

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**для підготовки до практичних занять
за темою «Частотні характеристики лінійних електричних кіл»**

з дисциплін «Теорія електричних кіл та сигналів»,
«Теорія електричних кіл», «Теорія електромагнітних кіл»,
«Основи електротехніки та електроніки»

для студентів спеціальностей

151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
171 «Електроніка», 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка»,
123 «Комп'ютерна інженерія»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №2 від 25.06.2020 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2020

Методичні вказівки для підготовки до практичних занять за темою «ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ» з дисциплін «Теорія електричних кіл та сигналів», «Теорія електричних кіл», «Теорія електромагнітних кіл», «Основи електротехніки та електроніки» для студентів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 171 «Електроніка», 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка», 123 «Комп'ютерна інженерія» / уклад.: А. М. Борисенко, Б. І. Кубрик, С. А. Литвиненко – Харків. : НТУ «ХПІ», 2020. – 24 с.

Укладачі: Борисенко А. М., Кубрик Б. І., Литвиненко С. А.

Рецензент Гетьман А. В.

Кафедра теоретичних основ електротехніки

ВСТУП

З використанням частотних характеристик можуть бути описані передавальні властивості елементів і систем в режимі усталених гармонійних коливань, викликаних зовнішнім гармонійним впливом. Для дослідження частотних властивостей системи та отримання її частотних характеристик на вхід системи (електричного кола) подають гармонійні збудження певної сталої частоти ω та амплітуди X_m . По закінченні перехідного процесу елемент (система) увійде до режиму усталених вимушених коливань, а вихідна величина $y(t)$ буде змінюватися за гармонійним законом з тією ж частотою ω , але з іншою амплітудою та зі зсувом Δt_ϕ по осі часу. Здійснюючи гармонічних вплив на вхід різних елементів (систем) можна переконатися, що величини Y_m та Δt_ϕ залежать від частоти ω , а також від типу і параметрів елементів, з яких складається сама система. Отже, залежності амплітуди вихідної величини Y_m та її зсуву Δt від значень частоти ω можуть служити характеристиками динамічних властивостей в системах автоматичного управління та в системах передачі та перетворення інформації.

Крім цього, частотні характеристики входять невід'ємною частиною до частотного методу аналізу процесів в електричних колах, який широко використовується для розрахунків гармонійних спектрів сигналів та проходження сигналів через електричні кола.

Мета роботи – ознайомити студентів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 171 «Електроніка», 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка», 123 «Комп'ютерна інженерія» з теоретичними питаннями і типовими завданнями з розділу «Частотні характеристики лінійних електричних кіл».

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

При впливі на вхід лінійного електричного кола гармонійного коливання з комплексною амплітудою \underline{X}_m і частотою ω на виході кола вийде теж гармонійне коливання тієї ж частоти, але з іншою комплексною амплітудою \underline{Y}_m . Відношення комплексної амплітуди вихідної величини (реакції) до комплексної амплітуди вхідної величини (впливу) визначає *комплексну передавальну функцію* (КПФ) електричного кола і позначається $K(j\omega)$:

$$K(j\omega) = \frac{\underline{Y}_m}{\underline{X}_m} = \frac{Y}{X} = \frac{Y}{X} \cdot e^{j(\psi_{\text{вих}} - \psi_{\text{вх}})}, \quad \underline{Y}_m = \underline{X}_m \cdot K(j\omega)$$

При сталій частоті КПФ є комплексним числом – *комплексним коефіцієнтом передачі* (ККП), що дозволяє обчислити реакцію на заданий гармонійний вплив. При змінюванні частоти КПФ в загальному випадку змінюється, тобто вона є функцією частоти.

КПФ при даному значенні ω є вектором в площині комплексного змінного, що має амплітуду $K(j\omega)$ і фазу $\varphi(\omega)$. Наведемо на рис.1 вектор і його дійсну та уявну складові в площині комплексного змінного для деякого значення частоти ω . При зміні частоти ω амплітуда і фаза вектора $K(j\omega)$ будуть змінюватися і кінець вектора буде описувати в площині комплексного змінного криву, що представляє собою амплітудно-фазову характеристику (АФХ). Разом з цим, при зміні частоти будуть змінюватися так само і величини $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $P(\omega)$ та $Q(\omega)$, що дає можливість побудувати частотні характеристики, які визначають зміни цих величин зі зміною частоти ω і представляють собою відповідно:

$$K(\omega) = |K(j\omega)| - \text{амплітудно-частотну характеристику (АЧХ)},$$

$$\varphi(\omega) = \arg(K(j\omega)) - \text{фазо-частотну характеристику (ФЧХ)},$$

$$P(\omega) = \text{Re}(K(j\omega)) - \text{дійсну частотну характеристику (ДЧХ)},$$

$$Q(\omega) = \text{Im}(K(j\omega)) - \text{уявну частотну характеристику (УЧХ)}.$$

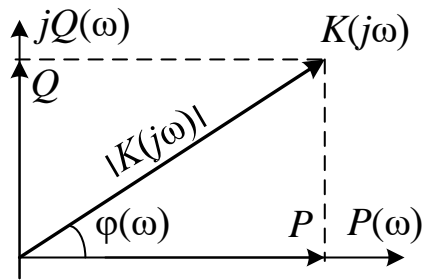


Рисунок 1

Співвідношення між цими характеристиками визначається очевидними виразами:

$$K(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)};$$

$$P(\omega) = |K(j\omega)| \cdot \cos \varphi(\omega);$$

$$Q(\omega) = |K(j\omega)| \cdot \sin \varphi(\omega);$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

які безпосередньо випливають з тригонометричних співвідношень, що характеризують вектор $K(j\omega)$.

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1.

Отримати аналітичний вираз і побудувати графіки всіх частотних характеристик дільника напруги (рис.2), якщо $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 15 \text{ Ом}$.

