УДК 621.396

В.Б.УСПЕНСКИЙ, канд.техн.наук; ***И.А.БАГМУТ,*** НТУ «ХПИ»

УПРОЩЕНИЕ МОДЕЛИ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Досліджувати спостережуваність інструментальних похибок чутливих елементів (ЧЕ) безплатформної інерціальної навігаційної системи (БІНС) без спрощення вихідної моделі помилок інерціальної навігації практично неможливо. У той же час є припущення, що при певних маневрах літального апарата деякими похибками ЧЕ можна буде зневажити, й отже одержати більш прості моделі помилок БІНС. Тому становить практичний інтерес одержати спрощені моделі помилок БІНС, придатні для наступного аналізу спостережуваності інструментальних похибок ЧЕ.

To research observability of tool errors of sensitive elements strapdown inertial navigating system without simplification of initial model of errors of strapdown inertial navigating system it is practically impossible. At the same time there is an assumption, that at the certain maneuvers of the air flying device, corresponding errors of sensitive elements can be neglected and therefore will be possible to receive much more simple models of errors of strapdown inertial navigating system. Therefore represents practical interest to receive the simplified models of errors of strapdown inertial navigating system suitable for the subsequent analysis tool errors of sensitive elements observability.

Постановка проблемы. При исследовании наблюдаемости инструментальных погрешностей (ИП) инерциальных датчиков (ИД) бесплатформеной инерциальной навигационной системы (БИНС) с использованием критерия полной наблюдаемости системы [1] необходимо, в частности, провести аналитические преобразования над матрицей системы уравнений, описывающей модель ошибок инерциальной навигации (ИН). Следует отметить, что на ошибки определения навигационных параметров в БИНС влияет взаимодействие ряда факторов, среди которых можно выделить ошибки выставки, инструментальные погрешности ИД, а также характер движения, совершаемого летательным аппаратом (ЛА). Данное взаимодействие в общем случае носит сложный характер, поэтому система уравнений, описывающих модель ошибок автономной БИНС, является достаточно сложной, вследствие чего использовать указанный критерий практически невозможно.

В работе [2] был сделан вывод о том, что существует зависимость между влиянием определенных ИП и типом маневра, совершаемого ЛА, на ошибки инерциальной навигации. Следовательно можно предположить, что в зависимости от типа движения ЛА некоторые инструментальные погрешности будут оказывать достаточно слабое влияние на точность БИНС, и, следовательно, ими можно будет пренебречь. В этих условиях исходная модель ошибок может стать существенно проще, вследствие чего появится возможность исследовать наблюдаемость инструментальных погрешностей ИД.

Анализ последних исследований и публикаций. Аналогичная проблема применительно к морским подвижным объектам рассмотрена, в частности, в [3]. Для летательных аппаратов, такая проблема является актуальной.

Цель и постановка задачи. Целью данной работы является получение упрощенных моделей ошибок инерциальной навигации при различных видах движения ЛА, необходимых для исследования наблюдаемости инструментальных погрешностей ИБ системы по текущим измерениям ошибок счисления скорости и координат, в рамках интегрированных навигационных систем.

Изложение материала. В данной работе используются следующие системы координат (СК):

– Географическая декартова СК с осями N,H,E, в дальнейшем обозначаемая символом $\{X_N\}$.
– Связанная с ВЛА система координат $\{X_C\}$ с началом в его центре масс и осями x, y и z, совпадающими с соответствующими осями чувствительности акселерометров (АК).
– Система координат, связанная с осями чувствительности гироскопов (ГС) $x_г$, $y_г$ и $z_г$. Начало этой системы отсчета совпадает с началом отсчета СК $\{X_C\}$. Оси данной СК могут совпадать с одноименными осями СК $\{X_C\}$, однако, как правило, имеет место незначительное рассогласование данных осей. Данное рассогласование задается шестью углами φ_{ij}, $i \in \{X,Y,Z\}$, $j \in \{X,Y,Z\}$, $i \neq j$, где i указывает на оси, между которыми есть рассогласование, j обозначает ось поворота, соответствующего данному углу рассогласования.

