УДК 519.6

Т. К. ПЫЛЕВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ

Пропонується методика вибору початкових точок оптимізації функції відгуку другого порядку, що підвищує економічність класичних методів оптимізації. Методика заснована на приведені відповідного поліному до канонічної форми, визначенні центру симетрії поверхні, що досліджується, та на аналізі коефіцієнтів моделі. Початкові точки оптимізації обираються в залежності від розміщення центру симетрії досліджуваної поверхні відносно області адекватності функції відгуку. Наведено приклади застосування методики.

Ключові слова: поліном другого ступеня, канонічна форма, коефіцієнти моделі, екстремум функції, область адекватності, початкові точки оптимізації.

Предлагается методика выбора начальных точек оптимизации функции отклика второго порядка, повышающая экономичность классических методов оптимизации. Методика основана на преобразовании соответствующего полинома к канонической форме, определении центра симметрии исследуемой поверхности и анализе коэффициентов модели. Начальные точки оптимизации выбираются в зависимости от расположения центра симметрии исследуемой поверхности относительно области адекватности функции отклика. Приведены примеры использования методики.

Ключевые слова: полином второй степени, каноническая форма, коэффициенты модели, экстремум функции, область адекватности, начальные точки оптимизации.

Optimizing the design parameters of the technical systems in the process of their design is generally accepted prerequisite for achievement of high technical and economic indices of production. The place has the existence of a significant amount of research in this area. This explains the development and efficient algorithms for optimal solutions. The technique of selecting the starting points feature second-order response optimization. The technique improves the efficiency of classical optimization methods. The method is based on the conversion of the corresponding polynomials to canonical form; define the centre of symmetry of the studied surface and analysis of coefficients of the model. The starting points of optimization are chosen depending on the location of the centre of symmetry of the studied surface relative to the area of the adequacy of the response function. Examples of the use of the methodology are presented.

Keywords: second degree polynomial, the canonical form, the model coefficients, extremum of the function scope of adequacy, the starting point of optimization.

Введение. Осуществление оптимизации конструктивных параметров технических систем в процессе их проектирования на сегодня является общепринятым необходимым условием достижения высоких технико-экономических показателей продукции. При этом предполагается, что реализация процедур оптимизации, которые опираются на типизацию объектов проектирования и автоматизацию процесса проектирования, должны обеспечить как высокий технический уровень изделий, так и сокращение времени их проектирования. Тем самым обеспечивается сокращение этапов жизненного цикла технической системы, предшествующих ее производству [1]. Именно с разработкой и привлечением экономичных алгоритмов получения оптимальных решений связывают факт наличия значительного количества исследований в данном направлении.

Анализ состояния проблемы. Среди большого разнообразия работ в части развития и использования методов оптимизации можно выделить следующие основные направления.

Первое связывают с существенным увеличением числа варьируемых параметров объекта проектирования. Одним из наиболее эффективных методов здесь считают метод И.М.Соболя и Р.Б.Статникова, который позволяет установить область Парето при выполнении в большинстве практических случаев от 128 до 256 вариантных вычислений [2]. В качестве примера реализации метода может выступать задача оптимизации параметров топливной системы дизеля [3], в которой при варьировании 13 конструктивными параметрами найдено решение на основе 160 вариантов моделирования.

Следует отметить, что данное направление предполагает наличие научных представлений о моделируемых процессах и соответствующих им достоверных математических, чаще всего алгоритмических, моделей. Поэтому использование методов ограничивает время разработки математических моделей, а также время получения граничных условий для их реализации. Практически всегда при этом возникает необходимость в проведении объемных натурных экспериментов.

