УДК 519.6

Л.Г. РАСКИН, д-р техн. наук (г. Харьков),
Б.Г. ЛОЛАШВИЛИ, В.С. ЗАРУБИН, И.В. ЗИНЧЕНКО

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В НЕЧЕТКО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ

У статті розглянуто проблему прийняття рішень у ситуації, коли параметри зовнішнього середовища задано нечітко. Запропоновано методику розв’язання задач для основних критеріїв прийняття рішень: Байєса, Кофмана, Марковица.

The decision problem with input fuzzy data is formulated in this aticle. The solve method for the main decision criterion: Bayes, Kofman, Markowitz is considered.

Постановка проблемы. Проблема принятия решения или проблема выбора альтернатив – это, по-видимому, наиболее распространенный класс задач, с которыми сталкивается исследователь, практически, в любой области человеческой деятельности: в технике, экономике, медицине и т.д. Собственно технология принятия решения зависит от того дискретными или непрерывными являются пространство состояний среды и пространство возможных решений. Рассмотрим ситуацию, когда оба эти пространства дискретны и содержат конечное множество элементов.

При этом традиционно исходят из схемы, которая предусматривает наличие следующих элементов [1, 2]:

1) идентифицированная внешняя среда, для которой определено множество возможных состояний $\theta_j \in \Theta$, j = 1, ..., n; однако в момент принятия решения субъекту управления не известно, в каком именно состоянии будет находиться среда;

2) субъект управления (лицо, принимающее решение), для которого определены множество взаимоисключающих решений $x_k \in X$, одно из которых (или набор) ему необходимо принять;

3) функционал оценивания $F = \{f(x_k, \theta_j)\} = \{f_{kj}\}$, характеризующий «выигрыш» или «проигрыш» при выборе решения $x_k \in X$, если среда находится (будет находиться) в состоянии $\theta_j \in \Theta$. При этом функционал оценивания F будем обозначать F^+, если он отображает «выигрыш», соответствующий принимаемому решению, и F^-, если он отображает «проигрыш» (потери).

Для выбора рационального решения используются различные критерии, выбор которых определяется уровнем информированности субъекта управления относительно состояний внешней среды [3]. При этом наиболее типичной является ситуация, когда к моменту принятия решения известно априорное распределение вероятностей состояний среды

$$P=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\},\quad p_j=P(\Theta=\theta_j),\quad \sum_{j=1}^{n}p_j=1.$$

Анализ литературы. Рассмотрим некоторые из основных критериев принятия решений, которые традиционно используются в этой информационной ситуации [3 – 5].

Критерий Байеса. Этот критерий также называют критерием средневзвешенной (ожидаемой) прибыли, затрат, риска и т.п.

В соответствии с критерием Байеса в случае, если $F=F^+$, оптимальным решением x_{k_0} считается такое, для которого математическое ожидание соответствующего критерия оценивания достигает наилучшего возможного значения. Таким образом, решение находят, исходя из условия:

$$x_{k_0}=\arg\max_{x_k\in X}F^+(x_k;P),\quad F^+(x_k;P)=\sum_{j=1}^{n}p_j f_{kj}^+=M(F_k^+).$$

Если же $F=F^-$, то оптимальное решение определяется условием:

$$x_{k_0}=\arg\min_{x_k\in X}F^-(x_k;P),\quad F^-(x_k;P)=\sum_{j=1}^{n}p_j f_{kj}^-=M(F_k^-).$$

Если максимум F^+ или минимум F^- достигается на нескольких решениях из множества, то такие решения называются эквивалентными относительно данного критерия.

Описанный подход к определению оптимальной стратегии в теории статистических решений называется байесовым. Величина $F^+(x_k;P)$ (или $F^-(x_k;P)$) называется байесовской оценкой риска решения $x_k\in X$.

Критерий Кофмана. Введем понятия «неудача» и «успех». Результат меньший, чем d_1, объявляется неудачей, а больший, чем d_2, оценивается как «успех». Теперь для каждой стратегии k множество возможных состояний среды $\{1, 2, \ldots, n\}$ разобьем на три подмножества

$$\mathrm{E}_k^-=\{j,\ f_{kj}^+<d_1\},\ \mathrm{E}_k^0=\{j,d_1\le f_{kj}^+\le d_2\},\ \mathrm{E}_k^+=\{j,\ f_{kj}^+>d_2\}.$$

При этом понятно, что $\left(\sum_{j\in\mathrm{E}_k^-}f_{kj}^+p_j\right)$ – есть средний выигрыш, полученный на подмножестве состояний природы E_k^-, а $\left(\sum_{j\in\mathrm{E}_k^0}f_{kj}^+p_j\right)$ и $\left(\sum_{j\in\mathrm{E}_k^+}f_{kj}^+p_j\right)$ есть средние значения выигрыша, полученного на подмножестве состояний природы E_k^0 и E_k^+ соответственно.