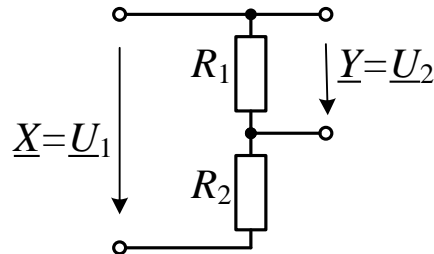


Рисунок 2

Розв'язання.

Розглянуте коло належить до групи пропорційних ланок КПФ.

$$K(j\omega) = \frac{\underline{I} \cdot R_1}{\underline{I} \cdot (R_1 + R_2)} = \frac{5}{5 + 15} = 0,25,$$

$$\text{АЧХ. } K(\omega) = 0,25; \quad \text{ФЧХ. } \varphi(\omega) = 0;$$

$$\text{ДЧХ. } P(\omega) = 0,25; \quad \text{УЧХ. } Q(\omega) = 0.$$

АФХ в координатах $P(\omega)$, $Q(\omega)$ визначається точкою з координатами 0,25; 0.

Побудуємо графіки цих характеристик (рис.3).

АЧХ

ФЧХ

ДЧХ

УЧХ

АФХ

$$K(\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,25; \quad \varphi(\omega) = 0; \quad P(\omega) = 0,25; \quad Q(\omega) = 0; \quad K(j\omega) = 0,25.$$

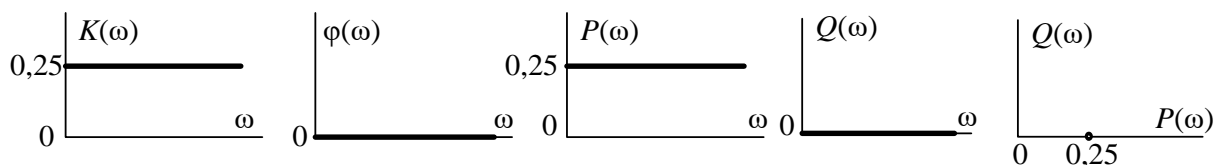


Рисунок 3

Задача 2.

Отримати аналітичні вирази і побудувати графіки всіх частотних характеристик електричного кола, зображеного на рис.4, якщо

$$R_1 = 5 \text{ Ом}, \quad L_1 = 100 \text{ мГн}, \quad k = 3.$$

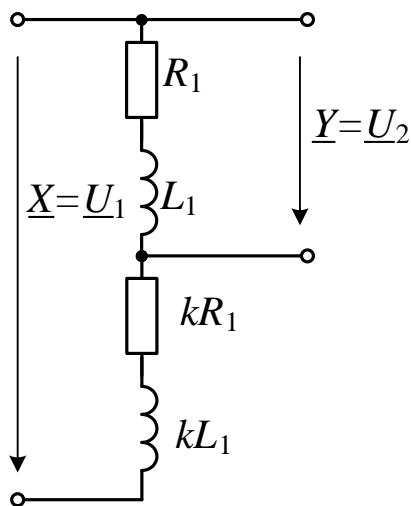


Рисунок 4

Розв'язання.

Розглянуте коло належить до групи пропорційних ланок.

Його КПФ:

$$K(j\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1(R_1 + j\omega L_1)}{I_1[(k+1) \cdot R_1 + j \cdot (k+1) \cdot \omega \cdot L_1]} = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

АЧХ: $K(\omega) = 0,25$; ФЧХ: $\varphi(\omega) = 0$; ДЧХ: $P(\omega) = 0,25$; УЧХ: $Q(\omega) = 0$;
АФХ в координатах $P(\omega)$, $Q(\omega)$ визначається точкою з координатами $0,25; 0$.
Графіки є аналогічними задачі 1.

Задача 3.

Отримати аналітичний вираз і побудувати графіки АЧХ і ФЧХ електричного кола, зображеного на рис.5. Знайти ширину смуги пропускання.

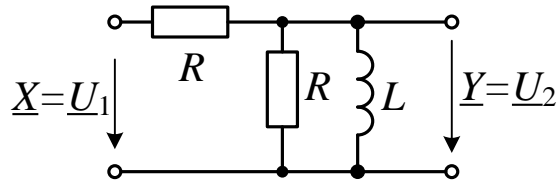


Рисунок 5

Розв'язання.

Розглянуте коло належить до диференціюючих кіл, оскільки $K(0) = 0$ (при $\omega = 0$ вихідні затискачі закорочуються).

КПФ:

$$K(j\omega) \frac{Y}{X} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I \cdot \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}}{I \cdot R + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}} = \frac{R \cdot j\omega L}{R^2 + 2Rj\omega L} = \frac{j\omega L}{R + 2j\omega L}.$$

$$\text{АЧХ: } K(\omega) = \frac{\omega L}{R^2 + 4\omega^2 L^2}. \quad \text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{2\omega L}{R} = \text{arctg} \frac{R}{2\omega L}.$$

Графіки АЧХ і ФЧХ, що представлені на рис.6, побудовані за крайніми точками $\omega = 0$ та $\omega \rightarrow \infty$:

ω	0	ω_{Π}	∞
$K(\omega)$	0	$1/2\sqrt{2}$	$1/2$
$\varphi(\omega)$	$\pi/2$	$\pi/4$	0