В связи с вышеуказанным на сегодня также рассматривается и развивается направление, связанное с использованием классических методов оптимизации [4-6]. Известно, что здесь ограничивающим фактором выступает низкая их экономичность. По этой причине осуществляют выбор минимального количества варьируемых параметров, устанавливают интервалы их изменения как область адекватности искомой функции отклика, после чего осуществляют планирование эксперимента с получением оптимизируемой функции в виде полинома второй степени [7]

$$f = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} a_{ij} x_i x_j \, . \qquad (1)$$

Известно, что количество вариантных вычислений до получения искомого результата классическими безградиентными либо градиентными методами может существенно зависеть от выбора начальной точки оптимизации. Поэтому актуальными следует считать также работы этого направления.

Цель и задачи исследования. В работе преследуется цель повышения экономичности классических методов оптимизации конструкции за счет рационального выбора начальной точки оптимизации. Для достижения указанной цели поставлена задача разработки экономичного алгоритма, реализующего предварительный анализ расположения точки минимума либо максимума исследуемой функции отклика относительно области ее адекватности.

Последующей задачей является рассмотрение примеров использования предложенного подхода.

Основная часть. Практическое применение метода планирования эксперимента накладывает существенные ограничения на количество варьируемых параметров функции отклика (1). С другой стороны, сама реализация метода предполагает выделение основных влияющих факторов. Рассмотрим случай, когда среди исходно отобранных *n* переменных функции (1) выделяют два основных фактора. Тогда исходная функция отклика приобретает практически используемый вид

$$f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 . \quad (2)$$

Известно, что уравнение второго порядка (2) может быть приведено к канонической форме. При этом на основе [8] может быть реализован следующий алгоритм анализа функции отклика.

На первом этапе в соответствии с рис. 1 осуществим переход от исходной системы координат Ox_1x_2 к системе $Px_1'x_2'$ так, что из выражения (2) исчезают линейные члены. При этом начало координат переносим в точку P, являющуюся центром симметрии поверхности *f*.

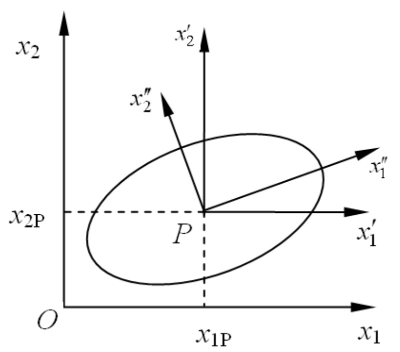


Рис. 1 – Преобразование координат функции отклика

Связь между исходной и новой системами координат имеет вид:

$$x_1' = x_1 - x_{1P}; \quad (3)$$

$$x_2' = x_2 - x_{2P}; \quad (4)$$

$$\partial f / \partial x_1 = 0; \quad (5)$$

$$\partial f / \partial x_2 = 0. \quad (6)$$

На основе (2)-(6) находим координаты точки P в исходной системе координат Ox_1x_2,

$$x_{1P} = \frac{a_2a_{12} - 2a_1a_{22}}{4a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \quad (7)$$

$$x_{2P} = \frac{a_1a_{12} - 2a_2a_{11}}{4a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \quad (8)$$

С учетом (7),(8) находим значение функции отклика в точке P,

$$f_P = a_0 + a_1x_{1P} + a_2x_{2P} + a_{11}x_{1P}^2 + a_{22}x_{2P}^2 + a_{12}x_{1P}x_{2P} . \quad (9)$$

Тогда в системе координат $Px_1'x_2'$ функция отклика приобретает вид

$$f - f_P = a_{11}(x_1')^2 + a_{22}(x_2')^2 + a_{12}x_1'x_2' . \quad (10)$$

На втором этапе преобразований в соответствии с рис. 1 осуществим переход от системы координат $Px_1'x_2'$ к системе $Px_1''x_2''$ так, что из выражения (10) исчезает взаимодействие факторов. Для этого осуществляют преобразование к главным осям, а поиск значения коэффициентов λ уравнения

$$f - f_P = \lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 \quad (11)$$

осуществляют как корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 1/2a_{12} \\ 1/2a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 , \quad (12)$$

