

Ю.А. ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;

ЕТАЛОННА МОДЕЛЬ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ КВАТЕРНІОНА ОРІЄНТАЦІЇ В ФУНКЦІЯХ КУТІВ КРИЛОВА, ЩО ЗМІНЮЮТЬСЯ У ЧАСІ

Запропоновано нову неперервну модель обертання твердого тіла, основу на представленні модельного кватерніона орієнтації в функціях кутів Крилова, що паралельно змінюються у часі. Побудовано аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають таким обертальним рухам. Для декількох наборів параметрів отримано реалізації моделі. Результати представлено у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі для параметрів орієнтації. Показано, що нова модель описує обертання твердого тіла, що різниться від випадку регулярної прецесії. Модель може бути застосована в якості еталонної для отримання оцінок похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

Вступ і постановка задачі. В безплатформених системах орієнтації первинна інформація про обертання рухомого об'єкта на такті обчислень $[t_{n-1}, t_n]$ поступає в обчислювач з вимірювачів кутової швидкості у вигляді *квазікоординат* [1]

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де ω_i , $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}$ на зв'язані осі. Оскільки на теперішній час розроблено значну кількість алгоритмів визначення параметрів орієнтації, що мають однаковий математичний порядок, то для отримання коректних оцінок точності алгоритмів по інформації (1) для конкретного рухомого об'єкта на етапі проектування системи орієнтації з метою вибору найкращого алгоритму застосовують *еталонні моделі обертання* [2]. Еталонні моделі обертання задають точний зв'язок між квазікоординатами (1) і модельними значеннями параметрів, які відповідають повороту об'єкта на такті $[t_{n-1}, t_n]$. У якості еталонних моделей зазвичай використовують випадки існуючих точних розв'язків сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (моделі *кінцевого руху* [3] та *регулярної прецесії* [4]). Ці еталонні моделі також застосовують для пристосування алгоритмів визначення орієнтації під конкретний тип обертання об'єкта [5].

Оскільки реальний рух об'єкта в багатьох випадках суттєво різниться від випадку прецесії, то розширення класу неперервних еталонних моделей, відмінних від існуючих випадків інтегрованості в елементарних функціях системи динамічних та кінематичних рівнянь, є актуальною задачею точносно-го аналізу при проектуванні систем безплатформеної орієнтації.

Неперервна еталонна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятими в ній аналітичними представленнями компонент кватерні-

она орієнтації $\Lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ в умовах $\|\Lambda(t)\| = 1$. Диференціюючи ці вирази і використовуючи обернене кінематичне рівняння, отримаємо також аналітичні представлення для проекцій вектора кутової швидкості у вигляді [6]:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\dot{\lambda}_1 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_1 + \lambda_3 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_3); \quad \omega_2 = 2(\dot{\lambda}_2 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_1); \\ \omega_3 &= 2(\dot{\lambda}_3 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_3 + \lambda_2 \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \dot{\lambda}_2).\end{aligned}\quad (2)$$

Для моделювання квазікоординат (1) застосуємо формулу:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

де

$$\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad \theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3$$

– компоненти вектора *позірного повороту*

$$\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt,$$

обчислені в моменти часу t_n і t_{n-1} , відповідно.

В даній роботі пропонується нова неперервна модель обертання твердого тіла, основана на представленні кватерніона орієнтації моделі в функції кутів Крилова, що неперервно змінюються у часі.

Еталонна модель обертання твердого тіла з кватерніоном орієнтації в функції кутів Крилова, що змінюються з часом. Для отримання еталонної моделі використаємо відому форму зв'язку між компонентами кватерніона орієнтації і подвоєними кутами Крилова для повороту твердого тіла у вигляді [6]:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta; \\ \lambda_1 &= \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta - \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta; \\ \lambda_2 &= \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta; \\ \lambda_3 &= \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta.\end{aligned}\quad (4)$$

На відміну від представлення (4), де поворот твердого тіла описується відповідною послідовністю кутів Крилова, запишемо зв'язок між компонентами кватерніона і кутами в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \theta(t) + \sin \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \theta(t); \\ \lambda_1(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \theta(t) - \sin \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \cos \theta(t); \\ \lambda_2(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \cos \theta(t) + \sin \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \theta(t); \\ \lambda_3(t) &= \sin \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \theta(t) - \cos \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \theta(t),\end{aligned}\quad (5)$$

де кути одночасно змінюються в часі.

