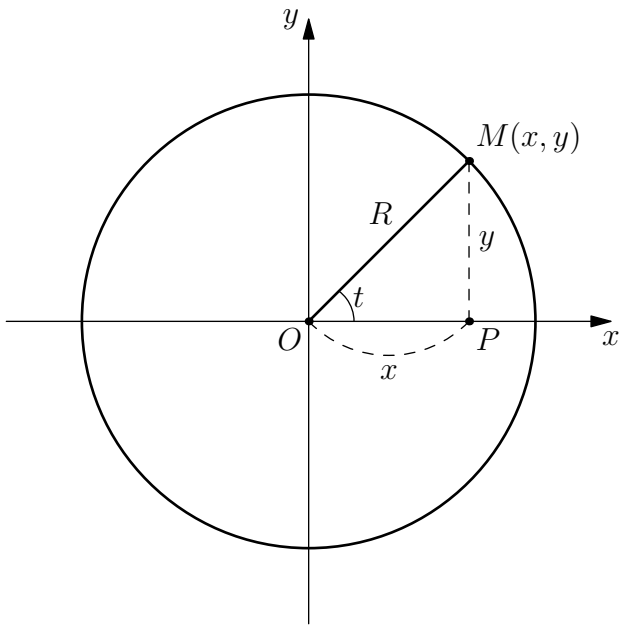

Рис. 5.9. Параметричні рівняння кола радіуса R

динати поточної точки $M(x, y)$ можна записати так:

$$\begin{cases} x = R\sin t, \\ y = R\cos t. \end{cases} \tag{5.14}$$

Рівняння (5.14) є *параметричні рівняння кола.*

Якщо виключити з цих рівнянь параметр t, то одержимо рівняння лінії вигляду $\Phi(x, y) = 0$: піднесемо до квадрату кожне рівняння системи (5.14) й додамо одержані результати. Тоді отримаємо:

$$(x)^2 + (y)^2 = (R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 = R^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = R^2.$$

Отже, маємо рівняння кола у декартових координатах (5.3). □

5.4. Будування лінії

Звернемо увагу, що кожній лінії відповідає певне рівняння вигляду

$$\Phi(x, y) = 0,$$

яке пов'язує координати x і y кожної точки цієї лінії. І навпаки, кожне таке рівняння можна розглядати, як рівняння певної лінії.

Однак рівняння дозволяє розширити поняття лінії. Наприклад, іноді лінія, яка визначається рівнянням, може вироджуватися у точку. Так рівнянню

$$(x-3)^2+(y+4)^2=0$$

відповідає тільки одна точка $(3,-4)$, тому що координати тільки цієї точки задовольняють даному рівнянню. Іноді рівнянню не відповідає жодної точки. Наприклад, рівнянню

$$(x-2)^2+(y-3)^2=-1$$

не може задовольнити ні яка пара дійсних чисел.

Якщо відомо рівняння лінії, то можна за точками побудувати цю лінію.

Приклад 25. Побудувати лінію, яка задана рівнянням $y=x^2$.

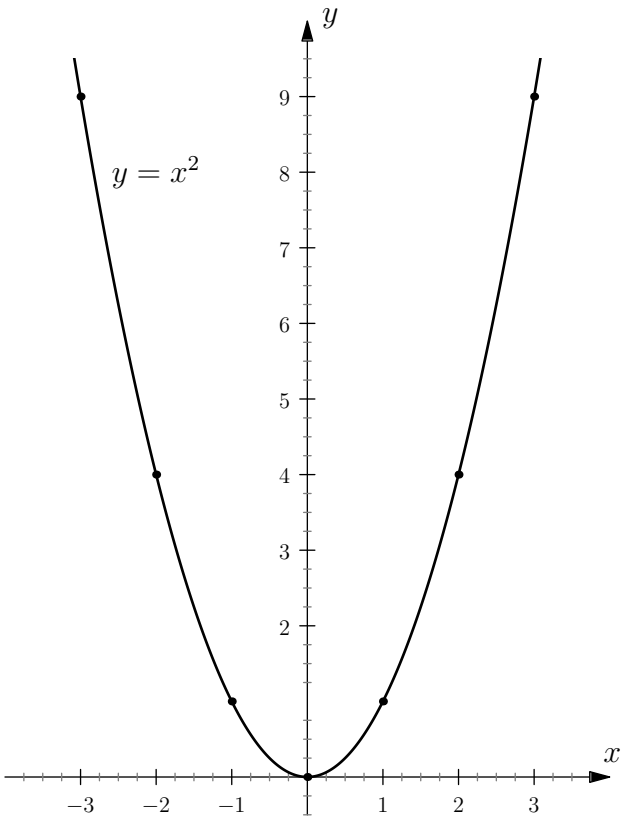

Рис. 5.10. Парабола $y=x^2$

Розв'язання. Надамо абсцисі x певні числові значення та обчислимо відповідні значення ординати y. Тоді отримаємо таку таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Далі побудуємо одержані точки на площині xOy та поєднаємо побудовані точки лінією (рис.5.10). Ця лінія називається *параболою*.

□

Приклад 26. Побудувати лінію, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -t. \end{cases} \tag{5.15}$$

Розв'язання. Надамо параметру t числові значення та обчислимо відповідні значення координат точок x і y. Тоді дістанемо таку таблицю:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

Побудуємо на площині xOy отримані точки та поєднаємо побудовані точки лінією (рис.5.11).

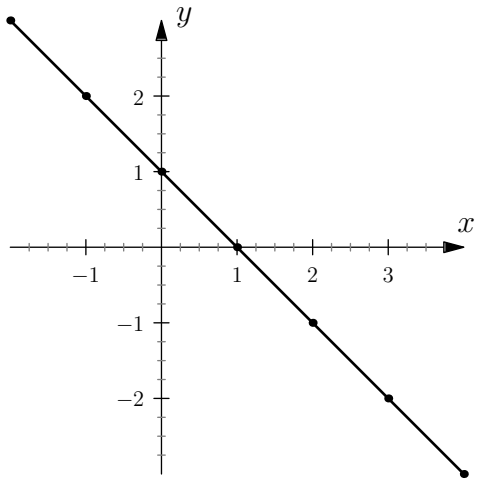

Рис. 5.11. Пряма $x = t + 1, y = -t$

Одержана лінія є пряма. Дійсно, виключимо параметр t з вихідної системи:

$$t = x - 1, \quad y = -(x - 1) = -x + 1.$$

Отже, параметричні рівняння (5.15) визначають пряму $y = -x + 1$. □

5.5. Деякі елементарні задачі

Задача 1. Дано рівняння лінії L і координати точки $M(x, y)$. З'ясувати, міститься точка $M(x, y)$ на лінії L, чи ні?

За визначенням рівняння лінії маємо, якщо координати точки $M(x, y)$ задовольняють рівнянню лінії, тоді ця точка міститься на лінії L; якщо не задовольняють рівнянню, тоді точка не належить лінії.

Приклад 27. З'ясувати, чи містяться на колі $x^2 + y^2 = 25$ точки $M(-3, 4)$ і $N(4, -2)$?

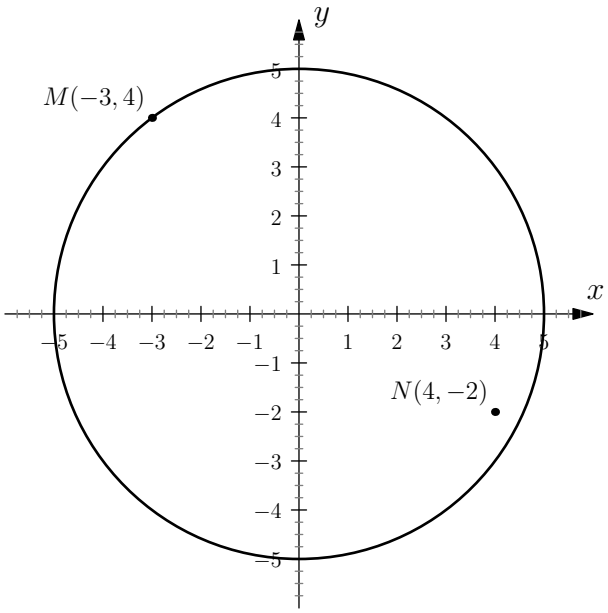

Рис. 5.12. Точки кола $x^2 + y^2 = 25$

Розв'язання. Підставимо координати точки $M(-3, 4)$ у рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = \left\| \begin{matrix} x & = -3, \\ y & = 4 \end{matrix} \right\| = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \equiv 25.$$

Отже, координати точки M задовольняють рівнянню кола, тому точка M лежить на колі.

Координати точки $N(4, -2)$ рівнянню кола не задовольняють:

$$x^2 + y^2 = \left\| \begin{matrix} x & = 4, \\ y & = -2 \end{matrix} \right\| = (4)^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20 \neq 25,$$

тому точка N не належить колу (рис.5.12).

□

Задача 2. Знайти точку перетину двох ліній.
Розглянемо дві криві

$$L_1 : \Phi_1(x, y) = 0, \quad L_2 : \Phi_2(x, y) = 0.$$

Якщо криві L_1 і L_2 перетинаються, то вони мають спільну точку $M_0(x_0, y_0)$,

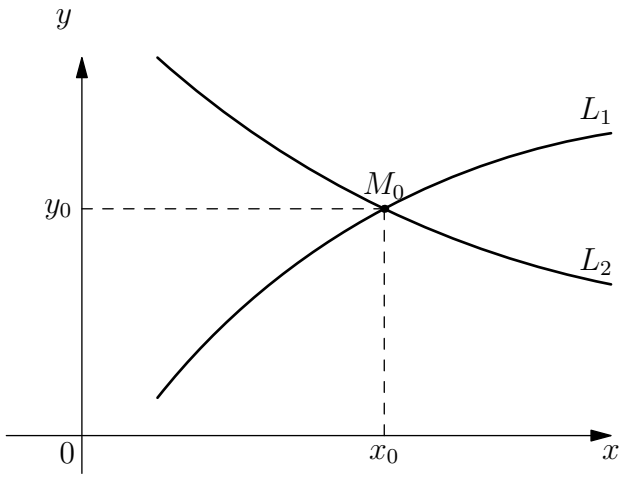

Рис. 5.13. Точка перетину кривих

точку перетину (рис.5.13). Тому координати точки перетину повинні задовольняти рівнянням обох цих ліній:

$$\begin{cases} \Phi_1(x_0, y_0) = 0, \\ \Phi_2(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Таким чином, *щоб знайти точку перетину двох ліній, потрібно розв'язати систему рівнянь (5.16), яка складається з рівнянь цих ліній.*

Приклад 28. Знайти точки перетину параболи $y = x^2$ і прямої $y = x + 2$.

Розв'язання. Складемо систему рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

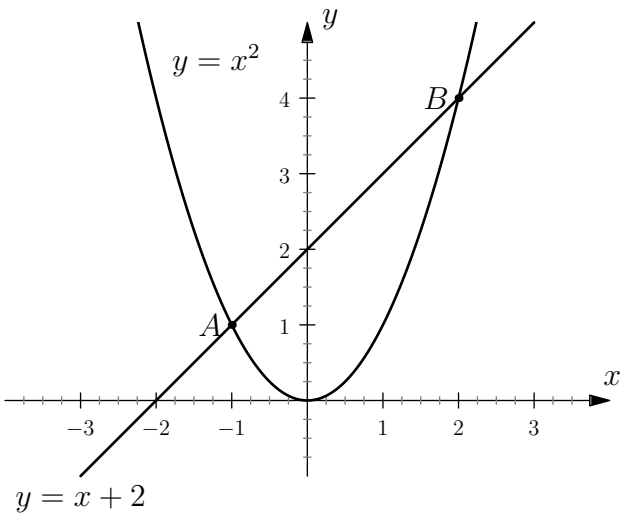

Рис. 5.14. Точки перетину

Розв'яжемо одержану систему рівнянь. Виключивши невідоме y, дістанемо квадратне рівняння

$$x^2 = x + 2 \quad \text{або} \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

яке має два корені:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

або

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

Таким чином, маємо дві точки перетину параболи та прямої (рис.5.14):

$$y_1 = -1 + 2 = 1, \quad y_2 = 2 + 2 = 4, \quad \Rightarrow \quad A(-1, 1), B(2, 4).$$

Зауваження 20. Розв'язок квадратного рівняння

$$x^2 + px + q = 0$$

було знайдено за формулою

$$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

□

Зауваження 21. Іноді користуються графічним методом знаходження точок перетину кривих: будують криві та з графіку визначають точки перетину.

Завдання для самостийної роботи

1. Побудувати рівняння лінії, точки якої рівновіддалені від двох точок $A(2,1)$ і $B(-3,0)$.

2. Побудувати по точках лінії:

а) $y = 2 - x$,

б) $y = 2x - x^2$.

3. З'ясувати, які з вказаних точок $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$, $D(1,2)$ містяться на лінії $y = x^2$?

4. Знайти точки перетину лінії $y = 2 + x - x^2$ з осями координат.

Питання для самоперевірки

1. Що таке лінія на площині?

2. Сформулюйте означення рівняння лінії на площині.

3. Сформулюйте умову, що точка належить даній лінії.

4. Що таке параметричні рівняння лінії на площині.

5. Як знайти точку перетину двох ліній, що задані своїми рівняннями?

6. Як побудувати лінію на площині, якщо відомо її рівняння?

7. Запишить рівняння осі Ox, Oy.

8. Запишить рівняння бісектрис координатних кутів.

6. Пряма на площині

Про пряму ми знаємо, що *через дану точку в даному напряму можна провести тільки одну пряму.*

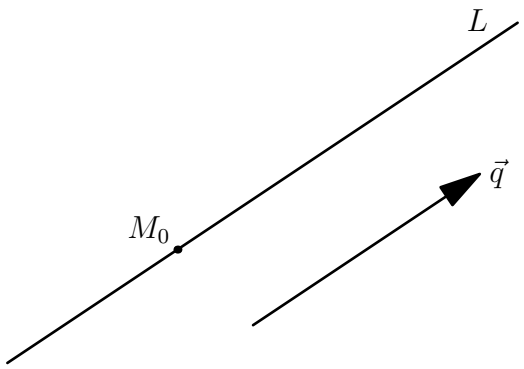

Рис. 6.1. Завдання прямої

Можна також провести пряму через дві точки, але дві точки визначають вектор, який спрямовано вздовж цієї прямої, тобто дві точки на прямій визначають її напрям. Таким чином, щоб задати пряму потрібно задати *точку*, тобто положення прямої, і її *напрям* (рис.6.1).

Напрям прямої на площині можна задати різними способами.

1-й спосіб. Напрям прямої задається за допомогою *напрямного вектора*, тобто вектора, який спрямовано паралельно до прямої.

2-й спосіб. Напрям прямої задається за допомогою *вектора нормалі*, тобто вектора, що перпендикулярний до прямої.

3-й спосіб. Напрям прямої задається за допомогою *кута* α, який пряма утворює з віссю абсцис Ox.

6.1. Канонічне рівняння прямої на площині

Розглянемо пряму L, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Припустимо, що напрям прямої L задається за допомогою *напрямного вектора* $\overrightarrow{q} = (q_x, q_y)$ (рис.6.2).

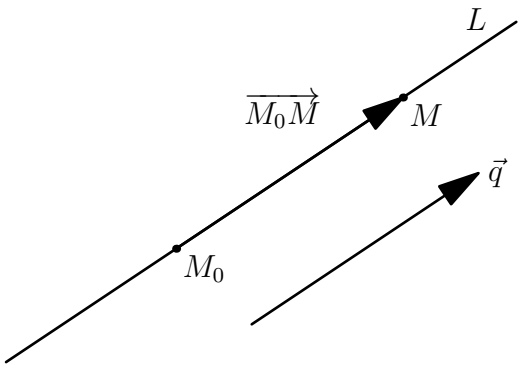

Рис. 6.2. Пряма. Напрямний вектор

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка прямої L. Точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$ визначають вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)\,.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежить на прямій L і буде колінеарним до напрямного вектора $\overrightarrow{q}$ (рис.6.2). Тому

$$\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{q}\,. \tag{6.1}$$

В координатній формі умова колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{q}$ набуває такого вигляду:

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y}. \tag{6.2}$$

Рівняння (6.2) називається *канонічним рівнянням прямої на площині.* Нагадаємо, що це *рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *паралельно вектору* $\overrightarrow{q} = (q_x, q_y)$.

Зауваження 22. Числа q_x, q_y це координати напрямного вектора, тому одночасно дорівнювати нулю не можуть, але кожне з цих чисел може дорівнювати нулю. Наприклад, нехай

$$q_y = 0, \quad \text{тобто} \quad \vec{q} = (q_x, 0)\,.$$

Тоді маємо

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{0}. \tag{6.3}$$

Будемо вважати, що в цій рівності немає ділення на нуль, а нуль у знаменнику означає, що напрямний вектор $\vec{q} = (q_x, 0)$ не має складової вздовж осі Oy і пряма L спрямована паралельно осі Ox.

Рівняння (6.3) у цьому випадку будемо розуміти так:

$$0 \cdot (x - x_0) = q_x (y - y_0), \quad \text{або} \quad y - y_0 = 0.$$

Отже, дістали рівняння прямої, яка паралельна осі Ox (див. (5.11)).

Аналогічно, якщо рівняння прямої має вигляд

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{q_y}, \tag{6.4}$$

це означає, що напрямний вектор $\vec{q} = (0, q_y)$ немає складової вздовж осі Ox і пряма паралельна осі Oy, та її рівняння має вигляд:

$$x - x_0 = 0 \quad \text{або} \quad x = x_0.$$

Приклад 29. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(1, 2)$ і $B(-3, 1)$.

Розв'язання. Дві точки A і B на прямій визначають вектор $\overrightarrow{AB}$, який спрямовано вздовж цієї прямої, тобто визначають напрямний вектор. Знайдемо напрямний вектор:

$$\vec{q} = \overrightarrow{AB} = (-3 - 1, 1 - 2) = (-4, -1).$$

Тоді за формулою (6.2) одержимо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 2}{-1}.$$

Ця пряма зображена на рис.6.3. □

6.2. Параметричні рівняння прямої на площині

В формулі (6.2) відношення прирівняємо параметру t, тоді одержимо таку систему рівнянь:

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = t, \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{q_x} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{q_y} = t, \end{cases}$$

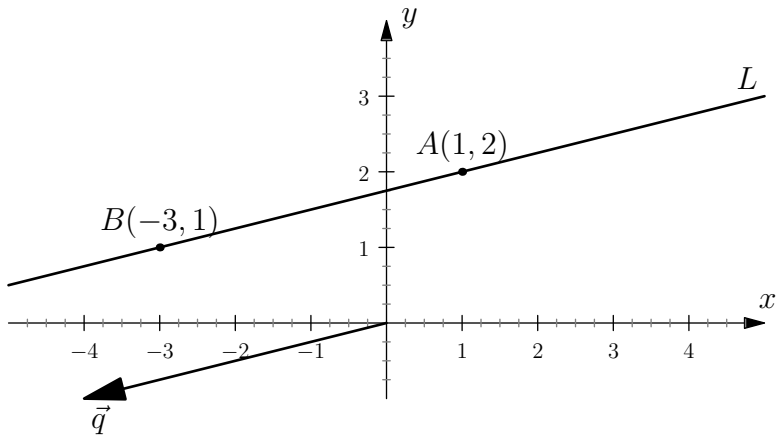

Рис. 6.3. Пряма, яка проходить через дві точки $A(1,2)$ і $B(-3,1)$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + q_x t, \\ y = y_0 + q_y t, \end{cases} \tag{6.5}$$

Система (6.5) називається *параметричними рівняннями прямої на площині.*

Нагадаємо, що ця пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{q} = (q_x, q_y)$.

Приклад 30. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(3,1)$ і $B(-1,2)$.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор:

$$\vec{q} = \overrightarrow{AB} = (-1-3, 2-1) = (-4, 1).$$

Тоді за формулами (6.5) одержимо

$$\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = 1 + t. \end{cases}$$

□

6.3. Загальне рівняння прямої на площині

Розглянемо пряму L, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Припустимо, що напрям прямої L задається за допомогою *вектора нормалі* $\overrightarrow{N}$, тобто вектора, який перпендикулярний до прямої (рис.6.4).

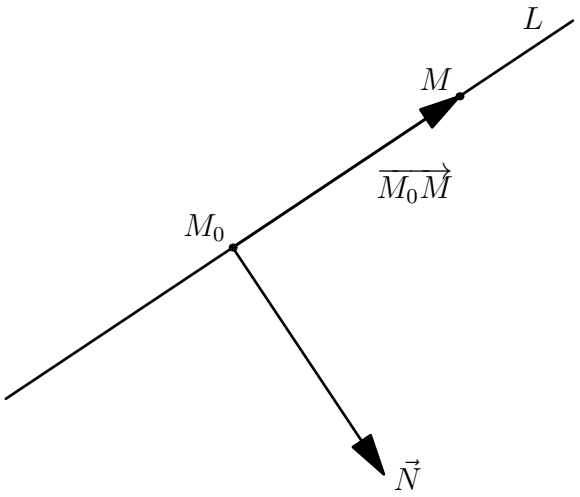

Рис. 6.4. Пряма. Вектор нормалі

Нехай вектор $\overrightarrow{N}$ має таки координати:

$$\overrightarrow{N} = (A, B). \tag{6.6}$$

Нехай точка $M(x, y)$ — довільна точка прямої L (поточна точка). Дві точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$ визначають вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0),$$

що лежить на прямій L і тому перпендикулярний до вектора нормалі $\overrightarrow{N}$. Використовуючи умову перпендикулярності двох векторів

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{N}) = 0 \tag{6.7}$$

у координатній формі, одержимо *рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{N} = (A, B)$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0. \tag{6.8}$$

Якщо розкрити дужки, це рівняння можно привести до *загального вигляду*:

$$Ax + By + C = 0 \quad (C = -Ax_0 - By_0). \tag{6.9}$$

Приклад 31. Записати загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N} = (-3, 1)$.

Розв'язання. За формулою (6.8) маємо

$$-3(x-1)+(y-2)=0, \quad \text{або} \quad -3x+y+1=0.$$

Ця пряма зображена на рис.6.5. □

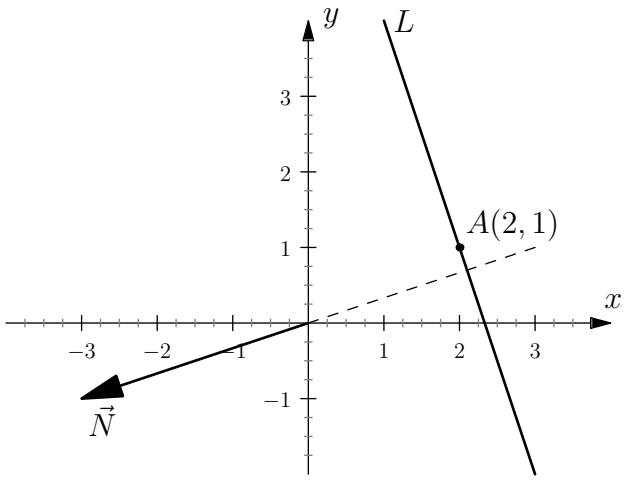

Рис. 6.5. Пряма $-3x+y+1=0$. Вектор нормалі $\vec{N}=(-3,1)$

6.4. Нормальне рівняння прямої

Щоб визначити пряму, треба визначити її напрям і положення. Таким чином, якщо задати відстань від початку координат до прямої, тобто довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, і задати напрям цього перпендикуляра, то положення прямої на площині буде повністю визначене.

Розглянемо пряму L, яка розташована на відстані p від початку координат. Опустимо з початку координат O на пряму L перпендикуляр, основу якого позначимо як P (рис.6.6). Цей перпендикуляр будемо називати *нормаллю* до прямої L.

Очевидно, що довжина перпендикуляра OP дорівнює p:

$$|OP|=p.$$

Орт перпендикуляра $\overrightarrow{OP}$ позначимо як $\overrightarrow{n}$, причому спрямуємо його від початку координат до прямої L (рис.6.6).

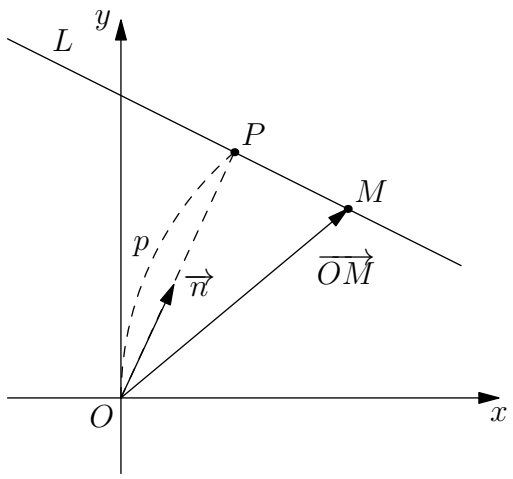

Рис. 6.6. Нормальне рівняння прямої

Розглянемо довільну точку $M(x, y)$, її радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ має координати точки M:

$$\overrightarrow{OM} = (x, y).$$

Тому що точка $M(x, y)$ лежить на прямій L, то проєкція вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрям нормалі $\overrightarrow{n}$ буде дорівнювати величині відрізка OP.

Нагадаємо, що одиничний вектор $\overrightarrow{n}$ спрямовано від початку координат до прямої L. Тому вектори $\overrightarrow{n}$ і $\overrightarrow{OM}$ утворюють гострий кут і величина $\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM}$ буде дотатне число, тобто p.

Отже, *точка $M(x, y)$ належить прямої L тоді і тільки тоді, коли проєкція її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрям вектора нормалі $\overrightarrow{n}$ дорівнює відстані від початка координат до прямої*:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} = p. \tag{6.10}$$

Ця проєкція дорівнює скалярному добутку радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на орт нормалі $\overrightarrow{n}$. Таким чином, маємо:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{n}\overrightarrow{OM} = p. \tag{6.11}$$

Нехай вектор $\overrightarrow{n}$ утворює з осями координат Ox і Oy кути α, β відповідно. Тоді напрямні косинуси цих кутів є координатами вектора $\overrightarrow{n}$:

$$\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta). \tag{6.12}$$

Враховуючи цю рівність, з (6.11) отримаємо *нормальне рівняння прямої*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0. \tag{6.13}$$

Це рівняння прямої, що проходить на відстані p від початка координат перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

Рівняння (6.13) — це рівняння загального вигляду. Воно має такі дві особливості:

1) величина p завжди повинна бути невід'ємною;

2) сума квадратів коефіцієнтів при змінних повинна дорівнювати одиниці.

Нагадаємо, що коефіцієнти A і B при змінних у рівнянні прямої загального вигляду

$$Ax + By + C = 0, \tag{6.14}$$

це координати вектора нормалі, тобто

$$\overrightarrow{N} = (A, B).$$

Якщо поділити вектор нормали на його довжину

$$\left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

то одержимо вектор одиничної довжини. Але вектор $\overrightarrow{n}$ спрямовано від початку координат до прямої, тому потрібно, щоб вільний член набував від'ємне значення.

Таким чином, рівняння прямої загального вигляду можна привести до нормального виду, якщо помножити загальне рівняння на множник

$$-\frac{\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{6.15}$$

Тут функція $\operatorname{sgn} x$ дозволяє обрати знак вільного члена рівняння (6.13).

Нагадаємо формулу функції «знак числа»:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

6.5. Відстань від точки до прямої

Розглянемо пряму L і точку $M_1(x_1, y_1)$, яка розміщена поза межами цієї прямої та знайдемо відстань від точки M_1 до прямої L.

Опустимо з точки M_1 на пряму L перпендикуляр, основу якого позначимо як точку M_1'. Визначимо *відстань* d від точки M_1 до прямої L як довжину перпендикуляра, опущеного на дану пряму з точки M_1 (рис.6.7).

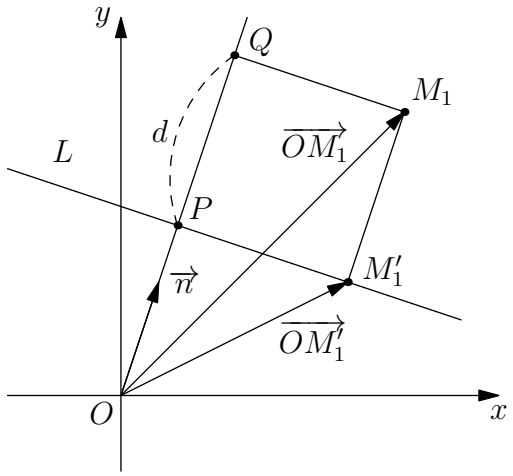

Рис. 6.7. Відстань від точки до прямої

Таким чином, маємо:

$$d = |M_1 M_1'| . \tag{6.16}$$

Означення 55. *Відхилом* δ точки M_1 від прямої L називається відстань d, яку беремо зі знаком плюс, коли точка та початок координат розташовані по різні боки від даної прямої, і зі знаком мінус, коли вони розташовані по один бік від даної прямої.