либо в классическом виде

$$\lambda^2 - (a_{11} - a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - 1/4a_{12}^2 = 0 . \quad (13)$$

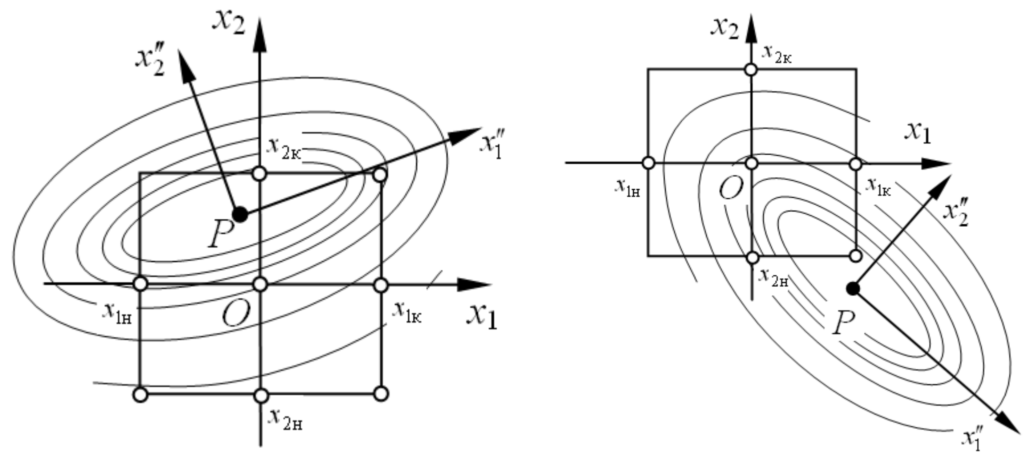
Важно, что каноническая форма функции отклика (11) позволяет установить вид изолиний равного уровня *f*. В большинстве случаев задач конструктивной оптимизации этим видом является эллипс. Причем из (11) видно, что если оба корня характеристического уравнения имеют положительное значение, то координата точки *P* является минимумом *f*. Если же оба корня отрицательны, то найденная координата является максимумом. Последнее обстоятельство обеспечивает высокую информативность осуществления последующей процедуры поиска оптимального решения. Покажем это.

Примем, что область адекватности функции отклика ограничивается начальными x_{1i}, x_{2i} и конечными x_{1e}, x_{2e} значениями параметров варьирования. При этом точка *P* может иметь различное расположение относительно указанной области, а установленный экстремум *f* являться оптимальным решением либо нет.

Положим, что на рис. 2а представлен случай, когда точка *P* является искомым оптимумом функции отклика и лежит в области адекватности значений ее параметров. Это означает, что решение оптимизационной задачи найдено и соответствует выражениям (7)-(9). Дальнейшее применение методов поиска оптимального решения теряет смысл.

Если же согласно рис. 2а точка P, лежащая в области адекватности значений параметров функции отклика, не является искомым оптимумом, то поиск оптимального решения следует начинать с точек, наиболее удаленных от P. Такими точками здесь выступают ($x_{1í}$; $x_{2í}$), ($x_{1ę}$; $x_{2í}$), ($x_{1ę} x_{2ę}$).

Пусть на рис. 2б представлен случай, когда точка P является искомым оптимумом функции отклика, но лежит за пределами области адекватности значений ее параметров. В данном случае поиск оптимального решения следует начинать с точки, наиболее близкой к P. Согласно рассматриваемому рисунку ею является ($x_{1ę} x_{2í}$).



а б

Рис. 2 – Варианты размещения экстремума функции отклика относительно области ее адекватности

Если же согласно рис. 2б точка P не является искомым оптимумом функции f и лежит за пределами области адекватности ее параметров, то поиск оптимального решения следует начинать с точек, наиболее удаленных от P.

Проиллюстрируем сказанное примерами решения конкретных задач.