Модель ошибок ИН, записанная в потребительских параметрах для сферической модели Земли, задается системой уравнений [4, 5]:

$$\delta\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R^2}\delta h + \frac{\delta v_N}{R};\ \delta\dot{h} = \delta v_H;\ \delta\dot{\lambda} = -\frac{v_E \cdot \sin\varphi}{R \cdot \cos^2\varphi}\delta\varphi - \frac{v_E}{R^2\cos\varphi}\delta h + \frac{\delta v_E}{R\cos\varphi};\quad (1\text{-}3)$$

$$\delta\dot{v}_N = \delta a_N + \omega_E \cdot \delta v_H - (\Omega_H + \omega_H)\cdot \delta v_E + v_H \cdot \delta\omega_E - v_E \cdot (\delta\Omega_H + \delta\omega_H);\quad (4)$$

$$\delta\dot{v}_H = \delta a_H + \delta g_H + (\Omega_N + \omega_N)\cdot \delta v_E - \omega_E \cdot \delta v_N + v_E(\delta\Omega_N + \delta\omega_N) - v_N \cdot \delta\omega_E;\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{v}_E = \delta a_E + (\Omega_H + \omega_H)\cdot \delta v_N - (\Omega_N + \omega_N)\cdot \delta v_H + \\ + v_N \cdot (\delta\Omega_H + \delta\omega_H) - v_H \cdot (\delta\Omega_N + \delta\omega_N);\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{\psi} = -tg\theta(\omega_E\cos\psi - \omega_N\sin\psi)\cdot\delta\psi + \frac{1}{\cos^2\theta}[\sin\theta(\omega_Z\sin\gamma - \omega_Y\cos\gamma) - \\ -(\omega_E\sin\psi + \omega_N\cos\psi)]\cdot\delta\theta + \frac{1}{\cos\theta}(\omega_Z\cos\gamma + \omega_Y\sin\gamma)\cdot\delta\gamma - \\ -\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\delta\omega_Y + \frac{\sin\gamma}{\cos\theta}\delta\omega_Z - tg\theta\cos\psi\cdot\delta\omega_N - tg\theta\sin\psi\cdot\delta\omega_E + \delta\omega_H;\end{aligned}\quad (7)$$

$$\delta\dot{\theta} = (\omega_N \cos\psi + \omega_E \sin\psi)\cdot\delta\psi + (\omega_Y \cos\gamma - \omega_Z \sin\gamma)\cdot\delta\gamma + \\ + \sin\gamma\cdot\delta\omega_Y + \cos\gamma\cdot\delta\omega_Z + \sin\psi\cdot\delta\omega_N - \cos\psi\cdot\delta\omega_E; \tag{8}$$

$$\delta\dot{\gamma} = -\frac{1}{\cos\theta}(\omega_E \cos\psi - \omega_N \sin\psi)\cdot\delta\psi + \frac{1}{\cos^2\theta}[\omega_Z \sin\gamma - \omega_Y \cos\gamma - \\ - \sin\theta(\omega_E \sin\psi + \omega_N \cos\psi)]\cdot\delta\theta + tg\theta(\omega_Z \cos\gamma + \omega_Y \sin\gamma)\cdot\delta\gamma + \\ + \delta\omega_X - tg\theta\cos\gamma\cdot\delta\omega_Y + tg\theta\sin\gamma\cdot\delta\omega_Z - \frac{\cos\psi}{\cos\theta}\delta\omega_N - \frac{\sin\psi}{\cos\theta}\delta\omega_E, \tag{9}$$

где φ, h, λ – географические широта, долгота и высота; $\delta\varphi$, δh, $\delta\lambda$ – ошибки определения соответствующих координат; $R = R_0 + h$, R_0 – радиус земного сфероида; v_N, v_H, v_E, $\delta v_N, \delta v_H, \delta v_E$ – северная, высотная и восточная составляющие относительной скорости ЛА, а также ошибки их определения; $\Omega_N = \Omega\cdot\cos\varphi$, $\Omega_H = \Omega\cdot\sin\varphi$ – северная и высотная проекции вектора угловой скорости вращения Земли $\overline{\Omega}$, $\Omega = 7292115\cdot10^{-11}$ рад/с; $\omega_N = \Omega_N + \frac{v_E}{R}$, $\omega_H = \Omega_H + \frac{v_E}{R}\cdot tg\varphi$, $\omega_E = \frac{v_N}{R}$ – проекции вектора абсолютной угловой скорости сопровождающего трехгранника на оси географической СК, $\delta\omega_N, \delta\omega_H, \delta\omega_E$ – ошибки вычисления этих проекций; $\delta g_H \approx \frac{2g_0}{R}\delta h$ – ошибка вычисления вертикальной проекции вектора силы тяжести в СК $\{X_N\}$, $g_0 = 9{,}78049$ м/с^2 – ускорение силы тяжести на экваторе земного стероида; δa_N, δa_H, δa_E – ошибки вычисления проекций вектора кажущегося ускорения $\delta\overline{a}_{\{X_N\}}$ на географические оси:

$$\delta\overline{a}_{\{X_N\}} = A^T\delta\overline{a}_{\{X_C\}} + (A_\gamma A_\theta \frac{\partial A_\psi}{\partial\psi})^T\,\overline{a}_{\{X_C\}}\delta\psi + \\ + (A_\gamma \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}A_\psi)^T\,\overline{a}_{\{X_C\}}\delta\theta + (\frac{\partial A_\gamma}{\partial\gamma}A_\theta A_\psi)^T\,\overline{a}_{\{X_C\}}\delta\gamma,$$

где $\delta\overline{a}_{\{X_C\}}$ – вектор ошибок измерений кажущегося ускорения $\overline{a}_{\{X_c\}}$ (смещения нулей АК) в проекциях на СК $\{X_C\}$; $A = A_\gamma A_\theta A_\psi$ – матрица поворота от географической системы координат к СК $\{X_C\}$; $\delta\psi$, $\delta\theta$, $\delta\gamma$ – соответственно текущие ошибки определения углов курса ψ, тангажа θ и крена γ; ω_X, ω_Y, ω_Z – проекции измеренной абсолютной угловой скорости вращения объекта $\overline{\omega}_{\{X_c\}}$ на оси СК $\{X_C\}$; $\delta\omega_X$, $\delta\omega_Y$, $\delta\omega_Z$ ошибки этих проекций:

$$\delta\omega_X \cong \Delta\omega_X - \varphi_{XY}\cdot\omega_Z + \varphi_{XZ}\cdot\omega_Y, \delta\omega_Y \cong \Delta\omega_Y + \varphi_{YX}\cdot\omega_Z - \varphi_{YZ}\cdot\omega_X;$$

$$\delta\omega_Z \cong \Delta\omega_Y - \varphi_{ZX}\cdot\omega_Y + \varphi_{ZY}\cdot\omega_X,$$

где $\Delta\omega_X$, $\Delta\omega_Y$, $\Delta\omega_Z$ – дрейфы $x_Г$-го, $y_Г$-го и $z_Г$-го гироскопов в проекциях на связанную с ВЛА СК.

Погрешности инерциальных датчиков – дрейфы ГС, смещения нулей АК, а также углы рассогласования будем считать константами, случайными в каждом запуске навигационной системы, а их значения – на уровне датчиков одного класса точности. Дрейф $у_г$-ГС и смещение у-АК будут полагаться равными нулю, т.к. они хорошо оцениваются во время выставки навигационной системы на неподвижном основании, и их всегда можно алгоритмически компенсировать. Без нарушения общности будет считать, что ЛА движется в районе экватора ($\varphi \approx 0$).Рассмотрим несколько «типовых» движений ЛА.

1) Горизонтальное прямолинейное движение ЛА с произвольным углом курса и с малыми углами тангажа и крена. После горизонтирования системы, проведенного по показаниям акселерометров, значения углов θ и γ будут определены с начальными ошибками, зависящими от смещений АК: $\delta\theta_0 = \dfrac{\delta a_X}{g}$, $\delta\gamma_0 = -\dfrac{\delta a_Z}{g}$. При неизменной ориентации ЛА по углам тангажа и крена, влияние смещений акселерометров на скоростные и угловые ошибки будет компенсироваться ошибками горизонтирования [6]. Проекция угловой скорости на ось z при горизонтальном прямолинейном движении пропорциональна горизонтальной проекции относительной скорости v_{NE}: $\omega_3 = -\Omega \cdot \cos\psi + \dfrac{v_{NE}}{R}$. Учитывая, что скорость ЛА в полете, как правило, составляет величину порядка сотен м/с, значение ω_3 будет соизмеримо со значением угловой скорости вращения Земли. Проекция ω_2 в данном случае будет равна нулю, а $\omega_3 = \Omega \cdot \cos\psi$. Ошибки измерения проекций вектора угловой скорости $\overline{\omega}_{\{X_C\}}$, создаваемые влиянием углов рассогласования с учетом указанных значений ω_1, ω_2, ω_3, будут на несколько порядков меньше, чем аналогичные ошибки, обусловленные дрейфами ГС, поэтому данными инструментальными погрешностями можно пренебречь. Таким образом, на ошибки инерциальной навигации при данном типе движения будут влиять, в основном, горизонтальные дрейфы гироскопов. В этих условиях уравнения модель ошибок инерциальной навигации принимают вид:

$$\delta\dot{v}_N = (-a_X \cdot \sin\psi - a_Z \cdot \cos\psi) \cdot \delta\psi - a_Y \cdot \cos\psi \cdot \delta\theta + a_Y \cdot \sin\psi \cdot \delta\gamma;$$

$$\delta\dot{v}_E = (a_X \cdot \cos\psi - a_Z \cdot \sin\psi) \cdot \delta\psi - a_Y \cdot \sin\psi \cdot \delta\theta + a_Y \cdot \cos\psi \cdot \delta\gamma;$$

$$\delta\dot{\psi} = (-\omega_N \cdot \cos\psi + \frac{v_N \cdot \sin\psi}{R}) \cdot \delta\theta + \omega_3 \cdot \delta\gamma;$$

$$\delta\dot{\theta} = (\omega_N \cdot \cos\psi - \frac{v_N \cdot \sin\psi}{R}) \cdot \delta\psi + \frac{\cos\psi}{R} \cdot \delta v_N + \frac{\sin\psi}{R} \cdot \delta v_E + \Delta\omega_Z;$$

$$\delta\dot{\gamma} = (-\omega_N \cdot \sin\psi - \frac{v_N \cdot \cos\psi}{R}) \cdot \delta\psi + \frac{\sin\psi}{R} \cdot \delta v_N - \frac{\cos\psi}{R} \cdot \delta v_E + \Delta\omega_X.$$

2) Прямолинейное движение ЛА с маневром по углу тангажа при малом

угле крена. В данном случае влияние смещения нуля z-го акселерометра уже не будет компенсироваться начальной ошибкой тангажа. Это объясняется тем, что величина δa_Z будет входить в уравнение (4) с коэффициентом $\cos\theta$, а в уравнение (5) с коэффициентом $\sin\theta$. Причем, чем больше будет разница между начальным углом тангажа на выставке и углом тангажа во время маневра, тем сильнее данная погрешность будет влиять на ошибки навигации. Кроме того, в данном случае на ошибки навигации существенное влияние станут оказывать углы рассогласования φ_{XY}, φ_{YX}; их влияние будет зависеть от динамики объекта – в данном случае от величины ω_3. Также на ошибки навигации по-прежнему будут влиять дрейфы ГС. В предположении, что ВЛА движется на север ($\psi \approx 0$), модель ошибок ИН:

$$\delta\dot{h} = \delta v_H\,; \qquad \delta\dot{v}_N = -(a_X \cdot \sin\theta + a_Y \cdot \cos\theta)\cdot\delta\theta + \cos\theta\cdot\delta a_X\,;$$

$$\delta\dot{v}_H = \left(\frac{2\cdot g_0}{R}\right)\cdot\delta h + \sin\theta\cdot\delta a_X\,;$$

$$\delta\dot{v}_E = (a_X \cdot \cos\theta - a_Y \cdot \sin\theta)\cdot\delta\psi + a_Y\cdot\delta\gamma\,;$$

$$\delta\dot{\psi} = -\Omega\cdot\delta\theta + \omega_Z\cdot\delta\gamma + \frac{\omega_Z\cdot\varphi_{YX}}{\cos\theta}\,; \qquad \delta\dot{\theta} = \frac{\delta v_N}{R} + \Delta\omega_Z\,;$$

$$\delta\dot{\gamma} = -\frac{\delta v_N}{R} - \omega_Z\cdot\varphi_{XY.} + \omega_Z\cdot tg\theta\cdot\varphi_{YX} + \Delta\omega_X\,.$$