Очевидно, що $d = |\delta|$.

Позначимо орт нормалі як $\overrightarrow{n}$, причому спрямуємо його від початку координат до прямої та побудуємо прямокутні проєкції радіус-векторів $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_1'}$ на напрям вектора нормалі $\overrightarrow{n}$. Одержимо відрізки OQ і OP відповідно (рис.6.7). Тоді маємо:

$$\delta = \text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} - \text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM'}. \tag{6.17}$$

Нагадаємо, що точка M_1' лежить на прямій L, тому проєкція її радіус-вектора $\overrightarrow{OM_1'}$ на напрям вектора нормалі $\overrightarrow{n}$ дорівнює відстані від початку

координат до прямої (стр.116):

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM_1'} = \overrightarrow{n}\overrightarrow{OM_1'} = p \tag{6.18}$$

Нехай орт $\overrightarrow{n}$ утворює з осями координат кути α, β, тоді його координати — це його напрямні косинуси:

$$\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta). \tag{6.19}$$

Враховуючи значення скалярного добутку

$$\overrightarrow{n}\overrightarrow{OM_1} = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta, \tag{6.20}$$

остаточно одержимо:

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta - p, \tag{6.21}$$

або

$$d = |\delta| = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta - p|\,. \tag{6.22}$$

Отже, *щоб знайти відстань від точки до прямої треба до нормального рівняння прямій підставити координати даної точки і від результату обчислити абсолютну величину.*

Скористаємось формулами (6.14), (6.15), тоді одержимо, що відстань від точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ можна обчислити за формулою:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{6.23}$$

Приклад 32. Знайти відстань від точки $A(3, 3)$ до прямої $x + 2y + 1 = 0$.

Розв'язання. Щоб знайти відстань від точки до прямої потрібно привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду і підставити в нормальне рівняння координати точки замість поточних координат x і y.

За формулою (6.23) маємо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 3 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7}{5}\sqrt{5}.$$

Пряма $x + 2y + 1 = 0$, точка $A(3, 3)$ і відстань зображені на рис.6.8. □

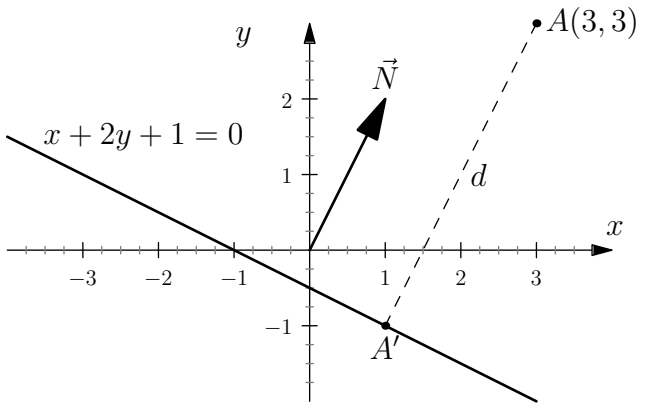

Рис. 6.8. Відстань d від точки A до прямої $x + 2y + 1 = 0$

6.6. Рівняння прямої у відрізках на осях

Якщо поділити загальне рівняння прямої (6.9) на вільний член C, то одержимо *рівняння прямої у відрізках на осях*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}, \tag{6.24}$$

де a, b — відрізки, що відтинаються прямою від осей координат.

Дійсно, знайдемо точки перетину прямої (6.24) з осями координат.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 & \text{— рівняння прямої,} \\ x = 0 & \text{— рівняння осі } Oy. \end{cases}$$

Звідси випливає

$$\frac{y}{b} = 1, \quad y = b.$$

Тобто пряма (6.24) перетинає вісь Oy у точці $(0, b)$.

Аналогічно, маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 & \text{— рівняння прямої,} \\ y = 0 & \text{— рівняння осі } Ox. \end{cases}$$

Тоді одержимо

$$\frac{x}{a} = 1, \quad x = a.$$

Таким чином, пряма (6.24) перетинає вісь Ox у точці $(a, 0)$.

Приклад 33. Записати рівняння прямої $2x - 3y + 2 = 0$ у відрізках.

Розв'язання. Перенесемо вільний член ліворуч:

$$2x - 3y = -2.$$

Поділимо обидві частини рівняння на -2, тоді одержимо:

$$\frac{2x}{-2} - \frac{3y}{-2} = 1, \quad \text{або} \quad \frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1.$$

Таким чином, дана пряма відтинає на осі обсцис відрізок, величина якого дорівнює $a = -1$, та на осі ординат відрізок, величина якого $b = \frac{2}{3}$. □

Приклад 34. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3, 2)$ і відтинає на додатній частині осі Oy відрізок довжиною 4.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням у відрізках (6.24). Тоді за умовами задачі маємо $b = 4$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{4} = 1.$$

Щоб знайти коефіцієнт a, підставимо в це рівняння координати точки $A(3, 2)$:

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{4} = 1, \quad \frac{3}{a} + \frac{1}{2} = 1, \quad a = 6.$$

Отже, маємо

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1, \quad \text{або} \quad 2x + 3y - 12 = 0.$$

□

6.7. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Розглянемо пряму L. Напрям прямої L будемо визначати за допомогою *кута* α, який пряма утворює з віссю абсцис Ox.

Означення 56. Тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається *кутовим коефіцієнтом* цієї прямої: $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Зауваження 23. Якщо пряма паралельна осі Ox, то кутовий коефіцієнт дорівнює нулю, якщо пряма перпендикулярна до осі Ox, то кутовий коефіцієнт не існує.

Розглянемо пряму L, яка утворює гострий кут α з віссю абсцис Ox і відтинає на осі Oy відрізок $OB = b$ (рис.6.9).

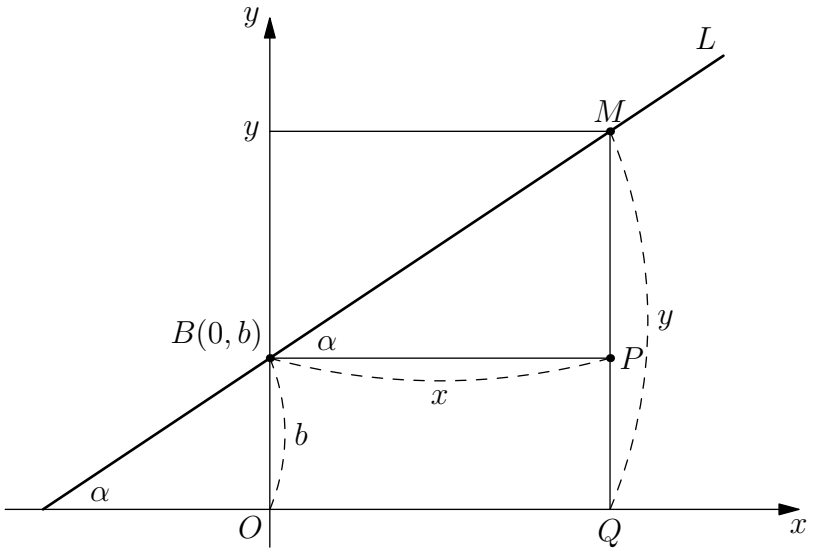

Рис. 6.9. Пряма. Кутовий коефіцієнт

Нехай точка $M(x, y)$ — довільна точка прямої L. Тоді

$$y = QM = PM + QP.$$

З трикутника BPM маємо

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{PM}{BP} = \frac{y - b}{x}.$$

Звідси випливає *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*:

$$y = kx + b. \tag{6.25}$$

Тут b — величина відрізка, який пряма відтинає на осі Oy, а k — кутовий коефіцієнт, він дорівнює тангенсу кута між прямою та віссю Ox. Насправді знайдемо точку перетину прямої L та осі Oy:

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ x = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = b,$$

тобто пряма L з віссю Oy перетинається в точці $(0, b)$.

Якщо $b = 0$, то маємо рівняння прямої

$$y = kx,$$

яка проходить через початок координат і утворює з віссю Ox кут α, $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Якщо $k = 0$ з (6.25) маємо рівняння прямої, яка паралельна осі Ox:

$$y = b.$$

Іноді треба побудувати рівняння прямої L з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0)$. Точка M_0 міститься на прямої L, тому її координати задовольняють рівняння прямої:

$$y_0 = kx_0 + b. \tag{6.26}$$

Віднімемо з рівняння (6.25) рівняння (6.26). Тоді одержимо таке рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і утворює з віссю Ox кут α, $k = \operatorname{tg}\alpha$:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{6.27}$$

Приклад 35. Побудувати рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відрізок, величина якого дорівнює -2, та утворює з віссю Ox кут $45°$.

Розв'язання. Тут $b = -2$, $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Таким чином, маємо таке рівняння:

$$y = x - 2.$$

Ця пряма зображена на рис. (рис.6.10). □

Приклад 36. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, якщо пряма задана загальним рівнянням $2x + 3y + 5 = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння прямої відносно y. Тоді маємо

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}.$$

Таким чином, пряма має кутовий коефіцієнт $k = -\dfrac{2}{3}$ та відтинає на осі ординат відрізок, величина якого $b = -\dfrac{5}{3}$. □

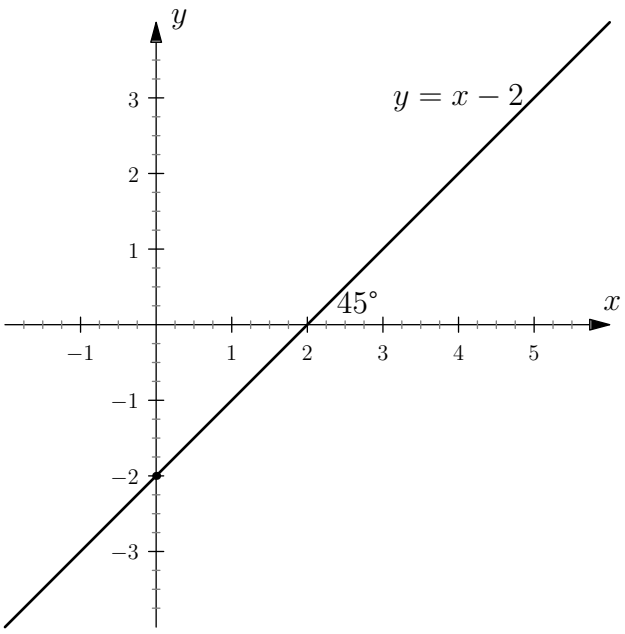

Рис. 6.10. Пряма. Кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

6.8. Побудова прямої на площині

Побудувати пряму на площині дуже просто: треба побудувати дві точки, що містяться на прямій і провести через ці точки пряму (нагадаємо, що дві точки — це вектор, тобто напрям). Щоб знайти дві точки, потрібно задати дві абсциси та знайти з рівняння прямої відповідні ординати. Наприклад, нехай $x = 0$, тоді з рівняння з кутовим коефіцієнтом випливає, що $y = b$. Таким чином маємо одну точку $(0, b)$. Якщо надати абсцисі x інше значення, одержимо іншу точку. Наприклад, нехай $x = 2$, тоді маємо $y = 2k + b$, тобто точку $(2, 2k + b)$.

Щоб побудувати пряму, можна також знайти точки перетину прямої з осями координат.

Приклад 37. Побудувати пряму $3x + 4y - 12 = 0$.

Розв'язання. Приведемо рівняння прямої до вигляду у відрізках на осях: перенесемо вільний член праворуч і поділимо на нього рівняння прямої:

$$\frac{3x + 4y}{12} = \frac{12}{12}, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$$

Отже, пряма перетинає осі координат у точках $(4, 0)$ і $(0, 3)$. Будуємо точки перетину прямої з осями координат та проводимо пряму (рис.6.11).

□

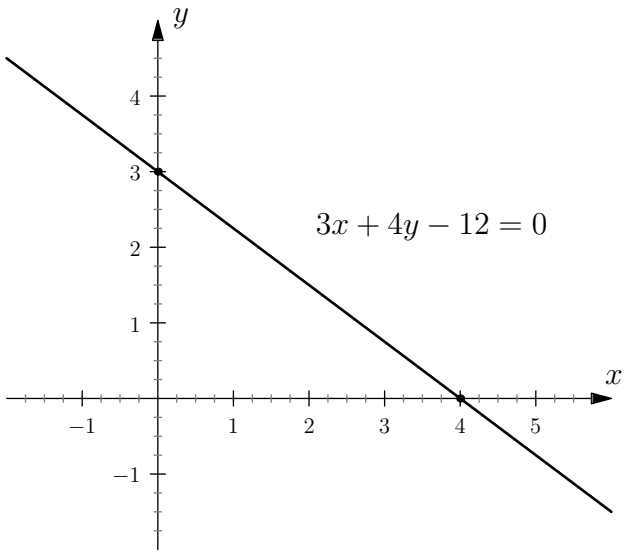

Рис. 6.11. Пряма у відрізках $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 1$

Приклад 38. Скласти рівняння прямої, привести його до загального вигляду, знайти відстань від початку координат до цієї прямої, якщо:

а) пряма задана точкою $M_0\,(1;1)$ та вектором нормалі $\vec{N} = (2;-1)$;

б) пряма задана точкою $M_0\,(-1;1)$ та напрямним вектором $\vec{q} = (2;0)$;

в) пряма задана двома точками $M_1\,(1;2)$ та $M_2\,(-1;0)$.

Розв'язання. а) Нехай пряма задана точкою $M_0\,(1;1)$ та вектором нормалі $\vec{N} = (2;-1)$.

Скористаємось рівнянням прямої (6.8), що проходить через точку перпендикулярно до вектора нормалі. Отже маємо:

$$2 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) = 0.$$

Розкриваючи дужки, приведемо це рівняння до загального вигляду:

$$2x - 2 - y + 1 = 0, \quad \text{або} \quad 2x - y - 1 = 0.$$

Знайдемо відстань від початку координат до цієї прямої. Для цього приведемо одержане загальне рівняння $2x - y - 1 = 0$ до нормального вигляду. Знайдемо модуль вектора нормалі

$$|\vec{N}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$$

та помножимо загальне рівняння на множник

$$-\frac{\operatorname{sgn} C}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

тоді одержимо нормальне рівняння прямої:

$$\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\, x - \frac{1}{\sqrt{5}}\, y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.$$

Таким чином, шукана відстань дорівнює $p = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

б) Нехай пряма задана точкою $M_0\,(-1; 1)$ та напрямним вектором $\vec{q} = (2; 0)$.

Скористаємось рівнянням (6.2):

$$\frac{x - (-1)}{2} = \frac{y - 1}{0} \quad \text{або} \quad \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 1}{0}.$$

Звідси випливає таке загальне рівняння:

$$y - 1 = 0,$$

воно вже у нормальному вигляді. Це рівняння прямої, яка паралельна осі Ox і відстань до початку координат дорівнює одиниці.

в) Пряма задана двома точками $M_1\,(1; 2)$ та $M_2\,(-1; 0)$.

Дві точки M_1 та M_2 визначають вектор $\overrightarrow{M_2M_1}$, який можна взяти за напрямний:

$$\vec{q} = \overrightarrow{M_2M_1} = (1 - (-1); 2 - 0) = (2; 2)\,.$$

Тоді маємо канонічне рівняння прямої

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2}.$$

Звідси випливає

$$x - 1 = y - 2 \quad \text{або} \quad x - y + 1 = 0.$$

Тому що

$$|\vec{N}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

маємо таке нормальне рівняння прямої

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\,x+\frac{1}{\sqrt{2}}\,y-\frac{1}{\sqrt{2}}\;=0.$$

Таким чином, відстань від прямої до початку координат дорівнює $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати прямі, що задані рівняннями:
а) $y=2x-1$,
б) $2x-3y-6=0$.
2. Знати точку перетину двох прямих:
а) $5x-7y-20=0$, $7x-10y+15=0$;
б) $2x+3y-7=0$, $4x+6y+11=0$;
в) $2x-y=0$, $x-\dfrac{1}{2}y=0$.

Питання для самоперевірки

1. Як можна визначити пряму на площині?

2. Запишить різні види рівняннь прямої на площині.

3. Як знайти точку перетину двох прямих? Кут між прямими на площині?

4. Як знайти кут, якій пряма утворює з віссю Ox?

5. Як знайти відстань від точки до прямої на площині?

6. Сформулюйте умови паралельності (перпендикулярності) двох прямих на площині.

7. Лінії другого порядку

Означення 57. *Лініями другого порядку* на площині називаються лінії, які визначаються *алгебраїчними рівняннями другого порядку* вигляду

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{7.1}$$

причому коефіцієнти A, B і C не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Рівняння (7.1) визначає такі лінії: коло, еліпс, гіперболу та параболу.

7.1. Коло

Означення 58. *Колом радіуса* R називається множина точок площини, які рівновіддалені на відстань R від певної точки площини M_0, яка називається *центр кола* (рис.7.1).

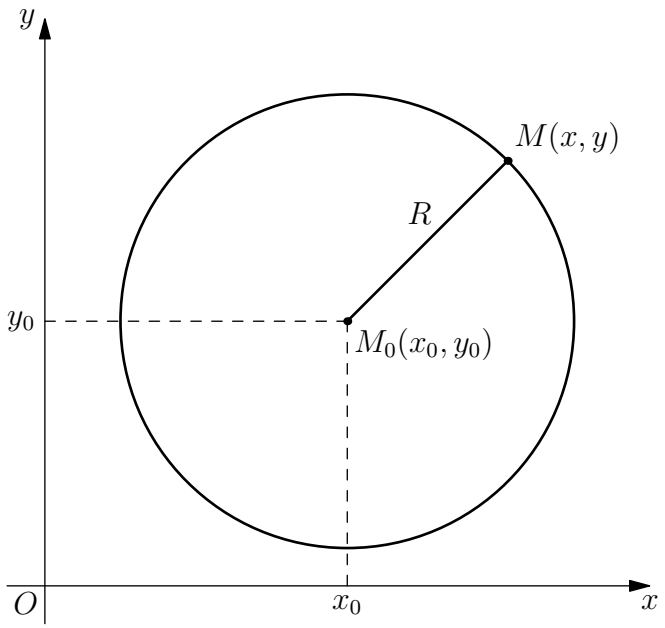

Рис. 7.1. Коло $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Розглянемо коло радіуса R з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$. Нехай точка $M(x, y)$ — довільна точка кола. Тоді за означенням кола маємо

$$|M_0M| = R,$$

або

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Отже, рівняння кола радіуса R з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{7.2}$$

Якщо в рівності (7.2) розкрити дужки, то одержимо таке рівняння:

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Звідси випливає, що:
1) коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні;
2) відсутній член з добутком поточних координат, тобто член з xy.

7.2. Еліпс

Означення 59. *Еліпсом* називається множина точок площини, для кожної точки якої сума відстаней до двох даних точок площини, що називаються *фокусами*, є величина стала.

Позначимо фокуси через F_1 і F_2. Відстані r_1 і r_2 від довільної точки еліпса M до фокусів називаються *фокальними радіусами* цієї точки (рис.7.2):

$$r_1 = |F_1M|, \quad r_2 = |F_2M|.$$

Отже, за означенням еліпса маємо:

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad a = \text{const}. \tag{7.3}$$

Відстань між фокусами позначимо як $2c$.

З трикутника F_1MF_2 випливає, що $2c \leqslant 2a$.

Якщо $2c = 2a$, то еліпс вироджується у відрізок прямої, обмежений фокусами. Цей випадок не розглядається.

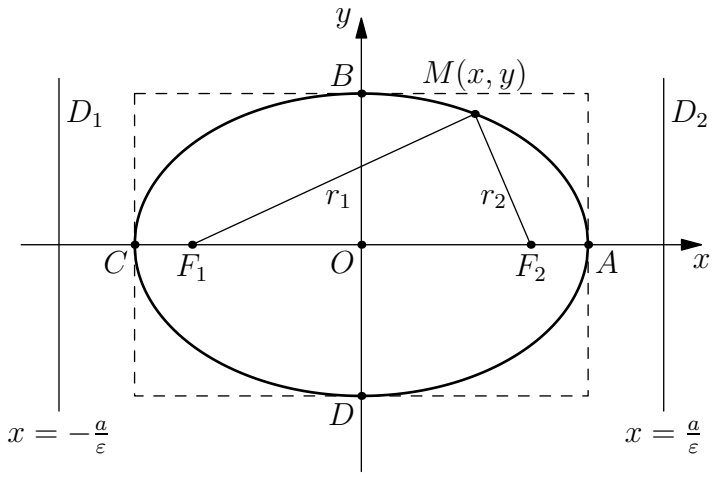

Рис. 7.2. Еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Отже, будемо вважати $2c < 2a$, тобто $c < a$.

Якщо $c = 0$, то фокуси F_1 і F_2 збігаються і еліпс вироджується у коло радіуса a. Таким чином, коло є частковий випадок еліпса.

Нехай вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, причому початок координат розміщується в середині відрізка F_1F_2. Тоді фокуси мають таки координати:

$$F_1(-c, 0), \quad F_2(c, 0). \tag{7.4}$$

Відстані від точки $M(x, y)$ до фокусів обчислимо за формулами:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{7.5}$$

Тоді, за формулою (7.3) одержимо рівняння еліпса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{7.6}$$

Позбавимося радикалів: перенесемо праворуч другий радикал і піднесемо обидві частини до квадрату:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Спростимо цей вираз:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{7.7}$$

Знову піднесемо до квадрату:

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right) \tag{7.8}$$

Тому що $c < a$, то вираз $a^2 - c^2 > 0$. Позначимо

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} < a. \tag{7.9}$$

Поділивши вираз (7.7) на $a^2 b^2$, одержимо *канонічне рівняння еліпса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.10}$$

З рівняння еліпса випливає, що кожний доданок лівої частини рівняння еліпса не перевищує одиниці:

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

тобто координати всіх точок еліпса задовольняють нерівностям:

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b. \tag{7.11}$$

Таким чином, еліпс цілком розміщується у прямокутнику, який визначається нерівностями (7.11).

Точки перетину еліпса з осями координат

$$A(a, 0), \quad B(0, b), \quad C(-a, 0), \quad D(0, -b)$$

називаються *вершинами еліпса*.

Відрізки AC і BD, які з'єднують протилежні вершини еліпса, дорівнюють $2a$ і $2b$ відповідно і називаються *великою й малою осями еліпса*.

Числа a і b — *велика та мала півосі еліпса*, пов'язані з половиною відстані c між фокусами рівністю:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Тому, що змінні x та y входять до рівняння еліпса в другому степені, еліпс має симетрію. Осі симетрії Ox та Oy називаються *головними осями еліпса*, а центр симетрії, точка $O(0, 0)$, називається *центром еліпса*.

Форма еліпса залежить від відношення b/a, якщо $b = a$, то фокуси збігаються з центром ($c = 0$) і еліпс перетворюється на коло:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

тому еліпс можна розглядати, як «стиснуте» коло. Мірою сплюснутості є ексцентриситет еліпса.

Ексцентриситетом еліпса ε називається відношення половини фокусної відстані c до довжини великої півосі a:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Тому, що $0 \leqslant c < a$, то для еліпса $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Чим більше є ексцентриситет, тим більше відстань від центра еліпса до фокусів і тим більше еліпс буде «стиснутим». У граничному випадку $\varepsilon = 1$ еліпс перетворюється на здвоєну велику вісь. Якщо $\varepsilon = 0$, то еліпс перетворюється на коло.

Прямі $D_1 : x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ і $D_2 : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами еліпса*. Відношення відстаней довільної точки еліпса до фокуса й відповідної директриси є величина стала й дорівнює ексцентриситету цього еліпса.

Звернемо увагу, що коефіцієнти при x^2 і y^2 у рівнянні еліпса завжди мають однакові знаки.

7.3. Гіпербола

Означення 60. *Гіперболою* називається множина точок площини, для кожної точки якої модуль різниці відстаней до двох даних точок площини, що називаються *фокусами*, є величина стала.

Позначимо фокуси через F_1 і F_2. Відстані r_1 і r_2 від довільної точки гіперболи $M(x, y)$ до фокусів називаються *фокальними радіусами* цієї точки (рис.7.3):

$$r_1 = |F_1M|\,, \quad r_2 = |F_2M|\,. \tag{7.12}$$

За означенням гіперболи маємо

$$|r_1 - r_2| = 2a \quad \text{або} \quad r_1 - r_2 = \pm 2a, \quad a = \text{const}\,. \tag{7.13}$$

З рівняння (7.13) випливає, що гіпербола має дві окремі гілки: знак плюс у правій частині береться, коли $r_1 > r_2$ (права гілка) і знак мінус, коли $r_1 < r_2$ (ліва гілка).

Нехай вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, причому початок координат розміщується в середині відрізка F_1F_2.

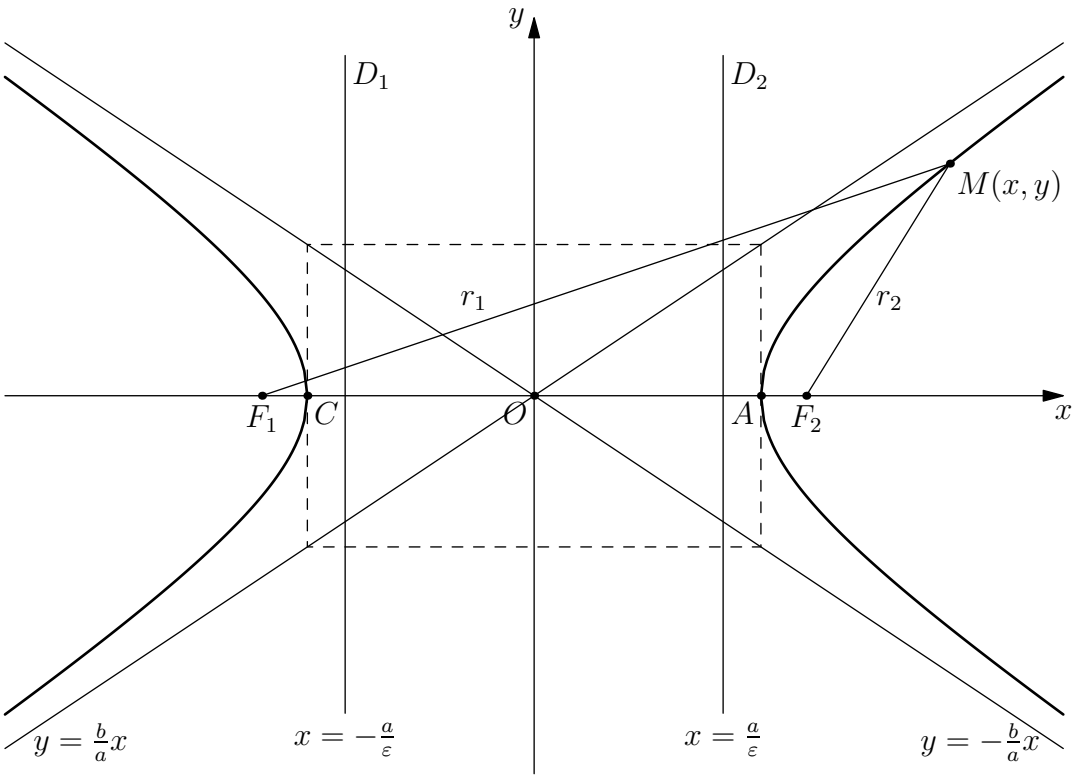

Рис. 7.3. Гіпербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Відстань між фокусами позначимо як $2c$, тоді фокуси мають таки координати: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Зауважимо, що з трикутника F_1MF_2 випливає, що $2c \geqslant 2a$.

Підставляючи до рівняння (7.13) значення фокальних радіусів, одержимо рівняння гіперболи:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{7.14}$$

Перенесемо праворуч другий радикал і піднесемо обидві частини до квадрату:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{7.15}$$

Знову піднесемо до квадрату та спростимо одержаний вираз:

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right) \tag{7.16}$$

Тому що $a < c$, то вираз $c^2 - a^2 > 0$. Позначимо

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}. \tag{7.17}$$

Поділивши вираз (7.7) на $-a^2b^2$, одержимо *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.18}$$

Оскільки рівняння (7.3) містить тільки квадрати поточних координат, то осі координат є *осями симетрії гіперболи*. Точка перетину осей симетрії $O(0,0)$ називається *центром гіперболи*.

З рівняння гіперболи випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1, \quad \text{або} \quad |x| \geqslant a,$$

тобто у вертикальній смузі, яка обмежена прямими

$$x = -a, \quad x = a,$$

точок гіперболи немає. Отже, вісь Oy точок перетину з гіперболою немає.