Пример 1. Осуществим поиск минимального удельного расхода топлива двигателя 4ЧН12/14 в зависимости от максимального давления впрыскивания топлива (x_1) и диаметров распыливающих отверстий форсунки (x_2). Диапазон изменения варьируемых параметров соответственно составляет 65…90 МПа и 0,2…0,36 мм. Рассматривается двухклапанная головка цилиндров и четырехдырчатый распылитель форсунки. Мощность двигателя 100 кВт при частоте вращения коленчатого вала 1800 мин$^{-1}$. Коэффициенты модели (2) представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Коэффициенты эмпирической модели рабочего процесса дизеля 4ЧН12/14

a_0	a_1	a_2	a_{11}	a_{22}	a_{12}
3,2126	-1,643	-716	0,007	1040	2,34

Используя алгоритм (3)-(9),(13) устанавливаем, что искомые коэффициенты λ модели вида (11) положительны, они равны 0,0052 и 1040. Это означает, что точка P представляет собой минимум функции f, т.е. является оптимальным решением рассматриваемой задачи. Здесь в качестве решения согласно (3)-(9) имеем f_p=221 г/(кВт·ч) при 81 МПа и 0,25 мм. Процесс поиска решения завершен.

Пример 2. Рассмотрим задачу определения максимальной скорости движения транспортера-тягача МТ-Л на плаву в зависимости от частоты вращения ведущего колеса (x_1) и длины щита, закрывающего верхнюю часть гусеничного обвода (x_2). В эксперименте диапазон изменения варьируемых параметров соответственно изменялся в пределах 5…32 с$^{-1}$ и 1…4,8 м. Полученные коэффициенты уравнения регрессии вида (2) приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Коэффициенты эмпирической модели скорости движения транспортера-тягача МТ-Л на плаву

a_0	a_1	a_2	a_{11}	a_{22}	a_{12}
2,4896	3,0517	0,6783	0,8739	0,2106	0,5592

В данном случае корни λ характеристического уравнения (13) принимают значения 0,98 и 0,11. Это означает, что экстремум функции f является ее минимумом. Кроме этого он находится за пределами области адекватности модели в точке P со значениями кодированных факторов (-2,14;1,23). По этой причине решение оптимизационной задачи может осуществляться со следующих максимально удаленных от P начальных точек, находящихся в области адекватности модели – (-1;-1), (1;-1), (1;1).

Здесь решением оптимизационной задачи является $f_{\text{опт}}$ = 7,9 м/с, соответствующее точке (1;1) для максимальных значений варьируемых параметров.

Следует обратить внимание на то, что точка оптимума оказалась наиболее близкой к точке симметрии *P*. Это поясняется наклоном координат системы $Px_1''x_2''$ относительно системы Ox_1x_2, а также конкретными значениями коэффициентов λ. Здесь уточнение начальной точки оптимума может быть выполнено с учетом определения угла наклона конечной системы координат относительно исходной.

Выводы. В работе предложена методика, позволяющая повысить экономичность классических методов поиска оптимальных решений за счет рационального выбора начальной точки оптимизации. Методика основана на аналитическом анализе расположения точки экстремума исследуемой функции второго порядка относительно области ее адекватности.

Дальнейшее направление работ связано с уточнением начальной точки оптимизации на основе анализа поверхности функции отклика, а также с увеличением количества рассматриваемых варьируемых параметров.