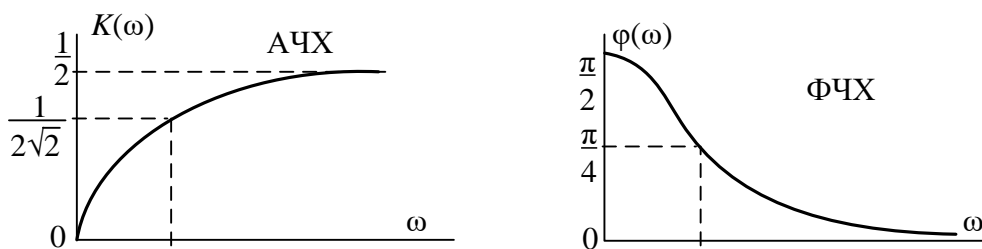


Рисунок 6

Отримаємо межу смуги пропускання ω_{Π} з виразу

$$\frac{\omega_{\Pi} L}{R^2 + 4\omega_{\Pi}^2 L^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \text{ звідки } 8\omega_{\Pi}^2 L^2 = R^2 + 4\omega_{\Pi}^2 L^2, \quad 4\omega_{\Pi}^2 L^2 = R^2,$$

$$\omega_{\Pi} = \frac{R}{2L}. \quad \varphi(\omega_{\Pi}) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2 \cdot \omega_{\Pi} \cdot L}{R} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Зауважимо, що значення АЧХ і ФЧХ при $\omega = 0$ та $\omega \rightarrow \infty$ можна легко отримати, не вдаючись до аналітичних досліджень, за схемою кола. За $\omega = 0$ вихідні затискачі закорочені і $U_2 = 0$, за $\omega \rightarrow \infty$ гілка індуктивності розімкнена ($X_L = \omega L \rightarrow \infty$) і вихідна напруга дорівнює половині вхідної $U_2 = \frac{U_1}{2}$.

Для двополюсника, коли є тільки дві електричні величини – напруга і струм, КПФ є комплексним опором або провідністю. Отже КПФ – це вхідний опір або вхідна провідність.

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \quad Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta},$$

де Δ – визначник, складений з власних і взаємних опорів контурів даного кола, а Δ_{11} – визначник, отриманий з визначника Δ шляхом викреслювання першого рядка і першого стовпця.

Задача 4. (для самостійного розв'язання)

Повторити розв'язання задачі 3, прийнявши $R=10$ Ом, $L = 50$ мГн.

Задача 5.

Отримати АЧХ і ФЧХ електричного кола, зображеного на рис.7, вважаючи вхідною величиною прикладену напругу, а вихідною величиною – загальний струм.

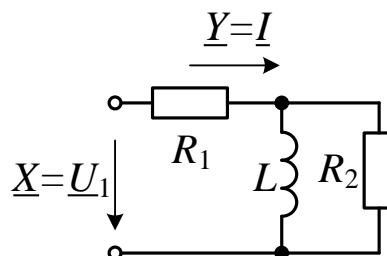


Рисунок 7

Розв'язання.

При даній комбінації вихідної і вхідної величини КПФ є вхідною провідністю $Y(\omega)$, яку можна визначити будь-яким відомим способом. Зокрема, можна розглядати коло, як двополюсник, і знайти вхідну провідність, як відношення $\frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, де Δ_{11} – визначник кола, а Δ – алгебраїчне доповнення цього визначника, що отримане викреслюванням першого рядка і першого стовпця. Нагадаємо, що при виборі контурів для запису визначника власних і взаємних опорів вхідні затискачі повинні входити тільки в перший контур. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + j\omega L & j\omega L \\ j\omega L & R_2 + j\omega L \end{vmatrix} = R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2) + (j\omega L)^2 - (j\omega L)^2 = \\ = R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2) . \quad \Delta_{11} = R_2 + j\omega L .$$

КПФ:

$$K(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_1} = \underline{Y}(j\omega) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{R_2 + j\omega L}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)j\omega L} .$$

АЧХ:

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{R_2^2 + (\omega L)^2}{(R_1 R_2)^2 + (R_1 + R_2)^2 (\omega L)^2}} = Y(\omega) ; K(0) = \frac{1}{R_1} , K(\infty) = \frac{1}{R_1 + R_2} ,$$

ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L}{R_2} - \arctg \frac{\omega L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \varphi'(\omega) - \varphi''(\omega) , \\ \frac{\omega L}{R_2} < \frac{\omega L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

Графіки АЧХ і ФЧХ зображені на рис.8. Зауважимо, що рівності $Y(0) = \frac{I}{R_1}$ і $Y(\infty) = \frac{I}{(R_1 + R_2)}$ можна отримати за схемою кола на основі простих фізичних міркувань.

ω	0	∞
$K(\omega)$	$1/R_1$	$1/(R_1 + R_2)$
$\varphi(\omega)$	0	0

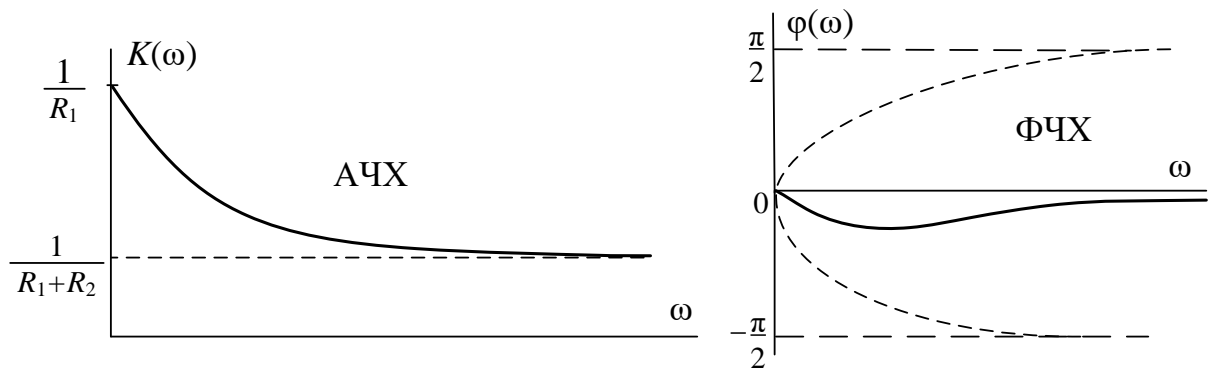


Рисунок 8

Задача 6.