Наилучшей является стратегия x_{k_0}, для которой

$$x_{k_0} = \arg\max_{x_k \in X} \left\{ \left(\sum_{j \in \mathrm{E}_k^+} f_{kj}^+ p_j \right) \left(\sum_{j \in \mathrm{E}_k^+} p_j \right) - \left(\sum_{j \in \mathrm{E}_k^-} f_{kj}^+ p_j \right) \left(\sum_{j \in \mathrm{E}_k^-} p_j \right) \right\}.$$

Критерий Марковица. Для каждой стратегии k вычисляются соответствующие значения математического ожидания и дисперсии функционала оценивания.

Пусть $F = F^+$. При этом

$$F^+(x_k; P) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_{kj}^+ \quad \text{и} \quad D^+(x_k; P) = \sum_{j=1}^{n} p_j \left[f_{kj}^+ - F^+(x_k; P) \right]^2. \qquad (1)$$

Тогда оптимальное решение x_{k_0} определяется из условий:

$$x_{k_0} = \arg\min_{x_k \in X} D^+(x_k; P),\ X_k = \left\{ x_k : F^+(x_k; P) \geq R_{\text{п}} \right\},$$

где $R_{\text{п}}$ – пороговое значение функционала оценивания.

Вполне ясно, что выполняемые при выборе стратегии действия очень просты и их применение не вызывает затруднений. Ситуация коренным образом меняется, если параметры, задающие состояние внешней среды, не могут быть оценены с надлежащей точностью. В частности, на практике определенные трудности возникают при оценивании компонентов вектора P априорных вероятностей состояний среды. Пусть, например, компоненты вектора P есть нечеткие числа с заданными функциями принадлежности [6 – 8]. Введем эти функции принадлежности следующим образом:

$$\mu(p_j) = \exp\left\{ -\frac{(p_j - \bar{p}_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\},\ j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

В ситуации, когда вероятности состояний – нечеткие числа, приведенные соотношения для расчета среднего выигрыша и дисперсии выигрыша теряют смысл.

Целью статьи является разработка технологии решения задачи в ситуации, когда исходные данные определены нечетко.

Методика принятия решения в условиях нечеткого задания состояний внешней среды. Построим набор функций принадлежности предполагаемого среднего выигрыша для каждого из возможных вариантов принятия решения. Пусть $F = F^+$. Тогда, с учетом (2), как легко показать,

$$\mu\left(F^+(x_k, P)\right) = \mu\left(\sum_{j=1}^{n} f_{kj}^+ p_j \right) = \exp\left\{ -\frac{(F_k - \bar{F}_{\Sigma,k})^2}{2D_{\Sigma,k}} \right\}, \qquad (3)$$

где

$$\overline{F}_{\Sigma,k}=\sum_{j=1}^{n} f_{kj}^{+}\overline{p}_j\ ,\ D_{\Sigma,k}=\sum_{j=1}^{n}(f_{kj}^{+})\sigma_j^2\ ,\qquad k=1,2,\ldots,m\,.$$

Выберем некоторый, достаточно высокий, уровень принадлежности значения среднего выигрыша, например, равный $0,9$. Теперь для каждой функции принадлежности $\mu\left(F^{+}(x_k,P)\right)$ найдем значения F_k, которым соответствует уровень принадлежности, равный α. С этой целью решим уравнение

$$\mu\left(F^{+}(x_k,P)\right)=\alpha\ ;$$

$$\exp\left\{-\frac{(F_k-\overline{F}_{\Sigma,k})^2}{2D_{\Sigma,k}}\right\}=\alpha\ .$$

Отсюда

$$F_k=\overline{F}_{\Sigma,k}\pm\left[-2D_{\Sigma,k}\ln\alpha\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Выберем F_k из условия

$$F_k=\min\left\{\overline{F}_{\Sigma,k}-\left[-2D_{\Sigma,k}\ln\alpha\right]^{\frac{1}{2}},\overline{F}_{\Sigma,k}+\left[-2D_{\Sigma,k}\ln\alpha\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$=\overline{F}_{\Sigma,k}-2\left[D_{\Sigma,k}\ln\frac{1}{\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, в качестве наилучшей естественно выбрать стратегию k_0, для которой

$$k_0=\arg\max_k F_k=\arg\max_k\left\{\overline{F}_{\Sigma,k}-2\left[D_{\Sigma,k}\ln\frac{1}{\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Рассмотрим теперь технологию выбора наилучшей альтернативы, если используется критерий Кофмана. Запишем последовательность соотношений для описания функций принадлежности значения среднего выигрыша на подмножествах состояний E_k^{-} и E_k^{+}:

$$\mu\left(\sum_{j\in E_k^{+}} f_{kj}^{+}p_j\right)=\exp\left\{-\frac{(F_k^{+}-\overline{F}_k^{+})^2}{2D_k^{+}}\right\};\ \overline{F}_k^{+}=\sum_{j\in E_k^{+}} f_{kj}^{+}\overline{p}_j\ ;\ D_k^{+}=\sum_{j\in E_k^{+}}\sigma_k^2(f_{kj}^{+})^2\ ;$$

$$\mu\left(\sum_{j\in E_k^{+}} p_j\right)=\exp\left\{-\frac{(P_k^{+}-\overline{P}_k^{+})^2}{2D_{k,p}^{+}}\right\};\ \overline{P}_k^{+}=\sum_{j\in E_k^{+}}\overline{p}_j\ ;\ D_{k,p}^{+}=\sum_{j\in E_k^{+}}\sigma_j^2\ ;$$

$$\mu\left(\sum_{j\in E_k^-} f_{kj}^+ p_j\right) = \exp\left\{-\frac{(F_k^- - \overline{F}_k^-)^2}{2D_k^-}\right\};\ \overline{F}_k^- = \sum_{j\in E_k^-} f_{kj}^+ \overline{p}_j;\ D_k^- = \sum_{j\in E_k^-} \sigma_k^2 (f_{kj}^+)^2;$$

$$\mu\left(\sum_{j\in E_k^-} p_j\right) = \exp\left\{-\frac{(P_k^- - \overline{P}_k^-)^2}{2D_{k,p}^-}\right\};\ \overline{P}_k^- = \sum_{j\in E_k^-} \overline{p}_j;\ D_{k,p}^- = \sum_{j\in E_k^-} \sigma_j^2 .$$

Далее, как известно, функция принадлежности произведения $Z = X \cdot Y$ двух нечетких чисел с функциями принадлежности, имеющими соответственно вид:

$$\mu(X) = \exp\left\{-\frac{(X - \overline{X})^2}{2\sigma_X^2}\right\},\ \mu(Y) = \exp\left\{-\frac{(Y - \overline{Y})^2}{2\sigma_Y^2}\right\},$$

описывается выражением

$$\mu(Z) = \exp\left\{-\frac{(Z - \overline{Z})^2}{2\sigma_Z^2}\right\},$$

где

$$\overline{Z} = \overline{X}\overline{Y},\ \sigma_Z^2 = \sigma_X^2\sigma_Y^2 + \overline{X}^2\sigma_Y^2 + \overline{Y}\sigma_X^2 .$$

В соответствии с этим

$$\mu\left[\left(\sum_{j\in E_k^+} f_{kj}^+ p_j\right)\left(\sum_{j\in E_k^+} \overline{p}_j\right)\right] = \exp\left\{-\frac{(F_{\Sigma,k}^+ - \overline{F}_{\Sigma,k}^+)^2}{2D_{\Sigma,k}^+}\right\};$$

$$F_{\Sigma,k}^+ = \overline{F}_k^+ \overline{P}_k^+;$$

$$D_{\Sigma,k}^+ = \left(\sum_{j\in E_k^+} (f_{kj}^+)^2 \sigma_j^2\right)\left(\sum_{j\in E_k^+} \sigma_j^2\right) + \left(\sum_{j\in E_k^+} f_{kj}^+ \overline{p}_j\right)^2 \left(\sum_{j\in E_k^+} \sigma_j^2\right) +$$

$$+ \left(\sum_{j\in E_k^+} (f_{kj}^+)^2 \sigma_j^2\right)\left(\sum_{j\in E_k^+} \overline{p}_j\right)^2 .$$

Далее

$$\mu\left[\left(\sum_{j\in E_k^-} f_{kj}^+ p_j\right)\left(\sum_{j\in E_k^-} \overline{p}_j\right)\right] = \exp\left\{-\frac{(F_{\Sigma,k}^- - \overline{F}_{\Sigma,k}^-)^2}{2D_{\Sigma,k}^-}\right\},$$

где

$$F^{-}_{\Sigma,k} = \overline{F}^{-}_{k}\overline{P}^{-}_{k} = \left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} f^{+}_{kj}\, p_j\right)\left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} \overline{p}_j\right);$$

$$D^{-}_{\Sigma,k} = \left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} (f^{+}_{kj})^2 \sigma^2_j\right)\left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} \sigma^2_j\right) + \left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} f^{+}_{kj}\,\overline{p}_j\right)^2 \left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} \sigma^2_j\right) +$$

$$+ \left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} (f^{+}_{kj})^2 \sigma^2_j\right)\left(\sum_{j\in E^{-}_{k}} \overline{p}_j\right)^2 .$$

