

– 534 с. **8.** Артоболевский И.И. Теория механизмов. – М.: Наук, 1965. – 776 с. **9.** Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с. **10.** Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с. **11.** Ткачук Н.А., Бруль С.Т., Малакей А.Н., Гриценко Г.Д., Орлов Е.А. Структура специализированных интегрированных систем автоматизированного анализа и синтеза элементов транспортных средств специального назначения // Механика та машинобудування. – 2005. – № 1. – С.184-194. **12.** Ткачук Н.А., Гриценко Г.Д., Чепурной А.Д., Орлов Е.А., Ткачук Н.Н. Конечные-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания // Механика та машинобудування. – 2006. – №1. – С.57-79.

Поступила в редколлегию 21.02.08

УДК 621.863

Н.М. ФІДРОВСЬКА, канд. техн. наук, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ВІСІНЕСИМЕТРИЧНИЙ СТИСК ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

У статті вирішується задача визначення прогину стінки циліндричної оболонки канатного барабана, який навантажений асиметрично, з використанням рівняння Ейлера для варіаційної задачі.

In article one should solve the problem of cylindrical casings walls sag of roped drum which is occupied with asymmetrical load using equation of Eelier for variated task.

Постановка проблеми. Оболонка канатного барабану у більшості випадків є циліндричною. Дія канату, який намотується на барабан, зумовлює зовнішній тиск. Міцність оболонки і її геометричні розміри повністю зумовлено величиною цього тиску.

Аналіз попередніх досліджень. У багатьох авторів [1-3] цей тиск приймався постійним і задача таким чином розглядалася як віссиметрична.

Але якщо врахувати наявність сил тертя між канатом і барабаном [4], то тиск буде змінюватись в залежності:

$$P = P_0 e^{-k \frac{l-x}{h} 2p}, \quad (1)$$

де P_0 – максимальний тиск, який має місце в точці сходу каната з барабана; m – коефіцієнт тертя між канатом і барабаном; k – коефіцієнт, який враховує геометричні та пружні властивості канату та барабану; l – довжина навивки; h – крок навивки.

Проведені експерименти різних авторів [5], [6] також підтверджують змінність тиску при навивці каната на барабан.

Поперечний згин циліндричної оболонки є досить складною задачею і розглядався багатьма авторами [7], [8], які для її розв'язання застосовували

деякі спрощення, наприклад, такі як:

- 1) оболонка в колітовому напрямку нерозтяжна;
- 2) в серединній поверхні тонкостінної конструкції здвиги відсутні.

Формулювання цілей і матеріал досліджень. Представимо радіальні переміщення циліндричної оболонки у вигляді функції:

$$w = f(x) \cos nj, \quad (2)$$

де $f(x)$ – статично невизначена функція, яка змінюється впродовж осі; j – кут, який відраховується від вертикальної осі y (рис. 1); $n = 2, 3, 4$ – числа натурального ряду.

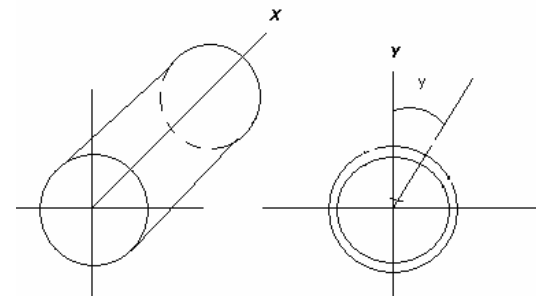


Рис.1. Розрахункова схема

Вираз для потенційної енергії Γ на одиницю довжини оболонки буде мати вигляд:

$$\Gamma = \int \left[\frac{1}{2} m_\varphi \cdot x_\varphi + \frac{1}{2} m_{x\partial\partial} \cdot x_x + m_{x\varphi\partial\partial} \cdot x_x + \frac{\delta}{2} G_{x\partial\partial} \cdot \varepsilon_\varphi - m_{\varphi 0} \cdot x_\varphi \right] R \cdot d \cdot \varphi, \quad (3)$$