Список литературы

1. *Энгельке У.Д.* Как интегрировать САПР и АСТПП: Управление и технология / *У.Д. Энгельке* – М.: Машиностроение, 1990. – 320 с.
2. *Соболь И.М.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / *И.М. Соболь, Р.Б. Статников* – М.: Наука. 1985. – 110 с.
3. *Врублевский А.Н.* Многокритериальный синтез топливной системы с электронным управлением впрыскивания / *А.Н. Врублевский, А.Л. Григорьев, А.В. Денисов А.В* // Двигатели внутреннего сгорания. – 2008. - №1. – С.91-98.
4. *Пылева Т.К.* Многокритериальная оптимизация технико-экономических показателей автотранспортного средства / *Т. К. Пылева* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2006. – № 26. – С. 166–169.
5. *Пильова Т.К.* Вибір двигуна автотранспортного засобу за параметрами його головного робочого поля / *Т. К. Пильова* // Механіка та машинобудування. – 2011. – № 2. – С. 136-142.
6. *Рейзлин В.И.* Численные методы оптимизации / *В.И. Рейзлин* // – Томск: Изд-во ТПУ. 2011. – 105 с.
7. Барабащук *В.И.* Планирование эксперимента в технике / *В.И.Барабащук, Б.П. Креденцер, В.И. Мирошниченко* – К. : Техніка. – 1984. – 200 с.
8. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / *И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев* – М.: Наука. 1986. – 544 с.

References (transliterated)

1. Engel'ke U.D. *Kak integrirovat' SAPR i ASTPP: Upravlenie i tekhnologiya* / U.D. Engel'ke – Moscow: Mashinostroenie, 1990. – 320 p.
2. Sobol' I.M. *Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami* / I.M. Sobol', R.B. Statnikov – Moscow: Nauka. 1985. – 110 p.
3. Vrublevskiy A.N. *Mnogokriterial'nyy sintez toplivnoy sis-temy s elektronnym upravleniem vpryskivaniya* / A.N. Vrublev-skiy, A.L. Grigor'ev, A.V. Denisov A.V // Dvigateli vnutrennego sgoraniya. – 2008. – No 1. – pp.91-98.
4. Pyleva T.K. *Mnogokriterial'naya optimizatsiya tekhniko-ekonomicheskikh pokazateley avtotransportnogo sredstva* / T. K. Pyleva // Visnik NTU «KhPI». – 2006. – No 26. – pp. 166–169.
5. Pyl'ova T.K. *Vybir dvyhuna avtotransportnoho zasobu za para-metramy yoho holovnoho robochoho polya* / T. K. Pyl'ova // Mekhanika ta mashynobuduvannya. – 2011. – No 2. – pp. 136-142.
6. Reyzlin V.I. *Chislennye metody optimizatsii* / V.I. Reyzlin // – Tomsk: Izd-vo TPU. 2011. – 105 p.
7. Barabashchuk V.I. *Planirovanie eksperimenta v tekhnike* / V.I.Barabashchuk, B.P. Kredentser, V.I. Miroshnichenko – Kiev: Tekhnika. – 1984. – 200 p.
8. Bronshteyn I.N. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov* / I.N. Bronshteyn, K.A. Semendyaev – Moscow: Nau-ka. 1986. – 544 p.

Поступила (received) 11.04.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Використання канонічної форми функції відгуку при оптимізації конструкцій / Т. К. Пильова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Транспортне машинобудування. – Х. : НТУ «ХПІ», 2017. – № 14(1236). – С. 180–183. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2079-0023.

Использование канонической формы функции отклика при оптимизации конструкций / Т. К. Пылева // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Транспортне машинобудування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 14 (1236). – С. 180–183. – Библиогр.: 8 назв. – ISSN 2079-0023.

Using the statistical analysis methods in the processing of survey data of population / L. V. Ivanov, V. S. Petrov, V. S. Tishkov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Transport machine building. – Kharkov : NTU "KhPI", 2017. – No. 14 (1236). – P. 180–183. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2079-0023.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Пильова Тетяна Кузьмівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри ІТС КГМ ім.О.О.Морозова; тел.: (057) 707-62-99; e-mail: t_pylyova@meta.ua.

Пылева Татьяна Кузьминична – кандидат технических, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», доцент кафедры ИТС КГМ им. А.А.Морозова; тел.: (057) 707-62-99; e-mail: t_pylyova@meta.ua.

Pylyova Tetjana Kuzmivna – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of ITS KGM named of O.O.Morozov; tel.: (057) 707-62-99; e-mail: t_pylyova@meta.ua.