Гіпербола (7.18) перетинає вісь Ox в точках $A(a,0)$, $C(-a,0)$. Ці точки називаються *вершинами гіперболи*. Відрізок AC дорівнює $2a$.

Вісь симетрії, яка перетинає гіперболу, називається *дійсною віссю симетрії*, а вісь симетрії, яка не перетинає гіперболу — *уявною віссю симетрії*.

Числа a і b — називаються *дійсною та уявною півосями гіперболи*, вони пов'язані з половиною відстані між фокусами рівністю

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ексцентриситетом гіперболи ε називається відношення половини фокусної відстані c до довжини великої півосі a:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Тому, що для гіперболи $c > a$, маємо $\varepsilon > 1$.

Звернемо увагу, що коефіцієнти при x^2 і y^2 у рівнянні гіперболи завжди мають різні знаки.

Прямі $y = \pm \dfrac{b}{a}\, x$ називаються *асимптотами гіперболи*.

З рівняння гіперболи випливає, що гіпербола розміщується зовні прямокутнику $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, діагоналі якого лежать на асимптотах гіперболи, причому коли точка гіперболи прямує до нескінченності, вона наближується до асимптоти гіперболи.

Прямі $D_1 : x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ і $D_2 : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами гіперболи.*

Зауважимо, що *відношення відстаней довільної точки гіперболи до фокуса й відповідної директриси є величина стала та дорівнює ексцентриситету цієї гіперболи.*

7.4. Парабола

Означення 61. *Параболою* називається множина точок площини, кожна точка якої рівновіддалена як від даної точки площині, що називається *фокусом*, так і від даної прямої, що називається *директрисою.*

Фокус параболи позначимо через F. Відстань від фокуса до директриси (довжину відрізка FK) позначимо як p (рис.7.4).

Означення 62. Відстань від фокуса параболи до директриси називається *параметром параболи.*

Таким чином, p — параметр параболи.

Нехай вісь Ox проходить через фокус F перпендикулярно до директриси D, причому початок координат розміщується в середині відрізка FK. Тут точка K є прямокутна проєкція фокуса F на директрису D. Тоді фокус має таки координати $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, а рівняння директриси буде

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Відстань від довільної точки M параболи до директриси позначимо як d, а відстань від точки M до фокуса F — як r. Ця відстань називається *фокальним радіусом* (рис.7.4)). Тоді, за означенням параболи, маємо

$$r = d. \tag{7.19}$$

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка параболи. Тоді фокальний радіус має таке значення

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \tag{7.20}$$

Звідси випливає рівняння параболи

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

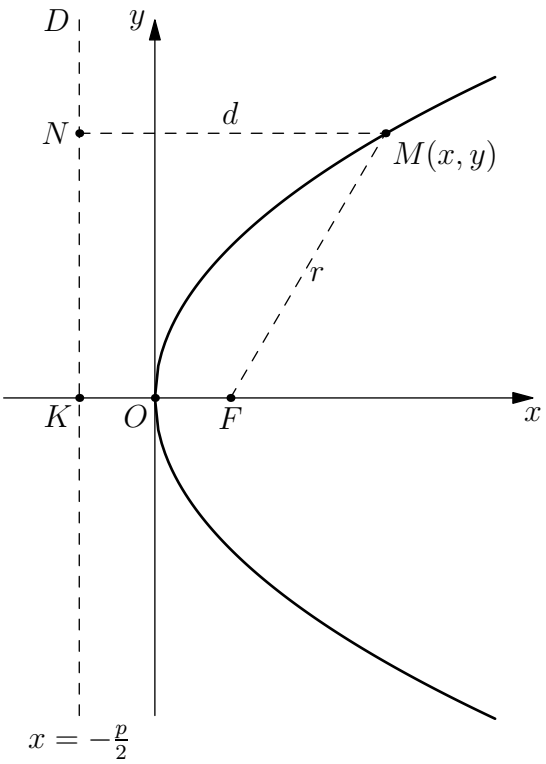

Рис. 7.4. Парабола $y^2 = 2px$

Після спрощення одержимо *канонічне рівняння параболи*:

$$y^2 = 2px. \tag{7.21}$$

З рівняння параболи випливає, що поточна змінна x не може набувати від'ємних значень, тобто всі точки параболи розташовані праворуч від осі ординат Oy. Крім того, поточна змінна y у рівнянні має другий степінь. Це означає, що вісь абсцис Ox є *віссю симетрії параболи.*

Вісь симетрії називається *віссю параболи.*

Парабола перетинає вісь Ox у точці $O(0, 0)$ (у початку координат). Точка перетину параболи з віссю параболи називається *вершиною параболи.*

Ексцентриситет параболи вводиться таким чином:

відношення відстаней довільної точки параболи до фокуса й директриси є величина стала й дорівнює ексцентриситету цієї параболи.

За означенням параболи маємо, що ексцентриситет параболи дорівнює одиниці, тобто

$$\varepsilon = 1.$$

Приклад 39. Надано лінію другого порядку

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0.$$

- звести рівняння лінії до канонічного вигляду,
- знайти її основні характеристики,
- побудувати цю лінію.

Розв'язання. Коефіцієнти при x^2 та y^2 мають однакові знаки, тому лінія, що розглядається, — еліпс.

Застосуємо метод виділення повних квадратів, тобто будемо користуватися формулами скороченого множення:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{7.22}$$

Розглянемо члени рівняння, які містять x:

$$5x^2 - 30x$$

і винесемо множник при x^2 за дужки:

$$5x^2 - 30x = 5(x^2 - 6x).$$

Порівняємо цей вираз з формулою (7.22). Якщо покласти $a = x$, то маємо, що $b = 3$ і, якщо додати та відняти $b^2 = 3^2$, одержимо:

$$5x^2 - 30x = 5(x^2 - 6x) = 5(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) = \\ = 5((x-3)^2 - 9) = 5(x-3)^2 - 45.$$

Аналогічно

$$9y^2 + 18y = 9(y^2 + 2y) = 9(y^2 + 2y + 1 - 1) = \\ = 9((y+1)^2 - 1) = 9(y+1)^2 - 9.$$

Тоді маємо

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 5(x-3)^2 - 45 + 9(y+1)^2 - 9 + 9 = 0,$$

або

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 - 45 = 0$$

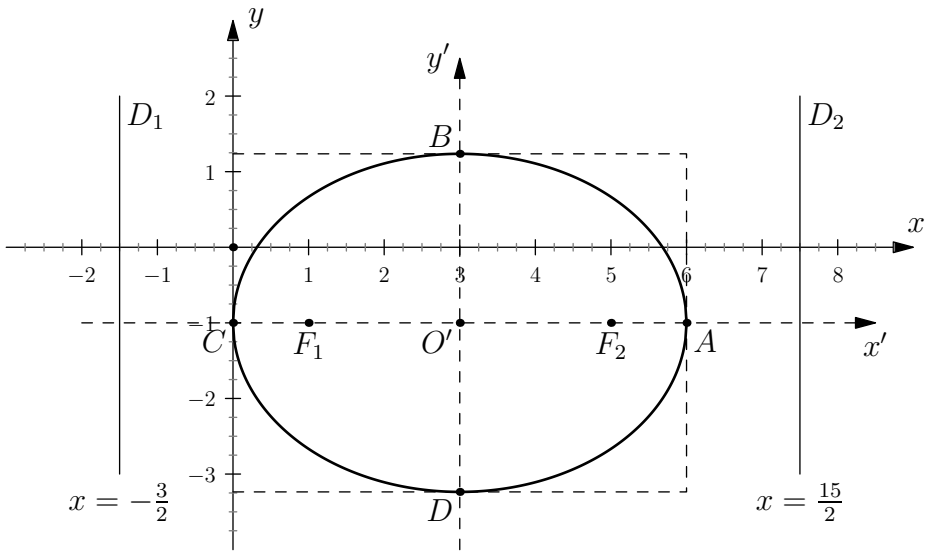

Рис. 7.5. Еліпс $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{5}=1$

Перенесемо число 45 праворуч и поділимо на нього рівняння, тоді одержимо канонічне рівняння розглядаємої лінії:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1.$$

Таким чином, ця лінія – еліпс з центром в точці $(3;-1)$ (рис.7.5).

Позначимо

$$x'=x-3,\quad y'=y+1.$$

Тоді маємо таке рівняння еліпса, в системі координат, яка пов'язана з осями еліпса:

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{5}=1.$$

Основні характеристики:

– півосі: $a=3$, $b=\sqrt{5}$;

– фокуси: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2$,

тому, що

$$x=x'+3,\quad y=y'-1,$$

маємо

$$F_1(-2+3,0-1)=F_1(1,-1),\quad F_2(2+3,0-1)=F_2(5,-1);$$

– ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$;
– рівняння директрис:

$$x' = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{9}{2},$$
$$x' = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{9}{2},$$

або

$$x = x' + 3 = -\frac{9}{2} + 3 = -\frac{3}{2},$$
$$x = x' + 3 = \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}.$$

□

Приклад 40. Надано лінію другого порядку

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$$

- звести рівняння лінії до канонічного вигляду,
- побудувати цю лінію,
- знайти її основні характеристики.

Розв'язання. Це рівняння гіперболи, тому що доданки другого степеня x^2 та y^2 мають різні знаки.

Виділимо повні квадрати:

$$16x^2 - 64x = 16(x^2 - 4x) = 16(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) = \\ = 16((x-2)^2 - 4) = 16(x-2)^2 - 64,$$

$$-9y^2 - 54y = -9(y^2 + 6y) = -9(y^2 + 6y + 9 - 9) = \\ = -9((y+3)^2 - 9) = -9(y+3)^2 + 81.$$

Тоді маємо

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = \\ = 16(x-2)^2 - 64 - 9(y+3)^2 + 81 - 161 = 0.$$

або

$$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 - 144 = 0.$$

Звідси випливає таке рівняння лінії:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Таким чином, ця лінія – гіпербола з центром в точці $(2; -3)$ (рис.7.6).

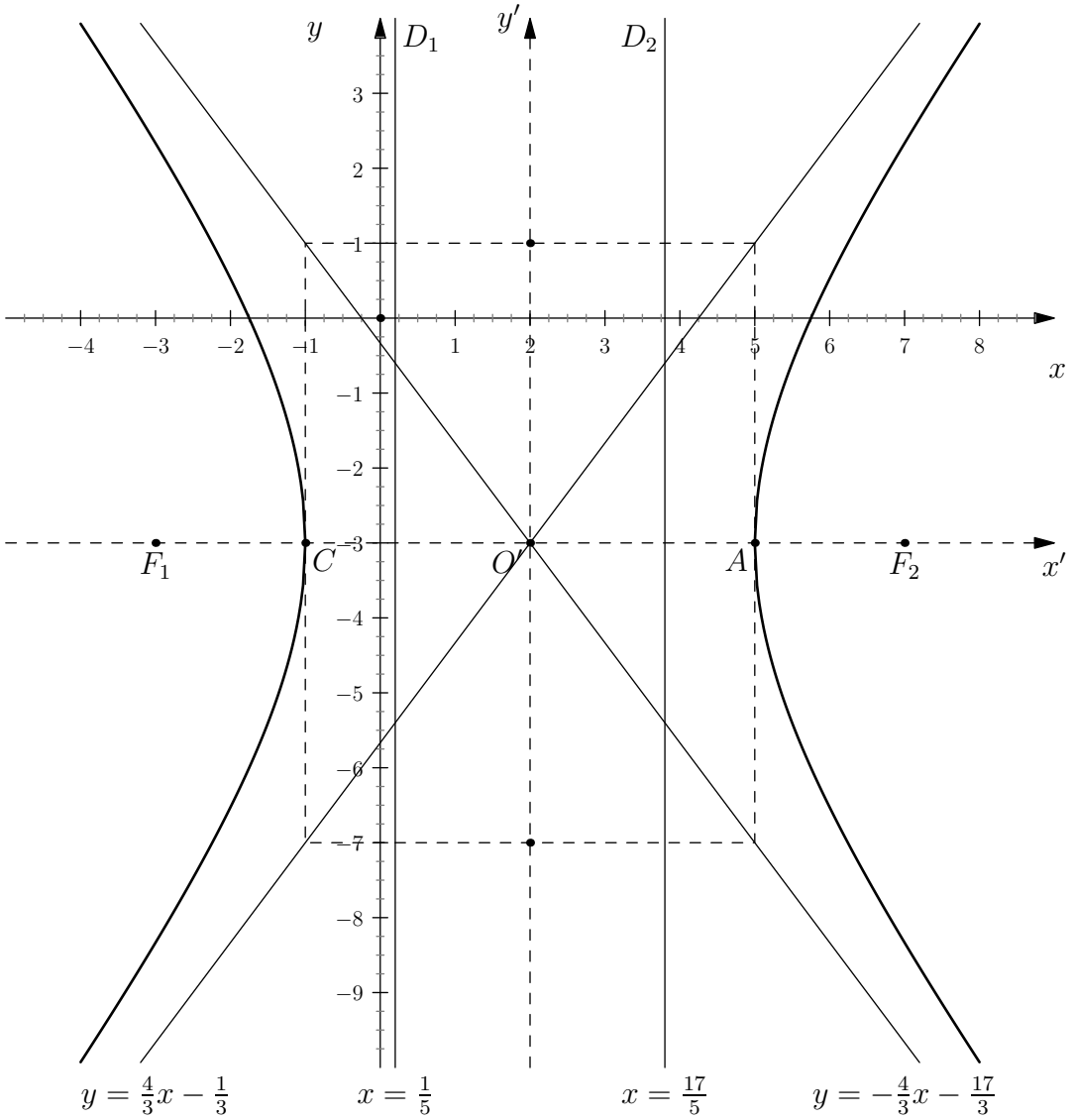

Рис. 7.6. Гіпербола $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

Позначимо

$$x' = x - 2,$$
$$y' = y + 3.$$

Тоді в системі координат, яка пов'язана з осями гіперболи, рівняння набуває канонічного вигляду:

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} = 1.$$

Основні характеристики гіперболи:

– півосі: $a = 3$, $b = 4$;

– фокуси: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$,

тому, що

$$x = x' + 2, \quad y = y' - 3,$$

маємо

$$F_1(-5 + 2, 0 - 3) = F_1(-3, -3), \quad F_2(5 + 2, 0 - 3) = F_2(7, -3);$$

– ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$;

– рівняння асимптот

$$y' = -\frac{b}{a}x' = -\frac{4}{3}x', \quad y' = \frac{b}{a}x' = \frac{4}{3}x,$$

або

$$y = y' - 3 = -\frac{4}{3}(x - 2) - 3 = -\frac{4}{3}x - \frac{17}{3}, \quad y = y' + 3 = \frac{4}{3}(x - 2) - 3 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

– рівняння директрис

$$x' = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{9}{5}, \quad x' = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{9}{5},$$

або

$$x = x' + 2 = -\frac{9}{5} + 2 = \frac{1}{5}, \quad x = x' + 2 = \frac{9}{5} + 2 = \frac{19}{5}.$$

□

Приклад 41. Надано лінію другого порядку

$$-\frac{1}{6}x^2 + 2x - y - 7 = 0.$$

- звести рівняння лінії до канонічного вигляду,
- побудувати цю лінію,
- знайти її основні характеристики.

Розв'язання. Це рівняння параболи, тому що є тільки один доданок другого степеня.

Перетворимо рівняння таким чином:

$$y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7.$$

Праворуч виділимо повний квадрат:

$$y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7 = -\frac{1}{6}\left(x^2 - 12x\right) - 7 =$$
$$= -\frac{1}{6}\left(x^2 - 12x + 36 - 36\right) - 7 = -\frac{1}{6}\left(x-6\right)^2 + 6 - 7 = -\frac{1}{6}\left(x-6\right)^2 - 1.$$

Отже, маємо таке рівняння параболи:

$$\left(x-6\right)^2 = -6\left(y+1\right).$$

Вершина параболи міститься у точці $A(6;-1)$ (рис.7.7).

Позначимо

$$x' = x - 6,$$
$$y' = y + 1.$$

Тоді рівняння параболи набуде канонічного вигляду:

$$x'^2 = -6y'.$$

Параметр параболи $p = 3$, фокус $F\left(6; -\frac{3}{2} - 1\right) = F\left(6; \frac{5}{2}\right)$, рівняння директриси $y' = \frac{3}{2}$ або у початковій системі координат $y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

□

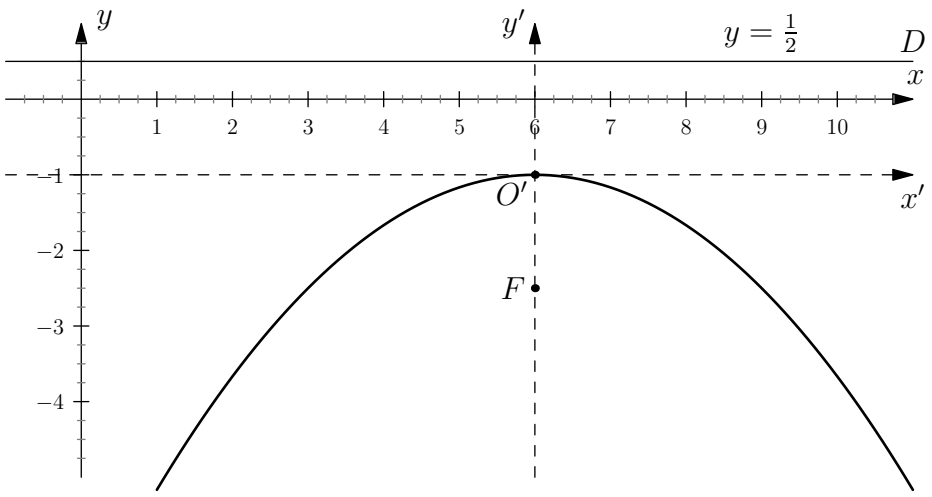

Рис. 7.7. Парабола $(x-6)^2 = -6(y+1)$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення кола, запишить його рівняння та основні характеристики.

2. Сформулюйте означення еліпса, запишить його рівняння та основні характеристики.

3. Сформулюйте означення гіперболи, запишить його рівняння та основні характеристики.

4. Сформулюйте означення параболи, запишить його рівняння та основні характеристики.

8. Аналітична геометрія у просторі

8.1. Поверхня та її рівняння

8.1.1. Рівняння поверхні

Співвідношення $F(x, y, z) = 0$, що зв'язує три змінні величини x, y, z, називається *рівнянням*, якщо деякі трійки чисел x, y, z задовольняють це співвідношення, а інші не задовольняють.

Задамо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ і розглянемо будь-яку поверхню S.

Означення 63. *Рівнянням поверхні* S у просторі називається таке рівняння

$$F(x, y, z) = 0, \tag{8.1}$$

якому задовольняють координати x, y, z всіх точок даної поверхні і не задовольняють координати точок, що не належать цієї поверхні.

Таким чином, поверхня являє собою геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню поверхні (8.1).

Довільна точка M поверхні називається *поточною точкою* поверхні, а координати x, y, z поточної точки називаються *поточними координатами*.

8.1.2. Сфера

Сферою називається геометричне місце точок простору, рівновіддалених від даної точки простору, що називається *центром сфери*.

Нехай центр сферичної поверхні знаходиться в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а її радіус дорівнює R.

Візьмемо довільну точку простору $M(x, y, z)$. Відстань від центра сфери до точки M дорівнює

$$|MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

За означенням сфери, точка $M(x, y, z)$ належить даній сфері тоді і тільки тоді, колі відстань $|MM_0|$ дорівнює радіусу сфери R, тобто

$$|MM_0| = R,$$

або

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R.$$

Звідси випливає *рівняння сферичної поверхні радіуса R з центром у точці* $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{8.2}$$

Коли центр сфери збігається з початком координат, її рівняння набуває такий вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{8.3}$$

8.1.3. Циліндричні поверхні

Циліндричною повернею називається поверхня, яка утворена переміщенням прямої, яка називається *твірною*, вздовж деякої *напрямної* лінії паралельно заданому напряму.

Розглянемо рівняння вигляду

$$F(x, y) = 0 \tag{8.4}$$

що зв'язує дві змінні x і y але не містить змінну z.

Нехай рівняння (8.4) визначає в просторі певну поверхню. Доведемо, що ця поверхня є циліндричною з твірною, яка паралельна осі Oz.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — будь-яка точка, що лежить на даній поверхні. Тоді координати цієї точки повинні задовольняти рівняння поверхні (8.4), тобто справедлива рівність

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{8.5}$$

Тому що $F(x, y)$ не залежить від z, то будь-які числа x_0, y_0, z, де z — довільне число, також задовольняють рівнянню (8.5). Тоді при будь-якому z точка

$M(x_0, y_0, z)$ також належить поверхні, яку розглядаємо. Це означає, що на даній поверхні лежить пряма, що проходить через точку M_0 паралельно осі Oz. Таким чином, дана поверхня, яка визначена рівнянням (8.4), утворюється прямими, паралельними осі Oz, тобто є циліндричною поверхнею.

Очевидно, що кожен переріз циліндричної поверхні $F(x, y) = 0$ площиною $z = h$, яка перпендикулярна осі Oz, визначає подібні лінії:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = h, \quad h = \text{const}, \end{cases} \tag{8.6}$$

причому, лінію $F(x, y) = 0$ в площині Oxy можно розглядати як *напрямну лінію* циліндричної поверхні.

8.1.3. Конічні поверхні

Конічною поверхнею або *конусом* називається поверхня, яка утворюється прямою, що проходит через дану точку та переміщується вздовж заданої лінії. Ця пряма називається *твірною* конуса, дана точка - *вершиною* конуса, а задана лінія - *напрямною* конуса.

Отже, поверхня буде конічною, якщо пряма, що проходить через будь-яку точку конуса та вершину конуса, повністю лежить на цьому конусі.

Означення 64. Функція $F(x, y, z)$ називається *однорідною* функцією степеня k, якщо виконується рівність

$$F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$$

для будь-яких цілих k.

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, z) = 0, \tag{8.7}$$

де ліва частина рівності є однорідна функція будь-якого степеня. Доведемо, що рівняння (8.7) визначає конічну поверхню з вершиною у початку координат.

Тому що функция $F(x, y, z)$ однорідна, то координати початку координат задовольняють рівняння (8.7), тобто початок координат лежить на поверхні, що разглядається.

Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ розташована на даній поверхні, тоді її координати задовольняють рівнянню поверхні (8.7):

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої, яка проходить через початок координат і точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Її координати можна записати у такому вигляді:

$$x = tx_0, \quad y = ty_0, \quad z = tz_0,$$

де t — довільне число. Тоді, враховуючи однорідність функції $F(x, y, z)$ і рівняння (8.7), маємо

$$F(x, y, z) = F(tx_0, ty_0, tz_0) = t^k F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Таким чином, точка M також належить даній поверхні. Це означає, що при будь-якому значенні t точки M і M_0 лежать на тій же самій прямій, яка проходить через початок координат (при $t = 0$). Отже, рівняння (8.7), коли ліва частина є однорідна функція, визначає конічну поверхню з вершиною у початку координат.

Тут було враховано, що вектори $\overrightarrow{OM} = (tx_0, ty_0, tz_0)$ і $\overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0)$ колінеарні, тому

$$\overrightarrow{OM_0} = t \cdot \overrightarrow{OM},$$

або

$$x = tx_0, \quad y = ty_0, \quad z = tz_0.$$

8.1.4. Поверхня обертання

Поверхнею обертання називається поверхня, яка утворена обертанням плоскої лінії навколо певної нерухомої прямої лінії.

Ця нерухома пряма лінія називається *віссю обертання*, а лінія, що обертається, *лінією обертання*.

8.2. Рівняння лінії у просторі

Лінію у просторі природно уявити як перетин двох поверхней, тобто як геометричне місце точок, які одночасно знаходяться на обох поверхнях.

Нехай

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{8.8}$$

є рівняння двох поверхонь S_1 і S_2, перетином яких є лінія L. Тоді координати x, y, z будь-якої точки $M(x, y, z)$, яка належить лінії L, задовольняють рівняння (8.8) обох поверхонь S_1 і S_2 і координати будь-якої точки, яка не належить лінії L, не задовольняють обом цим рівнянням.

Якщо лінію L розглядати як слід руху точки, то одержимо *параметричні рівняння лінії*:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{8.9}$$

Тут координати кожної точки лінії є функціями *параметра* t.

8.3. Площина

8.3.1. Рівняння площини

Через задану точку перпендикулярно заданому напряму можна провести тільки одну площину.

Задамо в просторі декартову прямокутну систему координат $Oxyz$ і розглянемо довільну площину π. Побудуємо рівняння площині.

Виберемо будь–який вектор, перпендикулярний до площини π. Цей вектор задає орієнтацію площини у просторі. Він називається *нормальним вектором* площини або *вектором нормалі*. Позначимо вектор нормалі до площини π символом $\vec{N}$. Відзначимо, що величина вектора нормалі байдужа — нам потрібно тільки напрям (рис. 8.1).

Нехай вектор $\vec{N}$ має такі координати:

$$\vec{N} = (A, B, C). \tag{8.10}$$

Але площину π ще можна переміщати паралельно самій собі уздовж вектора нормалі. Щоб зафіксувати положення площини у просторі, необхідно вказати будь–яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить в площині.

Нехай точка $M(x, y, z)$ — довільна точка площини π (поточна точка). Щоб точка $M(x, y, z)$ перебувала в площині π, необхідно і достатньо, щоб вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

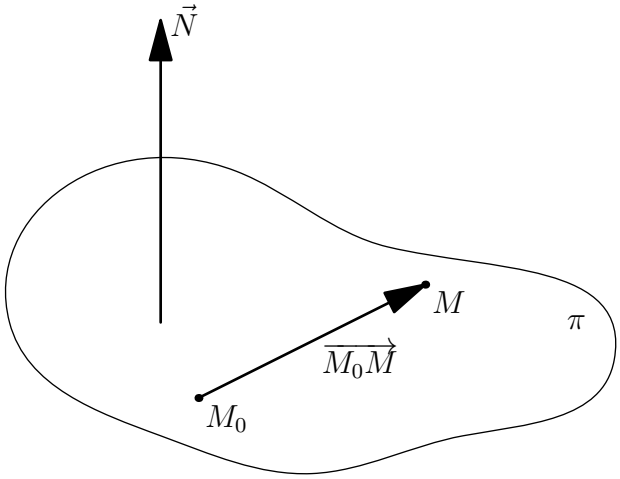

Рис. 8.1. Завдання площини

був перпендикулярний вектору нормалі $\vec{N}$.

Записуючи умову перпендикулярності двох векторів одержимо рівняння площини в векторній формі:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N}) = 0. \tag{8.11}$$

Позначимо радіус-вектори точок $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$ через

$$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}, \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}.$$

Тоді рівняння (8.11) набуває вигляду:

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{N}) = 0. \tag{8.12}$$

Записуючи (8.12) в координатній формі, одержимо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{8.13}$$

Це *рівняння площини*, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = (A, B, C)$.

Насправді, рівнянню (8.13) задовольняють координати x, y, z точки M тільки в тому випадку, коли вона лежить в заданій площині, тобто коли виконується умова $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$.

Зауваження 24. Вектор нормалі вказує тільки напрям (орієнтацію) площини і його довжина немає значення. Тому рівняння (8.13) можна поділити або помножити на будь-яке число, що не дорівнює нулю.

8.2.2. Загальне рівняння площини

Розкриємо дужки у рівнянні (8.13) та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, тоді з (8.13) випливає *загальне рівняння площини*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{8.14}$$

Зауваження 25. У рівнянні (8.13) можна побачити і координати вектора нормалі, і координати точки, через яку проходить площина. У загальному рівнянні координат точки немає. Але треба мати на увазі, що рівнянню площини задовільняє безліч точок, які містяться у площині. Тому, якщо потрібно знайти координати певної точки, то треба задати будь-які дві координати точки (площина є двовимірний простір) і знайти з рівняння площини третю координату.

Приклад 42. Скласти загальне рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1, 4, -3)$ перпендикулярно вектору

$$\overrightarrow{a} = (0, 3, -5).$$

Розв'язання. Вектор $\overrightarrow{a}$ можна розглядати як вектор нормали. Тоді за формулою (8.29) одержимо

$$0(x - 1) + 3(y - 4) - 5(z + 3) = 0$$

або

$$3y - 5z - 27 = 0.$$

□

З загального рівняння (8.14) випливають *неповні рівняння площини.*

1) Нехай вільний член рівняння (8.14) дорівнює нулю: $D = 0$. Тоді маємо рівняння площини, яка проходить через *початок координат*:

$$Ax + By + Cz = 0. \tag{8.15}$$

Насправді координати початку системи координат $O(0, 0, 0)$ задовольняють рівнянню (8.15).