де $m_j = D(x_j + hx_x)$ – загальні згинні моменти; $D = \frac{Ed^3}{12(1-h)}$ – згибна жорсткість; E – модуль жорсткості; d – товщина оболонки; h – коефіцієнт Пуассона; $x_j = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial j^2} + w \right)$ – кривизна серединної поверхні в колітовому напрямку; R – радіус серединної поверхні оболонки; $x_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ – кривизна серединної поверхні оболонки в напрямку твірної; $m_{x\partial\partial} = D(x_x + hx_x)$ – додаткові подовжні згинні моменти; $m_{xj\partial\partial} = m_{j\partial\partial} = D(1-h)x_{xj}$ – додаткові

ві крутні моменти окремих елементів оболонки; $x_{xj} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_n}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial j} \right)$ – відносний кут закручування елементів; V – колові переміщення; $G_{x\theta\theta} = E \frac{\partial U}{\partial x}$ – додаткові нормальні напруження; U – подовжні переміщення; e_x – відносна деформація вподовж твірної; G_j – кільцеві нормальні напруження

$$G_j = \frac{R}{d} \left(\frac{\partial Q_{x\theta\theta}}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{Rdj} \right) + \frac{pR}{d};$$

$Q_{\theta\theta}$ і Q_j – поперечні сили

$$Q_{x\theta\theta} = \frac{\partial m_{x\theta\theta}}{\partial x} + \frac{\partial m_{j\theta\theta}}{Rdj}, \quad Q_j = \frac{\partial m_j}{Rdj} + \frac{\partial m_{xj\theta\theta}}{\partial x};$$

$e_j = \frac{G_j}{E} - m \frac{G_{x\theta\theta}}{E}$ – відносна деформація в коловому напрямку;

$m_j x_j = p w$ – потенціал зовнішніх сил.

На основі гіпотези про нерозтяжність кільця відносні деформації в коловому напрямку:

$$e_j = \frac{w}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial U} = 0.$$

Звідки знаходимо:

$$V = -\frac{1}{n} f(x) \sin nj.$$

Використовуючи друге припущення, а саме про відсутність зсуву середньої поверхні, отримаємо:

$$\frac{\partial U}{Rdj} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad U = -\frac{R}{n^2} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cos nj.$$

Підставляючи всі ці вирази у рівняння (3), отримаємо:

$$\Gamma = \int \frac{D}{2} \left\{ \left(1 + \frac{E\delta R^2}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 \cos^2 n\varphi - \frac{2n}{R^2} \left(n^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x) \right) \cos^2 n\varphi + \frac{2}{R^2} \frac{(n^2-1)}{n^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sin^2 n\varphi + \frac{1}{R^4} f^2(x) (n^2-1)^2 \cos n\varphi - \frac{T_0 e^{-km \frac{l-x}{k}}}{D} f(x) \cos n\varphi \right\} R d\varphi. \quad (4)$$

Для вирахування інтеграла $\int \cos nj dj$ розглядаємо $\cos nj$ в ряд:

$$\cos nj = 1 - \frac{4 \left(\frac{n}{2} \right)^2}{2!} \sin^2 j + \frac{4 \left(\frac{n}{2} \right)^2 \left[4 \left(\frac{n}{2} \right)^2 - 4 \right]}{4!} \sin^4 j - \frac{4 \left(\frac{n}{2} \right)^2 \left[4 \left(\frac{n}{2} \right)^2 - 4 \right] \left[4 \left(\frac{n}{2} \right)^2 - 4^2 \right]}{6!} \sin^6 j + \dots$$

Крім цього, замінимо $\sin^2 j$ і $\sin^4 j$ виразами:

$$\sin^2 j = \frac{1}{2} (-\cos 2j + 1); \quad \sin^4 j = \frac{1}{8} (\cos 4j - 4 \cos 2j + 3).$$

Тоді отримаємо:

$$\int \cos n\varphi d\varphi = \int d\varphi - \frac{1}{2} \int \frac{n^2}{2} - d\varphi + \frac{3}{8} \int \frac{n^2(n^2-4)}{24} d\varphi = 2\pi \left[1 - \frac{n^2}{4} \left(1 - \frac{n^2-4}{16} \right) \right].$$