Повторити розв'язок задачі 7, якщо $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $L = 3$ мГн. Знайти комплексний коефіцієнт передачі $K(j\omega_1)$ при $\omega_1 = 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Задача 7.

Отримати аналітичні вирази КПФ $K(j\omega)$, АЧХ, ФЧХ і ККП $K(j\omega_1)$, якщо $R = 2$ Ом, $C = 0,5$ мкФ, $\omega_1 = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Схема кола дана на рис.9.

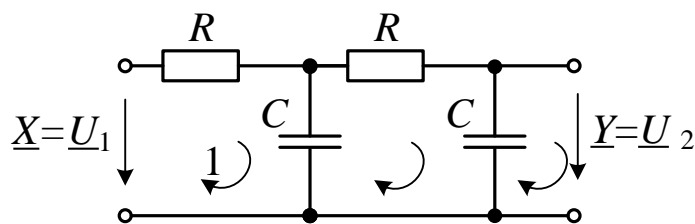


Рисунок 9

Розв'язання.

Можна розглянути коло як чотиріполюсник і знайти $K(j\omega)$ за (2.2):

$$K(j\omega) = \frac{1}{A_{11}}, \quad A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$$

де Y_{22} та Y_{21} – елементи другого рядка матриці \underline{Y} чотиріполюсника.

Ці елементи розрахувати за визначником опорів кола, вибираючи контури так, щоб вхідні вузли знаходилися тільки в першому контурі, а вихідні – тільки в другому (див. розділ "Теорія чотиріполюсників").

Тоді $Y_{22} = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta}$, $Y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}$ і, отже, $A_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}}$, а $K_U(j\omega) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{31}} \frac{\underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{33}} = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{33} - \underline{Z}_{13}^2;$$

$$\Delta_{12} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{31}} \frac{\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{33}} = -\underline{Z}_{21}\underline{Z}_{33} + \underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23};$$

$$\underline{Z}_{11} = R - jX_C; \quad \underline{Z}_{33} = R - jX_C; \quad \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -(-jX_C) = jX_C;$$

$$\underline{Z}_{23} = -(-jX_C) = jX_C; \quad \underline{Z}_{21} = 0;$$

$$\Delta_{22} = (R - jX_C)(R - j2X_C) - (jX_C)^2 = R^2 - j3RX_C - 2X_C^2 + X_C^2 =$$

$$= R^2 - X_C^2 - j3RX_C; \quad \Delta_{12} = jX_C \cdot jX_C = -X_C^2;$$

$$K(j\omega) = \frac{-X_C^2}{R^2 - X_C^2 - j3RX_C} = \frac{X_C^2}{X_C^2 - R^2 + j3RX_C} = \frac{1}{1 - \frac{R^2}{X_C^2} + j3\frac{R}{X_C}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{R^2}{(1/\omega C)^2} + j3\frac{R}{1/\omega C}} = \frac{1}{1 - R^2(\omega C)^2 + j3R\omega C}.$$

$$\text{АЧХ: } K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (R\omega C)^2]^2 + (3R\omega C)^2}}; \quad \text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\arctg \frac{3RC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2}.$$

Для відповіді на останнє запитання треба підставити у вираз КПФ задані значення R , C і ω_1 .

$$K(j\omega_1) = \frac{1}{1 - 2^2(10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6})^2 + j3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= \frac{1}{1 - 1 + j3} = \frac{1}{j3} = -j\frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Задача 8.

Повторити розв'язок задачі 7, розглянути коло як Т-подібний чотириполюсник, навантажений опором $-jX_C$. Визначити ККП, якщо $R = 4 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $\omega_1 = 5,10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Задача 9.

Для двополюсника, зображеного на рис.10, отримати аналітичні вирази КПФ, АЧХ, ФЧХ і побудувати графіки АЧХ і ФЧХ, вважаючи вихідною величиною напругу, а вхідною – струм.

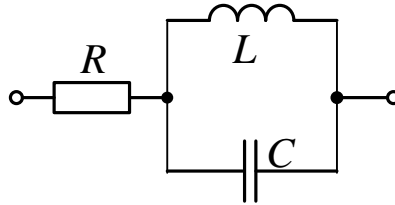


Рисунок 10

Розв'язання

$$\begin{aligned} \text{КПФ: } K(j\omega) &= \frac{U}{I} = \underline{Z}(j\omega) = R + \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L - \frac{1}{\omega C}} = R + \frac{\rho^2}{j\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \\ &= R - j \frac{\rho^2}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}. \end{aligned}$$

$$\text{АЧХ: } K(\omega) = Z(\omega) = \frac{R^2 + \frac{\rho^4}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}^2}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{\rho^2}{R \omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

Графіки АЧХ і ФЧХ зображені на рис.11.