2) Нехай $A = 0$. Тоді маємо таке рівняння площини:

$$By + Cz + D = 0. \tag{8.16}$$

В цьому випадку вектор нормалі

$$\overrightarrow{N} = (0, B, C)$$

перпендикулярний осі Ox. Отже, *площина паралельна осі* Ox.

Аналогічно виглядають рівняння площин, які паралельні іншим координатним осям: площина

$$Ax + Cz + D = 0 \tag{8.17}$$

паралельна осі Oy і площина

$$Ax + By + D = 0 \tag{8.18}$$

паралельна осі Oz.

Якщо в цих рівняннях покласти $D = 0$, то одержимо рівняння площин, в яких містяться відповідні осі координат:

$$By + Cz = 0 \quad \text{проходить через вісь} \quad Ox, \tag{8.19}$$

$$Ax + Cz = 0 \quad \text{проходить через вісь} \quad Oy, \tag{8.20}$$

$$Ax + By = 0 \quad \text{проходить через вісь} \quad Oz. \tag{8.21}$$

3) Якщо дві компоненти вектора нормалі дорівнюють нулю, то маємо рівняння площини, яка *паралельна відповідній координатній площині*. Наприклад:

$$\overrightarrow{N} = (0, 0, C) \quad \Rightarrow \quad Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z_0 \quad \left(z_0 = -\frac{D}{C}\right) \tag{8.22}$$

— рівняння площини, яка паралельна координатній площині Oxy (вектор нормалі спрямований вздовж осі Oz);

$$\overrightarrow{N} = (A, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad Ax + D = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \quad \left(x_0 = -\frac{D}{A}\right) \tag{8.23}$$

— рівняння площини, яка паралельна координатній площині Oyz;

$$\overrightarrow{N} = (0, B, 0) \quad \Rightarrow \quad By + D = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y_0 \quad \left(y_0 = -\frac{D}{B}\right) \tag{8.24}$$

— рівняння площини, яка паралельна координатній площині Ozx;

Нехай крім двох компонент вектора нормалі також дорівнює нулю вільний член, тобто $D = 0$, тоді одержимо *рівняння координатних площин*:

$$z = 0 \quad \text{— рівняння площини } Oxy; \tag{8.25}$$

$$x = 0 \quad \text{— рівняння площини } Ozy; \tag{8.26}$$

$$y = 0 \quad \text{— рівняння площини } Ozx. \tag{8.27}$$

8.3.3. Рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно двом заданим векторам

Нехай дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і два неколінеарні вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ (рис.8.2). Побудуємо площину, яка проходить через дану точку паралельно векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.

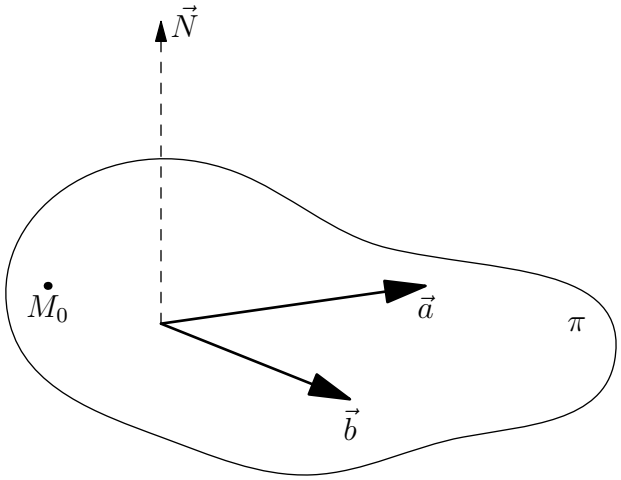

Рис. 8.2. Завдання площини

Нагадаємо, що точка, яка належить площині, та вектор нормалі повністю визначають площину.

Тому що два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ паралельні площині, то векторний добуток цих векторів буде перпендикулярний цій площині та його можна взяти за вектор нормалі:

$$\overrightarrow{N} = (A, B, C) = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]. \tag{8.28}$$

Тоді за формулою (8.13) рівняння площини має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{8.29}$$

Тут $\overrightarrow{N}=(A,B,C)$ — вектор перпендикулярний до площини, або вектор нормалі.

Таким чином, точка і два неколінеарних вектора повністю визначають площину.

Приклад 43. Скласти рівняння площини, що проходить паралельно векторам

$$\overrightarrow{a}=(2,3,1), \quad \overrightarrow{b}=(5,3,-1)$$

через точку $M_0(2,4,-3)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор нормалі:

$$\overrightarrow{N}=\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,(3\cdot(-1)-1\cdot 3)-\vec{j}\,(2\cdot(-1)-1\cdot 5)+\vec{k}\,(2\cdot 3-3\cdot 5)=$$

$$=\vec{i}\,(-3-3)-\vec{j}\,(-2-5)+\vec{k}\,(6-15)=$$

$$=-6\vec{i}+7\vec{j}-9\vec{k}=(-6,7,-9).$$

Тоді за формулою (8.29) одержимо

$$-6(x-2)+7(y-4)-9(z+3)=0$$

або

$$-6x+7y-9z-43=0.$$

□

8.3.4. Рівняння площини, що проходить через дві задані точки паралельно заданому вектору

Нехай задані дві точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ і вектор $\overrightarrow{a}$ (рис.8.3). Побудуємо рівняння площини, яка проходить через ці точки M_1 і M_2 паралельно вектору $\overrightarrow{a}$.

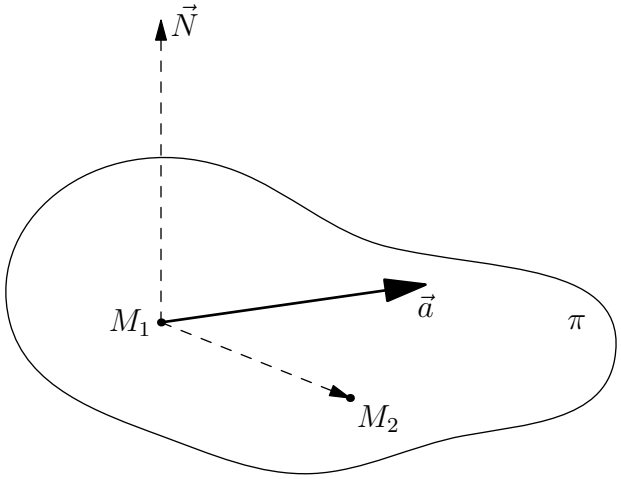

Рис. 8.3. Завдання площини

Врахуємо, що дві точки M_1 і M_2 площини визначають вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, який паралельний до площини. Отже, маємо два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$, які паралельні площині. Тоді векторний добуток цих векторів можна взяти як вектор нормалі до площини:

$$\overrightarrow{N} = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{M_1M_2}\right]. \tag{8.30}$$

Таким чином, для визначення площини можна скористатися формулою (8.13) рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикуляно заданому вектору:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \tag{8.31}$$

де $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ — вектор нормалі.

Зауважимо, що немає значення яку точку, M_1 або M_2, взяти для визначення площини.

Приклад 44. Скласти рівняння площини, що проходить через точки

$$M_1(0, -1, 2), \quad M_2(4, 0, 1)$$

паралельно вектору $\overrightarrow{a} = \vec{j} - \vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, який паралельний до площини:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4, 0, 1) - (0, -1, 2) = (4 - 0, 0 - (-1), 1 - 2) = (4, 1, -1)$$

Тоді вектор нормалі можна уявити як векторний добуток:

$$\overrightarrow{N} = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(1\cdot(-1) - (-1)\cdot 1) - \vec{j}\,(0\cdot(-1) - (-1)\cdot 4) + \vec{k}\,(0\cdot 1 - 1\cdot 4) =$$

$$= \vec{i}\,(-1+1) - \vec{j}\,(0+4) + \vec{k}\,(0-4) =$$

$$= -4\vec{j} - 4\vec{k} = (0,-4,-4).$$

Отже, рівняння площини знайдемо за формулою (8.31):

$$-4(y-0) - 4(z-1) = 0$$

або

$$y + z - 1 = 0.$$

□

8.3.5. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай задані три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис.8.4).

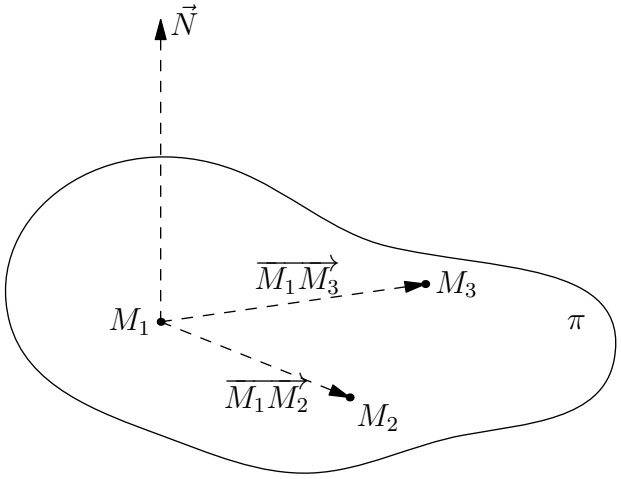

Рис. 8.4. Завдання площини

Припустимо, що ці три точки визначають площину. Насправді дві точки визначають вектор, а три точки визначають два вектори, які лежать у даній площині. Далі два вектори, які паралельні площині, за допомогою векторного добутку визначають вектор перпендикулярний площині. Таким чином, три точки повністю визначають площину, яка проходить через них.

Знайдемо рівняння цієї площини. Є декілька способів розв'язати цю задачу.

1 спосіб. Скористаємось рівнянням площини (8.13), яка проходить через точку перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$. Підставляючи у рівняння (8.13) координати точок M_1, M_2 і M_3, одержимо *однорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно координат вектора нормалі*:

$$\begin{cases} A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \\ A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0, \\ A(x - x_3) + B(y - y_3) + C(z - z_3) = 0. \end{cases} \tag{8.32}$$

Координати вектора A, B і C не можуть одночасно дорівнювати нулю, тому визначник системи (8.32) повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.33}$$

Спростимо визначник (8.33): віднімемо перший рядок від другого та третього рядків. Тоді одержимо *рівняння площини, що проходить через три задані точки*:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.34}$$

Зауваження 26. Рівняння (8.34) можна одержати, якщо розглядати умову компланарності трьох векторів: $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M}$, де $M(x, y, z)$ — поточна (довільна) точка площини. Насправді, всі чотирі точки M_1, M_2, M_3 і M лежать у площині, тому ці вектори також лежить у площині, тобто компланарні.

2 спосіб. За допомогою точок M_1, M_2 і M_3 визначемо два вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і

$\overrightarrow{M_1M_3}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ розміщуються у площині, тому їх векторний добуток буде перпендикулярний до площини, тобто його можна розглядати як нормаль до площини:

$$\overrightarrow{N} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}. \tag{8.35}$$

Далі можна скористатися формулою (8.13).

Приклад 45. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки:

$$M_1(0, -1, 2), \quad M_2(4, 0, 1), \quad M_2(-3, 1, 2).$$

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ які паралельні до площини:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4, 0, 1) - (0, -1, 2) = (4 - 0, 0 - (-1), 1 - 2) = (4, 1, -1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-3, 1, 2) - (0, -1, 2) = (-3 - 0, 1 - (-1), 2 - 2) = (-3, 2, 0).$$

Знайдемо вектор нормалі:

$$\overrightarrow{N} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}\,(1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2) - \vec{j}\,(4 \cdot 0 - (-1) \cdot (-3)) + \vec{k}\,(4 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)) =$$
$$= \vec{i}\,(0 + 2) - \vec{j}\,(0 - 3) + \vec{k}\,(8 + 3) =$$
$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k} = (2, 3, 11).$$

Тоді одержимо

$$2(x - 4) + 3(y - 0) + 11(z - 1) = 0$$

або

$$2x + 3y + 11z - 19 = 0.$$

□

8.3.6. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина π визначається рівнянням загального вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{8.36}$$

причому всі коефіцієнти A, B, C цього рівняння і вільний член D відрізняються від нуля. Така площина не проходить через початок координат, крім того, така площина перетинає кожну координатну вісь.

Перенесемо вільний член D праворуч і поділимо на нього рівняння (8.36):

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1. \tag{8.37}$$

Позначимо

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}. \tag{8.38}$$

Тоді одержимо таке рівняння площини:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{8.39}$$

Рівняння (8.39) називається *рівняння площини у відрізках на осях.*

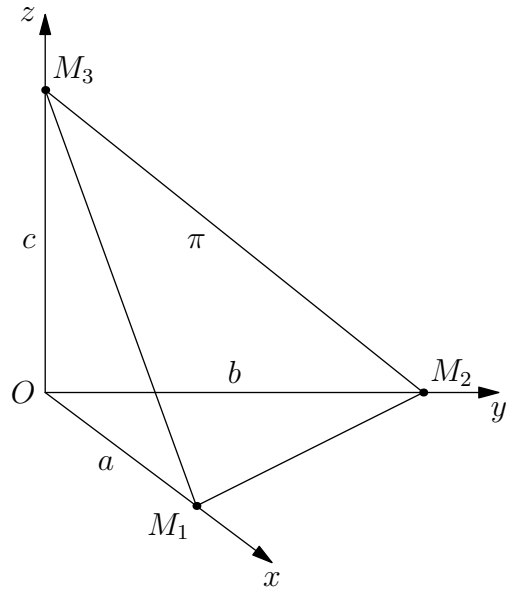

Рис. 8.5. Рівняння у відрізках на осях

Знайдемо точку перетину площини (8.39) з віссю Ox.

Зауважимо, що вісь Ox можна розглядати як перетин координатних площин Oxy і Ozx, рівняння яких мають вигляд $z = 0$ (площина Oxy) і $y = 0$ (площина Ozx) відповідно. Тоді маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, \\ z = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a} = 1, \quad \Rightarrow \quad x = a. \tag{8.40}$$

Отже, площина (8.39) перетинає вісь Ox в точці $M_1(a, 0, 0)$ і відтинає на осі Ox відрізок величиною a.

Аналогічно, знайдемо точки $M_2(0, b, 0)$ і $M_2(0, 0, c)$, у яких площина π перетинає вісь Oy:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, \\ z = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = 1, \quad \Rightarrow \quad y = b, \tag{8.41}$$

і вісь Oz:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{c} = 1, \quad \Rightarrow \quad z = c. \tag{8.42}$$

Таким чином, *площина, яка задана рівнянням у відрізках на осях* (8.39), *відтинає на осях координат відрізки величиною* a, b, c.

На рис.8.5 зображена частина площини π, яка міститься у першому октанті (тут розглядається випадок, коли величини відрізків a, b, c додатні).

Приклад 46. Знайти відрізки, які відтинає на осях координат площина

$$4x - 6y + 3z - 12 = 0.$$

Розв'язання. Перейдемо до рівняння площини у відрізках на осях: перенесемо вільний член рівняння праворуч

$$4x - 6y + 3z = 12$$

і поділимо обидві частини рівняння на 12

$$\frac{4x}{12} - \frac{6y}{12} + \frac{3z}{12} = \frac{12}{12} \quad \text{або} \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 1.$$

Порівнюючи з (8.39), знайдемо, що дана площина відтинає на осях координат такі відрізки:

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = 4.$$

□

Приклад 47. Побудувати рівняння площини, яка проходить через точку

$$M_0(8, 3, -4)$$

і відтинає на осі Ox відрізок $a = -2$, а на осі Oy відрізок $b = 3$.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{c} = 1.$$

Оскільки, точка $M_0(8, 3, -4)$ розташована на площини, то її координати задовольняють рівнянню площини:

$$\frac{8}{-2} + \frac{3}{3} + \frac{-4}{c} = 1.$$

Звідси випливає

$$-4 + 1 + \frac{-4}{c} = 1, \quad \frac{1}{c} = -1, \quad c = -1.$$

Отже, шукане рівняння площини матиме вигляд:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-1} = 1 \quad \text{або} \quad 3x - 2y + 6z + 6 = 0.$$

□

8.3.7. Нормальне рівняння площини

Нагадаємо, що через задану точку перпендикулярно заданому напряму можна провести тільки одну площину, тобто, щоб визначити площину, треба визначити її напрям і положення. Таким чином, якщо задати відстань від початку координат до площини, тобто довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину, і задати напрям цього перпендикуляра, то положення площини в просторі буде повністю визначено.

Розглянемо площину π, яка розташована на відстані p від початку координат. Опустимо з початку координат O на площину π перпендикуляр, основу якого позначимо як P. Цей перпендикуляр будемо називати *нормаллю* до площини π. Очевидно, що довжина перпендикуляра OP дорівнює p:

$$|OP| = p.$$

Орт перпендикуляра $\overrightarrow{OP}$ позначимо як $\overrightarrow{n}$, причому спрямуємо його від початку координат до площини (рис.8.6).

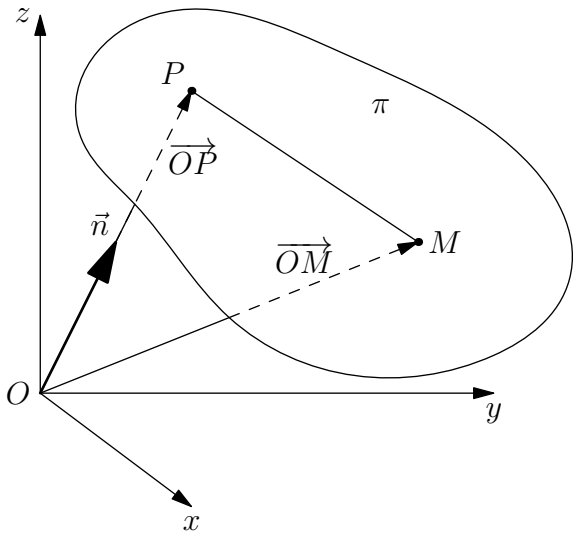

Рис. 8.6. Нормальне рівняння площини

Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$, її радіс-вектор $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$.

Якщо точка $M(x, y, z)$ належить площині π, то проекція вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрям нормаллі $\overrightarrow{n}$ буде дорівнювати величині відрізка OP.

Нагадаємо, що одиничний вектор $\overrightarrow{n}$ спрямовано від початку координат до площини. Тому вектори $\overrightarrow{n}$ і $\overrightarrow{OM}$ утворюють гострий кут і проєкція вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрям нормалі $\overrightarrow{n}$ буде дотатне число, тобто p. Таким чином, *точка $M(x, y, z)$ належить площині π тоді і тільки тоді, коли проєкція її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрям вектора нормалі $\overrightarrow{n}$ дорівнює відстані від початку координат до площини*:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} = p. \tag{8.43}$$

Ця проєкція дорівнює скалярному добутку радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на орт нормалі $\overrightarrow{n}$. Таким чином, маємо:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{n}\overrightarrow{OM} = p. \tag{8.44}$$

Нехай вектор $\overrightarrow{n}$ утворює з осями координат кути α, β, γ. Тоді напрямні косинуси цих кутів є координатами орта $\overrightarrow{n}$:

$$\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{8.45}$$

Враховуючи цю рівність, з (8.44) одержимо *нормальне рівняння площини*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{8.46}$$

Отже, *точка $M(x, y, z)$ належить площині π тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють рівняння* (8.46).

Коли точка M не належить площині π, то проєкція вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрям $\overrightarrow{n}$ не буде дорівнювати відстані від початку координат до площини і координати точки M не будуть задовольняти рівняння (8.46).

Звернемо увагу на те, що рівняння (8.46) — це рівняння загального вигляду. Нагадаємо, що сума квадратів напрямних косинусів вектора завжди дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Таким чином, *загальне рівняння площини називається нормальним, якщо сума квадратів коефіцієнтів дорівнює одиниці, а вільний член буде від'ємне число.*

Зауваження 27. Щоб привести загальне рівняння площини до нормального вигляду, потрібно поділити загальне рівняння на модуль вектора нормалі і якщо вільний член одержаного рівняння буде додатним, помножити це рівняння на (-1).

Приклад 48. Знайти довжину і напрям перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину $x - 2y + 2x + 21 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини у нормальному вигляді:
1) знаходимо довжину вектора нормалі

$$\overrightarrow{N} = (1, -2, 2), \quad \left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

2) поділимо рівняння площини на модуль вектора нормалі

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 7 = 0,$$

3) тому що вільний член додатний, помножимо одержане рівняння на (-1)

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 7 = 0.$$

Таким чином, маємо:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}, \quad p = 7.$$

□

8.3.8. Відстань від точки до площини

Розглянемо площину π і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, яка розміщена поза межами площини π та знайдемо відстань від точки M_1 до площини π.

Опустимо з точки M_1 на площину π перпендикуляр, основу якого позначимо як точку M_1'.

Визначимо *відстань* d від точки M_1 до площини π як довжину перпендикуляра, опущеного на дану площину з точки M_1 (рис.8.7).

Таким чином, маємо:

$$d = |M_1M_1'|\,. \tag{8.47}$$

Означення 65. *Відхиленням* δ точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ від площини називається відстань d, яку беремо зі знаком плюс, коли точка та початок координат розташовані по різні боки від даної площини, і зі знаком мінус, коли вони розташовані по один бік від даної площини.

Очевидно, що $d = |\delta|$.

Позначимо орт нормалі до площини π як $\overrightarrow{n}$, причому спрямуємо його від початку координат до прямої та побудуємо прямокутні проєкції радіус-векторів $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_1'}$ на напрям вектора нормалі $\overrightarrow{n}$. На продовженні нормалі одержимо відрізки OQ і OP відповідно (рис.8.7).

Тоді маємо:

$$\delta = \text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} - \text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM'}. \tag{8.48}$$

Нагадаємо, що точка M_1' належить площині π, тому проєкція її радіус-вектора $\overrightarrow{OM_1'}$ на напрям вектора нормалі $\overrightarrow{n}$ дорівнює відстані від початку координат до площини (стр.160):

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM_1'} = \overrightarrow{n}\overrightarrow{OM_1'} = p \tag{8.49}$$

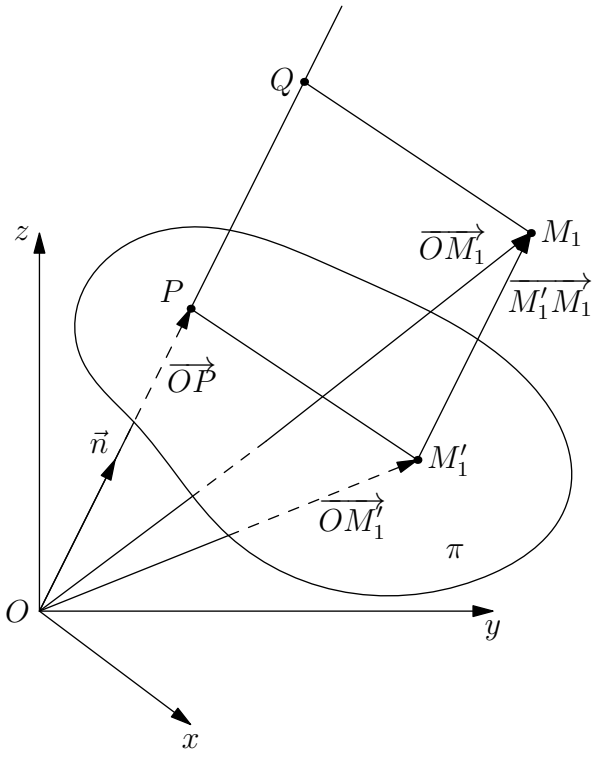

Рис. 8.7. Відстань від точки до площини

Враховуючи цю рівність, одержимо:

$$\delta = \text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} - p = \overrightarrow{n}\overrightarrow{OM_1} - p. \tag{8.50}$$

Нехай орт $\overrightarrow{n}$ утворює з осями координат кути α, β, γ, тоді його координати — це напрямні косинуси:

$$\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{8.51}$$

Обчислюючи значення скалярного добутку

$$\overrightarrow{n}\overrightarrow{OM_1} = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma, \tag{8.52}$$

остаточно дістанемо:

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p, \tag{8.53}$$

або

$$d = |\delta| = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|\,. \tag{8.54}$$

Отже, *щоб знайти відстань від точки до площини треба до нормального рівняння площини підставити координати даної точки і від результату обчислити абсолютну величину.*

Приклад 49. Знайти відстань від точки $M_0(1,2,3)$ до площини

$$2x - 3y + 6x - 35 = 0.$$

Розв'язання. Приведемо рівняння площини до нормального вигляду:

$$\overrightarrow{N} = (2,-3,6), \quad \left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7,$$
$$\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 5 = 0,$$

Відхилення точки M_0 від площини буде:

$$\delta = \frac{2}{7}\cdot 1 - \frac{3}{7}\cdot 2 + \frac{6}{7}\cdot 3 - 5 = \frac{2}{7} - \frac{6}{7} + \frac{18}{7} - 5 = 2 - 5 = -3.$$

Тому, що відхилення точки $\delta = -3$ від'ємне, то точка і початок координат містяться з одного боку від площини. Відстань від точки до площини дорівнює:

$$d = |\delta| = 3.$$

□

8.3.9. Взаємне розміщення площин

Розглянемо дві площини π_1 і π_2:

$$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{8.55}$$
$$\pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{8.56}$$

Векторами нормалі площин π_1 і π_2 будуть вектори:

$$\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1), \quad \overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2). \tag{8.57}$$

Означення 66. Кутом φ між двома площинами є будь-який із двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами.

Зауваження 28. Сума двох суміжних кутів дорівнює π.

Оскільки вектори нормалі перпендикулярні до відповідних площин, то кутом між площинами можна вважати кут між векторами $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$. Отже, маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{8.58}$$

У випадку, коли площини π_1 і π_2 перпендикулярні, їхні вектори нормалі також будуть перпендикулярні. Отже, маємо умову перпендикулярності площин:

$$\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2} = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{8.59}$$

У випадку, коли площини π_1 і π_2 паралельні, вектори нормалі колінеарні. Таким чином, маємо умову паралельності площин:

$$\overrightarrow{N_1} = \lambda\overrightarrow{N_2} \quad \text{або} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{8.60}$$

Очевидно, якщо всі коефіцієнти рівнянь площин утворюють пропорцію:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}, \tag{8.61}$$

то площини π_1 і π_2 збігаються.

8.3.10. Перетин трьох площин

Нехай три площини задані рівняннями в загальній формі. Ці рівняння утворюють систему лінійних рівнянь відносно невідомих x, y і z:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{8.62}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{8.63}$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \tag{8.64}$$

Якщо визначник системи (8.62) — (8.64) відрізняється від нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то ця система матиме єдиний розв'язок, тобто три площини перетинаються в однієй точці. Щоб знайти координати точки перетину, потрібно розв'язати систему (8.62) — (8.64).

Завдання для самостійної роботи

Зауважимо, що *через задану точку перпендикулярно заданому напряму можна провести тільки одну площину.* Таким чином, щоб визначити площину потрібно задати *точку* та *вектор нормалі.*

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M паралельно векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо:
   1) $M(1;1;1), \quad \vec{a}=(0;1;2), \quad \vec{b}=(-1;0;1);$
   2) $M(0;1;2), \quad \vec{a}=(2,0,1), \quad \vec{b}=(1;1;0).$

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M_1 та M_2 паралельно вектору $\vec{a}$, якщо:
   1) $M_1(1;2;0), \quad M_2(2;1;1), \quad \vec{a}=(3;0;1);$
   2) $M_1(1;1;1), \quad M_2(2;3;-1), \quad \vec{a}=(0;3;-1).$

3. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки M_1, M_2 та M_3, якщо:
   1) $M_1(1;2;0), \quad M_2(2;1;1), \quad M_3(3;0;1);$
   2) $M_1(1;1;1), \quad M_2(0;-1;2), \quad M_3(2;3;-1).$

4. Задано площину P. Скласти рівняння площини P', яка проходить через точки M_1 та M_2 перпендикулярно площині P, якщо:
   1) $P: \quad -x+y-1=0, \quad M_1(1;2;0), \quad M_2(2;1;1);$
   2) $P: \quad -2x-y+z+1=0, \quad M_1(0;1;1), \quad M_2(2;0;1).$

5. Задано площину P і точку M. Скласти рівняння площини P', що проходить через точку M паралельно площині P, та обчислити відстань між площинами P і P', якщо:
   1) $P: \quad x-y-1=0, \quad M(1;1;2);$
   2) $P: \quad -2x-y+z+1=0, \quad M_1(1;1;1).$

6. Скласти рівняння площини P, що проходить через точку $M(1;1;-1)$ і перпендикулярно до площин

$$P_1: \ 2x-y+5z+3=0 \quad \text{та} \quad P_2: \ x+3y-z-7=0.$$

7. Скласти рівняння площини P, що проходить через точку $M_0(1;7;-5)$ та

відтинає на координатних осях рівні додатні відрізки.

