

*Н.В. МЕЗЕНЦЕВ*, НТУ "ХПИ"

## **НОВЫЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА АКОР ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВХОЖДЕНИЯ УПРАВЛЕНИЙ**

Пропонуються нові модифікації методу аналітичного конструювання регуляторів за критерієм узагальненої роботи для випадку нелінійного входження трьох управлінь у систему диференціальних рівнянь, що описують об'єкт.

New modifications of a method analytical construction of regulators by criterion of generalized work for a case of nonlinear occurrence of three controls in system of differential equations describing object are offered.

**Постановка проблеми.** Одним из методов, позволяющих синтезировать регуляторы для объектов, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка с линейно входящими управлениями, является метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы (АКОР). Основное достоинство метода – получение структуры регулятора с учетом минимизации функционала, который включает в себя несколько составляющих, позволяющих учитывать различные особенности протекания процессов в различных режимах функционирования сложных технических объектов [1, 2]. Однако непосредственное применение данного метода для случая, когда объект описывается дифференциальными уравнениями, в правые части которых входят произведения трех управлений невозможно. Поэтому является актуальной задача разработки методов синтеза регуляторов по критерию обобщенной работы и для данного типа объектов.

**Анализ литературы.** В настоящее время существует ряд публикаций, в которых приводится методика синтеза регуляторов для нескольких частных видов математических моделей с нелинейно входящими управлениями [3 – 8]. Практически все эти модели связаны с тяговым асинхронным электроприводом, управление которым осуществляется за счет изменения амплитуды и частоты питающего напряжения, закон изменения которого в общем случае может быть записан в виде:

$$U = u_1 \sin(u_2 t + \varphi), \quad (1)$$

где  $u_1$  – амплитуда,  $u_2$  – частота питающего напряжения,  $\varphi$  – константа, задающая фазу синусоидального напряжения.

Если питание тягового асинхронного двигателя (ТАД) осуществляется через преобразователь частоты (ПЧ) с автономным инвертором напряжения (АИН) с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), то в общем случае напряжение на ТАД, усредненное за период несущей частоты (частоты

модуляции) будет иметь вид [5]:  $U = U_{\text{в}} \mu \sin(\omega_s t + \varphi)$ , где  $U_{\text{в}}$  – напряжение, поступающее от выпрямителя;  $\mu$  – коэффициент глубины модуляции;  $\omega_s$  – круговая частота модуляции.

Таким образом, меняя значения параметров  $U_{\text{в}}$ ,  $\mu$  и  $\omega_s$ , можно осуществлять независимое управление ТАД.

**Целью статьи** является расширение области применения метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы для случая нелинейного вхождения трех управлений в систему дифференциальных уравнений, описывающих объект.

**Основной раздел.** Одна из общих формулировок основной теоремы АКОР следующая [1, 2]:

Теорема 1. Пусть объект описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \dots, X_n, t) = \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(X_1, \dots, X_n, t) u_j, \quad (2)$$

тогда оптимальным в смысле минимума функционала

$$I = V_3[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1, \dots, X_n, t) dt + \\ + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{u_j}{k_j} \right)^q dt + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left( k_j \sum_{i=1}^n \varphi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \right)^p dt,$$

являются управления

$$u_j = -k_j^p \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \right)^{p-1},$$

где  $V$  – решение линейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} f_i = -Q, \quad (3)$$

при граничном условии

$$V[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2] = V_3[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2]. \quad (4)$$

Здесь  $X_i (i = \overline{1, n})$  – фазовые координаты объекта управления;  $f_i, \varphi_{ij} (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$  – непрерывные заданные функции;  $V_3[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2]$  – положительно определенная непрерывная функция, задающая точность приведения объекта управления в момент времени  $t_2$  в

заданную точку фазового пространства;  $Q(X_1, \dots, X_n, t)$  – положительно определенная непрерывная функция, задающая требования к качеству переходных процессов объекта по фазовым координатам в интервале времени управления  $[t_1, t_2]$ ;  $p, q$  – положительные числа, удовлетворяющие условиям:  $1/p + 1/q = 1$  и  $X^p, X^q$  – четные функции  $X$ ;  $k_j (j = \overline{1, m})$  – заданные постоянные коэффициенты;  $u_j (j = \overline{1, m})$  – управления.

Из вида уравнений (2) теоремы 1 следует, что метод АКОР можно использовать для объектов, описываемых с помощью систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые управления  $u_j$  входят линейно. Для расширения области применения метода АКОР предлагается новая модификация метода АКОР для случая  $p = q = 2$  и нелинейно входящих трех управлениях, когда используются не сами управления, а некоторые функции от них. Эта модификация основывается на следующей теореме.

Теорема 2. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \dots, X_n, t) = 3 \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(X_1, \dots, X_n, t) \psi_{1ij}(u_{1ij}) \psi_{2ij}(u_{2ij}) \psi_{3ij}(u_{3ij}), \quad (5)$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} \right) dt, \quad (6)$$

являются управления

$$u_{1ij} = -k_{1ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} / u_{1ij}; \quad (7)$$

$$u_{2ij} = -k_{2ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} / u_{2ij}; \quad (8)$$

$$u_{3ij} = -k_{3ij}^2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} / u_{3ij}, \quad (9)$$

где  $V$  – решение уравнения (3) при граничном условии (4).