ω	0	ω_0	∞
$K(\omega)$	R	∞	R
$\varphi(\omega)$	0	$ \pi/2 $	0

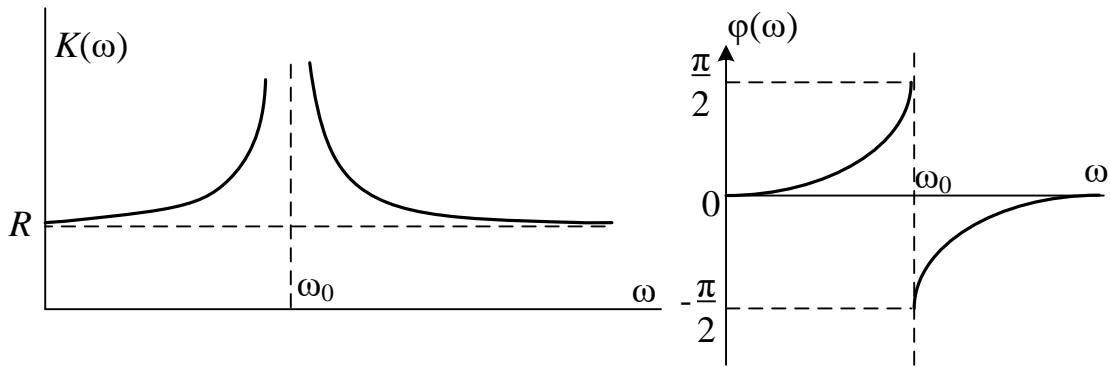


Рисунок 11

Зручно АЧХ $K(\omega)$, ФЧХ $\varphi(\omega)$, ДЧХ $P(\omega)$ і УЧХ $Q(\omega)$ будувати в логарифмічному масштабі, відкладаючи на осі абсцис десятковий логарифм частоти (але записуючи частоту), а на осі ординат (у випадках АЧХ $K(\omega)$, $P(\omega)$, $Q(\omega)$) затухання або посилення в децибелах).

Задача 10.

Параметри електричного кола (рис.12) $R = 20$ кОм, $C = 1000$ пФ. Вихідна величина – напруга на ємності, вхідна величина – напруга на затискачах 1-1.

Визначити: ширину смуги пропускання.

Побудувати:

- амплітудно-частотну характеристику (АЧХ);
- логарифмічну амплітудно-частотну характеристику (ЛАЧХ);
- логарифмічну фазочастотну характеристику (ЛФЧХ)
- дійсну і уявну частотні характеристики (ДЧХ) і (УЧХ);
- амплітудно-фазову характеристику (АФХ)
- логарифмічну амплітудно-фазову характеристику (ЛАФХ)

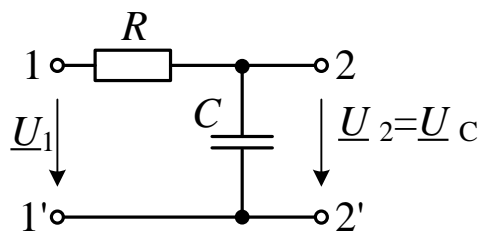


Рисунок 12

а) Побудова амплітудно-частотної характеристики і визначення смуги пропускання

Комплексна передавальна функція

$$K(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\underline{I} - j\frac{1}{\omega C}}{\underline{I} R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

де $T = RC = 20 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-5} = 20$ мкс.

Амплітудно-частотна характеристика та її значення при $f = 1$ кГц

$$|K(\omega)| = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} = \frac{1}{1 + (2\pi f T)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2 \cdot 3.14 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-5})^2}} \cong 1.$$

В табл.1 представлені значення $K(\omega)$ в функції частоти, а також згасання в децибелах. АЧХ побудована в звичайному масштабі і в логарифмічному масштабі (рис.13).

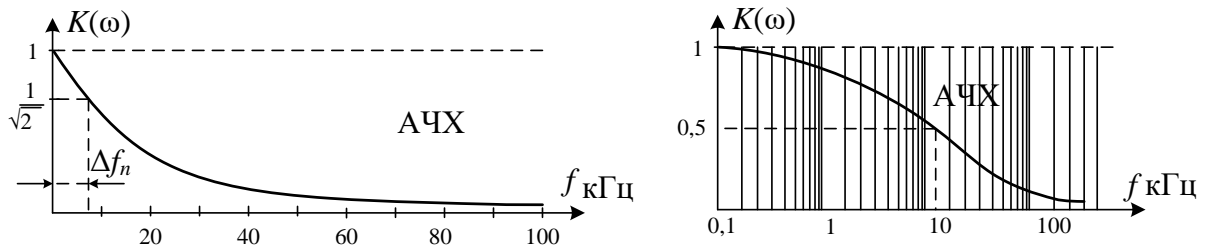


Рисунок 13

б) Побудова логарифмічної амплітудно-частотної характеристики

При цьому на осі абсцис нуль відповідає частоті 0,1 кГц, ця частота прийнята за умовну одиницю, десятковий логарифм який дорівнює нулю ($100 \text{ Гц} = 0,1 \text{ кГц} = 1$ ум. од. $\lg 1 = 0$). Тоді частота 1 кГц буде дорівнювати десяти умовним одиницям ($1 \text{ кГц} = 10$ ум. од. $\lg 10 = 1$), частота 10 кГц – ста умовним одиницям ($\lg 100 = 2$), частота 100 кГц – тисячі умовних одиниць ($\lg 1000 = 3$). При побудові ЛАЧХ (рис.14) на осі абсцис відкладена частота в логарифмічному масштабі, по осі ординат – згасання в децибелах, отримане по співвідношенню

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$L(\omega_1) \cong 0, \quad L(\omega_2) = 20 \lg \frac{1}{0,620} = 20 \lg 1,615 = 20 \cdot 0,208 = 4,16.$$

Значення $K(\omega)$ в функції частоти наведені в табл.1.

Таблиця 1

f , кГц	1	10	25	50	100
$K(\omega)$	1	0,62	0,303	0,157	0,078
$L(\omega)$	0	4,16	10,34	6,12	22,6

Межа смуги пропускання f_{Π} визначається з умови

$$K(f_{\Pi}) = \frac{1}{1 + (2\pi f_{\Pi} T)^2} = \frac{1}{2}$$

звідки $2\pi f_{\Pi} T = 1$,

$$f_{\Pi} = \frac{1}{2\pi T} = \frac{1}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 7,36 \text{ кГц.}$$

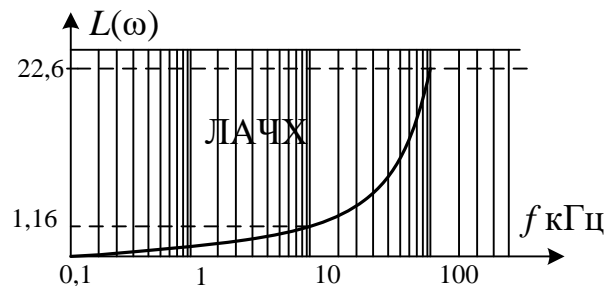


Рисунок 14

в) Побудова логарифмічної фазочастотної характеристики

Фазочастотною характеристикою (ФЧХ) називають аргумент комплексної передавальної функції $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = -\arctg \omega T.$$

При побудові ФЧХ на осі абсцис відкладають частоту або логарифм частоти; на осі ординат – значення $\varphi(\omega)$ в радіанах або в градусах. Побудована таким чином характеристика являє собою логарифмічну фазочастотну характеристику – ЛФЧХ.