8. Обчислити об'єм піраміди, яка обмежена площиною

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0$$

та координатними площинами.

9. З'ясувати взаємне розташування площин P_1 і P_2 та знайти:
1) відстань між площинами, якщо площини паралельні;
2) кут між площинами, якщо площини перетинаються.
а) $P_1 : -x + 2y - z + 1 = 0, \quad P_2 : y + 3z - 1 = 0;$
б) $P_1 : 2x - y + z - 1 = 0, \quad P_2 : -4x + 2y - 2z - 1 = 0;$
в) $P_1 : x - y + 1 = 0, \quad P_2 : y - z + 1 = 0;$
г) $P_1 : 2x - y - z + 1 = 0, \quad P_2 : -4x + 2y + 2z - 2 = 0.$

8.4. Пряма у просторі

8.4.1. Канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі

Про пряму ми знаємо, що *через дану точку в даному напряму можна провести тільки одну пряму.*

Таким чином, щоб задати пряму потрібно задати *точку*, тобто положення прямої, і її *напрям.* Напрям прямої у просторі задається *напрямним вектором.*

Розглянемо пряму L, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$. Довільну точку прямої (поточну точку) позначимо як $M(x, y, z)$ (рис.8.8).

Тому що точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$ належать прямої L, вони визначають вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

який буде колінеарним до напрямного вектора $\vec{q}$, тобто

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{q}. \tag{8.65}$$

Звернемо увагу, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ визначає положення точки $M(x, y, z)$ відносно точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

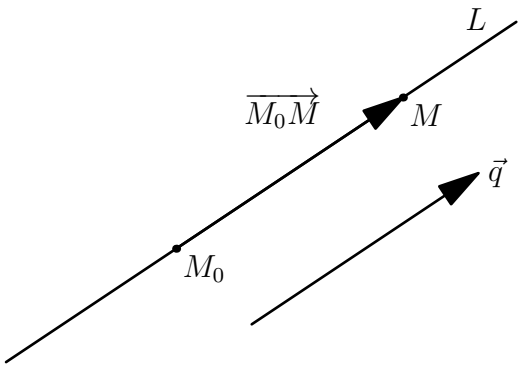

Рис. 8.8. Пряма у просторі

Враховуючи умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{q}$ в координатній формі, одержимо *канонічні рівняння прямої*:

$$\frac{x-x_0}{q_x}=\frac{y-y_0}{q_y}=\frac{z-z_0}{q_z}. \tag{8.66}$$

Це рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно до вектора $\vec{q}=(q_x,q_y,q_z)$.

Приклад 50. Побудувати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $A(1,-2,3)$ паралельно вектору $\vec{q}=(0,4,-5)$.

Розв'язання. Підставимо в формулу (8.66) координати точки $A(1,-2,3)$ і вектора $\vec{q}=(0,4,-5)$. Тоді одержимо канонічні рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-5}. \tag{8.67}$$

Зауваження 29. У формулі (8.67) не має помилки — тут нуль в знаменнику означає не ділення, а тільки те, що напрямний вектор $\vec{q}$ не має складової в напряму осі Ox і тому ця пряма перпендикулярна до осі Ox.

Рівняння (8.67) будемо розуміти так:

$$x-1=0, \tag{8.68}$$

$$\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-5}. \tag{8.69}$$

Перше рівняння, це рівняння площини

$$x=1,$$

яка паралельна координатній площині yOz.

Друге рівняння можно розглядати як рівняння прямої в площині $x = 1$.

□

Приклад 51. Побудувати рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1, -2, 3)$ і $B(0, 3, -5)$.

Розв'язання. Дві точки $A(1, -2, 3)$ і $B(0, 3, -5)$ визначають вектор $\overrightarrow{AB}$, який можна взяти за напрямний вектор $\vec{q}$ прямої:

$$\vec{q} = \overrightarrow{AB} = (0, 3, -5) - (1, -2, 3) = (-1, 5, -8).$$

Тоді за формулою (8.66) маємо

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{-8}. \tag{8.70}$$

□

Запишемо рівняння (8.65) в координатній формі. Враховуючи, що

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad \vec{q} = (q_x, q_y, q_z),$$

одержимо

$$\begin{cases} x = x_0 + q_x t, \\ y = y_0 + q_y t, \\ z = z_0 + q_z t. \end{cases} \tag{8.71}$$

Тут t — дійсне число, яке називається *параметром.*

Рівняння (8.71) називаються *параметричними рівняннями прямої.*

Приклад 52. Записати параметричні рівняння прямої

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{-8}.$$

Розв'язання. Прирівнюючи кожне відношення в канонічних рівняннях до параметру t, одержимо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{-8} = t, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + 5t, \\ z = 3 - 8t. \end{cases}$$

□

8.4.2. Пряма, як перетин двох площин

В просторі пряму лінію L можна визначити як лінію перетину двох площин π_1 і π_2:

$$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{8.72}$$
$$\pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{8.73}$$

Вважається, що ці площини непаралельні і не збігаються. Це означає, що не виконується хоча б одна із пропорцій

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Але тоді хоч один з визначників

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

відрізняється від нуля.

Система рівнянь (8.72), (8.73) називається *загальними рівняннями прямої лінії в просторі*.

Знайдемо канонічні рівняння прямої, які відповідають системі (8.72), (8.73). Нормальні вектори цих площин

$$\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1), \quad \overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2). \tag{8.74}$$

будуть перпендикулярні до напрямного вектора прямої $\vec{q}$. Тому

$$\vec{q} = \left[\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \tag{8.75}$$

Звідси випливає, що

$$\vec{q} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{8.76}$$

Зауважимо, що напрямний вектор прямої $\vec{q}$ не дорівнює нулю.

Отже, канонічні рівняння прямої L матимуть вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{8.77}$$

Знайдемо точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, яка розташована на даній прямій. Тому, що пряма — це одновимірний простір, то одну з координат можна задати цілком довільно. Звичайно за точку M_0 вважають точку перетину прямої L з будь-якою з координатних площин. Тоді відповідна координата точки M_0 дорівнює нулю. Інші координати знаходять, розв'язуючи систему(8.72), (8.73).

Зауваження 30. Тому що площини π_1 і π_2 непаралельні, то напрямний вектор $\vec{q}$ прямої не може дорівнювати нулю, але окремі його координати приймати нульові значення можуть. Якщо система (8.72), (8.73) виявиться несумісною, то слід спочатку надати числове значення іншої координати.

Приклад 53. Знайти канонічні рівняння прямої, що задана як перетин двох площин:

$$\pi_1: \quad x + y + z - 2 = 0, \tag{8.78}$$
$$\pi_2: \quad 2x + y - z - 1 = 0. \tag{8.79}$$

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої.

Тому що вектори нормалі заданих площин перпендикулярні до шуканої прямої, то напрямний вектор $\vec{q}$ прямої дорівнює векторному добутку векторів $\overrightarrow{N_1} = (1, 1, 1)$ і $\overrightarrow{N_2} = (2, 1, -1)$:

$$\vec{q} = \left[\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}\,(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) - \vec{j}\,(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) + \vec{k}\,(1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) =$$
$$= -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (-2, 3, -1).$$

Знайдемо точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, яка розташована на даній прямій.

Нехай $z_0 = 0$, тоді з (8.78), (8.79) одержимо таку лінійну систему відносно невідомих координат x_0 і y_0 точки M_0:

$$x + y = 2,$$
$$2x + y = 1.$$

Віднімемо перше рівняння з другого:

$$x = -1.$$

Тоді, підставляючи знайдене значення до першого рівняння, одержимо

$$y = 3.$$

Отже, $M_0\,(-1, 3, 0)$.

Таким чином, канонічні рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{0}.$$

□

Звернемо увагу, що канонічні рівняння прямої (8.66)

$$\frac{x-x_0}{q_x} = \frac{y-y_0}{q_y} = \frac{z-z_0}{q_z}$$

утворюють систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{q_x} = \dfrac{y-y_0}{q_y}, \\ \dfrac{y-y_0}{q_y} = \dfrac{z-z_0}{q_z}, \\ \dfrac{z-z_0}{q_z} = \dfrac{x-x_0}{q_x}. \end{cases} \tag{8.80}$$

Перше рівняння системи — це рівняння вигляду

$$Ax + By + D = 0.$$

Нагадаємо (стр.150), що це рівняння площини, яка паралельна осі Oz (вектор нормалі перпендикулярний до цієї осі).

Аналогічно, інші рівняння канонічної системи (8.80) також визначають площини, які паралельні відповідним осям координат.

Отже, *геометрично канонічні рівняння прямої можна розглядати як перетин трьох площин.*

Зауваження 31. Тому що перетин двох площин повністю визначають пряму, то одне рівняння системи (8.80) зайве і його можна вилучити.

8.4.3. Взаємне розташування двох прямих

Дві прямі в просторі L_1 і L_2 можуть: перетинатися, бути паралельними, бути мимобіжними. У перших двох випадках прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині.

Встановимо умову належності однієї площини двох прямих, заданих канонічними рівняннями:

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{q_x}=\frac{y-y_1}{q_y}=\frac{z-z_1}{q_z}, \tag{8.81}$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{l_x}=\frac{y-y_2}{l_y}=\frac{z-z_2}{l_z}. \tag{8.82}$$

Тут позначено:

$$\overrightarrow{q}=(q_x,q_y,q_z) \quad \text{— напрямний вектор прямої} \quad L_1,$$
$$\overrightarrow{l}=(l_x,l_y,l_z) \quad \text{— напрямний вектор прямої} \quad L_2.$$

Очевидно, якщо прямі L_1 і L_2 належать одній і тій самій площині необхідно і достатньо, щоб три вектори

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1), \quad \overrightarrow{q}=(q_x,q_y,q_z), \quad \overrightarrow{l}=(l_x,l_y,l_z)$$

були компланарні. Тут точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ належить прямій L_1, а точка $M_2(x_2,y_2,z_2)$ — прямій L_2.

За умовою компланарності, маємо

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ q_x & q_y & q_z \\ l_x & l_y & l_z \end{vmatrix}=0. \tag{8.83}$$

Отже, *якщо дві прямі L_1 і L_2 задовольняють умові (8.83), то ці прямі або паралельні, або перетинаються.*

Означення 67. Кутом між двома прямими L_1 і L_2 у просторі називається будь-який із суміжних кутів φ або ψ, утворений прямими L_1 і L_2 (рис.8.9).

Очевидно, що задача визначення кута між прямими L_1 і L_2 зводиться до задачі визначення кута між напрямними векторами $\vec{q_1}$ і $\vec{q_2}$ цих прямих.

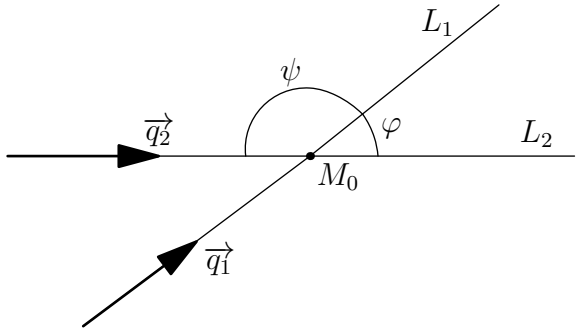

Рис. 8.9. Кут між двома прямими

Прямі L_1 і L_2 *паралельні*, якщо їх напрямні вектори $\overrightarrow{q} = (q_x, q_y, q_z)$ і $\overrightarrow{l} = (l_x, l_y, l_z)$ колінеарні, тобто виконується умова:

$$\frac{q_x}{l_x} = \frac{q_y}{l_y} = \frac{q_z}{l_z}. \tag{8.84}$$

Якщо умови (8.83) і (8.84) не виконуються, то прямі мимобіжні.

Означення 68. Дві прямі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні (рис.8.10).

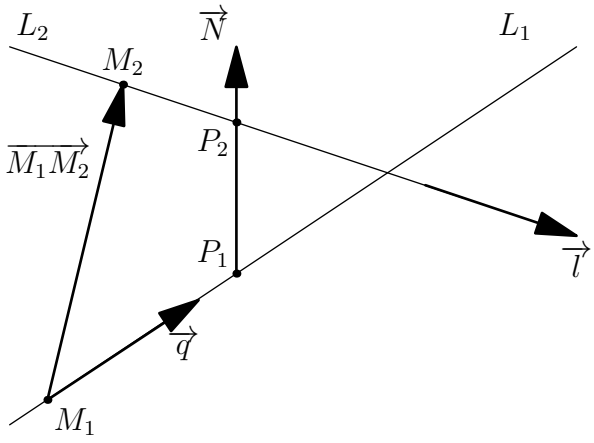

Рис. 8.10. Прямі мимобіжні

Знайдемо відстань між мимобіжними прямими.

Під відстанню d між мимобіжними прямими будемо розуміти довжину відрізка загального перпендикуляра $\overrightarrow{N}$ до цих прямих, обмеженого цими прямими (на рис.8.10 це довжина відрізка P_1P_2), тобто $d = |P_1P_2|$.

Векторний добуток напрямних векторів $\overrightarrow{q} = (q_x, q_y, q_z)$ і $\overrightarrow{l} = (l_x, l_y, l_z)$ буде перпендикулярним до обох прямих:

$$\overrightarrow{N} = \left[\overrightarrow{q}, \overrightarrow{l}\right].$$

Вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{8.85}$$

з'єднує точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, які розташовані на відповідних прямих. Тоді відстань між прямими L_1 і L_2 дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на вектор $\overrightarrow{N}$:

$$d = |P_1P_2| = \left|\Pr_{\overrightarrow{N}}\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{N}\,\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{N}\right|}\right|. \tag{8.86}$$

Приклад 54. Знайти відстань між прямими

$$L_1: \quad \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \tag{8.87}$$

$$L_2: \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \tag{8.88}$$

Розв'язання. За умовами задачі маємо такі напрямні вектори прямих:

$$\overrightarrow{q} = (-2, 0, 1), \quad \overrightarrow{l} = (1, 2, -1).$$

Знайдемо напрям перпендикуляра загального до обох прямих:

$$\overrightarrow{N} = \left[\overrightarrow{q}, \overrightarrow{l}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ q_x & q_y & q_z \\ l_x & l_y & l_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}. \tag{8.89}$$

На прямих L_1 і L_2 розташовані точки $M_1 = (0, 1, -2)$ і $M_2 = (-1, -1, 2)$. Отже, маємо вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, -1, 2) - (0, 1, -2) = (-1 - 0, -1 - 1, 2 - (-2)) = (-1, -2, 4). \tag{8.90}$$

Відстань між прямими дорівнює:

$$d = \left|\Pr_{\overrightarrow{N}}\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{N}\,\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{N}\right|}\right|. \tag{8.91}$$

$$\overrightarrow{N}\overrightarrow{M_1M_2} = -2\cdot(-1) - 1\cdot(-2) - 4\cdot 4 = 2 + 2 - 16 = -12.$$

$$\left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}.$$

Остаточно маємо:

$$d = \frac{12}{\sqrt{21}} = \frac{12\sqrt{21}}{21} = \frac{4\sqrt{21}}{7}. \tag{8.92}$$

□

8.4.4. Взаємне розташування прямої та площини

Розглянемо взаємне розташування площини π:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{8.93}$$

і прямої L

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}. \tag{8.94}$$

Пряма може перетинати площину, бути паралельною до площини й може розміщуватися у площині.

Означення 69. Кутом між прямою L і площиною π називається найменший кут φ, утворений прямою L і її проєкцією L' на площину π (рис.8.11).

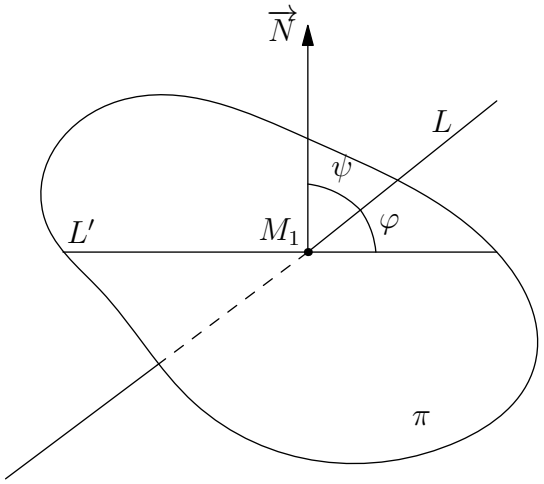

Рис. 8.11. Кут між прямою та площиною

Тому що кут φ між прямою L і площиною π є додатним до кута ψ між напрямним вектором прямої $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ і вектором нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$, то

$$\cos\varphi = \cos(\psi - \pi/2) = \sin\psi = \frac{Aq_x + Bq_y + Cq_z}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{8.95}$$

Пряма L буде паралельна до площини π, коли напрямний вектор $\vec{q}$ буде перпендикулярним до вектора нормалі $\vec{N}$, тобто:

$$Aq_x + Bq_y + Cq_z = 0. \tag{8.96}$$

Пряма L буде перпендикулярна до площини π, коли вектори $\vec{q}$ і $\vec{N}$ будуть колінеарні:

$$\frac{A}{q_x} = \frac{B}{q_y} = \frac{C}{q_z}. \tag{8.97}$$

Пряма L буде розміщуватися у площині π, коли вона паралельна до площини та коли хоча б одна точка прямої $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить площині, тобто коли виконуються умови:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{8.98}$$

$$\frac{A}{q_x} = \frac{B}{q_y} = \frac{C}{q_z}. \tag{8.99}$$

Завдання для самостійної роботи

Зауважимо, що *через задану точку паралельно заданому напряму можна провести тільки одну пряму.* Таким чином, щоб визначити пряму потрібно задати *точку* та *напрямний вектор.*

1. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2, 0, -3)$ паралельно:

а) вектору $\vec{q} = (2, -3, 5)$;

б) прямої $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

в) осі Ox; г) осі Oz;

д) прямої $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

е) прямої $\begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 2t, \\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t. \end{cases}$

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки M_1 та M_2, якщо:

а) $M_1(1, -2, 1)$, $M_2(3, 1, -1)$,

б) $M_1(3, -1, 0)$, $M_2(1, 0, -3)$.

3. Написати канонічні рівняння прямої, якщо

а) $L:$ $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases}$ б) $L:$ $\begin{cases} x + 2y - 32z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

8.5. Задачі на пряму та площину у просторі

8.5.1. Точка перетину прямої і площини

Нехай дана площина π:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{8.100}$$

і пряма L:

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}. \tag{8.101}$$

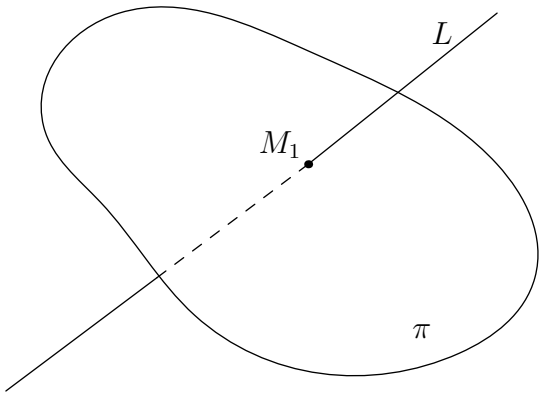

Рис. 8.12. Точка перетину прямої і площини

Знайдемо точку перетину $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямої із площиною (рис.8.12). Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь (8.100), (8.101). Простіше буде, якщо записати рівняння прямої (8.101) у параметричній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{q_x} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{q_y} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{q_z} = t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + q_x t, \\ y = y_0 + q_y t, \\ z = z_0 + q_z t. \end{cases} \tag{8.102}$$

Підставляючи x, y, z з (8.102) до рівняння площини (8.100), одержимо рівняння відносно параметра t:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Aq_x + Bq_y + Cq_z) = 0.$$

Звідси знаходимо значення параметра t, який відповідає точці перетину M_1:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aq_x + Bq_y + Cq_z}.$$

Далі, підставляючи знайдене значення параметра t до параметричних рівнянь прямої (8.102), знайдемо координати точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перетину прямої та площини.

Приклад 55. Знайти точку перетину прямої

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-1}{-4}$$

і площини:

$$3x - 2y + 6z - 5 = 0.$$

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -7 + 3t, \\ z = 1 - 4t. \end{cases}$$

Підставимо x, y, z до рівняння площини:

$$3(3 + 2t) - 2(-7 + 3t) + 6(1 - 4t) - 5 = 0, \quad -24t = 24, \quad t = -1.$$

Отже, точка перетину має такі координати:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2(-1) = 3 - 2 = 1, \\ y &= -7 + 3(-1) = -7 - 3 = -10, \\ z &= 1 - 4(-1) = 1 + 4 = 5. \end{aligned}$$

□

8.5.2. Проєкція точки на пряму

Розглянемо точку $A\,(x_a, y_a, z_a)$ і пряму

$$L: \quad \frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}. \tag{8.103}$$

Означення 70. Побудуємо площину π, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої L. *Прямокутною проєкцією точки* A на пряму L називається точка A' перетину площини π з прямою L (рис.8.13).

Позначимо проєкцію точки A на пряму L як A'.

Побудуємо рівняння площини π, що проходить через точку $A\,(x_a, y_a, z_a)$ перпендикулярно до прямої L. Напрямний вектор прямої $\overrightarrow{q} = (q_x, q_y, q_z)$ розташован перпендикулярно до площини π і його можна взяти як вектор нормалі. Отже, маємо таке рівняння площини:

$$q_x\,(x - x_a) + q_y\,(y - y_a) + q_z\,(z - z_a) = 0. \tag{8.104}$$

Точка A' перетину цієї площини та прямої L буде проєкцією точки A на пряму L.

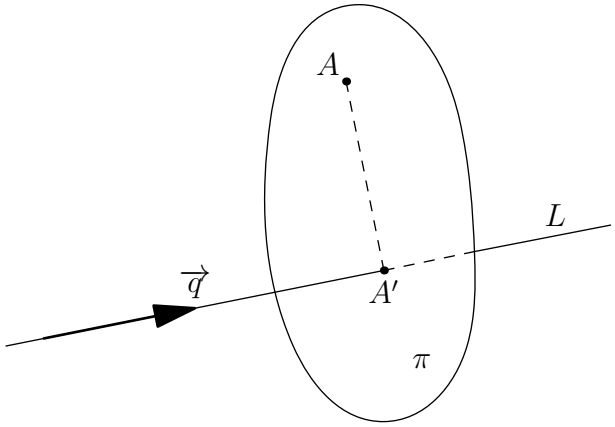

Рис. 8.13. Проєкція точки на пряму

Знайдемо точку перетину площини π і прямої L, для цього запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = x_0 + q_x t, \\ y = y_0 + q_y t, \\ z = z_0 + q_z t. \end{cases} \tag{8.105}$$

Підставляючи x, y, z із (8.105) до рівняння площини (8.104), одержимо рівняння відносно параметра t:

$$q_x\,(x_0 - x_a) + q_y\,(y_0 - y_a) + q_z\,(z_0 - z_a) + t\left(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2\right) = 0.$$

або

$$t = -\frac{q_x\,(x_0 - x_a) + q_y\,(y_0 - y_a) + q_z\,(z_0 - z_a)}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}. \tag{8.106}$$

Підставляючи знайдене значення параметра t до (8.105), одержимо координати точки A'.

Приклад 56. Знайти проєкцію точки $M(3, -2, -1)$ на пряму

$$L: \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Розв'язання. Побудуємо рівняння площини π, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L. Тому, що пряма L перпендикулярна площині π, то її напрямний вектор

$$\vec{q} = (4; -1; 3)$$

можна взяти як вектор нормалі площини:

$$4 \cdot (x-3) - 1 \cdot (y+2) + 3 \cdot (z+1) = 0 \quad \text{або} \quad 4x - y + 3z - 11 = 0.$$

Звідси, скориставшись параметричними рівняннями прямої L

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} = t, \\ \dfrac{y}{-1} = t, \\ \dfrac{z+1}{3} = t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases}$$

одержимо точку перетину прямої L та площини π:

$$4x - y + 3z - 11 = 4(1+4t) + t + 3(-1+3t) - 11 = 26t - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{10}{26},$$

$$x = 1 + 2t = 1 + \frac{10}{13} = \frac{23}{13}, \quad y = -t = -\frac{10}{26}, \quad z = -1 + 3t = -1 + \frac{10}{26} = -\frac{13}{26}.$$

Таким чином, точка $M'\left(\dfrac{23}{13}; -\dfrac{10}{26}; -\dfrac{13}{26}\right)$ є проєкцією точки M.

□

8.5.3. Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої L:

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}.$$

Опустимо із точки M_1 на пряму L перпендикуляр. Основу перпендикуляра позначимо як точку M_1' (рис.8.14). Очевидно, що шукана відстань d дорівнює довжині цього перпендикуляра (рис.8.14):

$$d = |M_1 M_1'|.$$

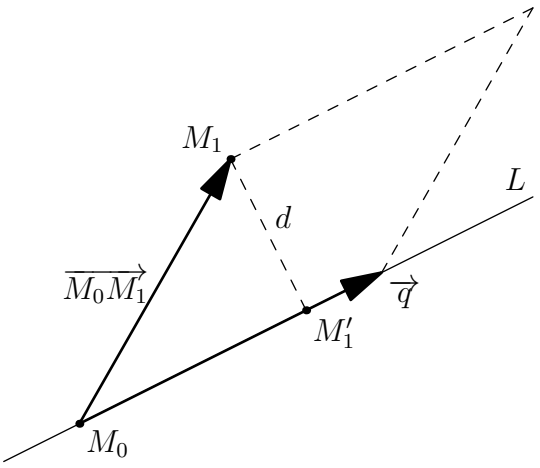

Рис. 8.14. Точка перетину прямої і площини

Зауважимо, що точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ міститься на прямій L, а вектор

$$\overrightarrow{q} = (q_x, q_y, q_z)$$

— напрямний вектор цієї прямої.

Побудуємо площину π, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно прямої L. Напрямний вектор прямої $\overrightarrow{q} = (q_x, q_y, q_z)$ розташован перпендикулярно до площині π і його можна взяти як вектор нормалі. Отже, маємо таке рівняння площини:

$$q_x (x - x_1) + q_y (y - y_1) + q_z (z - z_1) = 0. \tag{8.107}$$

Знайдемо точку M_1' перетину площини π і прямої L, для цього уявимо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = x_0 + q_x t, \\ y = y_0 + q_y t, \\ z = z_0 + q_z t. \end{cases} \tag{8.108}$$

Підставляючи вирази (8.108) до рівняння площини (8.107), одержимо рівняння відносно параметра t.

Далі за формулами (8.108) одержимо координати точки M_1' і тоді відстань від точки M_1 до прямої L знайдемо як довжину відрізка M_1M_1'.

Приклад 57. Знайти відстань від точки $A(2,-1,0)$ до прямої L:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Розв'язання. Знайдемо проєкцію A' точки A на пряму L. Для цього побудуємо площину, яка проходить через точку $A(2,-1,0)$ перпендикуляно до прямої L. Вектор $\overrightarrow{q} = (3,4,2)$ — напрямний вектор прямої, тому візьмемо його як вектор нормали площини:

$$3(x-2) + 4(y+1) + 2z = 0 \quad \text{або} \quad 3x + 4y + 2z - 2 = 0 \tag{8.109}$$

Далі знайдемо точку перетину прямої L з побудованою площиною. Параметричні рівняння прямої L мають вид:

$$\begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases} \tag{8.110}$$

Підставляючи (8.110) до (8.109), одержимо

$$3(7+3t) + 4(1+4t) + 2(3+2t) - 2 = 0, \quad 29t + 29 = 0, \quad t = -1. \tag{8.111}$$

Враховуючи знайдено значення параметра $t = -1$, одержимо координати проєкції точки A на пряму L:

$$x = 7 - 3 = 4, \quad y = 1 - 4 = -3, \quad z = 3 - 2 = 1.$$

Тоді шукана відстань d дорівнює довжині перпендикуляра AA':

$$d = |AA'| = \sqrt{(4-2)^2 + (-3-(-1))^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

□

Другий спосіб розв'язання цієї задачи.

Дві точки M_0 і M_1 визначають вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Побудуємо на векторах $\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ паралелограм, тоді висота паралелограма h буде дорівнювати шуканої відстані d.

Нагадаємо, що площу паралелограма S можна обчислити за формулами:

$$S = \left|\left[\overrightarrow{q}, \overrightarrow{M_0M_1}\right]\right|, \quad S = h \cdot |\overrightarrow{q}|.$$

Тут h — висота паралелограма, $|\overrightarrow{q}|$ — його основа.