В результаті підстановки компонент кватерніона (5) та їх похідних в обернене кінематичне рівняння і проведення нескладних перетворень, отримаємо вирази для проекцій вектора кутової швидкості тіла:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= -2\dot{\varphi}(t) \sin 2\psi(t) + 2\dot{\theta}(t); \\ \omega_2(t) &= \dot{\varphi}(t) \sin(2\theta(t) + 2\psi(t)) + \dot{\varphi}(t) \sin(2\theta(t) - 2\psi(t)) + 2\dot{\psi}(t) \cos 2\theta(t); \\ \omega_3(t) &= \dot{\varphi}(t) \cos(2\theta(t) + 2\psi(t)) - \dot{\varphi}(t) \cos(2\theta(t) - 2\psi(t)) + 2\dot{\psi}(t) \sin 2\theta(t);\end{aligned}$$

$$\omega_3(t) = \dot{\varphi}(t) \cos(2\theta(t) + 2\psi(t)) + \dot{\varphi}(t) \cos(2\theta(t) - 2\psi(t)) - 2\dot{\psi}(t) \sin 2\theta(t). \quad (6)$$

Розглянемо випадок руху, коли кути $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ змінюються лінійно з плином часу, тобто

$$\varphi(t) = k_1 t, \quad \psi(t) = k_2 t, \quad \theta(t) = k_3 t. \quad (7)$$

За цих умов отримаємо з (6) вирази для компонент вектора кутової швидкості у вигляді:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= -2k_1 \sin 2k_2 t + 2k_3; \\ \omega_2(t) &= k_1 \sin(2k_3 + 2k_2)t + k_1 \sin(2k_3 - 2k_2)t + 2k_2 \cos 2k_3 t; \\ \omega_3(t) &= k_1 \cos(2k_3 + 2k_2)t + k_1 \cos(2k_3 - 2k_2)t - 2k_2 \sin 2k_3 t. \end{aligned} \quad (8)$$

Для отримання компонент вектора позірнього повороту $\bar{\theta}(t)$ проінтегруємо вирази для $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на інтервалі $[0, t]$, в результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{k_1}{k_2} (\cos 2k_2 t - 1) + 2k_3 t; \\ \theta_2(t) &= -\frac{k_1}{2(k_3 + k_2)} (\cos(2k_3 + 2k_2)t - 1) - \frac{k_1}{2(k_3 - k_2)} (\cos(2k_3 - 2k_2)t - 1) + \\ &\quad + \frac{k_2}{k_3} \sin 2k_3 t; \\ \theta_3(t) &= \frac{k_1}{2(k_3 + k_2)} \sin(2k_3 + 2k_2)t + \frac{k_1}{2(k_3 - k_2)} \sin(2k_3 - 2k_2)t + \\ &\quad + \frac{k_2}{k_3} (\cos 2k_3 t - 1). \end{aligned} \quad (9)$$

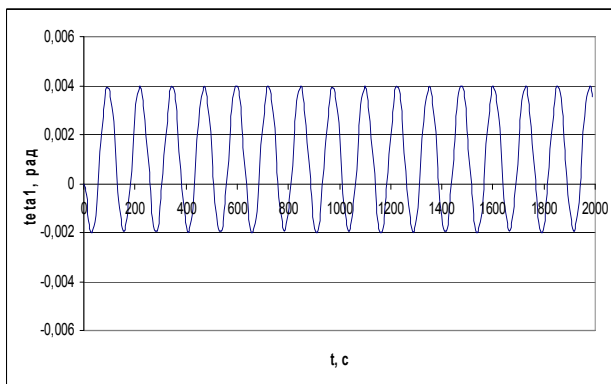
Відтворення квазікоординат (1) в еталонній моделі відбувається в аналітичному вигляді за формулою (3).