Значення $\varphi(\omega)$ в функції частоти наведені в табл.2 графік ЛФЧХ представлений на рис.15.

Таблиця 2

f кГц	1	10	25	50	100
$\varphi(\omega)$	-7,2	-515	-72,4	-81	-85,5

$$\varphi(\omega_1) = -\arctg 2\pi \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-5} = -\arctg 0,126 = -7^\circ, 2.$$

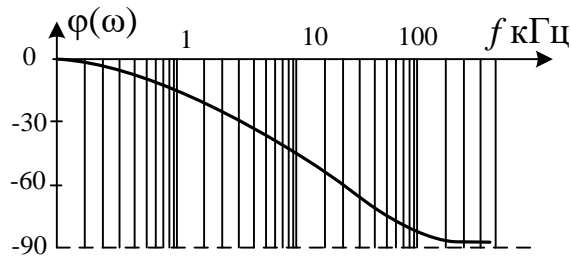


Рисунок 15

г) Побудова дійсної $P(\omega)$ та уявної $Q(\omega)$ частотних характеристик. Комплексна передавальна функція $K(j\omega)$ може бути представлена в наступній формі:

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = K(\omega)\cos\varphi(\omega) + jK(\omega)\sin\varphi(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

де $P(\omega) = K(\omega)\cos\varphi(\omega)$ – дійсна частина КПФ, дійсна частотна характеристика,

$Q(\omega) = K(\omega)\sin\varphi(\omega)$ – уявна частина КПФ, уявна частотна характеристика.

Перший доданок (дійсний) утворюється з членів, що містять $j\omega$ і $1/j\omega C$ в парному степені, другий (уявний) – в непарному. Тому $P(\omega)$ – парна функція частоти, а $Q(\omega)$ – непарна. Обидві характеристики – дійсну і уявну, подібно до амплітудно-частотної характеристики, – можна будувати в звичайному і в логарифмічному масштабі.

Для отримання $P(\omega)$ і $Q(\omega)$ перетворимо КПФ до вигляду:

$$K(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega).$$

$$P(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = -\frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Зауважимо, що знак $P(\omega)$ при зміні знаку ω не змінюється, а знак $Q(\omega)$ змінюється (парна і непарна функції частоти).

Для побудови $P(\omega)$ і $Q(\omega)$ скористаємося $K(\omega)$ (табл.1) і $\varphi(\omega)$ (табл.2). Результати розрахунку зведені в табл.3.

Таблиця 3

$f_{\text{кГц}}$	1	10	25	50	100
$P(\omega)$	0,992	0,62	0,09	0,025	0,0078
$Q(\omega)$	-0,125	-0,485	-0,286	-0,158	-0,01

За даними табл.3 побудовані дійсна й уявна частотні характеристики (рис.16):

$$P(\omega_1) = K(\omega_1)\cos\varphi(\omega_1) \cong 1 \cdot \cos(-7^\circ, 2) = 0,992 .$$

$$Q(\omega_1) = K(\omega_1)\sin\varphi(\omega_1) \cong 1 \cdot \sin(-7^\circ, 2) = -0,125 .$$

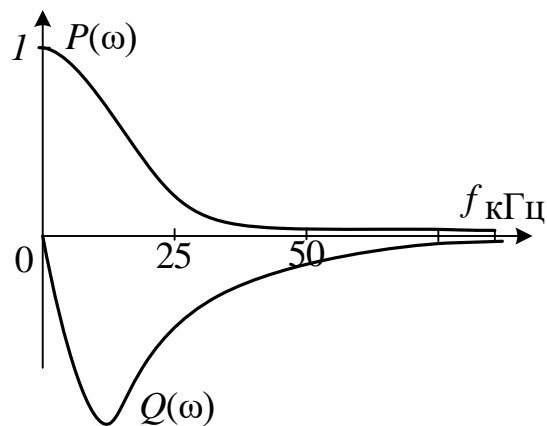


Рисунок 16

д) Побудова амплітудно-фазової характеристики (АФХ)

Амплітудно-фазова характеристика $K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ будується на площині комплексної передавальної функції у вигляді залежності, $Q(\omega) = F[P(\omega)]$. На осі абсцис відкладається дійсна характеристика $P(\omega)$, на осі ординат – уявна $Q(\omega)$.

Кожному значенню частоти відповідають певні величини $P(\omega)$ і $Q(\omega)$, а значить і певна точка на площині. Якщо точка A відповідає певній частоті ω_1 , а точка B – іншій частоті ω_2 , то відрізок (вектор), проведений з початку координат в точку A або B , буде дорівнювати $K(\omega_1)$ або $K(\omega_2)$ і буде повернутий відносно осі абсцис на кут $\varphi(\omega_1)$ або $\varphi(\omega_2)$. При зміні частот кінець вектора переміщується по деякій кривій, що є його годографом. Ця крива і є графіком амплітудно-фазової характеристики, що поєднує в собі амплітудно-частотну і фазо-частотну характеристики, але втрачає явну залежність від частоти. АФХ деяких простих кіл, побудованих в прямокутній системі

координат, має вигляд кола з центром на осі абсцис. Рівняння такого кола, записане в полярній формі, має вигляд

$$K(\omega) = 2R \cos \varphi(\omega) .$$

Скориставшись отриманими виразами $P(\omega)$ і $Q(\omega)$ можемо отримати вираз

$$K(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{\overline{1 + \omega^2 T^2}}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \cos \varphi(\omega) ,$$

порівняння якого з представленим вище виразом дозволяє встановити, що в даному випадку АФХ в прямокутній системі координат $(P(\omega), Q(\omega))$ має вигляд кола з радіусом $1/2$ (оскільки $2R = 1$) і центром в точці $[1/2, 0]$ (рис.17).

