УДК 519.6

Ю. І. ПЕРШИНА, Т. Т. ЧЕРНОГОР, С. О. САПРИКІН

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ МЕТОДОМ МІНІМАКСУ

Запропоновано метод, за допомогою якого можна наблизити функцію двох змінних з розривами першого роду розривним білінійним сплайном, використовуючи метод мінімаксу. Вважається, що розриви функції, яку наближуємо, лежать на прямих, паралельних осям координат. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайну не співпадають з точками розриву функції. Запропонований метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Ключові слова: розривна функція, сплайн, метод мінімаксу, розрив першого роду, апроксимація, інтерполяція.

Ю. И. ПЕРШИНА, Т. Т. ЧЕРНОГОР, С. А. САПРЫКИН

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОДОМ МИНИМАКСА

Предложен метод, с помощью которого можно приблизить функцию двух переменных с разрывами первого рода разрывным билинейным сплайном, используя метод минимакса. Считается, что разрывы функции, которую приближаем, лежат на прямых, параллельных осям координат. В дальнейшем планируется обобщить этот метод на случай, когда узлы сплайна не совпадают с точками разрыва функции. Предложенный метод можно будет использовать для восстановления внутренней структуры объектов, имеющих различную плотность, в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Ключевые слова: разрывная функция, сплайн, метод минимакса, разрыв первого рода, аппроксимация, интерполяция.

I. I. PERSHYNA, T. T. CHERNOGOR, S. O. SAPRYKIN

APPROXIMATION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY THE MINIMAX METHOD

The article suggests a method for approximating a function of two variables with discontinuities of the first kind by a discontinuous bilinear approximation spline. The spline of the best approximation is considered to be the spline, which on each rectangular element has the smallest maximum deviation from the function that we approximate. It is supposed that the discontinuities of the function that we are approaching lie on the straight lines parallel to the axes of coordinates. In the future we plan to generalize this method to the case when the spline nodes do not coincide with the points of discontinuity of the function. The proposed method can be used to restore the internal structure of objects with different densities in medical, geological, space, and other studies.

Key words: discontinuous function, spline, minimax method, discontinuity of the first kind, approximation, interpolation.

Вступ. На протязі багатьох століть розвитку людства історія відмічає нерівномірність як природних, так і соціальних явищ, які супроводжували цей розвиток (землетруси, війни, економічні кризи, засухи, повені, падіння метеоритів тощо належать до явищ, процесів, які описуються розривними функціями). Також існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

Для багатьох промислових підприємств наявність засобів неруйнівного контролю якості продукції на різних етапах її виробництва є актуальним завданням. Рентгенівські засоби неруйнівного контролю не мають альтернативи в тих випадках, де параметрами контролю якості виробів можуть бути внутрішні геометричні розміри складових частин виробів, просторове розташування внутрішніх деталей, структура матеріалів і наповнювачів, наявність домішок, раковин або тріщин. Необхідно відзначити, що при неруйнівному контролі великогабаритних виробів (з радіаційної товщиною >1000 мм) не можуть бути застосовані традиційні методи плівкової рентгенографії через високу вартість витратних матеріалів і тривалого часу контролю. Найбільш перспективними, в даному випадку, є методи цифрової радіографії, особливо обчислювальна томографія. Обчислювальні томографічні системи неруйнівного контролю на сьогодні є єдиними технічними засобами, які дозволяють визначити місце розташування і геометричні розміри прихованих дефектів в контрольованому виробі, а також контроль виробу в реальному масштабі часу його технологічного виготовлення.

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції, оскільки вказані явища відіграють величезну роль в житті людства. Тому кожний крок, направлений на створення теоретичного підґрунтя опису вказаних явищ та процесів без сумніву може значно змінити подальший розвиток людства і всієї планети в цілому.

Аналіз останніх досліджень. Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. В своїх роботах *Петухов А. П.* [1] досліджує наближення *розривних функцій в метриці Хаусдорфа*. Існують методи розв'язання крайових задач з розривними розв'язкми, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як *Сергієнко І. В.*, *Дейнека В. С.*, *Скопецький В. В.*, *Литвин О. М.* та інші [2]. В роботі *Агеева А. Л.*, *Антонової Т. В.* [3] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання *явища Гіббса*. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розривів, що знаходяться близько один від одного. В роботі [4] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонійні вейвлети, які мають нескінчений носій. Такого типу конструкції в загалі кажучи можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагати додаткового аналізу отриманих результатів. Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії таких наближень не існує. Також не існує загальної теорії наближення розривних функцій розривними сплайнами. В даній роботі автори пропонують таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких, як частинний випадок, включає множину неперервних та неперервно-диференційовних до заданого порядку сплайнів, які можуть мати розриви першого роду у заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів

В роботі [5] авторами запропонований метод відновлення розривної лінійної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок $\varepsilon-$розриву за допомогою *методу інтерполяції*. В [6] в якості методу наближення розглядається оператор *розривної інтерлінації*. В статті [7] запропонований метод наближення розривної функції однієї змінної *розривним сплайном*, використовуючи *метод мінімаксу*. Дана робота присвячена узагальненню статті [7] на випадок наближення розривної функції двох змінних.