Доказательство. Полная производная функции  $V$  в силу уравнений объекта (5) и уравнения (3) равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \left( 3 \sum_{j=1}^m \varphi_{ij} \psi_{1ij} \psi_{2ij} \psi_{3ij} - f_i \right) = \quad (10)$$

$$= -Q + 3 \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \sum_{j=1}^m \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij}.$$

Интегрируя выражение (10) в интервале времени  $[t_1, t_2]$ , получим

$$\begin{aligned} V[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2] - V[X_1(t_1), \dots, X_n(t_1), t_1] = & - \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \\ & + 3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Функционал (6) с учетом соотношения (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I = V[X_1(t_1), \dots, X_n(t_1), t_1] + 3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} dt + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку имеем

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} / u_{1ij} \right]^2 = \right. \\ = & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} + \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} \right] = 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij}; \\ & \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} / u_{2ij} \right]^2 = \right. \\ = & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} \right] = 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij}; \\ & \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{3ij}}{k_{3ij}} + k_{3ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} / u_{3ij} \right]^2 = \right. \\ = & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} + \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} \right] = 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{u_{3ij}^2}{k_{3ij}^2} + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij}, \end{aligned}$$

то функционал (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
I = & V[X_1(t_1), \dots, X_n(t_1), t_1] + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \frac{\Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij}}{u_{1ij}} \right]^2 dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} / u_{2ij} \right]^2 dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_{3ij}}{k_{3ij}} + k_{3ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} \Phi_{ij} \Psi_{1ij} \Psi_{2ij} \Psi_{3ij} / u_{3ij} \right]^2 dt .
\end{aligned} \tag{13}$$

Если управления  $u_{lij}$ ,  $l = \overline{1, 3}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  определяются соотношениями (7) – (9), то подинтегральные выражения в функционале (13) обращаются в нуль и он принимает минимальное значение. Следовательно, теорема доказана.

Из теоремы 2 могут быть получены частные случаи, например, когда в правые части системы дифференциальных уравнений, описывающей объект, входят произведения трех управлений, то получим следующую теорему.

Теорема 3. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \dots, X_n, t) = 3 \sum_{j=1}^m \Phi_{ij}(X_1, \dots, X_n, t) u_{1j} u_{2j} u_{3j}, \tag{14}$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$\begin{aligned}
I = & V_3[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q(X_1, \dots, X_n, t) dt + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{u_{lj}}{k_{lj}} \right)^2 dt + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left( k_{1j} \sum_{i=1}^n \Phi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} u_{2j} u_{3j} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left( k_{2j} \sum_{i=1}^n \Phi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} u_{1j} u_{3j} \right)^2 dt + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_2} \left( k_{3j} \sum_{i=1}^n \Phi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} u_{1j} u_{2j} \right)^2 dt,
\end{aligned}$$

являются управления

$$\begin{aligned}
u_{1j\text{опт}} = & -k_{1j}^2 \left( \sum_{i=1}^n \Phi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} u_{2j} u_{3j} \right), ; u_{2j\text{опт}} = -k_{2j}^2 \left( \sum_{i=1}^n \Phi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} u_{1j} u_{3j} \right), ; \\
u_{3j\text{опт}} = & -k_{3j}^2 \left( \sum_{i=1}^n \Phi_{ij} \frac{\partial V}{\partial X_i} u_{1j} u_{2j} \right), \quad j = \overline{1, m}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Частным случаем теоремы 2 (при  $\psi_{1j} \equiv u_1$ ,  $\psi_{2j} \equiv \sin(u_2 t + \varphi_0)$ ,  $\psi_{3j} \equiv 1$ )

так же является теорема [3], где управления имеют вид (1):

Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} + f_i(X_1, \dots, X_n, t) = \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(X_1, \dots, X_n, t) u_j \sin(u_2 t + \varphi_0),$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[X_1(t_2), \dots, X_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{u_1^2}{k_1^2} + \frac{u_2^2}{k_2^2} \right) dt,$$

являются управления

$$u_1 = -k_1^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} \sin(u_2 t + \varphi_0); u_2 = -k_2^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial X_i} \varphi_{ij} u_1 \sin(u_2 t + \varphi_0) / u_2,$$

где  $V$  – решение уравнения (3) при граничном условии (4).

**Выводы.** Таким образом, доказательство теорем 2 и 3 расширило область возможного применения метода АКОР на объекты, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида (5) и (14), т.е. на объекты, в которых управления входят в виде произведений трех управлений или в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного управления. В дальнейшем предполагается обобщение полученных результатов и разработка численных методов для синтеза конкретных систем управления.

**Список литературы:** 1. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с. 2. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. Красовского А.А. – М.: Наука, 1987. – 712 с. 3. Носков В.И., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Леонов С.Ю. Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов. – Харьков: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. 4. Эволюционные методы компьютерного моделирования / Верлань А.Ф., Дмитриенко В.Д., Корсунов Н.И., Шорох В.А. – К.: Наук. думка, 1992. – 256 с. 5. Тиристорные преобразователи частоты в электроприводе / Бернштейн А.Я., Гусяцкий Ю.М., Кудрявцев А.В., Сарбатов Р.С. / Под ред. Сарбатова Р.С. – М.: Энергия, 1980. – 328 с. 6. Даниленко А.Ф., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И. Математические модели оптимальных систем управления тяговым асинхронным приводом тепловозов // Электронное моделирование. – 1991. – Т. 13. – № 2. – С. 40 – 44. 7. Дмитриенко В.Д., Носков В.И., Мезенцев Н.В. Решение задачи оптимизации критерия обобщенной работы при нелинейно входящих управлениях. Збірник наукових праць "Системи обробки інформації". – Харків: ХВУ, 2004. – Вип. 12. – С. 37 – 45. 8. Дмитриенко В.Д., Носков В.И., Мезенцев Н.В. Оптимизация функционала обобщенной работы при нелинейно входящих управлениях. Праці Луганського відділення Міжнародної Академії Автоматизації. – Луганськ: Луганське відділення Міжнародної Академії Автоматизації. – 2005. – № 1. – С. 17 – 22.

Поступила в редакцию 12.10.2007