Вираз (4) буде мати вигляд:

$$\Gamma = \frac{Dp}{2} \left\{ R \left(1 + \frac{EdR^3}{Dn^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{2n(n^2-1)}{R} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x) + \frac{2(n^2-1)}{Rn^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{R^3} (n^2-1)^2 f^2(x) - 2 \left[1 - \frac{n^2}{4} \left(1 - \frac{n^2-4}{16} \right) \right] \frac{T_0 R e^{-km \frac{l-x}{k}}}{D} f(x) \right\}. \quad (5)$$

Запишемо рівняння Ейлера для варіаційної задачі:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial f(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial f'(x)} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial f''(x)} \right) = 0.$$

Для нашого випадку отримаємо

$$\begin{aligned} R \left(1 + \frac{EdR^2}{Dn^2} \right) \frac{\partial^4 f}{dx^4} - \frac{2(n^2-1)}{R} \left(n - \frac{1}{n^2} \right) \frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{1}{R^3} (n^2-1)^2 f(x) - \\ - \frac{T_0}{D} \left[1 - \frac{n^2}{4} \left(1 - \frac{n^2-4}{16} \right) \right] e^{-km \frac{l-x}{n} 2p} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Одержуємо диференціальне рівняння IV-ого ступеню, яке можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_2 f = a_3 e^{km \frac{l-x}{n} 2p}, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{2(n^2-1) \left(n - \frac{1}{n^2} \right)}{R^2 \left(1 + \frac{EdR^2}{Dn^2} \right)}, \quad a_2 = \frac{(n^2-1)^2}{R^4 \left(1 + \frac{EdR^2}{Dn^2} \right)}, \\ a_3 = \frac{T_0 \left[1 - \frac{n^2}{4} \left(1 - \frac{n^2-4}{16} \right) \right]}{RD \left(1 + \frac{EdR^2}{Dn^2} \right)}. \end{aligned}$$

Загальне рішення рівняння (7) в даному випадку буде мати вигляд:

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{a_1}{2}} x} \left(c_1 \cos \sqrt{\frac{a_1}{4} - a_2} x + c_2 \sin \sqrt{\frac{a_1}{4} - a_2} x \right) + A_1 e^{-km \frac{l-x}{n} 2p} - c_5, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{a_3}{\frac{k^4 m^4}{n^4} 16p^4 - a_1 \frac{k^2 m^2}{n^2} 4p^2 + a_2}, \\ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0, \quad c_5 = -a_1 e^{-km \frac{l-x}{n} 2p}. \end{aligned}$$

Таким чином, функція прогину буде мати вигляд:

$$f(x) = A_1 e^{-km \frac{l-x}{n} 2p} + c_5 = A_1 e^{-km \frac{l-x}{n} 2p} \left(e^{km \frac{l-x}{n} 2p} - 1 \right). \quad (9)$$

Висновки. Отримане рішення дає змогу визначення напруження в оболонці відповідно до її геометричних розмірів, пружних властивостей та закону навантаження.

Список літератури. 1. Александров М.П. Грузоподъемные машины. – М.: Изд-во МГТУ, 2000. – 552 с. 2. Абрамович И.И. и др. Грузоподъемные краны промышленных предприятий. – М.: Машиностроение, 1989. – 360 с. 3. Вайнсон А.А. Подъемно-транспортные машины. – М.: Машиностроение, 1989. – 563 с. 4. Фидоровская Н.Н. Влияние трения на натяжение каната, навиваемого на барабан // Збірник наукових праць УДАЗТ. – Вип. 58. – Харків, 2004 – С.116-121. 5. Артеменко Н.П. Напряжение в стенке кранового барабана. Дисс. ... канд. техн. наук. / ХММИ, 1947. – 91 с. 6. Морозов Б.А. Исследование прочности барабанов грузоподъемных машин. – ЦНИИТМАШ, кн. 27, 1949. – С.42-51. 7. Канн С.Н. Строительная механика оболочек. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с. 8. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982 – 31с.

Поступила в редколлегию 02.03.08