Постановка задачі. Нехай в області $D=[0,1]^2$ задано розривну функцію $f(x,y)$ та деяке розбиття на елементи (прямокутники) $\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $0=x_1<x_2<...<x_m=1$, $0=y_1<y_2<...<y_n=1$. Вважаємо, що на кожному з відрізків, які є спільними для двох сусідніх прямокутників $\Pi_{i,j}$ та $\Pi_{i,j+1}$, або $\Pi_{i+1,j}$, або $\Pi_{i-1,j}$, або $\Pi_{i,j-1}$, функція $f(x,y)$ може мати розриви першого роду, причому в кожній точці (x_i,y_j) може бути задано чотири різних значення функції, що наближуємо:

$$C_{i,j}^{++}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y);\quad C_{i,j}^{-+}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y);\quad C_{i,j}^{+-}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y);\quad C_{i,j}^{--}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j-0}} f(x,y).$$

Визначення 1. Будемо називати розривним кусково-білінійним інтерполяційним сплайном на прямокутній сітці сплайн вигляду

$$S(x,y)=p_{ij}(x,y,C)=C_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+$$

$$+C_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+C_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j};(x,y)\in\Pi_{i,j}, i=\overline{1,m-1},\ \ j=\overline{1,n-1}. \qquad (1)$$

Треба знайти такі параметри $C_{i,j}^{++},C_{i,j}^{-+},C_{i,j+1}^{+-},C_{i,j+1}^{--}$ у розривному інтерполяційному сплайні (1), щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі використовуємо методом мінімаксу [8].

Метод наближення розривних функцій. Сплайном найкращого наближення будемо вважати сплайн, який на кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції $f(x,y)$.

Теорема 1. *Якщо на кожному з прямокутних елементів* $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ *невідомі параметри* $C_{i,j}^{++}$, $C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i,j+1}^{--}$ *знаходити з умови*

$$\max_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}}\left|f(x,y)-p_{ij}(x,y)\right|\to\min_C, \qquad (2)$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Доведення витікає з того, що кожний з елементів, який треба мінімізувати, дорівнює максимальному відхиленню сплайну від функції $f(x,y)$. Тому при знаходженні параметрів з умови (2), отримаємо $C_{i,j}^{++}$, $C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i,j+1}^{--}$, які забезпечують найменше відхилення.

Теорема 2. *Якщо наближувана функція* $f(x,y)$ *є розривною кусково-лінійною функцією з лініями розриву* $x=x_i$, $i=\overline{1,m}$, $y=y_j$, $j=\overline{1,n}$ *і наближуємо її кусково-лінійним розривним сплайном* $S(x,y)$, *що визначається* *формулами (1), і невідомі параметри-елементи* $C^{++}_{i,j}, C^{-+}_{i,j}, C^{+-}_{i,j+1}, C^{--}_{i,j+1}$ *знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто* $S(x,y) = f(x,y)$.

Доведення. Нехай функція $f(x,y)$ на прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$ має вигляд:

$$f_{ij}(x,y,A) = A^{++}_{i,j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} + A^{-+}_{i+1,j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} + A^{+-}_{i,j+1}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + A^{--}_{i+1,j+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j},$$

де A – матриця заданих односторонніх значень функції $f(x,y)$ у вузлах прямокутної сітки вузлів.

Розглянемо максимум різниці функції $f(x,y)$ та сплайну (1) на прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$

$$\max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\left|f(x,y)-S(x,y)\right| = \max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\Big\{\left|f_{ij}(x_i+0,y_j+0,A)-p_{ij}(x_i+0,y_j+0,C)\right|,$$

$$\left|f_{ij}(x_{i+1}-0,y_j+0,A)-p_{ij}(x_{i+1}-0,y_j+0,C)\right|,\ \left|f_{ij}(x_{i+1}+0,y_j-0,A)-p_{ij}(x_{i+1}+0,y_j-0,C)\right|,$$

$$\left|f_{ij}(x_{i+1}-0,y_{j+1}-0,A)-p_{ij}(x_{i+1}-0,y_{j+1}-0,C)\right|\Big\} = \max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\Big\{\left|A^{++}_{i,j}-C^{++}_{i,j}\right|,\ \left|A^{-+}_{i+1,j}-C^{-+}_{i+1,j}\right|,$$

$$\left|A^{+-}_{i,j+1}-C^{+-}_{i,j+1}\right|,\left|A^{--}_{i+1,j+1}-C^{--}_{i+1,j+1}\right|\Big\}.$$