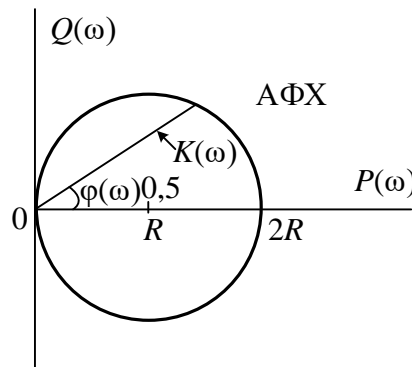


Рисунок 17

Скориставшись обчисленими раніше значеннями $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $P(\omega)$, $Q(\omega)$, наносимо відповідні точки на АФХ, побудовану в звичайному масштабі (рис.18). Зауважимо, що робочою частиною окружності є тільки половина, так як $Q(\omega) < 0$.

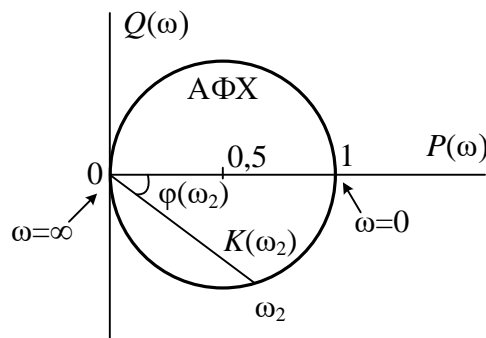


Рисунок 18

е) Побудова амплітудно-фазової характеристики в логарифмічному масштабі (ЛАФХ)

Амплітудно-фазова характеристика може бути побудована в логарифмічному масштабі, але не в прямокутній, а в полярній системі координат. При цьому L вимірюється в белах або в децибелах, а φ – в градусах або радіанах. Центр системи координат – в точці 0. Лінія відліку кута – промінь OA . Побудова виконується по точках для частот, наведених вище. Принцип побудови ЛАФХ показаний на рис.19.

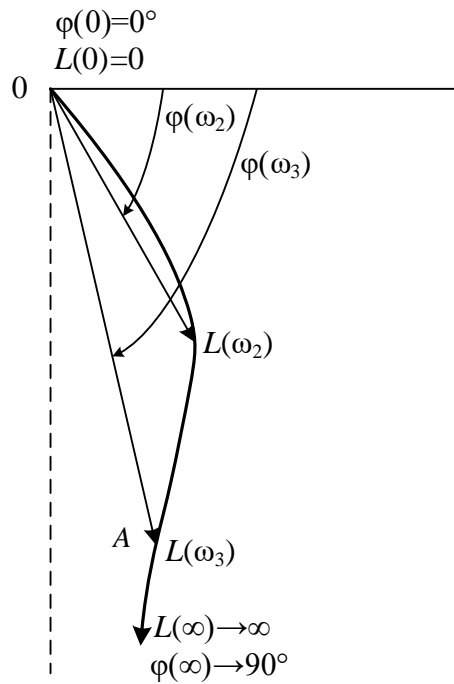


Рисунок 19

Задача 11.

Отримати аналітичні вирази КПФ, АЧХ, ФЧХ. Побудувати графіки АЧХ і ФЧХ електричного кола, наведеного на рис. 20.

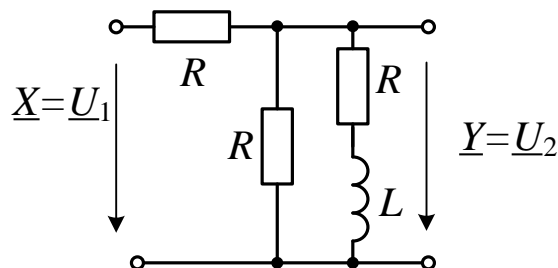


Рисунок 20

Розв'язання

$$K(j\omega) = \frac{\frac{R(R + j\omega L)}{2R + j\omega L}}{R + \frac{R(R + j\omega L)}{2R + j\omega L}} = \frac{R + j\omega L}{3R + j2\omega L};$$

АЧХ

$$K(\omega) = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{9R^2 + 4\omega^2 L^2};$$

$$K(0) = \frac{1}{3}; K(\infty) = \frac{1}{2}.$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L}{R} - \arctg \frac{2\omega L}{3R}.$$

Графіки АЧХ і ФЧХ побудовані на рис. 21 і 22.

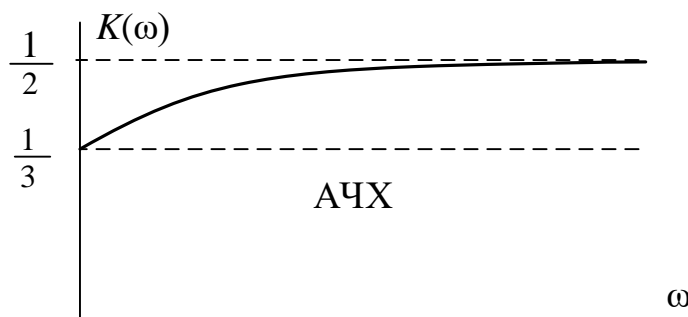


Рисунок 21

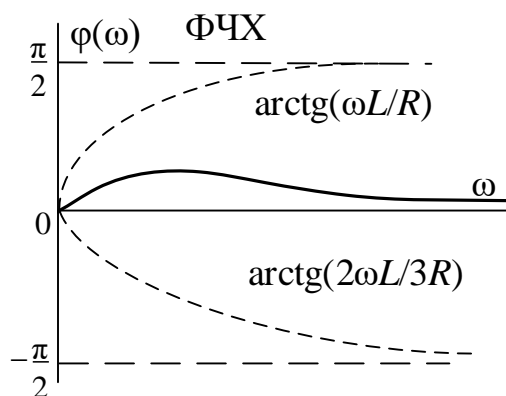


Рисунок 22

Задача 12.