Звідси випливає, що відстань від точки M_1 до прямої L дорівнює:

$$d = |M_1M_1'| = \frac{S}{|\overrightarrow{q}|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{q}, \overrightarrow{M_0M_1}\right]\right|}{|\overrightarrow{q}|}. \tag{8.112}$$

Приклад 58. Знайти відстань від точки $A(2, -1, 0)$ до прямої L:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Розв'язання. Точка $M_0(7, 1, 3)$ належить прямої, вектор $\overrightarrow{q} = (3, 4, 2)$ — напрямний вектор прямої. Тоді за формулою (8.112) маємо:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{q}, \overrightarrow{M_0A}\right]\right|}{|\overrightarrow{q}|}, \tag{8.113}$$

$$\overrightarrow{M_0A} = (2, -1, 0) - (7, 1, 3) = (2-7, -1-1, 0-3) = (-5, -2, 3), \tag{8.114}$$

$$\left[\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{q}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(-2 \cdot 2 - (-3) \cdot 4) - \vec{j}\,(-5 \cdot 2 - (-3) \cdot 3) + \vec{k}\,(-5 \cdot 4 - (-2) \cdot 3) =$$

$$= \vec{i}\,(-4 + 12) - \vec{j}\,(-10 + 9) + \vec{k}\,(-20 + 6) = 8\vec{i} + \vec{j} - 14\vec{k} = (8, -1, -14),$$

$$\left|\left[\overrightarrow{q}, \overrightarrow{M_0A}\right]\right| = \sqrt{8^+1^2 + (-14)^2} = \sqrt{64 + 1 + 196} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}, \tag{8.115}$$

$$|\overrightarrow{q}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}. \tag{8.116}$$

Таким чином, маємо

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{q}, \overrightarrow{M_0A}\right]\right|}{|\overrightarrow{q}|} = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 3. \tag{8.117}$$

□

Приклад 59. Задано пряма $L : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$ та точка $M(0,1,2)$.

а) скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно прямої L;

б) скласти рівняння площини, що проходить через пряму L та точку M;

в) знайти проєкцію точки M на пряму L;

г) записати рівняння перпендикуляра, який опущен з точки M на пряму L;

д) обчислити відстань між точкою M та прямої L.

а) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно прямої L.

Розв'язання. Щоб побудувати рівняння площини потрібно задати *точку* та *вектор нормалі* $\vec{N}$.

За умовами задачі маємо: напрямний вектор прямої L

$$\vec{q} = (2;1;0)$$

та точку $M(0,1,2)$.

Напрямний вектор $\vec{q}$ перпендикулярний до шуканої площини, тобто його можна взяти за вектор нормалі. Тоді маємо

$$2 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-2) = 0$$

або

$$2x + y - 1 = 0.$$

□

б) Скласти рівняння площини, що проходить через пряму L та точку M.

Розв'язання. Щоб побудувати рівняння площини потрібно задати *точку* та *вектор нормалі* $\vec{N}$.

За умовами задачі маємо: напрямний вектор прямій L

$$\vec{q} = (2; 1; 0)$$

і дві точки: задана точка $M(0, 1, 2)$ та точка на прямій $M_L(1, 0, -1)$.

Дві точки – це вектор

$$\overrightarrow{MM_L} = (1 - 0; 0 - 1; -1 - 2) = (1; -1; -3).$$

Зауважимо, що цей вектор міститься в шуканій площині.

Вектори $\vec{q}$ та $\overrightarrow{MM_L}$ паралельні шуканій площині, тобто перпендикулярні вектору нормалі $\vec{N}$ цієї площини. Звідси випливає

$$\vec{N} = \left[\vec{q}, \overrightarrow{MM_L}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(1 \cdot (-3) - 0 \cdot (-1)) - \vec{j}(2 \cdot (-3) - 0 \cdot 1) + \vec{k}\,(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) =$$

$$= \vec{i}(-3 - 0) - \vec{j}(-6 - 0) + \vec{k}\,(-2 - 1) = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-3; 6; -3).$$

Таким чином, маємо

$$-3x + 6(y - 1) - 3(z - 2) = 0,$$

або

$$-3x + 6y - 3z = 0.$$

□

в) Знайти проєкцію точки M на пряму L.

Розв'язання. Позначимо шукану проєкцію як M'.

Побудуємо площину P, що проходить через точку M перпендикулярно прямої L. Перетин цієї площини P з прямої L є шукана проєкція M' точки M.

Тому, що пряма L перпендикулярна площині P маємо, що її вектор нормалі $\vec{N}$ колінеарний напрямному вектору $\vec{q}$ прямої L:

$$\vec{N} = \vec{q} = (2; 1; 0),$$

$$2(x - 0) + 1 \cdot (y - 1) + 0 \cdot (z - 2) = 0 \quad \text{або} \quad 2x + y - 1 = 0.$$

Звідси, скориставшись параметричними рівняннями прямої L

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = t, \\ \dfrac{y}{1} = t, \\ \dfrac{z+1}{0} = t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1+2t, \\ y = t, \\ z = -1, \end{cases}$$

одержимо координати точки перетину прямої L та площини P:

$$2x + y - 1 = 2(1+2t) + t - 1 = 5t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{5},$$

$$x = 1 + 2t = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \quad y = t = -\frac{1}{5}, \quad z = -1.$$

Таким чином, $M'\left(\dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{5}; -1\right)$.

□

г) Записати рівняння перпендикуляра, який опущено з точки M на пряму L.

Розв'язання. Скористаємось результатом попередньої задачі. Тоді шуканий перпендикуляр – це пряма, що проходить через дві точки: M та її проєкцію M'. Звідси випливає, що напрямний вектор перпендикуляра це вектор $\overrightarrow{MM'}$:

$$\vec{q} = \overrightarrow{MM'} = \left(\frac{3}{5} - 0; -\frac{1}{5} - 1; -1 - 2\right) = \left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}; -3\right).$$

Отже, маємо:

$$\frac{x}{\frac{3}{5}} = \frac{y-1}{-\frac{6}{5}} = \frac{z-2}{-3}.$$

□

д) Обчислити відстань між точкою M та прямої L.

Розв'язання. На прямої L є власна точка $M_L(1,0,-1)$ (див. задачу б)). Тоді відстань d між точкою M та прямої L можна розглядати, як модуль проєкції вектора $\overrightarrow{MM_L}$ на напрям перпендикуляра до прямої L. Такий вектор вже знайдено у попередній задачі. Нагадаємо, що проєкцію можна обчислити за допомогою скалярного добутку.

Інший спосіб, це знайти довжину вектора $\overrightarrow{MM'}$, де точка M' є проєкція точки M на пряму L (див. попередню задачу):

$$d = \left|\overrightarrow{MM'}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + (-3)^2} = \frac{2\sqrt{30}}{5}.$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що прямі L_1 і L_2 належать однієї площині, та побудувати рівняння цієї площини, якщо:

а) $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}, \quad L_2 : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-2};$

б) $L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}, \quad L_2 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{-2}.$

2. Знайти точку перетину прямої L з площиною P, якщо

$$L : \frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}, \quad P : x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

3. Знайти проєкцію точки $P(2;-1;3)$ на пряму

$$\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}.$$

4. Знайти відстань між паралельними прямими:

$$L_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}, \quad L_2 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

5.* Знайти відстань між прямими:

$$L_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1}, \quad L_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що таке рівняння?

2. Сформулюйте означення рівняння поверхні. Що таке поверхня?

3. Що таке сфера?

4. Що таке циліндрична поверхня?

5. Що таке конічна поверхня?

6. Що таке поверхня обертання?

7. Лінія у просторі, її рівняння. Параметричні рівняння лінії у просторі.

8. Як визначається площина?

9. Запишить рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора.

10. Запишить загальне рівняння площини. Вкажить різні випадки неповних рівняннь.

11. Запишить рівняння площини у відрізках на осях.

12. Взаємне розміщення площин (умова паралельності та перпендикулярності).

13. Запишить канонічні та параметричні рівняння прямої.

14. Пряма у просторі як перетин двох площин.

15. Взаємне розташування двох прямих у просторі (умова паралельності та перпендикулярності).

16. Взаємне розміщення прямої та площини.

17. Як знайти точку перетину прямої і площини?

18. Як знайти проєкцію точки на пряму?

19. Як знайти відстань від точки до прямої?

9. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, декартови координати x, y, z яких задовольняють алгебраїчному рівнянню другого степеня:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0. \quad (9.1)$$

Тут коефіцієнти a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_0 — певні задані числа, причому числа a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Рівняння (9.1) називається *загальним рівнянням поверхні другого порядку.*

Існує дев'ять типів поверхнів другого порядку, які можна одержати з загального рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad \text{конус другого порядку,} \qquad (9.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{еліпсоїд,} \qquad (9.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{однопорожнинний гіперболоїд,} \qquad (9.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \text{двопорожнинний гіперболоїд,} \qquad (9.5)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad \text{еліптичний параболоїд,} \qquad (9.6)$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad \text{гіперболічний параболоїд,} \qquad (9.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{еліптичний циліндр,} \qquad (9.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{гіперболічний циліндр,} \qquad (9.9)$$

$$x^2=2py \qquad \text{параболічний циліндр.} \qquad (9.10)$$

Тут a, b, c, p, q — певні додатні числа, які визначають властивості поверхонь.

Щоб уявити форму поверхні користуються *методом паралельних перерізів*. Для цього поверхню перетинають площинами, паралельними координатним площинам, і вивчають лінії перерізу поверхні цими площинами.

9.1. Конус другого порядку

Поверхня, що визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{9.11}$$

називається *конусом другого порядку.*

Розглянемо рівняння (9.11). Доведемо, що функція в лівій частині цього рівняння є однорідною: підставимо в (9.11) замість x, y, z величини tx , ty, tz, тоді одержимо:

$$\frac{(tx)^2}{a^2} + \frac{(ty)^2}{b^2} - \frac{(tz)^2}{c^2} = t^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Таким чином, функція в лівій частині рівняння (9.11) є однорідною функцією другого порядка, тобто рівняння (9.11) визначає *конічну поверхню з вершиною у початку координат.*

Звернемо увагу на те, що рівняння (9.11) містить тільки квадрати змінних величин x, y і z. Тому якщо точка $M(x, y, z)$ належить конусу, то точки з координатами $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також будуть розміщені на цьому конусі. Звідси випливає, що координатні площини є площинами симетрії конуса (9.11), осі координат — осями симетрії, а початок координат — центром симетрії.

Розглянемо переріз цього конуса координатною площиною Oxz:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0. \end{cases} \tag{9.12}$$

Рівняння (9.12) можна уявити у такому вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$

Таким чином, перерізом конуса (9.11) координатною площиною Oxz є дві прямі

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0,$$

які перетинаються у початку координат (рис.9.1).

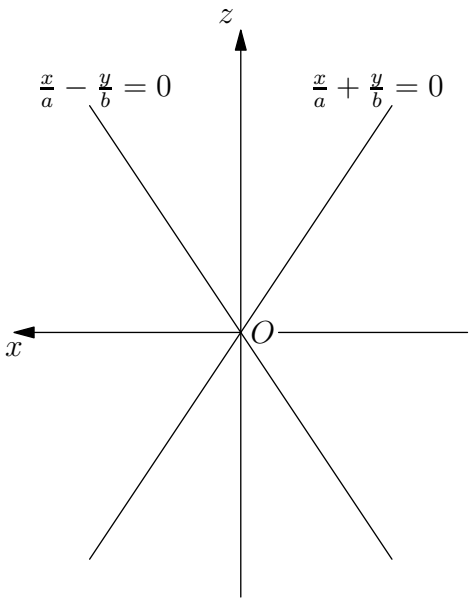

Рис. 9.1. Переріз конуса площиною Oxz

Переріз конуса координатною площиною Oyz

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

виглядає так саме: дві прямі,

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

які перетинаються у початку координат.

Переріз конічної поверхні площинами $z = h$, які паралельні координатній площині Oxy, визначаються рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \tag{9.13}$$

З системи (9.29) випливає, що при $|h| > 0$ площина $z = h$ перетинає конус по еліпсу з півосями (рис.9.2):

$$a^* = a\,\frac{|h|}{c}, \quad b^* = b\,\frac{|h|}{c}.$$

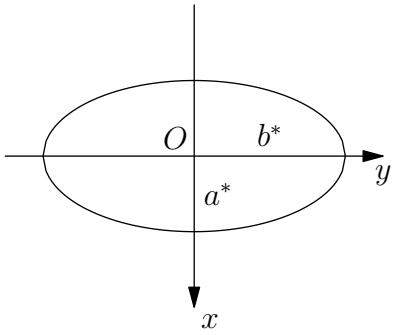

Рис. 9.2. Переріз конуса площиною Oxy

і центром, який розміщується на осі Oz.

Якщо h необмежено зростає, то півосі еліпса також необмежено зростають.

Якщо h зменшується до нуля, то півосі цього еліпса також зменшуються до нуля і переріз конуса вироджується у точку. Отже, площина Oxy ($z = h = 0$) в точці $(0; 0; 0)$ торкається конуса. Ця точка називається *вершиною конуса.*

Таким чином, конус можна розглядати як геометричне місце точок, яке утворюється прямими, що проходять через цей еліпс і початок координат (рис.9.3).

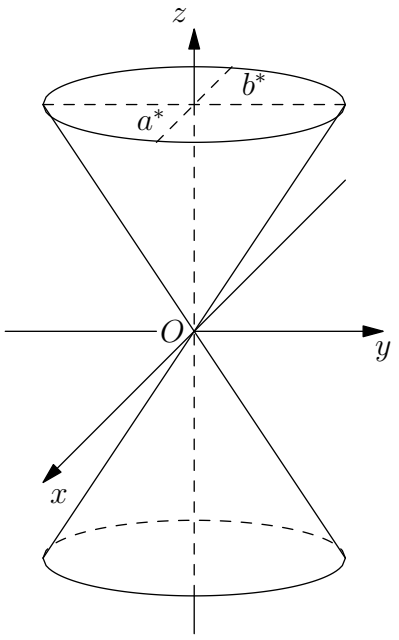

Рис. 9.3. Конус другого порядку

Якщо $a = b$, то у перерізі $z = h$ одержимо коло замість еліпса. Такий конус називається *круговим*, або *конусом обертання.*

9.2. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій системі прямокутних декартових координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{9.14}$$

Числа a, b, c називаються півосями еліпсоїда.

Рівняння (9.14) називається *каноничним рівнянням еліпсоїда.*

Зауважимо, що рівняння (9.14) містить тільки квадрати координат x, y, z, тому якщо точка $M(x,y,z)$ належить еліпсоїду, то точки з координатами $(\pm x,\pm y,\pm z)$ теж будуть розташовані на тому ж самому еліпсоїді. Звідси випливає, що еліпсоїд має центр симетрії, яким є початок координат, і еліпсоїд має площини симетрії, якими є координатні площини, а осі координат — це осі симетрії еліпсоїда.

Далі, з рівняння (9.14) також випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\quad \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

Отже, всі точки еліпсоїда містяться в прямокутному паралелепіпеді

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -b\leqslant y\leqslant b,\quad -c\leqslant z\leqslant c, \tag{9.15}$$

грані якого паралельні координатним площинам і відсікають на осях координат Ox, Oy і Oz відрізки $\pm a$, $\pm b$ і $\pm c$.

З'ясуємо форму еліпсоїда, тому розглянемо перерізи еліпсоїда площинами $z=h$, паралельними координатній площині Oxy. Лінія, яка виникає у перерізі визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases} \tag{9.16}$$

Таким чином, якщо $h>c$, то площина $z=h$ не може перетинати еліпсоїд.

Якщо $h\leqslant |c|$, то переріз еліпсоїда площиною $z=h$ визначає еліпс з півосями

$$a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$
$$b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

причому цей еліпс вироджується в точку, коли $h = c$. Насправді, при $h = c$ рівняння (9.16) матиме такий вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

якому задовольняють координати тільки однієї точки $(0; 0; h)$. Отже, площина $z = h$ буде дотикатися поверхні еліпсоїда.

При $h = 0$, тобто в площині Oxy, цей еліпс має найбільші півосі

$$a^* = a, \quad b^* = b,$$

і площина Oxy перетинає еліпсоїд по еліпсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Таким чином, якщо h зростає від 0 до c, то розмір переріза (півосі) зменшується до нуля.

Нагадаємо, що еліпсоїд має площину симетрії $z = 0$. Тому перерізи еліпсоїда площинами $z = h$, коли h змінюється від 0 до $-c$, виглядають так саме, як і в розглянутому випадку.

Звернемо увагу на те, що координати x, y, z входять в рівняння еліпсоїда (9.14) рівноправно, тому в перерізах еліпсоїда площинами паралельними координатним площинам Oyz і Oxz будуть одержані тіж самі результати. Наприклад, в перерізах еліпсоїда площинами $x = k$ будуть такі еліпси:

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2}, \\ x = k. \end{cases}$$

Нагадаємо, що числа a, b, c називаються півосями еліпсоїда. Коли всі півосі різні, то еліпсоїд називається *тривісним еліпсоїдом* (рис.9.4).

Коли якісь дві півосі збігаються, наприклад, $a = b$, тоді система (9.16) визначає коло

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \dfrac{h^2}{c^2}\right), \\ z = h, \end{cases} \tag{9.17}$$

радіуса $R = a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}$ з центром на осі Oz. Такий еліпсоїд можна розглядати як поверхню, утворенную обертанням еліпса навколо осі Oz. Така поверхня називається *еліпсоїд обертання.*

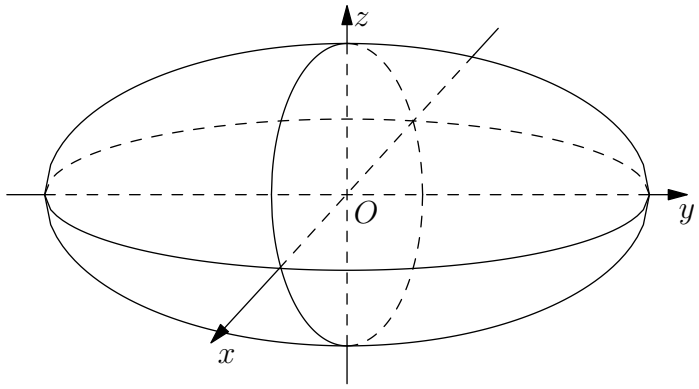

Рис. 9.4. Еліпсоїд

Коли всі три півосі рівні, тобто $a = b = c$, то еліпсоїд є *сферою* з центром у початку координат.

9.3. Однопорожнинний гіперболоїд

Поверхня, що візначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{9.18}$$

називається *однопорожнинний гіперболоїд*.

Зауважимо, що рівняння однопорожнинного гіперболоїда містить тільки квадрати коодинат x, y, z, тому однопорожнинний гіперболоїд має три площини симетрії, якими є координатні площини а також має центр симетрії (початок координат).

Розглянемо переріз цього гіперболоїда координатною площиною Oxz. Цей переріз визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases} \tag{9.19}$$

Таким чином, даний переріз — це гіпербола, яка розташована симетрично щодо осей координат Ox, Oz і перетинає вісь Ox в точках $(-a; 0; 0)$ і $(a; 0; 0)$.

Переріз гіперболоїда координатною площиною Oyz визначається рівняннями:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases} \tag{9.20}$$

Цей переріз — це також гіпербола, яка розташована симетрично щодо осей координат Oy, Oz і перетинає вісь Oy в точках $(0;-b;0)$ і $(0;b;0)$.

Розглянемо переріз однопорожнинного гіперболоїда (9.18) площинами паралельними координатній площині Oxy:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \tag{9.21}$$

Звідси випливає, що кожна площина $z=h$ перетинає гіперболоїд по еліпсу з півосями

$$a^*=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b^*=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Цей еліпс розташован симетрічно щодо осей координат Ox, Oy, причому розмір півосей буде найменьший у координатній площині Oxy і далі необмежено зростає. Таким чином, однопорожнинний гіперболоїд моожна уявити у вигляді нескінченної труби, яка необмежено розширюється.

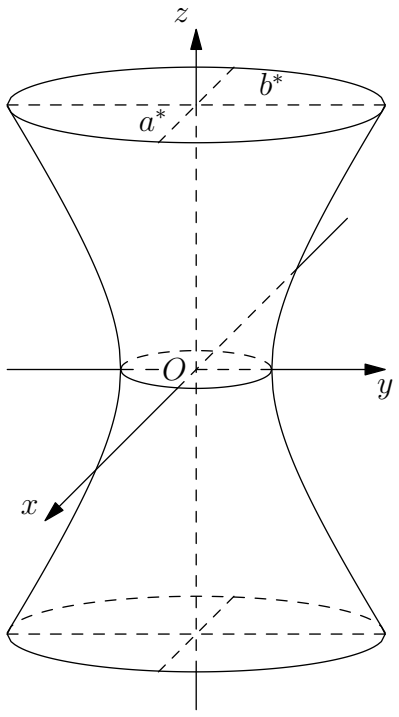

Рис. 9.5. Однопорожнинний гіперболоїд

9.4. Двопорожнинний гіперболоїд

Поверхня, що візначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{9.22}$$

називається *двопорожнинний гіперболоїд*.

Розглянемо переріз цього гіперболоїда координатною площиною Oxz. Цей переріз визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\\ y=0.\end{cases} \tag{9.23}$$

З рівняннь (9.23) випливає, що даний переріз визначає в площині Oxz гіперболу, яка розташована симетрично щодо осей координат Ox, Oz і перетинає вісь Oz в точках $(0;0;-c)$ і $(0;0;c)$.

Переріз гіперболоїда координатною площиною Oyz визначається рівняннями

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\\ x=0.\end{cases} \tag{9.24}$$

Цей переріз зображає гіперболу, росташованую симетрічно відносно осей координат Oy, Oz і перетинає вісь Oz в точках $(0;0;-c)$ і $(0;0;c)$.

Розглянемо переріз двопорожнинного гіперболоїда площинами паралельними координатній площині Oxy:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases} \tag{9.25}$$

З рівнянь (9.25) випливає, що $|h|>c$, то площина $z=c$ перетинає двопорожнинний гіперболоїд по еліпсу з півосями

$$a^*=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\quad b^*=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

Якщо $|h|$ необмежено зростає, то півосі a^* і b^* цього еліпса також необмежено зростають. Якщо $|h|$ спадають, то півосі еліпса спадають і при $h=\pm c$ півосі

еліпса дорівнюють нулю, тобто еліпс, утворенний перерізом, вироджується в точку. Таким чином, площини $z = \pm h$ торкаються гіперболоїда.

Отже, двопорожнинний гіперболоїд можна уявити як поверхню, яка складається з двох окремих порожнин, кожна з цих порожнин має вигляд нескінченої опуклої чаши.

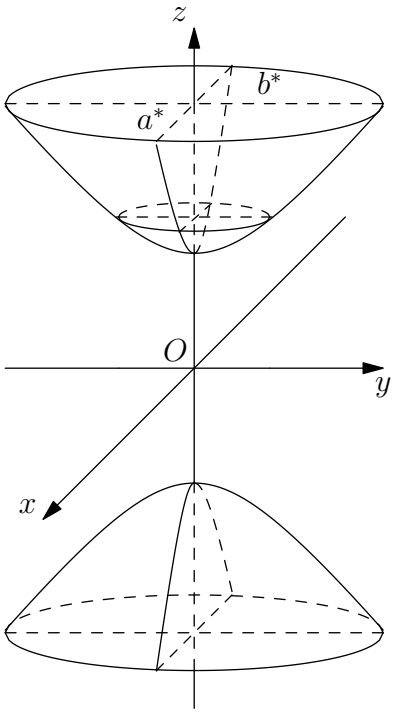

Рис. 9.6. Двопорожнинний гіперболоїд

9.5. Еліптичний параболоїд

Поверхня, яка визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0, \tag{9.26}$$

називається *еліптичним параболоїдом.*

Числа p, q називаються *параметрами параболоїда.*

Розглянемо переріз еліптичного параболоїда (9.26) координатною площиною Oxz, рівняння якої $y = 0$. Цей переріз визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0. \end{cases} \tag{9.27}$$

З рівняннь (9.27) випливає, що даний переріз визначає в площині Oxz параболу

$$x^2 = 2pz,$$

гілки якої спрямовані вгору. Ця парабола розташована симетрично щодо осі координат Oz з вершиною у початку координат, p — параметр цієї параболи.

Переріз параболоїда координатною площиною Oyz визначає подібну параболу з параметром q:

$$\begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0. \end{cases} \tag{9.28}$$

Переріз параболоїда (9.26) площинами паралельними координатній площині Oxy визначається такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases} \tag{9.29}$$

З системи (9.29) випливає, що при $h > 0$ площина $z = h$ перетинає еліптичний параболоїд по еліпсу з півосями

$$a^* = \sqrt{2ph}, \quad b^* = \sqrt{2qh}.$$

Таким чином, якщо h зменшується до нуля, то півосі цього еліпса також зменшуються до нуля. Тобто площина Oxy ($z = h = 0$) в точці $(0; 0; 0)$ торкається еліптичного параболоїда. Ця точка називається *вершиною параболоїда.*

Якщо h необмежено зростає, то півосі також необмежено зростають.

Якщо $h < 0$, то рівняння (9.29) визначають уявний еліпс, тобто площина $z = h$ зовсім немає загальних точок з параболоїдом.

Отже, еліптичний параболоїд має форму нескінченої опуклої чаши.

9.6. Гіперболічний параболоїд

Поверхня, яка визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0, \tag{9.30}$$

називається *гіперболічним параболоїдом.*

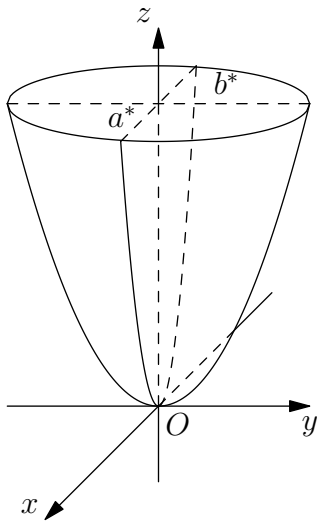

Рис. 9.7. Еліптичний параболоїд

Числа p, q називаються *параметрами параболоїда.*

Розглянемо переріз гіперболічного параболоїда (9.30) координатною площиною Oxz. Цей переріз визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0. \end{cases} \tag{9.31}$$

З рівняннь (9.31) випливає, що даний переріз визначає в площині Oxz параболу

$$x^2 = 2pz, \tag{9.32}$$

гілки якої спрямовані вгору (рис.9.8). Ця парабола розташована симетрично щодо осі координат Oz з вершиною у початку координат, p — параметр цієї параболи.

Розглянемо переріз даного параболоїда площинами $x = h$, які паралельни координатній площині Oyz:

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \tag{9.33}$$

При будь-якому h ця система визначає параболу, гілки якої спрямовані до низу. Параболи (9.33) розташовані симетрічно щодо осі Oxz з вершинами, що розміщуються на параболі (9.32).

Отже, форма гіперболічного параболоїда нагадує сідло (рис.9.8).

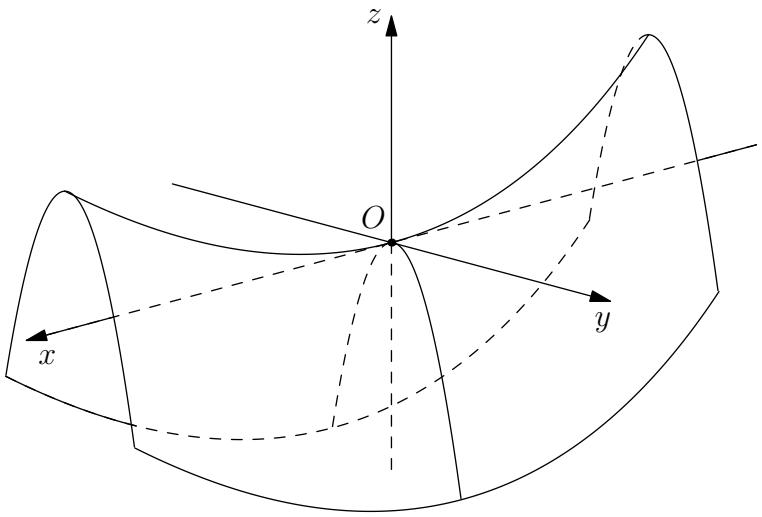

Рис. 9.8. Гіперболічний параболоїд

9.7. Циліндри другого порядку

Розглянемо загальне рівняння другого степеня, яке не містить поточної координати z:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{9.34}$$

Раніше було доведено (див. стр.144), що це рівняння визначає в просторі циліндричну поверхню з *твірними*, які паралельні осі Oz. Рівняння (9.34) можна розглядати як рівняння *напрямної лінії* циліндрічної поверхні, тобто як переріз циліндра координатною площиною Oxy.