Теперь функция принадлежности значения среднего выигрыша для k-й альтернативы имеет вид

$$\mu\left(F_k\right) = \exp\left\{-\frac{(F_k - \overline{F}_k)^2}{2D_k}\right\};$$

$$F_k = \overline{F}^{+}_{\Sigma,k} - \overline{F}^{-}_{\Sigma,k};\; D_k = \overline{D}^{+}_{\Sigma,k} + \overline{D}^{-}_{\Sigma,k} .$$

Пусть, наконец, для выбора наилучшей альтернативы используется критерий Марковица. Здесь процедура выбора усложняется, так как, в отличие от предыдущего, выбор в этой ситуации связан с необходимостью решения задачи условной оптимизации. С учетом выражений (1) определим функции принадлежности для среднего выигрыша и его дисперсии. При этом $\mu\left(F^{+}(x_k, P)\right)$ определяется соотношением (3), а функция принадлежности значения дисперсии выигрыша имеет вид

$$\mu\left(D^{+}(x_k, P)\right) = \mu\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \left(f^{+}_{kj} - F^{+}(x_k, P)\right)^2\right) = \exp\left\{-\frac{(D^{+}_k - \overline{D}^{+}_k)^2}{2D^{+}_D}\right\},$$

где

$$\overline{D}^{+}_k = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(f^{+}_{kj} - F^{+}(x_k, P)\right)^2,\; D^{+}_D = \sum_{j=1}^{n} \sigma^2_j \left(f^{+}_{kj} - F^{+}(x_k, P)\right)^4 .$$

Пусть теперь $\mu(X)$ – функция принадлежности некоторого нечеткого числа X. Для этой функции принадлежности выберем значение уровня принадлежности α и найдем x_H и x_B, для которых $\mu(x_H) = \mu(x_B) = \alpha$.

Интервал $[x_H, x_B]$, для всех точек которого имеет место $\mu(X) \geq \alpha$ будем называть α-интервалом. С использованием этого определения для каждой из альтернатив найдем α-интервалы для функций принадлежности $\mu\left(F^{+}(x_k, P)\right)$ и $\mu\left(D^{+}(x_k, P)\right)$. При этом получим набор α-интервалов $\{I_{k,F}\}$ и набор

$\{I_{k,D}\}$. Понятно, что степень предпочтительности альтернативы k тем выше, чем правее расположен α-интервал $I_{k,F}$ и, одновременно, левее расположен α-интервал $I_{k,D}$. С целью формальной оценки степени предпочтительности альтернатив введем квадратические функции полезности [9, 10] вида $y = F^2$, где F – значение среднего выигрыша и потерь $Z = D^2$, где D – дисперсия среднего выигрыша. Тогда

$$R_k = \int_{x_{H,k}}^{x_{B,k}} \mu^2\left(F^+(x_k, P)\right) d\mu\left(F^+(x_k, P)\right)$$

– есть числовая характеристика полезности k-й альтернативы, а

$$Q_k = \int_{x_{H,k}}^{x_{B,k}} \mu^2\left(D^+(x_k, P)\right) d\mu\left(D^+(x_k, P)\right)$$

– характеристика опасности k-й альтернативы.

Теперь из множества возможных альтернатив следует выделить подмножество $k_\Pi = \{k : R_k \geq R_\Pi\}$. Тогда оптимальное решение k_0 определяется из условия

$$k_0 = \arg\min_{k \in k_\Pi} Q_k .$$

Выводы. Таким образом, описана методика принятия решений в ситуации, когда параметры внешней среды определены нечетко. Методика основана на формировании функций принадлежности нечеткого значения среднего выигрыша для каждого из возможных альтернативных решений. Для основных, наиболее часто используемых, статистических критериев (Байеса, Кофмана, Марковица) методика доведена до расчетных соотношений.

Список литературы: **1.** *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2002. – 392 с. **2.** Теория выбора и принятия решений / *И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов.* – М.: Наука, 1982. – 328 с. **3.** *Рогальский Ф.Б., Курилович Я.Е., Цокуренко А.А.* Математические методы анализа экономических систем. – К.: Наукова думка, 2001. – Т. 1. – Теоретические основы. – 435 с. **4.** *Макаров М.М.* Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1987. – 415 с. **5.** *Цокуренко А.А.* Классические критерии. – К.: ВИПОЛ, 1995. – 24 с. **6.** *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 120 с. **7.** *Ярушкина Н.Г.* Основы теории нечетких и гибридных систем. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 320 с. **8.** *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с. **9.** *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 378 с. **10.** *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: ИЛ, 1960. – 708 с.

Поступила в редакцию 26.09.2005