Формули (9), (3) і (5) описують *опорну еталонну модель* обертання твердого тіла. Якщо належним чином задати в цих формулах значення параметрів k_1 , k_2 , k_3 і такт обчислень Δt , отримаємо безпосередньо еталонну модель.

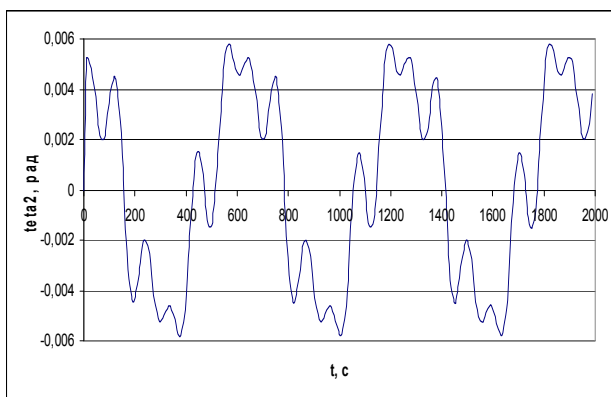
Зауважимо, що оскільки для запропонованої еталонної моделі обертання були також отримані і представлення для компонентів вектора модельної кутової швидкості (8), то цю модель можна використовувати і у випадку первинної інформації про обертання об'єкта у вигляді проекцій ω_i , $i = 1, 2, 3$ вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}$ твердого тіла на зв'язані осі, що знімаються з вимірювачів в моменти часу t_n , $i = 1, 2, 3, \dots$.

Чисельна реалізація моделі. Побудуємо еталонну модель (9), (3), (5) для декількох значень параметрів k_1 , k_2 , k_3 і такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с.

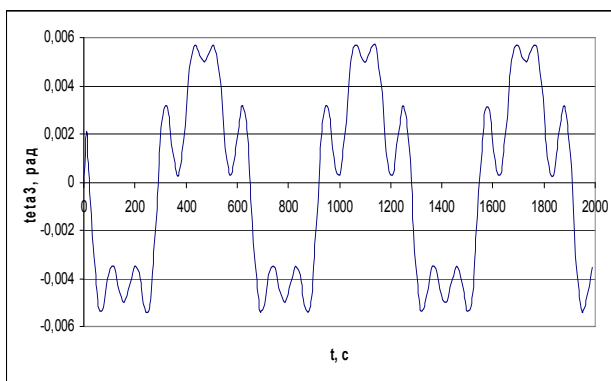
Для значень параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$ результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат від часу $\theta_{ni}(t)$ та траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ в конфігураційному просторі представлені відповідно на рис. 1 та рис. 2.