Рівняння другого степеня можна шляхом вибору відповідних координат привести до рівняння еліпса, гіперболи або параболи. Таким чином, маємо такі циліндрічні поверхні другого порядку.

Еліптичний циліндр визначається таким рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9.35}$$

Кожен переріз цього цилидра є еліпс (рис.9.9).

Якщо $a = b$, то циліндр називається *круговим*.

Гіперболічний циліндр зображен на рис.9.10.

Його напрямна лінія є гіпербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9.36}$$

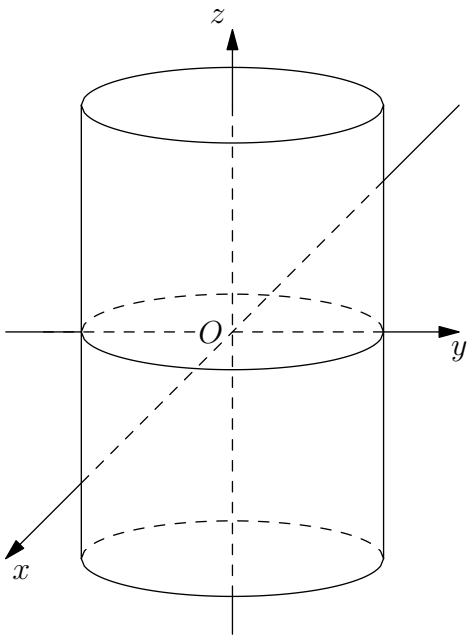

Рис. 9.9. Еліптичний циліндр

Параболічний циліндр (рис.9.11) визначається рівнянням параболи:

$$x^2 = 2py. \tag{9.37}$$

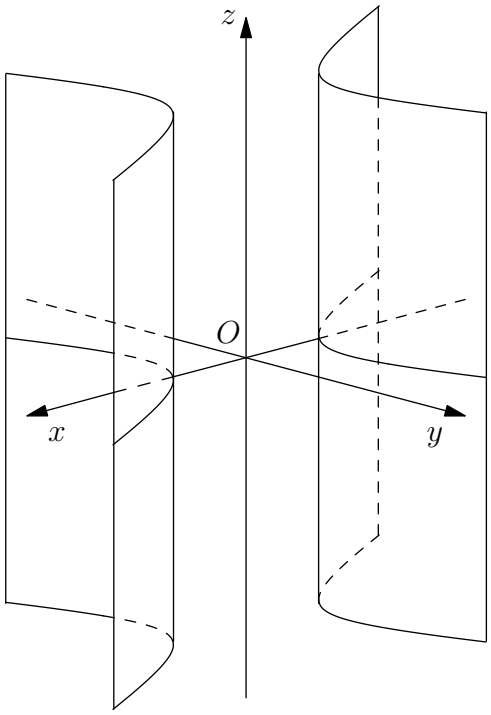

Рис. 9.10. Гіперболічний циліндр

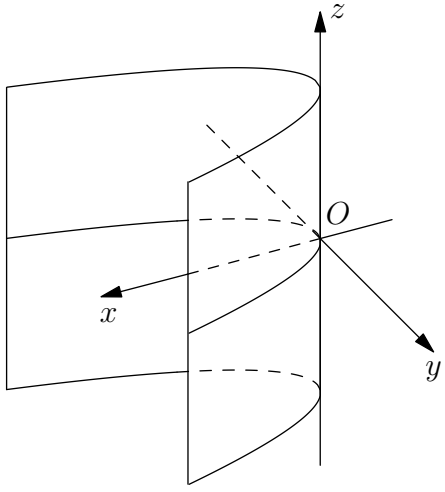

Рис. 9.11. Параболичний циліндр

10. Лінійні системи та визначники

10.1. Лінійне рівняння

10.1.1. Лінійне рівняння з одним невідомим

Лінійне рівняння з одним невідомим має вигляд:

$$a\,x = b. \tag{10.1}$$

Тут x — *невідоме*, a — *коефіцієнт* при невідомому, b — *вільний член*. Числа a і b вважаються *заданими*. Потрібно знайти невідоме x.

Означення 71. Число C називається *розв'язком* рівняння $a\,x = b$, якщо число C задовольняє цьому рівнянню, тобто підстановка числа C замість невідомого x перетворює це рівняння у *тотожність*:

$$a\,C \equiv b.$$

З рівняння (10.1) випливає, що вільний член b в a раз більше невідомого x, тому, щоб знайти невідоме x, потрібно поділити вільний член b на коефіцієнт a. Таким чином, якщо $a \neq 0$, то рівняння (10.1) має тільки один розв'язок:

$$x = \frac{b}{a}. \tag{10.2}$$

Приклад 60. Розв'язати рівняння

$$5x = 3. \tag{10.3}$$

Розв'язання. Розв'язок рівняння (10.3) одержимо за формулою (10.2):

$$x = \frac{3}{5}.$$

Дійсно, якщо в рівняння (10.3) замість невідомого x підставити число $3/5$, то одержимо тотожність

$$5x\big|_{x=\frac{3}{5}} = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3 \equiv 3.$$

□

Проте, коли $a = 0$, то ділення неможливо і тоді потрібно розглянути два випадки. Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то існує нескінченна множина розв'язків. Справді, тому що в цьому випадку рівняння (10.1) має вигляд

$$0 \cdot x = 0,$$

то будь–яке певне число x задовольняє рівнянню $ax = b$ і є його розв'язком.

Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння (10.1) розв'язків не має. Дійсно, в цьому випадку маємо

$$0 \cdot x \neq b,$$

тоді для будь–якого числа x ліва частина завжди дорівнює нулю, а права частина відрізняється від нуля тому що $b \neq 0$!

Такі самі три випадки мають місце і при розгляді довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

10.1.2. Лінійне рівняння з двома невідомими

Розглянемо *лінійне алгебраїчне рівняння* з двома невідомими x і y:

$$ax + by = c. \tag{10.4}$$

Тут *коефіцієнти* a, b та *вільний член* c вважаються *заданими*.

Звернемо увагу на те, що лева частина рівняння (10.4) являє *лінійну комбінацію* невідомих x і y.

Означення 72. *Розв'язком* рівняння (10.4) називається така *упорядкована пара чисел* C_1 і C_2, що рівняння (10.4) перетворюється у *тотожність*, якщо ці числа C_1 і C_2 підставити в рівняння замість невідомих x і y:

$$a\,C_1 + b\,C_2 \equiv c.$$

Зауважимо, що невідомих два, а рівняння тільки одно. Тому можна одному з невідомих надати будь–яке числове значення і знайти інше невідоме, як функцію цього значення. Таким чином рівняння (10.4) має *нескінченну кількість розв'язків*.

Наприклад, нехай коефіцієнт при невідомому x відрізняється від нуля

$$a \neq 0,$$

тоді надамо невідомому y довільне значення C:

$$y = C.$$

Тут C — довільне число.

Підставляючи це значення в рівняння (10.4), одержимо

$$ax + b\,C = c, \quad ax = c - b\,C, \quad x = \frac{c - b\,C}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\,C.$$

Таким чином рівняння (10.4) має нескінченну кількість розв'язків

$$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\,C, \quad y = C, \tag{10.5}$$

які залежать від вибору числа C.

Важливо, що невідомі x і y містяться в рівнянні (10.4) рівноправно, тому, якщо коефіцієнт при невідомому y не дорівнює нулю ($b \neq 0$), то можна довільні значення надавати невідомому x і знайти невідоме y:

$$x = C, \quad a\,C + by = c, \quad by = c - a\,C, \quad y = \frac{c - a\,C}{b} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\,C.$$

Приклад 61. Розв'язати лінійне рівняння

$$5x - 3y = 1. \tag{10.6}$$

Розв'язання. Рівняння (10.6) містить два невідомих. Надамо невідомому y довільне значення C:

$$y = C.$$

Тоді, підставляючи це значення в рівняння (10.6), одержимо

$$5x - 3 \cdot C = 1, \quad 5x = 1 + 3 \cdot C, \quad x = \frac{1 + 3\,C}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,C.$$

Таким чином маємо шуканий розв'язок вихідного рівняння:

$$x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,C, \quad y = C. \tag{10.7}$$

Зауваження 32. Якщо надати сталої C певне значення, наприклад, $C = 2$, то одержимо *частинний* розв'язок рівняння (10.6):

$$x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{7}{5}, \quad y = 2.$$

Якщо надати сталої C інше значення, наприклад, $C = 5$, то одержимо інший частинний розв'язок:

$$x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot 5 = \frac{1}{5} + 3 = \frac{16}{5}, \quad y = 5.$$

Таким чином, рівняння (10.6) має нескінченну множину розв'язків, які зображуються формулами (10.7). □

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати лінійні рівняння:

1. $3x = 7$.
2. $2(x - 1) = 10$.
3. $2x - y = 5(y - 3)$.
4. $2x - 3 = x + 7$.
5. $\frac{1}{2}x = \frac{7}{3}$.
6. $x - 2y = 1$.
7. $4(x + y) = 7$.

10.2. Система двох лінійних рівнянь

10.2.1. Система двох рівнянь з двома невідомими

Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{10.8}$$

Коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} і *вільні члени* b_1, b_2 вважаються *заданими*.

Коефіцієнти a_{ik} системи лінійних рівнянь утворюють *квадратну таблицю*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{10.9}$$

яка називається *матрицею системи* (10.8). Звернемо увагу, що перший індекс коефіцієнтів вказує на номер рівняння (або рядка матриці), в якому розташован цей коефіцієнт, другий індекс — номер невідомого, при якому міститься цей коефіцієнт (або номер стовпця матриці).

Вільні члени b_1, b_2 та невідомі x, y утворюють *матриці-стовпці*:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{10.10}$$

Вони так і називаються: *стовпець вільних членів*, *стовпець невідомих*.

Означення 73. Прямокутна таблиця чисел називається *матрицею*. Кількість рядків і кількість стовпців називаються *розміром* матриці.

Очевидно, що вся інформація про систему лінійних рівнянь задається матрицею системи та стовпцем вільних членів; вони утворюють *розширену матрицю системи*:

$$\widehat{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right). \tag{10.11}$$

Тут символ $(A|B)$ означає, що розширена матриця складається з матриці системи A і стовпця вільних членів B.

Означення 74. *Розв'язком* системи лінійних рівнянь (10.8) називається така *упорядкована пара чисел* C_1 і C_2, що кожне рівняння системи (10.8) перетворюється у *тотожність*, якщо підставити числа C_1 і C_2 в систему замість невідомих x і y:

$$\begin{cases} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 \equiv b_1, \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 \equiv b_2. \end{cases}$$

Зауважимо, що система (10.8) може не мати жодного розв'язка, тоді вона називається *несумісною*. Наприклад, лінійна система

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 3x + 2y = 5, \end{cases}$$

має однакові ліві частини. Але, тому що їх праві частини відрізняються, то ніяка пара чисел не може відразу задовольнити обом рівнянням, тобто ця система *несумісна*.

Означення 75. Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо розв'язків система немає.

Означення 76. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок, і *невизначеною*, якщо система має більше одного розв'язка.

Звернемо увагу на те, що невизначена система має *нескінчену кількість розв'язків*.

Розглянемо деякі приклади. Система

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 7y = 8. \end{cases}$$

сумісна, тому що має розв'язок $x = 4$, $y = 0$. Це неважко перевірити. Якщо підставити ці числа в систему, то кожне рівняння системи перетвориться у тотожність:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 + 2 \cdot 0 & = 4 \equiv 4, \\ 2x + 7y = 2 \cdot 4 + 7 \cdot 0 & = 8 \equiv 8. \end{cases}$$

Далі буде доведено, що цей розв'язок єдиний, тобто ця система *визначена*.

Система

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$$

сумісна і *невизначена*, тому що має нескінчену множину розв'язків виду

$$x = C, \quad y = 3C - 1,$$

де C — довільне число.

Насправді друге рівняння системи з точністю до множника дорівнює першому рівнянню, тобто маємо тільки одне рівняння з двома невідомими:

$$3x - y = 1.$$

Тоді одному з невідомих можна надати довільне значення, наприклад,

$$x = C$$

і знайти інше невідоме, як функцію цього числа C:

$$y = 3C - 1.$$

Таким чином, ця система має нескінченну множину розв'язків, які залежать від числа C, тобто ця система невизначена.

10.2.2. Розв'язання лінійної системи другого порядку

Для знаходження розв'язку системи (10.8) застосуємо *метод виключення невідомих*. Зрівняємо коефіцієнти при невідомому y. Для цього помножимо обидві частини першого рівняння системи на коефіцієнт a_{22}, а другого — на a_{12}. Тоді одержимо таку систему, яка еквівалентна вихідній системі (10.8):

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1, \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2. \end{cases}$$

Почленно віднімемо друге рівняння з першого, тоді одержимо:

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\, x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2. \tag{10.12}$$

Аналогічно виключається невідоме x:

$$(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})\, y = a_{21}b_1 - a_{11}b_2. \tag{10.13}$$

Нехай $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0$, тоді з (10.12) і (10.13) можна знайти невідомі x і y:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}. \tag{10.14}$$

Таким чином, якщо $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0$ система (10.8) має *єдиний розв'язок*.

Вираз

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{10.15}$$

називається *визначником системи* (10.8).

Зауважимо, що кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність деяке число, яке називається її *визначником*.

Означення 77. *Визначником* квадратної матриці другого порядку називається число, яке дорівнює добутку елементів, що розташовані на головній діагоналі, мінус добуток елементів, що розташовані на побічній діагоналі.

Схема обчислення визначника другого порядку наведена на рис. 10.1:

Запровадимо *додаткові визначники*:

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \tag{10.16}$$

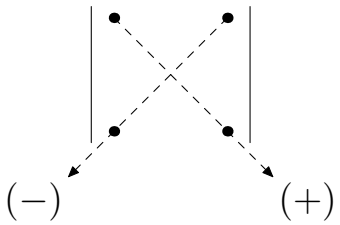

Рис. 10.1. Обчислення визначника другого порядку

Ці визначники можна одержати з визначника системи (10.15), якщо замінити коефіцієнти при вказаному невідомому на відповідні вільні члени.

Тоді рівняння (10.12) і (10.13) можна записати у такому вигляді:

$$\triangle \cdot x = \triangle_x, \quad \triangle \cdot y = \triangle_y. \tag{10.17}$$

З формул (10.17) випливає, що *якщо визначник системи відрізняється від нуля* $\triangle \neq 0$*, то система* (10.8) — визначена, тобто *має єдиний розв'язок*

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle}, \quad y = \frac{\triangle_y}{\triangle}. \tag{10.18}$$

Формули (10.18) називаються *формулами Крамера.*

Приклад 62. Розв'язати лінійну систему

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \tag{10.19}$$

а) за допомогою формул Крамера, б) методом виключення.

Розв'язання. а) Розв'яжемо систему за *формулами Крамера.* Спочатку обчислимо визначник системи:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 2 = 7 - 4 = 3.$$

Визначник системи відрізняється від нуля ($\triangle \neq 0$), тому система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера (10.18).

Обчислимо додаткові визначники. Ці визначники одержимо підставляючи стовпець вільних членів замість відповідного стовпця коефіцієнтів системи:

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 28 - 16 = 12, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0.$$

Таким чином, маємо

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle} = \frac{12}{3} = 4, \quad y = \frac{\triangle_y}{\triangle} = \frac{0}{3} = 0.$$

Перевірка: Підставимо одержані значення $x = 4$ і $y = 0$ в рівняння системи замість невідомих:

$$\begin{cases} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 4 \equiv 4, \\ 2 \cdot 4 + 7 \cdot 0 = 8 \equiv 8. \end{cases}$$

Одержані тотожності доводять, що система розв'язана вірно.

б) Розв'яжемо систему (10.19) *методом виключення.*

Виключимо з системи

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$$

невідоме x. Помноживши перше рівняння системи (10.19) на 2 (коефіцієнт при x в другому рівнянні), зрівняємо коефіцієнти при невідомому x:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8, \\ 2x + 7y = 8. \end{cases}$$

Віднімемо одержане перше рівняння з другого рівняння, тоді маємо:

$$3y = 0.$$

Звідси випливає, що

$$y = 0.$$

Підставивши знайдене значення у будь–яке рівняння, можна отримати невідоме x:

$$2x = 8, \quad x = 4.$$

Аналогично можна виключити з системи невідоме y, для чого зрівняємо коефіцієнти при цьому невідомому. Помножимо перше рівняння на 7 (коефіцієнт при y в другому рівнянні), а друге — на 2 (коефіцієнт при y в першому рівнянні):

$$\begin{cases} 7x + 14y = 28, \\ 4x + 14y = 16. \end{cases}$$

Отже, маємо однакові коефіцієнти при невідомому y. Віднімемо з першого рівняння друге, тоді отримаємо:

$$3x = 12, \quad \text{або} \quad x = 4.$$

Потім, як і у попередньому випадку, підставляючи знайдене $x = 4$ у будь–яке рівняння системи, можна знайти невідоме y.

Отже маємо відповідь

$$x = 4, \quad y = 0,$$

яка збігається з раніше одержаною за формулами Крамера.

□

Зауваження 33. Якщо визначник системи дорівнює нулю $\triangle = 0$, то система або *невизначена*, або *несумісна*. Дійсно, нехай визначник системи та додаткові визначники дорівнюють нулю, тобто

$$\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad \triangle_x = b_1a_{22} - a_{12}b_2 = 0, \quad \triangle_y = a_{11}b_2 - b_1a_{21} = 0.$$

Звідси випливає, що коефіцієнти та вільні члени рівнянь системи (10.8) утворюють пропорцію:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}.$$

В цьому випадку одне з рівнянь системи можна одержати з іншого шляхом множення на деякий загальний множник, тобто система має тільки одно рівняння, а інше є його наслідком. Нагадаємо, що рівняння вигляду

$$ax + by = c$$

має нескінченну кількість розв'язків (див. стр. 208), тому що одному з двох невідомих x або y можна надати будь–яке значення і знайти інше невідоме, як функцію цього значення. Таким чином, якщо $\triangle = \triangle_x = \triangle_y = 0$, система має нескінченну кількість розв'язків, тобто є невизначеною.

Якщо визначник системи дорівнює нулю $\triangle = 0$, але коли один з додаткових визначників $\triangle_x$ або $\triangle_y$ нулю не дорівнює, тоді одна з рівностей (10.17) (або обидві) неможливі і тоді система (10.8) розв'язків не має, тобто система несумісна.

Приклад 63. Розв'язати лінійну систему

$$\begin{cases} 4x - 6y = 5, \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \tag{10.20}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - (-6) \cdot 2 = -12 + 12 = 0.$$

Визначник системи дорівнює нулю ($\triangle = 0$), тому система або має нескінченну кількість розв'язків, або несумісна.

Обчислимо додаткові визначники. Ці визначники одержимо підставляючи стовпець вільних членів замість відповідного стовпця коефіцієнтів системи:

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - (-6) \cdot 6 = -15 + 36 = 21 \neq 0,$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 24 - 10 = 14 \neq 0.$$

Додаткові визначники нулю не дорівнюють, тому ця *система несумісна.*

□

Приклад 64. Розв'язати лінійну систему

$$\begin{cases} \sqrt{5}\, x - 5y = \sqrt{5}, \\ x - \sqrt{5}\, y = 1. \end{cases} \tag{10.21}$$

Розв'язання. а) Обчислимо визначник системи:

$$\triangle = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & -5 \\ 1 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}) - (-5) \cdot 1 = -5 + 5 = 0.$$

Визначник системи дорівнює нулю ($\triangle = 0$), тому система або має нескінченну кількість розв'язків, або несумісна.

Обчислимо додаткові визначники:

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & -5 \\ 1 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}) - (-5) \cdot 1 = -5 + 5 = 0,$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{5} \cdot 1 - \sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5} - \sqrt{5} = 0.$$

Нагадаємо, що

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5.$$

Додаткові визначники, як і визначник системи, дорівнюють нулю, тому ця система має нескінченну кількість розв'язків.

Звернемо увагу, що перше рівняння системи, це друге рівняння, яке помножино на $\sqrt{5}$. Тому розглянемо друге рівняння:

$$x - \sqrt{5}y = 1.$$

Маємо лінійне рівняння з двома невідомими. Надамо y довільне значення:

$$y = C.$$

Підставляючи $y = C$ у рівняння, одержимо:

$$x - \sqrt{5}C = 1, \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \sqrt{5}C.$$

Отже, *система має нескінчену кількість розв'язків* вигляду:

$$x = 1 + \sqrt{5}C, \quad y = C,$$

де C — довільне число.

□

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначник.

1.1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

1.2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.3. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

1.5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати лінійну систему.

2.1. $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 4x - 5y = 1. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 3x + 4y = 17. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 6x + 8y = 2, \\ 3x + 4y = 1. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 4x - 6y = 5. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x - \sqrt{3}\, y = 1, \\ \sqrt{3}\, x - 3y = \sqrt{3}. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} \sqrt{5}\, x - 5y = \sqrt{5}, \\ x - \sqrt{5}\, y = 5. \end{cases}$

10.2.3. Система двох однорідних лінійних рівнянь з двома невідомими

Розглянемо систему двох однорідних лінійних рівнянь з двома невідомими x і y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y = 0. \end{cases} \tag{10.22}$$

Означення 78. *Однорідною* називається система лінійних рівнянь, вільні члени яких дорівнюють нулю.

Однорідна система завжди сумісна, тому що вона завжди має *нульовий розв'язок*:

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Якщо визначник однорідної системи відрізняється від нуля ($\triangle \neq 0$), то за формулами Крамера випливає, що цей нульовий розв'язок єдиний.

Якщо визначник системи дорівнює нулю $\triangle = 0$, то однорідна система, крім нульового, має нескінчену множину ненульових розв'язків. Насправді нехай визначник дорівнює нулю:

$$\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Тоді коефіцієнти однорідної системи (10.22) утворюють пропорцію:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Звідси випливає, що одне з рівнянь системи можна одержати з іншого шляхом множення на деякий загальний множник. Отже, система містить тільки одне рівняння. В цьому випадку одному з двох невідомих x або y можна надати будь–яке значення і знайти інше невідоме, як функцію цього значення. Таким чином, *якщо визначник однорідної системи дорівнює нулю, то система має нескінченну кількість розв'язків, тобто є невизначеною.*

10.2.4. Система двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

Система двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \end{cases} \tag{10.23}$$

Коли невідомих більше ніж три, невідомі зручно позначати одним символом з індексом. Наприклад:

$$x_1, x_2, \ldots x_n.$$

Тоді однорідну систему лінійних рівнянь можна записати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \tag{10.24}$$

Перший індекс коефіцієнтів вказує на номер рівняння системи, другий — на номер невідомого, при якому розташован цей коефіцієнт. Наприклад, індекси коефіцієнта a_{23} вказують, що цей коефіцієнт розташован у другому рівнянні (перший індекс дорівнює 2) при невідомому x_3 (другий індекс дорівнює 3).

Тому що рівняння системи (10.24) однорідні, система (10.24) сумісна, вона завжди має нульовий розв'язок:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0. \tag{10.25}$$

Рівнянь в системі (10.24) тільки два, а невідомих три, тому система невизначена. Таким чином, система (10.24) має нескінчену множину ненульових розв'язків. Знайдемо ненульові розв'язки.

Розглянемо матрицю системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \tag{10.26}$$

і побудуємо мінори другого порядку для цієї матриці.

Означення 79. *Мінором* m-го порядку матриці $A = \|a_{ik}\|$ називається визначник m-го порядку, елементи якого розташовані на перетині будь–яких m рядків і m стовпців матриці A.

Матриця системи (10.26) має два рядка та три стовпця, тому щоб побудувати мінор другого порядку потрібно вибрати два стовпця. Зробити це можна так:

— викреслимо перший стовпець матриці;

— викреслимо другий стовпець матриці;

— викреслимо третій стовпець матриці.

Елементи, що залишаться, складають три визначники (мінора) другого порядку:

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Припустимо, що $M_3 \neq 0$. Перенесемо доданки, що містять невідоме x_3, праворуч:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3. \end{cases} \tag{10.27}$$

Визначником системи (10.27) є мінор M_3. Тому що $M_3 \neq 0$, то система визначена і розв'язок системи (10.27) одержимо за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3a_{13} & a_{12} \\ -x_3a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = x_3 \frac{M_1}{M_3},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -x_3a_{13} \\ a_{21} & -x_3a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -x_3 \frac{M_2}{M_3},$$

Тут були використані такі властивості визначників:

— можна виносити за знак визначника спільний множник всіх елементів рядка або стовпця;

— якщо переставити місцями два рядка або стовпця, то знак визначника зміниться на протилежний.

З одержаних формул випливає, що невідомі та мінори матриці утворюють пропорцію:

$$\frac{x_1}{M_1} = \frac{x_2}{-M_2} = \frac{x_3}{M_3} = t, \tag{10.28}$$

де t — коефіцієнт пропорційності.

Тоді з (10.28) одержимо формули, що визначають всі розв'язки системи (10.24), тобто *загальний розв'язок*:

$$x_1 = M_1t, \quad x_2 = -M_2t, \quad x_3 = M_3t \quad (-\infty < t < \infty). \tag{10.29}$$

Звідси можна одержати кожен *частинний розв'язок* системи, якщо параметру t надати будь–яке певне значення. Наприклад, якщо $t = 0$ маємо *нульовий розв'язок.*

Таким чином, *невідомі системи (10.24) пропорційні відповідним мінорам матриці її коефіцієнтів, які треба брати з відповідним знаком.*

Приклад 65. Знайти всі розв'язки системи

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases} \tag{10.30}$$

Розв'язання. Складемо матрицю системи (10.30):

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

і знайдемо її мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-1) \cdot 2 = 8,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-1) \cdot 3 = 7,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -2.$$

За формулами (10.29) *загальний розв'язок* однорідної системи (10.30) має вигляд

$$x_1 = 8t, \quad x_2 = -7t, \quad x_3 = -2t,$$

в чому неважко переконатись, якщо підставити одержаний розв'язок у систему (10.30).

Якщо $t = 1$, тоді маємо *частинний розв'язок*

$$x_1 = 8, \quad x_2 = -7, \quad x_3 = -2.$$

□

Завдання для самостійної роботи

Знайти всі розв'язки системи.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

10.3. Визначники третього порядку

10.3.1. Озачення визначника

Нагадаємо, що кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність число, яке називається *визначником цієї матриц*і.

Розглянемо квадратну матрицю 3-го порядку

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{10.31}$$

Означення 80. *Визначником* 3-го порядку, відповідній квадратній матриці (10.31), називається число, яке позначається символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{10.32}$$

Числа, що містяться в матриці визначника, називаються *елементами визначника*, а доданки, тобто добутки елементів, — *членами визначника.*

Звернемо увагу на те, що кожен член визначника утримує по одному представнику від кожного рядка і кожного стовпця.

Для обчислення визначника третього порядку можна користуватися *правилом трикутника*: добуток елементів, що належать до головної діагоналі, треба брати зі знаком плюс; ще зі знаком плюс треба брати добутки елементів, що утворюють в матриці рівнобедрені трикутники з основами, паралельними головній діагоналі (рис. 10.2). Члени, що треба брати зі знаком мінус, будуються аналогічно, тільки відносно побічної діагоналі (рис. 10.3).

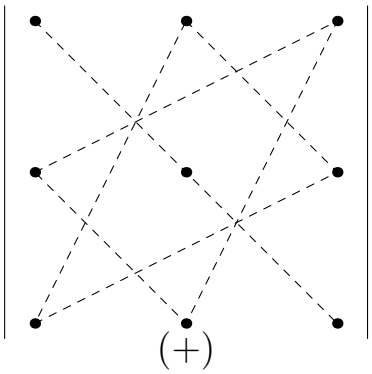

Рис. 10.2. Додатні члени

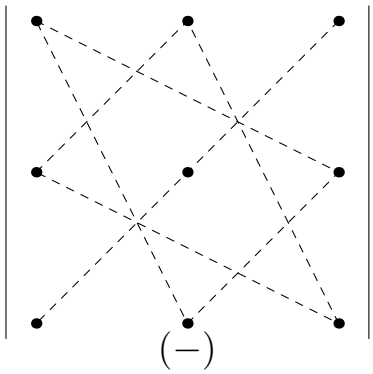

Рис. 10.3. Від'ємні члени

Побудуємо більш зручний спосіб обчислення визначника матриці третього порядку. У формулі (10.32) зберемо члени, що містять будь–якій елемент a_{ik} і винесемо його за дужки. Величина, що залишилась у дужках, називається *алгебраїчним доповненням цього елемента*. Позначається алгебраїчне доповнення елемента a_{ik} *великою літерою* A_{ik}, що має такі ж самі індекси, що й елемент.