Знайдемо мінімум отриманого максимуму

$$\min\max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\Big\{\left|A^{++}_{i,j}-C^{++}_{i,j}\right|,\ \left|A^{-+}_{i+1,j}-C^{-+}_{i+1,j}\right|,\ \left|A^{+-}_{i,j+1}-C^{+-}_{i,j+1}\right|,\left|A^{--}_{i+1,j+1}-C^{--}_{i+1,j+1}\right|\Big\}.$$

Звідси витікає, що

$$\begin{cases} A^{++}_{i,j}-C^{++}_{i,j}=0,\\ A^{-+}_{i+1,j}-C^{-+}_{i+1,j}=0,\\ A^{+-}_{i,j+1}-C^{+-}_{i,j+1}=0,\\ A^{--}_{i+1,j+1}-C^{--}_{i+1,j+1}=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^{++}_{i,j}=C^{++}_{i,j},\\ A^{-+}_{i+1,j}=C^{-+}_{i+1,j},\\ A^{+-}_{i,j+1}=C^{+-}_{i,j+1},\\ A^{--}_{i+1,j+1}=C^{--}_{i+1,j+1}. \end{cases}$$

Теорема доведена.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближувального сплайну. Знайдемо найкраще наближення сплайну до функції. На кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайну від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{\Pi_{i,j}}(C) = \max_{\substack{[x_i,x_{i+1}]\\ [y_j,y_{j+1}]}}\Big\{\left|f(x_i,y_j)-p_{ij}(x_i,y_j,C)\right|,\left|f(x_i,y_{j+1})-p_{ij}(x_i,y_{j+1},C)\right|,$$

$$\left|f(x_{i+1},y_j)-p_{ij}(x_{i+1},y_j,C)\right|,\ \left|f(x_{i+1},y_{j+1})-p_{ij}(x_{i+1},y_{j+1},C)\right|,$$

$$\left|f(D_1)-p_{ij}(D_1,C)\right|,...,\left|f(D_K)-p_{ij}(D_K,C)\right|,\ \left|f(B_1)-p_{ij}(B_1,C)\right|,...,\left|f(B_L)-p_{ij}(B_L,C)\right|\Big\}, \quad (3)$$

де D_k, $k=\overline{1,K}$ – стаціонарні точки функції $J_{\Pi_{ij}}(x,y,C) = f(x,y)-p_{ij}(x,y,C)$ всередині прямокутного елемента $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$; K – кількість стаціонарних точок; B_ℓ, $\ell=\overline{1,L}$ – критичні точки функції $J_{\Pi_{ij}}(x,y,C)$ на сторонах прямокутного елемента $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$; L – кількість критичних точок.

Потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх прямокутних елементах:

$$W = \min_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}}\left(J_{\Pi_{ij}}(C)\right) = \min_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}}\left(\max_{x\in D}\left|f(x,y)-p_{ij}(x,y,C)\right|\right).$$

Отримуємо матрицю W, яка і представляє собою шукану матрицю параметрів $C^{++}_{i,j}, C^{-+}_{i,j}, C^{+-}_{i,j+1}, C^{--}_{i,j+1}$.

Приклад 1. Нехай задано функцію $f(x,y)$ на прямокутнику $[0;1]\times[0;1]$, яка має розриви на лініях $x=0,5$; $y=0,5$ першого роду (рис. 1):

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0\le x<0.5, 0\le y<0.5;\\ x-y, & 0\le x<0.5, 0.5\le y<1;\\ y-x, & 0.5\le x\le 1, 0\le y<0.5;\\ -x-y, & 0.5\le x\le 1, 0.5\le y\le 1. \end{cases}$$

Нехай область $D=[0,1]^2$ розбивається на наступні прямокутні елементи (рис. 1):

$$\Pi_{1,1} = \{(x,y): x_1<x<x_2, y_1<y<y_2\},\ \ \Pi_{1,2} = \{(x,y): x_1<x<x_2, y_2<y<y_3\};$$

$$\Pi_{2,1} = \{(x, y) : x_2 < x < x_3, y_1 < y < y_2\}\ ,\ \ \Pi_{2,2} = \{(x, y) : x_2 < x < x_3, y_2 < y < y_3\}.$$

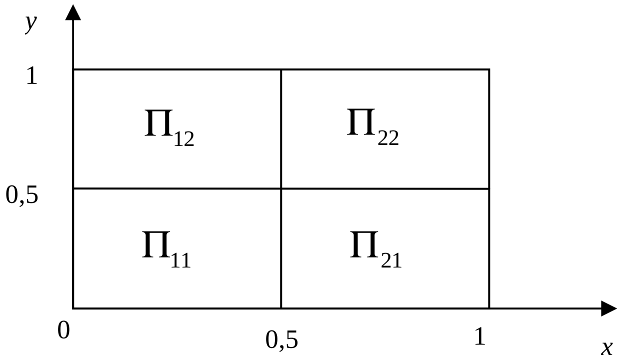


Рис. 1 – Область визначення розривної функції $f(x, y)$.