a

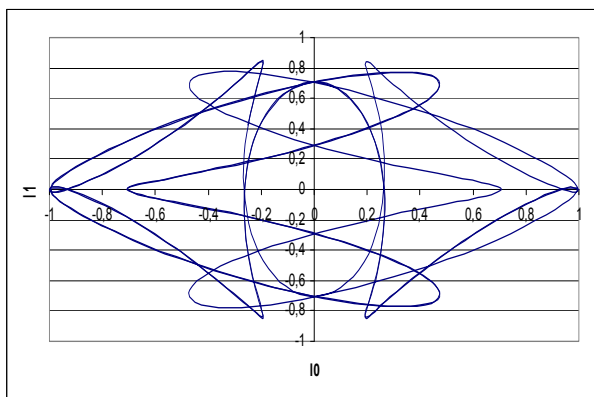


б

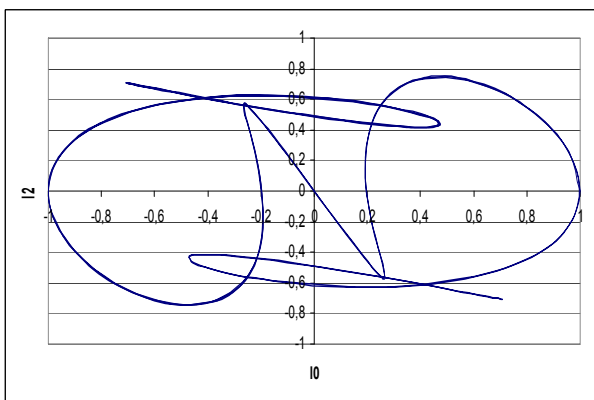


в

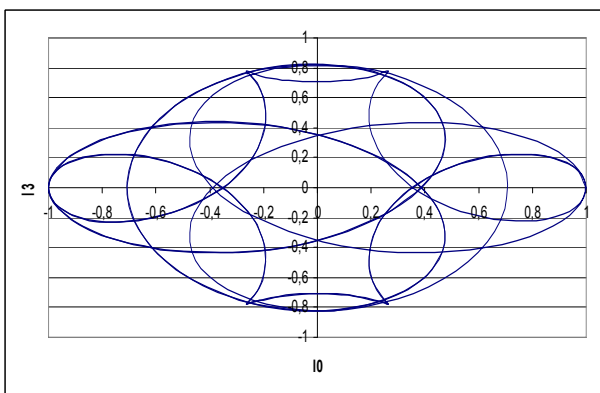
Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (9), (3), (5) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$: *a* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



a



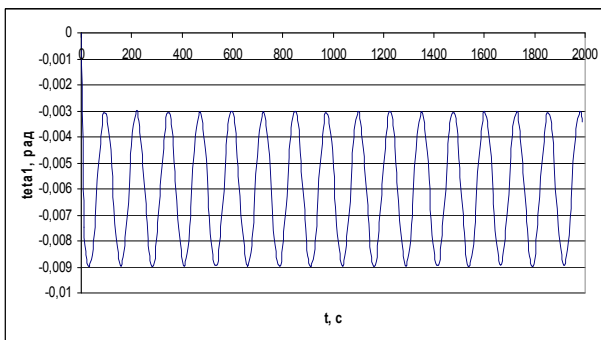
б



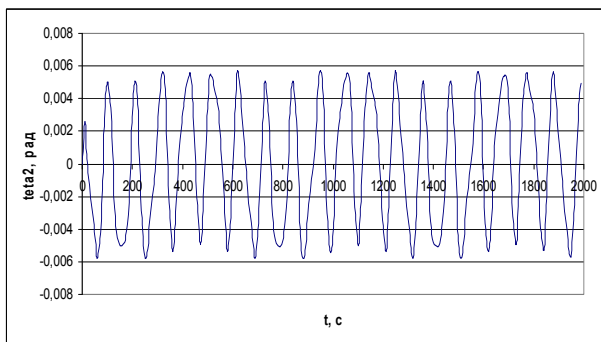
в

Рис. 2 – Траскторії в конфігураційному просторі для моделі (9), (3), (5):
a – траскторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траскторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траскторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

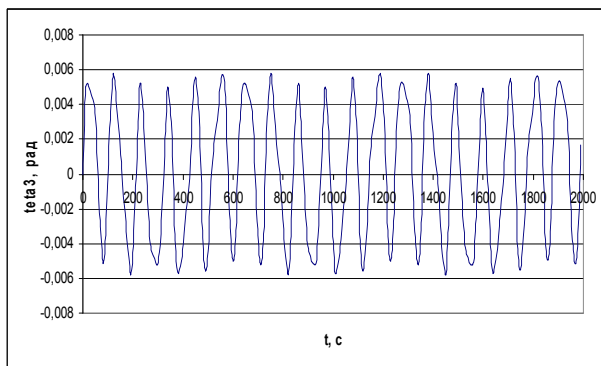
Результати реалізації еталонної моделі (9), (3), (5) для значень параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = -0,03$ на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 3 (залежності для квазікоординат $\theta_{ni}(t)$) і рис. 4 (траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі).