3) Прямолинейное движение ЛА с маневром по углу крена при малом угле тангажа. По аналогии с предыдущим типом движения, на ошибки инерциальной навигации, кроме дрейфов ГС, будут влиять δa_X, а также углы φ_{YZ} и φ_{ZY}. При $\psi \approx 0$ модель ошибок для данного типа движения принимает вид:

$$\delta\dot{h} = \delta v_H\,; \qquad \delta\dot{v}_N = -a_Y\cdot\sin\gamma\cdot\delta\psi - a_Y\cdot\cos\gamma\cdot\delta\theta\,;$$

$$\delta\dot{v}_H = \left(\frac{2\cdot g_0}{R}\right)\cdot\delta h - \sin\gamma\cdot\delta a_Z\,;$$

$$\delta\dot{v}_E = a_X\cdot\delta\psi + a_Y\cdot\cos\gamma\cdot\delta\gamma + \cos\gamma\cdot\delta a_Z\,;$$

$$\delta\dot{\psi} = -\Omega\cdot\delta\theta + \omega_Z\cdot\cos\gamma\cdot\delta\gamma - \omega_X\cdot\cos\gamma\cdot\varphi_{YZ} + \omega_X\cdot\sin\gamma\cdot\varphi_{ZY} + \sin\gamma\cdot\Delta\omega_Z\,;$$

$$\delta\dot{\theta} = \frac{\delta v_N}{R} - \omega_Z\cdot\sin\gamma\cdot\delta\gamma - \omega_X\cdot\sin\gamma\cdot\varphi_{YZ} + \omega_X\cdot\cos\gamma\cdot\varphi_{ZY} - \cos\gamma\cdot\Delta\omega_Z\,;$$

$$\delta\dot{\gamma} = -\frac{\delta v_E}{R} - \frac{v_N}{R}\cdot\delta\psi + \omega_Z\cdot\sin\gamma\cdot\delta\theta + \Delta\omega_X\,.$$

4) Поворот ЛА по углу курса при малых углах тангажа и крена. При данном виде маневра, основное влияние на ошибки навигации будут оказывать дрейфы ГС и углы рассогласования φ_{XZ} и φ_{ZX}. В этих условиях модель ошибок инерциальной навигации можно упростить до вида:

$$\delta\dot{v}_N = -a_y\cdot\cos\psi\cdot\delta\theta - a_y\cdot\sin\psi\cdot\delta\gamma\,;$$

$$\delta\dot{v}_E = -a_y \cdot \sin\psi \cdot \delta\theta + a_y \cdot \cos\psi \cdot \delta\gamma ;$$

$$\delta\dot{\theta} = \frac{\cos\psi}{R} \cdot \delta v_N + \frac{\sin\psi}{R} \cdot \delta v_E + \omega_Y \cdot \delta\gamma + \Delta\omega_Z - \omega_Y \cdot \varphi_{ZX} ;$$

$$\delta\dot{\gamma} = \frac{\sin\psi}{R} \cdot \delta v_N - \frac{\cos\psi}{R} \cdot \delta v_E - \omega_Y \cdot \delta\theta + \Delta\omega_X + \omega_Y \cdot \varphi_{XZ} .$$

Выводы. Численное моделирование полученных упрощенных моделей подтверждает их адекватность полной динамической модели в условиях рассматриваемых видов движения ВЛА. Таким образом, данные модели ошибок можно использовать в дальнейшем для анализа наблюдаемости погрешностей инерциальных датчиков.

Список литературы: **1**. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А.А. Красовского*. – М.: Наука, 1987. – 712 с. **2**. *И.А. Багмут* Влияние инструментальных погрешностей чувствительных элементов в бесплатформенной инерциальной навигационной системе на точность определения навигационных параметров // Вісник НТУ «ХПІ». Зб. наук. пр. Тематичний випуск: Динаміка і міцшість машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2004. – № 19. – С. 17-22. **3.** Организация взаимодействия спутниковых и автономных навигационных морских объектов / *В.И. Резниченко, В.И.Лапшина* / Под ред. докт.техн.наук *В.И. Резниченко* – СПб., 2004. – 88 с. **4.** *Бромберг П. В.* Теория инерциальных систем навигации. – М.: Наука, 1979. – 296 с. **5.** Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / *О.Н. Анучин, Г.И. Емельянов* / Под общей ред. чл.-кор. РАН *В.Г.Пешехонова*. – СПб., 1999. – 357 с. **6.** *Успенский В.Б., Пугачев Р.В.* Методика формирования требований к погрешностям датчиков бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Зб. Наукових праць ХВУ. – Вип. 3 (50). – 2004. – С. 97-102.

Поступила в редколлегию 07.04.2006