Наприклад, елемент a_{11} міститься у двох членах визначника, тому маємо:

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) = a_{11}A_{11}.$$

Інші алгебраїчні доповнення елементів першого рядка a_{12} і a_{13} визначаються аналогічно:

$$\begin{aligned} a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} &= a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) = a_{12}A_{12}, \\ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} &= a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) = a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

Тоді формулу (10.32) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (10.33)$$

Тут

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} = -\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

алгебраїчні доповнення елементів першого рядка. Зауважимо, що алгебраїчні доповнення елементів матриці третього порядку визначаються за допомогою визначників другого порядку — *мінорів*.

Означення 81. *Мінором* M_{ik} елемента a_{ik} матриці 3-го порядку називається визначник 2-го порядку, отриманий з вихідного визначника викреслюванням i-го рядка і k-го стовпця, на перетині яких міститься елемент a_{ik}.

Щоб одержати мінор M_{11} елемента a_{11}, викреслимо перший рядок та перший стовпець в матриці визначника:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

мінор M_{12} — викреслимо перший рядок та другий стовпець матриці:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

мінор M_{13} — викреслимо перший рядок та третій стовпець:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Означення 82. *Алгебраїчним доповненням* A_{ik} елемента a_{ik} називається мінор цього елемента, якщо взяти його зі знаком $(-1)^{i+k}$, тобто число, що обчислюється за формулою:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \tag{10.34}$$

Наприклад, алгебраїчне доповнення A_{11} елемента a_{11} матриці третього порядку обчислюється так:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно знаходяться алгебраїчні доповнення A_{12} елемента a_{12}:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і алгебраїчне доповнення A_{13} елемента a_{13}:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Групувати члени визначника в формулі (10.32) можна відносно елементів будь–якого рядка або стовпця матриці визначника, тому маємо таку теорему.

Теорема 15 (про розкладання визначника)**.** *Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь–якого його рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{10.35}$$

або

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{10.36}$$

Формула (10.35) описує розкладання визначника за елементами i-го рядка, причому номер рядка i може мати будь-яке значення від одного до трьох. Аналогічно, формула (10.36) описує розкладання визначника за елементами k-го стовпця.

Зауваження 34. Теорема про розкладання визначника виконується для визначників будь–якого порядка.

Приклад 66. Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося *теоремою розкладання.* Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (5 \cdot (-9) - 0 \cdot 8) - 0 + 3((-4)8 - 5 \cdot 7) =$$

$$= -45 + 3(-32 - 35) = -45 - 3 \cdot 67 = -45 - 201 = -246$$

Зауваження 35. При обчисленні цього визначника не потрібно обчислювати мінор M_{12}, тому що множник цього мінора (елемент a_{12}) дорівнює нулю. Таким чином, розкладання визначника слід виконувати за рядком або стовпцем, що містять більше нулів.

□

10.3.2. Властивості визначників

Властивість 1. *Величина визначника не зміниться, якщо поміняти місцями рядки та стовпці матриці, тобто*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{10.37}$$

Наслідок. *Рядки та стовпці визначника рівноправні, тобто, якщо деяка властивість буде доведена для рядків, то вона також буде виконуватися і для стовпців.*

Властивість 2. *Якщо переставити місцями будь–яки два рядки (або стовпці), то визначник змінить знак.*

Наприклад, поміняємо місцями другій і третій рядки, тоді маємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{10.38}$$

Властивість 3. *Якщо визначник має два однакові рядки, тоді цей визначник дорівнює нулю.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{10.39}$$

Властивість 4. *Спільний множник елементів будь–якого рядка (або стовпця) можна виносити за знак визначника.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{10.40}$$

Властивість 5. *Якщо всі елементи будь–якого рядка (або стовпця) дорівнюють нулю, то цей визначник дорівнює нулю.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{10.41}$$

Властивість 6. *Якщо елементи будь–якого рядка пропорційні елементам іншого рядка, то визначник дорівнює нулю.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{10.42}$$

Властивість 7. *Якщо кожен елемент будь–якого рядка є сума двох чисел, то визначник дорівнює сумі двох визначників, причому в першому визначнику в цьому рядку міститься перший доданок, в другому — другій, а інші рядки ті самі, що і в вихідному визначнику.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (10.43)$$

Наслідок. *Якщо до елементів будь–якого рядка додати відповідні елементи іншого рядка, то значення визначника не зміниться.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (10.44)$$

Властивість 8. *Сума добутків елементів будь–якого рядка на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка дорівнює нулю.*

Зауваження 36. Теорема розкладання і властивості визначників виконуються для визначників будь–якого порядку.

Звичайно при обчисленні визначників третього порядку і вище користуються теоремою розкладання, враховуючи властивості визначників. Як приклад обчислимо визначник четвертого порядку.

Приклад 67. Обчислити визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладання визначника слід виконувати по рядку або стовпцю, у якому міститься більше нулів. В матриці визначника можна одержати нулі в першому стовпці, тому зробимо такі перетворення: помножимо третій рядок на два і віднімемо з першого рядка, також помножений на два третій рядок додамо до другого рядка. В подвійних дужках вказано алгоритм перетворень, символом A_1 позначено перший рядок, символом A_2 — другий рядок, стрілка вказує, що результат треба помістити на місце першого рядка. Перетворений визначник містить додаткові нулі:

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \left\| \begin{array}{l} A_1 - 2A_3 \to A_1 \\ A_2 + 2A_3 \to A_2 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо одержаний визначник за елементами першого стовпця:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= a_{31}A_{31} = a_{31}(-1)^{3+1}M_{31} = 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Звернемо увагу на те, що тому що

$$a_{11} = a_{21} = a_{41} = 0$$

потрібно обчислити тільки один мінор третього порядку. Врахуємо, що

$$(-1)^{3+1} = (-1)^4 = 1.$$

Винесемо спільний множник 5 з другого рядка і віднімемо з другого рядка третій, помножений на два:

$$\det A = 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \left\| \quad A_2 - 2A_3 \to A_2 \right\| = 20 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник розкладемо за елементами третього стовпця:

$$\det A = 20 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$= a_{33}A_{33} = a_{33}(-1)^{3+3}M_{33} = 20 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}.$$

За формулою (10.15) обчислимо визначник другого порядку та остаточно одержимо:

$$\det A = 40((-1)9 - (-6)(-6)) = 40((-9) - 36) = 40(-45) = -1800.$$

□

Завдання для самостійної роботи

Обчислити визначник: а) за теоремою розкладання, б) шляхом перетворення матриці визначника до трикутного вигляду.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

10.4. Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомим має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{10.45}$$

Коефіцієнти a_{ik} системи лінійних рівнянь і вільні члени b_k утворюють розширену матрицю системи (10.45):

$$\widehat{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right). \tag{10.46}$$

Означення 83. *Розв'язком* системи лінійних рівнянь (10.45) називається така упорядкована трійка чисел C_1, C_2 і C_3, що кожне рівняння системи (10.45) перетворюється в тотожність якщо замінити невідомі x_1, x_2 і x_3 числами C_1, C_2 і C_3.

Позначимо визначник системи (10.45)

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{10.47}$$

якій складається з коефіцієнтів при невідомих.

Виключимо з системи невідомі x_2 і x_3: помножимо обидві частини першого рівняння системи (10.45) на алгебраїчне доповнення A_{11} елемента a_{11}, обидві частини другого рівняння помножимо на алгебраїчне доповнення A_{21} елемента a_{21}, третього — на A_{31} і почленно складемо одержані формули:

$$\begin{aligned}(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})\,x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})\,x_2 + \\ + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})\,x_3 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.\end{aligned} \tag{10.48}$$

Вираз у перших дужках зображує суму добутків елементів першого стовпця визначника на відповідні алгебраїчні доповнення елементів цього стовпця і за теоремою розкладання дорівнює визначнику системи (10.47). Вирази в других та третіх дужках зображують суму добутків елементів другого і відповідно третього стовпців на алгебраїчні доповнення елементів першого стовпця і за властивістю 8 дорівнюють нулю. Таким чином, маємо:

$$\begin{gathered} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \triangle, \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0, \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0. \end{gathered}$$

Праву частину (10.48) можна розглядати, як розкладання певного додаткового визначника, який позначимо символом $\triangle_1$:

$$\triangle_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{10.49}$$

Таким чином, рівняння (10.48) можна записати в такому вигляді:

$$\triangle \cdot x_1 = \triangle_1. \tag{10.50}$$

Аналогічно, помноживши рівняння системи (10.45) на відповідні алгебраїчні доповнення елементів другого і третього стовпців, одержимо

$$\triangle \cdot x_2 = \triangle_2, \quad \triangle \cdot x_3 = \triangle_3, \tag{10.51}$$

де символами $\triangle_2$ і $\triangle_3$ позначені такі додаткові визначники:

$$\triangle_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\triangle_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Звернемо увагу на те, що додаткові визначники $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ виникають з визначника системи (10.47), якщо замінити в визначнику системи коефіцієнти при даному невідомому відповідними вільними членами.

Якщо визначник системи відрізняється від нуля ($\triangle \neq 0$), то з рівнянь (10.50), (10.51) випливає *єдиний* розв'язок системи (10.45):

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, \quad x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}, \quad x_3 = \frac{\triangle_3}{\triangle}. \tag{10.52}$$

Вирази (10.52) називаються *формулами Крамера.*

Приклад 68. Знайти за допомогою формул Крамера розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases} \tag{10.53}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5 \cdot (-1) - 3 \cdot 7) - 2\,(3 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) + (3 \cdot 7 - (-5) \cdot 2) =$$

$$= 5 - 21 - 2\,(-3 - 6) + 21 + 10 = 15 + 18 = 33.$$

Тому що $\triangle \neq 0$, система має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера (10.52). Знайдемо додаткові визначники:

$$\triangle_1=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}=$$

$$=4\cdot\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & -1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & -5\\ 8 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=4\left((-5)\cdot(-1)-3\cdot 7\right)-2\left(1\cdot(-1)-3\cdot 8\right)+\left(1\cdot 7-(-5)\cdot 8\right)=$$

$$=4\left(5-21\right)-2\left(-1-24\right)+7+40=$$

$$=4\left(-16\right)-2\left(-25\right)+47=-64+50+47=33,$$

$$\triangle_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & -1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 8\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)-3\cdot 8-4\left(3\cdot(-1)-3\cdot 2\right)+3\cdot 8-1\cdot 2=$$

$$=-1-24-4\left(-3-6\right)+24-2=$$

$$=-25-4\left(-9\right)+22=-25+36+22=33,$$

$$\triangle_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 7 & 8\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 8\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=(-5)\cdot 8-1\cdot 7-2\left(3\cdot 8-1\cdot 2\right)+4\left(3\cdot 7-(-5)\cdot 2\right)=$$

$$=-40-7-2\left(24-2\right)+4\left(21+10\right)=$$

$$=-47-2\cdot 22+4\cdot 31=-47-44+124=33.$$

Таким чином, за формулами Крамера одержимо:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{33}{33} = 1,$$
$$x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{33}{33} = 1,$$
$$x_3 = \frac{\triangle_3}{\triangle} = \frac{33}{33} = 1.$$

Перевірка: Підставимо одержаний розв'язок замість невідомих в рівняння системи:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4 \equiv 4, \\ 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1 \equiv 1, \\ 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 1 = 8 \equiv 8. \end{cases}$$

Одержали тотожності: система розв'язана вірно.

Відповідь: $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$

□

Зауваження 37. Можна довести, що коли визначник системи дорівнює нулю ($\triangle = 0$), система або невизначена, або несумісна.

Якщо визначник системи та додаткові визначники дорівнюють нулю:

$$\triangle = \triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = 0,$$

то система сумісна, але невизначена.

Якщо визначник системи дорівнює нулю, але хоч один з додаткових визначників відрізняється від нуля, тоді з формул (10.50), (10.51) випливає, що система несумісна.

10.5. Метод послідовного виключення

Метод послідовного виключення (метод Гауса) складається з двох етапів: прямий хід, та зворотний хід.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{10.54}$$

Зауважимо, що рівнянь у системі може бути як більше за кількість невідомих, так і менше.

Прямий хід. Припустимо, що коефіцієнт a_{11} не є нуль:

$$a_{11} \neq 0,$$

інакше переставимо рівняння системи.

Знайдемо з першого рівняння невідоме x_1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

і підставимо x_1 в інші рівняння системи. Після наведення подібних членів одержимо нову систему, що еквівалентна вихідній системі (10.54):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad \tilde{a}_{s2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{sn}x_n = \tilde{b}_s, \end{cases} \tag{10.55}$$

де

$$\tilde{a}_{22} = a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21},\ \tilde{a}_{23} = a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21},\ \ldots,\ \tilde{b}_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21} \text{ і т. і.}$$

Таким чином, було виключено невідоме x_1 з усіх рівнянь, крім першого.

Знайдемо з другого рівняння невідоме x_2 і виключимо його з усіх останніх рівнянь системи (10.55).

Далі послідовно виключимо невідомі x_3, x_4, …, x_{n-1}. Це прямий хід методу Гауса.

Звернемо увагу на те, що послідовне виключення невідомих звелося до перетворення системи лінійних рівнянь. Дійсно, виключення невідомого x_1 з другого рівняння еквівалентно відніманню з другого рівняння першого рівняння, яке було поділено на коефіцієнт a_{11} і помножено на a_{21} (дивись метод виключення при розв'язанні системи двох рівнянь з двома невідомими (стор. 213)). При виключенні невідомих виконують такі перетворення (*елементарні перетворення*) лінійної системи:

— змінюють порядок розташування рівнянь у системі;

— множать певні рівняння на будь–які відмінні від нуля числа;

— додають до певного рівняння будь–яке інше рівняння, помножене на будь–яке число.

Тому що система лінійних рівнянь визначається своєю розширеною матрицею, то перетворення системи еквівалентні перетворенням того ж типа її розширеної матриці. Наприклад, при виключенні невідомого x_1 були виконані такі перетворення матриці:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} & b_s \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} A_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} A_1 \to A_2, \\ A_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} A_1 \to A_3, \\ \dots \\ A_s - \dfrac{a_{s1}}{a_{11}} A_1 \to A_s \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & & & & \\ 0 & \tilde{a}_{s2} & \dots & \tilde{a}_{sn} & \tilde{b}_s \end{array}\right).$$

Зазвичай працюють з матрицями (тому що з системами працювати складніше) і виконують перетворення того ж самого типа: змінюють порядок рядків, множать певні рядки на будь–які відмінні від нуля числа, додають до певного рядка будь–якій інший рядок, помножений на будь–яке число.

По завершенні прямого хода виконується аналіз лінійної системи.

Далі виконується зворотній хід, у процесі якого знаходиться розв'язок системи.

Зауваження 38. При виконанні зворотного ходу працюють з перетвореною розширеною матрицею і, відповідно, з перетвореною системою. Для спрощення вигляду формул не будемо перепозначати коефіцієнти системи та вільні члени.

Зворотній хід. Можливі три випадки.

1. Розширена матриця системи перетворюється до *трикутного вигляду*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right), \tag{10.56}$$

причому всі діагональні елементи відмінні від нуля:

$$a_{kk} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В цьому випадку визначник системи відрізняється від нуля, *система сумісна і визначена.*

За матрицею (10.56) відновимо лінійну систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

З останнього рівняння знайдемо невідоме x_n:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Підставляючи одержане x_n в попереднє рівняння, знайдемо невідоме x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \left(b_{n-1} - \frac{a_{(n-1)n}}{a_{nn}} b_{n-1}\right) \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}.$$

Далі, піднімаючись вгору і підставляючи в чергове рівняння одержані невідомі, послідовно знайдемо всі невідомі x_k.

2. Розширена матриця системи перетворюється до *трапецеїдального вигляду*:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{10.57}$$

Побудуємо *базисний мінор*: в цей мінор включимо перші r рядків і перші r стовпців матриці (10.57):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Цей мінор відрізняється від нуля. Очевидно, що кожен мінор більшого порядку буде дорівнювати нулю.

Невідомі

$$x_1, x_2, \ldots, x_r,$$

коефіцієнти при яких складають базисний мінор, називаються *базисні невідомі*, інші невідомі

$$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$$

називаються *вільні невідомі*.

В цьому випадку *система сумісна і невизначена*. Дійсно, якщо відновити систему, то рівнянь буде менш за кількість невідомих, тобто мають місце вільні невідомі, яким можна надати певні значення.

За матрицею (10.57) відновимо лінійну систему і перенесемо праворуч члени з вільними невідомими x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots \\ a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Надамо вільним невідомим деякі довільні значення

$$x_{r+1} = C_{r+1}, x_{r+2} = C_{r+2}, \ldots, x_n = C_n,$$

тоді для знаходження базисних невідомих x_1, x_2, ..., x_r маємо визначену систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}C_{r+1} - \ldots - a_{1n}C_n, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}C_{r+1} - \ldots - a_{2n}C_n, \\ \ldots \\ a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}C_{r+1} - \ldots - a_{rn}C_n, \end{cases}$$

з якої, як і в попередньому випадку, послідовно знайдемо базисні невідомі x_r, x_{r-1}, ..., x_1.

3. Розширена матриця системи перетворюється до наступного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b_{r+1} \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad (10.58)$$

В цьому випадку *система несумісна*. Дійсно, якщо відновити систему, то останньому рівнянню задовольнити не можна.

Приклад 69. Методом Гауса розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases} \tag{10.59}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & 4 & -2 & -11 \\ 4 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Перетворимо матрицю до трикутного або трапецеїдального вигляду, виконуючи елементарні перетворення. Елемент $a_{11} = 2$ виберемо *ведучим* і зробимо всі елементі першого стовпця, крім a_{11}, рівними нулю. Для цього віднімемо від третього рядка подвоєний перший рядок

$$a_{31} - 2a_{11} = 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Щоб отримати нуль на початку другого рядка, побудуємо лінійну комбінацію першого і другого рядків

$$2A_2 - 3A_1,$$

тому, що

$$2a_{21} - 3a_{11} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Таким чином одержимо

$$\widehat{A} \sim \left\| \begin{array}{l} A_3 - 2A_1 \to A_3 \\ 2A_2 - 3A_1 \to A_2 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 20 \\ 0 & 17 & -16 & -82 \\ 0 & 8 & -5 & -31 \end{array}\right).$$

Далі елемент a_{22} виберемо як ведучий і елемент a_{32} перетворимо на нуль. Використовувати число 17 незручно, тому попередньо віднімемо з другого рядка подвоєний третій рядок:

$$\widehat{A} \sim \left\| A_2 - 2A_3 \to A_2 \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & -20 \\ 0 & 8 & -5 & -31 \end{array}\right).$$

Віднімаючи з третього рядка другий, помножений на вісім, маємо

$$\widehat{A} \sim \big\|A_3 - 8A_2 \to A_3\big\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 43 & 129 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \big\|A_3/43 \to A_3\big\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отже, система лінійних рівнянь (10.59) *сумісна і визначена.*

Відновлюємо за перетвореною матрицею систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = \ 20, \\ \qquad x_2 - 6x_3 = -20, \\ \qquad\qquad x_3 = 3. \end{cases}$$

Ця система еквівалентна вихідної.

З останнього рівняння маємо:

$$x_3 = 3.$$

Підставляючи це значення в друге рівняння, отримаємо

$$x_2 - 6x_3 = -20, \quad \Rightarrow \quad x_2 = -20 + 6x_3 = -20 + 6 \cdot 3 = -20 + 18 = -2.$$

Далі, підставляючи знайдені значення x_3 і x_2 в перше рівняння, знайдемо x_1:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20,$$
$$2x_1 = 20 + 3x_2 - 4x_3 = 20 + 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = 2,$$
$$x_1 = 1.$$

Таким чином, система має єдине рішення:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3.$$

Перевірка: Підставимо одержаний розв'язок замість невідомих в рівняння системи (10.59):

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 20 & \equiv 20, \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -11 & \equiv -11, \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 9 & \equiv 9. \end{cases}$$

Одержали тотожності: система розв'язана вірно.

Відповідь: $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3.$

□

Приклад 70. Методом Гауса розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases} \tag{10.60}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Перетворимо матрицю до трикутного або трапецеїдального вигляду, виконуючи елементарні перетворення:

$$\widehat{A} \sim \left\| \begin{array}{l} A_2 - 2A_1 \to A_2, \\ A_4 - A_1 \to A_4 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{l} A_3 + A_2 \to A_3, \\ A_4 + A_2 \to A_4 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Система (10.60) *сумісна і невизначена.*

Побудуємо базисний мінор: його елементи містяться на перетині перших двох рядків і стовпців

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Коефіцієнти при невідомих x_1 і x_2 складають базисний мінор, тому вони *базисні*, а невідомі x_3 та x_4 — *вільні.*

Відновимо за перетвореною матрицею систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ \qquad -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Перенесемо вільні невідомі праворуч:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4, \\ \qquad 2x_2 = 1 + 3x_3 - x_4, \end{cases}$$

і надамо цим невідомим довільні значення:

$$x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

Підставимо ці значення в останнє (друге) рівняння системи:

$$2x_2 = 1 + 3C_1 - C_2.$$

Звідси знайдемо невідоме x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2.$$

Підставляючи це значення x_2 в перше рівняння, одержимо:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2\right) + 2 + C_1 + 3C_2, \\ x_1 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}C_1 + \frac{7}{4}C_2. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо *загальний розв'язок* системи лінійних рівнянь (10.60):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}C_1 + \dfrac{7}{4}C_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_1 - \dfrac{1}{2}C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Перевірка: Підставимо одержаний розв'язок замість невідомих в рівняння системи (10.60):

$$\begin{cases} 2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}C_1+\frac{7}{4}C_2\right) & +\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2\right) & -C_1 & -3C_2 & = 2 \equiv 2, \\ 4\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}C_1+\frac{7}{4}C_2\right) & & +C_1 & -7C_2 & = 3 \equiv 3, \\ & 2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2\right) & -3C_1 & +C_2 & = 1 \equiv 1, \\ 2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}C_1+\frac{7}{4}C_2\right) & +3\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2\right) & -4C_1 & -2C_2 & = 3 \equiv 3. \end{cases}$$

Одержали тотожності: система розв'язана вірно.

Зауваження 39. Якщо сталим C_1 і C_2 надати деякі числові значення, наприклад, $C_1 = 4$ і $C_2 = 0$, то з загального розв'язку одержимо *частинний розв'язок*:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cdot 4 = -\frac{1}{4}, \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 4 = \frac{13}{2}, \\ x_3 = 4, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

□

Приклад 71. Методом Гауса розв'язати систему лінійних рівнянь :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases} \tag{10.61}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Перетворимо матрицю до трикутного або трапецеїдального вигляду, виконуючи елементарні перетворення. Спочатку зробимо всі елементі першого

стовпця, крім першого, рівними нулю:

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} 2A_2 - 3A_1 \to A_2 \\ 2A_3 - 5A_1 \to A_3 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -9 & -4 \\ 0 & 11 & -9 & -2 \end{array}\right)$$

Далі зробимо елемент a_{32} рівним нулю: для цього віднімемо від третього рядка другий:

$$\widehat{A} \sim \left\| A_3 - A_2 \to A_3 \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Звідси випливає, що *система несумісна*. Дійсно, відновлюючи за перетвореною матрицею систему, одержимо:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 11x_2 - 9x_3 = -4, \\ 0 \cdot x_3 = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що останнє рівняння ніколи не задовольняється. Таким чином, ця система несумісна. □

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати лінійну систему а) за формулами Крамера, б) методом Гауса.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \end{cases}$ $(3, 1, -1)$.

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \end{cases}$ $(-1 + 2C, 1 + C, C)$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \end{cases}$ (несумісна).

Питання для самоперевірки

1. Що таке лінійне рівняння та його розв'язок?

2. Чому лінійне рівняння з двома невідомими має нескінчену кількість розв'язків?

3. Як виглядає система двох лінійних рівнянь з двома невідомими? Що таке її розв'язок?

4. Що таке квадратна матриця другого порядку?

5. Що називається визначником квадратної матриці другого порядку?

6. Запишить формули Крамера для система двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

7. Як виглядає система трьох лінійних рівняннь з тремя невідомими? Що таке її розв'язок?

8. Що таке квадратна матриця третього порядку?

9. Що називається мінором елемента матриці?

10. Що називається алгебраїчним доповненням елемента матриці?

11. Що таке визначник матриці третього порядку?

12. Як обчислюється визначник третього порядку (правило трикутників, теорема розкладання)?

13. Сформулюйте властивості визначників третього порядку.

14. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною? Скільки розв'язків вона має?

15. Яка система лінійних рівнянь називається несумісною? Скільки розв'язків вона має?

16. Яка система лінійних рівнянь називається визначеною? Скільки розв'язків вона має?

17. Яка система лінійних рівнянь називається невизначеною? Скільки розв'язків вона має?

18. Запишить формули Крамера для трьох лінійних рівняннь з тремя невідомими.

Список літератури

[1] Шкіль М. І. Математичний аналіз: У 2 ч. Ч. 1/ М. І. Шкіль. — К.: Вища шк., 2005. — 447 с.

[2] Тимченко Г. М. Стислий курс вищої математики, частина 1: навч.посіб./ Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, Н. О. Кириллова, О. С. Мазур. — Київ: «Кондор», 2022. — 188 с.

Зміст

Вступ **3**

1 Координати на прямій та площині **4**
1.1. Вісь 4
1.2. Напрямлені відрізки 4
1.3. Координати на прямій. Числова вісь 6
1.4. Декартові координати на площині 8
1.5. Відстань між двома точками 11
1.6. Косокутна декартова система 12
1.7. Полярна система координат 13

2 Вектори **18**
2.1. Поняття вектора 18
2.2. Додавання векторів. Множення вектора на число 19
2.3. Колінеарні вектори 26
2.4. Компланарні вектори 27
2.5. Кут між векторами 27
2.6. Проєкція вектора 28

3 Метод координат **33**
3.1. Лінійна залежність 33
3.2. Базис та координати вектора 35
3.3. Координати вектора на прямій 37
3.4. Декартові координати на площині 39
3.5. Декартові координати у просторі 42
3.6. Дії над векторами в координатній формі 47
3.7. Колінеарність векторів 50
3.8. Ділення відрізка у даному відношенні 51
3.9. Розкладання вектора 52
3.10. Інші системи координат 56
3.11. Перетворення координат 58

4 Добутки векторів **64**
4.1. Скалярний добуток векторів 64
4.2. Векторний добуток векторів 75
4.3. Мішаний добуток векторів 83
4.4. Подвійний векторний добуток векторів 91

5 Аналітична геометрія на площині **94**
5.1. Лінія як множина точок 94
5.2. Рівняння лінії на площині 95
5.3. Параметричні рівняння лінії на площині 101
5.4. Будування лінії 102
5.5. Деякі елементарні задачі 105

6 Пряма на площині **109**
6.1. Канонічне рівняння прямої на площині 109
6.2. Параметричні рівняння прямої на площині 111
6.3. Загальне рівняння прямої на площині 112
6.4. Нормальне рівняння прямої 114
6.5. Відстань від точки до прямої 117
6.6. Рівняння прямої у відрізках на осях 119
6.7. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом 120
6.8. Побудова прямої на площині 123

7 Лінії другого порядку **127**
7.1. Коло 127
7.2. Еліпс 128
7.3. Гіпербола 131
7.4. Парабола 134

8 Аналітична геометрія у просторі **143**
8.1. Поверхня та її рівняння 143
8.2. Рівняння лінії у просторі 146
8.3. Площина 147
8.4. Пряма у просторі 167
8.5. Задачі на пряму та площину у просторі 179

9 Поверхні другого порядку **192**
9.1. Конус другого порядку 193
9.2. Еліпсоїд 196
9.3. Однопорожнинний гіперболоїд 198
9.4. Двопорожнинний гіперболоїд 200
9.5. Еліптичний параболоїд 201
9.6. Гіперболічний параболоїд 202
9.7. Циліндри другого порядку 204

10 Лінійні системи та визначники **207**
10.1. Лінійне рівняння 207
10.2. Система двох лінійних рівнянь 210
10.3. Визначники третього порядку 223
10.4. Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими 231
10.5. Метод послідовного виключення 235

Список літератури **248**

Навчальне видання

ВЕРЕТЕЛЬНИК Віктор Володимирович
ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
для студентів університетів технічних спеціальностей

Відповідальний за випуск проф. Бурлаєнко В. М.

Роботу до видання рекомендував проф. Бреславський Д. В.

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 37

Підп. до друку 15.02.2024. Гарнітура Times New Roman Ум. друк. арк. 13.

Видавничий центр НТУ "ХПІ"
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронне видання