a

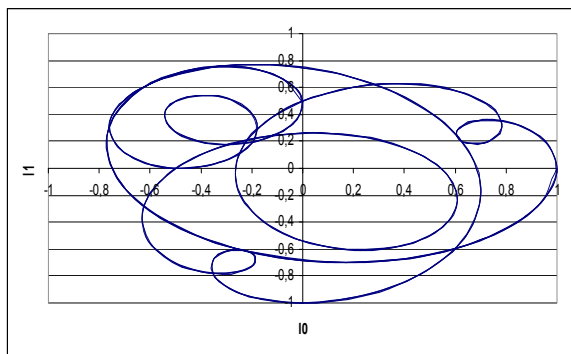


б

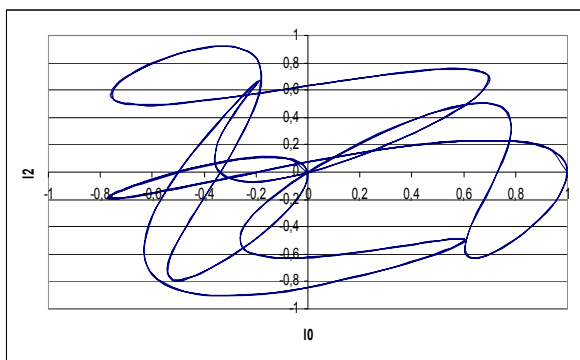


в

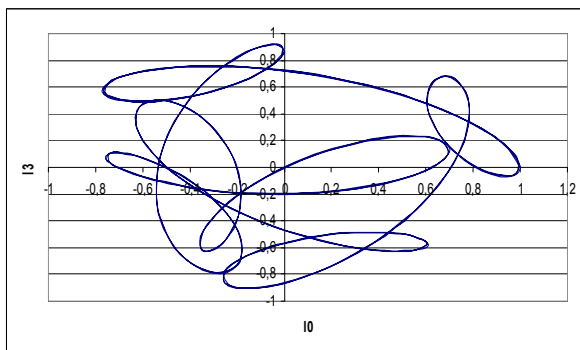
Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (9), (3), (5) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = -0,03$: *a* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



a



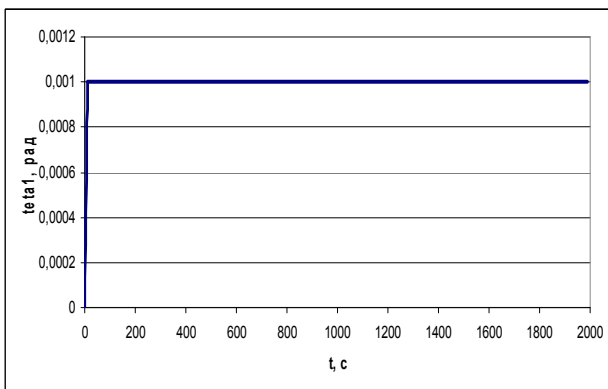
б



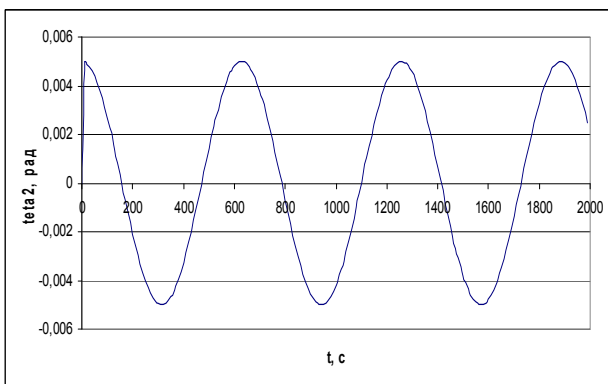
в

Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (9), (3), (5) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = -0,03$: *a* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

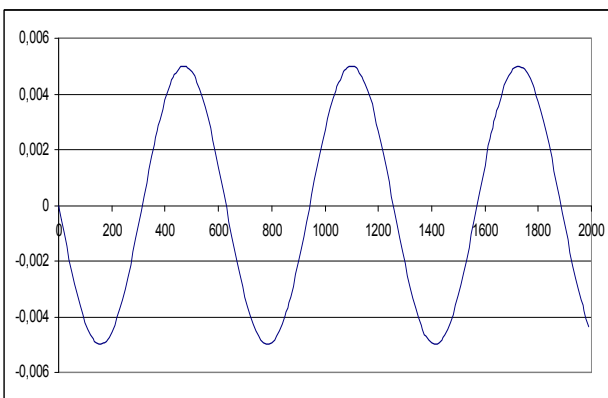
При значеннях параметрів $k_1 = 0$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,05$ результати моделювання руху, що відповідає еталонній моделі (9), (3), (5), представлені на рис. 5 і рис. 6.