Виконати розв'язання задачі 11, прийнявши $R = 5 \text{ Ом}$, $L = 100 \text{ мГн}$.

Задача 13.

Отримати аналітичні вирази КПФ, АЧХ, ФЧХ, $P(\omega)$, $Q(\omega)$, та побудувати графіки АЧХ, ФЧХ, $P(\omega)$, $Q(\omega)$, АФХ реальної диференціюючої аперіодичної ланки, якщо постійна часу $T=100 \text{ мкс}$. Знайти межу смуги пропускання, а також параметри ланки RL та ланки RC , якщо $R = 1 \text{ кОм}$.

Задача 14.

Отримати аналітичні вирази КПФ, АЧХ, ФЧХ, $P(\omega)$, $Q(\omega)$, та побудувати графіки АЧХ, ФЧХ, $P(\omega)$, $Q(\omega)$, АФХ інерційної ланки, якщо постійна часу $T=2 \text{ мс}$. Знайти межу смуги пропускання, а також параметри L та C (в колі RL та RC), якщо $R = 100 \text{ кОм}$.

Задача 15.

Отримати аналітичні вирази КПФ, АЧХ, ФЧХ, $P(\omega)$, $Q(\omega)$ послідовного контуру вважаючи вхідною величиною загальну напругу, а вихідною – напругу на елементі R . Побудувати графіки АЧХ, ФЧХ, $P(\omega)$, $Q(\omega)$, АФХ. Параметри контуру: $R = 85 \text{ кОм}$, $L=25 \text{ мГн}$, $C=1,3 \text{ пФ}$. Знайти межу смуги пропускання Δf_n , добротність контуру Q , резонансну частоту f_0 .

Задача 16.

Повторити розв'язання задачі 15, вважаючи вихідною величиною напругу на елементі C . Аналітичні вирази та графіки всіх характеристик отримати як функцію відносної частоти $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$. Знайти відносний коефіцієнт

демпфування $\xi = \frac{R}{2\rho}$.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення поняття «комплексна передавальна функція», звернувши особливу увагу на методологічну сторону трактування.
2. Чим відрізняється комплексний коефіцієнт передачі від комплексної функції?
3. Яку розмірність в електричних колах може мати комплексна передавальна функція?
4. Назвіть і розкажіть основні способи визначення комплексної передавальної функції, включно і випадок симетричного чотириполюсника, навантаженого повторним опором.
5. Назвіть і визначте всі види частотних характеристик електричного кола.
6. Як виконується побудова частотних характеристик в логарифмічному масштабі?
7. Зобразіть схеми інерційної ланки з ємністю і з індуктивністю.
8. Отримайте аналітичні вирази і побудуйте графік всіх частотних характеристик інерційної ланки.
9. За якої умови інерційна ланка буде виконувати операцію інтегрування?
10. Запишіть аналітичні вирази і побудуйте графіки частотних характеристик інтегруючої ланки.
11. Зобразіть схеми диференціюючого кола з ємністю і індуктивністю.
12. Отримайте аналітичні вирази і побудуйте графік всіх частотних характеристик диференціюючого кола.
13. За якої умови диференціююче коло буде виконувати операцію диференціювання?
14. Запишіть аналітичні вирази і побудуйте графіки частотних характеристик диференціюючої (ідеальної) ланки.
15. Отримайте аналітичні вирази і побудуйте графік всіх частотних характеристик послідовного контуру, вважаючи вихідним сигналом струм і напругу на ємності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник. – Москва : Высшая школа, 1988. – 448 с.
2. Стахів П. Г. Основи електроніки : підручник / П. Г. Стахів, В. І. Коруд В. І., О. Є. Гамола – Львів : Новий світ 2000, 2003. – 205 с.
3. Мандзій Б. А. Основи теорії сигналів : навч. посібник / Б. А. Мандзій, Р. І. Желяк; за ред. Б. А. Мандзія. – Львів : ЛДКФ «АТЛАС», 2003. – 152 с.
4. Бобало Ю. Я. Основи радіоелектроніки : навч. посібник / Ю. Я. Бобало, Р. І. Желяк, М. Д. Кіселичник та ін.; за ред. Б. А. Мандзія. – Львів : Львівська політехніка, 2002. – 455 с.
5. Мандзій Б. А. Основи аналогової мікросхемотехніки : навч. посібник / Б. А. Мандзій, Р. І. Желяк; за ред. Б. А. Мандзія. – Львів : НМК «Тезаурус», ТОО «Форвард», 1993. – 186 с.
6. Основи теорії електронних кіл : підручник / Ю. Я. Бобало, Б. А. Мандзій, П. Г. Стахів та ін.; за ред. Ю. Я. Бобала. – Львів : Львівська політехніка, 2008. – 332 с.
7. Колобков Д. С. Частотные спектры сигналов : учебное пособие / Д. С. Колобков. – Харьков : УЗПИ, 1985. – 103с.
8. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. / Л. А. Бессонов. – Москва : Энергия, 1978. – 592 с.
9. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники : у 2 т., Т. 1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – Ленинград : Энергоиздат, 1981. – 536 с.