a

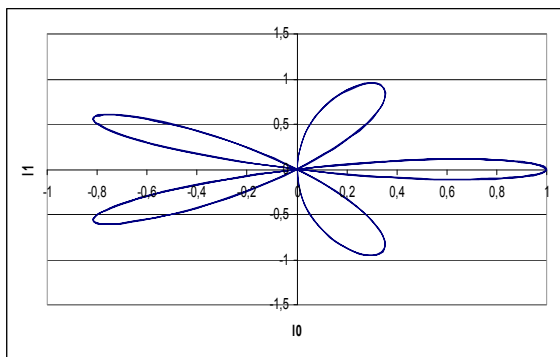


б

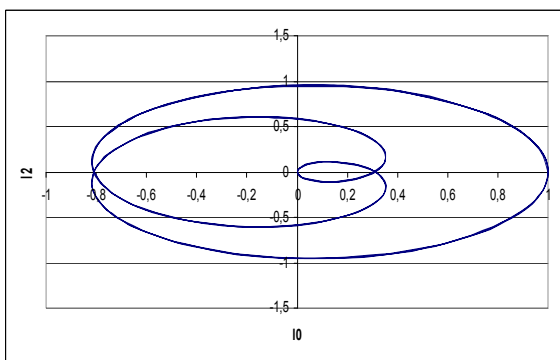


в

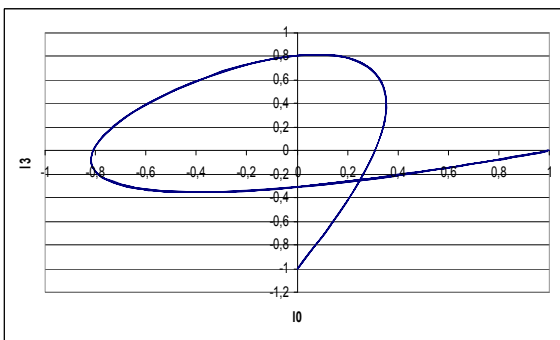
Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (9), (3), (5) при $k_1 = 0$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,05$: *a* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



a



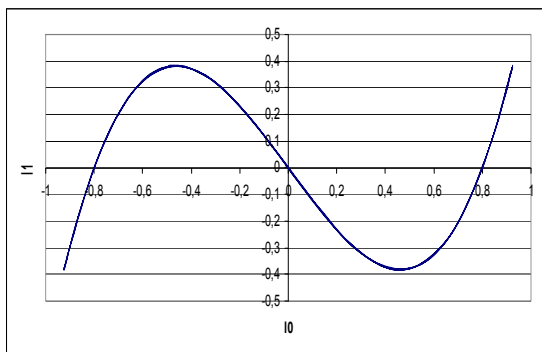
б



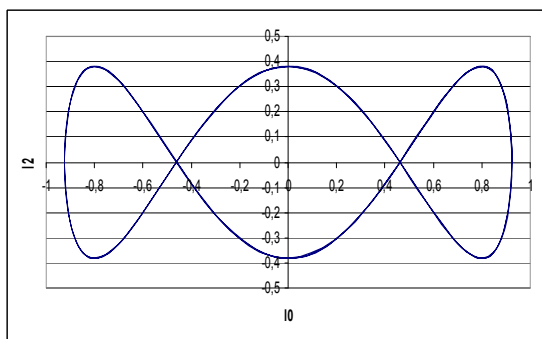
в

Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (9), (3), (5) при $k_1 = 0$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,05$: *a* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

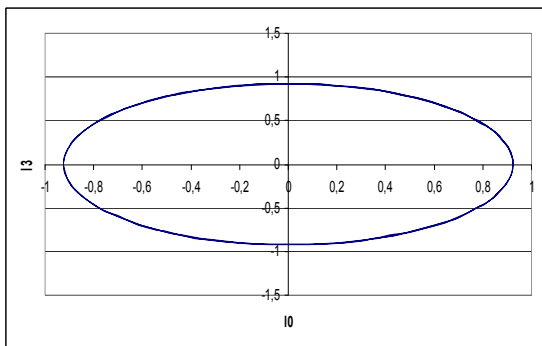
В роботі [7] наведено модель регулярної прецесії з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}(t) = (\mu \sin \vartheta \sin vt; \mu \sin \vartheta \cos vt; \nu + \mu \cos \vartheta)^T$. Траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі для цієї моделі представлені на рис. 7.



a



б



в

Рис. 7 – Траєкторії в конфігураційному просторі для регулярної прецесії:
a – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Модель побудована на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с при значеннях параметрів $\nu = -0,02$, $\mu = 0,04$, $\vartheta = \pi/4$. Порівняння результатів реалізацій моделі обертання (9), (3), (5) з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропонована модель охоплює обертальні рухи твердого тіла, які суттєво відрізняються від регулярної прецесії.

Висновки. Запропоновано нову аналітичну модель обертання твердого тіла, основана на представленні кватерніона орієнтації в функції кутів Крілова, що змінюються у часі. В результаті побудови траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі показано, що при належному виборі параметрів цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, які різняться від класичного випадку регулярної прецесії. Отриману еталонну модель можна застосовувати для оцінювання похибок алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

Список літератури: 1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. 2. Кузнецов Ю.А., Олейник С.В., Деменков В.А., Плаксий Ю.А. Применение моделей вращения для анализа погрешностей алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов // XVII Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург: ЦНИИ «Электронприбор». – 2010. – С. 114 – 116. 3. Ткаченко А.И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. 4. Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9. 5. Литманович Ю. Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург: ЦНИИ «Электронприбор». – 2003. – С. 250 – 260. 6. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с. 7. Панов А.П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988. – Вып. 77. – С. 47 – 52.

Bibliography (transliterated): 1. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriyu besplatfornennyyh inercial'nyh navigacionnyh sistem*. Moscow: Nauka, 1992. Print. 2. Kuznecov, Yu. A., et al. "Primenenie modeley vrashheniya dlja analiza pogreshnostej algoritmov besplatfornennyyh inercial'nyh sistem orientacii podviznyh ob"ektov." *XVII Sankt-Peterburgskaja Mezhdunar. konf.* S.-Peterburg: CNII «Jelektropribor», 2010. 114–116. Print. 3. Tkachenko, A. I. "O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmah opredelenija orientacii ob"ekta." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 5. Kiev, 1970. 20–22. Print. 4. Panov, A. P. "Optimizacija vysokotochnyyh algoritmov vychislenija kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 73. Kiev, 1987. 3–9. Print. 5. Litmanovich, Yu. "Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialah Sankt-Peterburgskih konferencij za desjatiletie." *X Sankt-Peterburgskaja Mezhdunar. konf.* S.-Peterburg: CNII «Jelektropribor», 2003. 250–260. Print. 6. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela*. Moscow: Nauka, 1973. Print. 7. Panov, A. P. "Adaptivnyye precessionnyye algoritmy vychislenija kvaternionov vrashhenija tverdogo tela." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 77. Kiev, 1988. 47–52. Print.

Надійшла (received) 15.05.2015

УДК 621.224

А.В. РУСАНОВ, чл.-корр. НАНУ, д-р техн. наук, проф., ИПМаш НАНУ, Харьков;

О.Н. ХОРЕВ, канд. техн. наук; ст. науч. сотр., ИПМаш НАНУ, Харьков;

А.В. ЛИННИК, главный конструктор гидротурбин, ОАО «Турбоатом», Харьков;

П.Н. СУХОРЕБРЫЙ, канд. техн. наук; ст. науч. сотр., ИПМаш НАНУ, Харьков