Задамо функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої прямокутної сітки (рис. 2):

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, (x, y) \in \Pi_{1,1}, \\ x - y,\ (x, y) \in \Pi_{1,2}, \\ -x + y, (x, y) \in \Pi_{2,1}, \\ -x - y,\ (x, y) \in \Pi_{2,2}. \end{cases}$$

У цьому випадку маємо п'ять точок, в яких побудована функція має розриви першого роду:

$$f^{-+}(0,5;0) = 0,5,\ \ f^{++}(0,5;0) = -0,5,\ \ f^{+-}(0;0,5) = 0,5,\ \ f^{++}(0;0,5) = -0,5\,,$$

$$f^{--}(0,5;0,5) = 1,\ \ f^{-+}(0,5;0,5) = 0,\ \ \ \ f^{++}(0,5;0,5) = -1,\ \ f^{+-}(0,5;0,5) = 0,$$

$$f^{--}(1;0,5) = -0,5,\ \ f^{-+}(1;0,5) = -1,5.,\ \ \ \ f^{--}(0.5,1) = -0.5,\ \ f^{+-}(0.5,1) = -1.5.$$

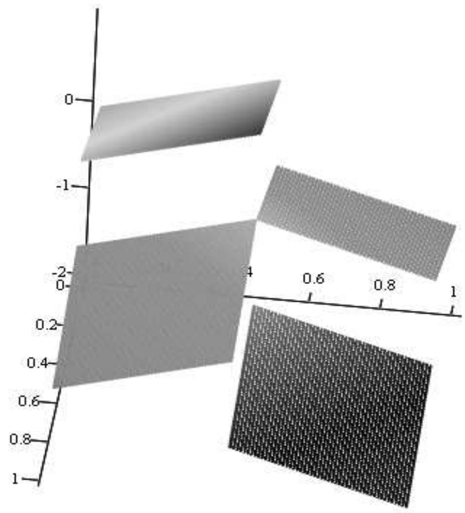


Рис. 2 – Графічний вигляд наближуваної функції $f(x, y)$.

Будемо наближувати функцію $f(x, y)$ сплайном, який визначений формулою (1).

У даному прикладі лінії розриву збігаються з лініями розриву наближувального сплайну і найкраще наближення сплайну до функції виконуємо аналітично.

На кожному з прямокутних елементів знаходимо максимальне значення відхилення сплайну $S(x, y)$ від функції $f(x, y)$ за наступним алгоритмом: оскільки і сплайн, і функція, яку наближуємо, на кожному прямокутному елементі є площинами, то максимальне відхилення буде дорівнювати одному з чотирьох значень відхилення на прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$:

$$J_{i,j}\max(C) = \max\Big(\Big| f(X_i + 0, Y_j + 0) - S(X_i + 0, Y_j + 0, C) \Big|, \Big| f(X_{i+1} - 0, Y_j + 0) - S(X_{j+1} + 0, Y_j + 0, C) \Big|,$$

$$\left| f(X_i+0, Y_{j+1}-0) - S(X_i+0, Y_{j+1}-0, C) \right|, \ \left| f(X_{i+1}-0, Y_{j+1}-0) - S(X_{i+1}-0, Y_{j+1}-0, C) \right| \Big). \qquad (3)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів C, за яких будуть виконуватися умови

$$J_{i,j} \max(C) \to \min_C .$$

У цьому прикладі сплайн матиме вигляд

$$S(x,y)=\begin{cases} C_{1,1}^{++}\dfrac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25}-C_{2,1}^{-+}\dfrac{x(y-0,5)}{0,25}-C_{1,2}^{+-}\dfrac{(x-0,5)y}{0,25}+C_{2,2}^{--}\dfrac{xy}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{1,1};\\ -C_{1,2}^{++}\dfrac{(x-0,5)(y-1)}{0,25}+C_{2,2}^{-+}\dfrac{(x-1)(y-1)}{0,25}-C_{1,3}^{+-}\dfrac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25}+C_{2,3}^{--}\dfrac{x(y-0,5)}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{1,2};\\ C_{2,1}^{++}\dfrac{(x-1)(y-0,5)}{0,25}-C_{3,1}^{-+}\dfrac{(x-0,5)(y-0,5))}{0,25}-C_{2,2}^{+-}\dfrac{(x-1)y}{0,25}+C_{3,2}^{--}\dfrac{(x-0,5)y}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{2,1};\\ C_{2,2}^{++}\dfrac{(x-1)(y-1)}{0,25}-C_{3,2}^{-+}\dfrac{(x-0,5)(y-1)}{0,25}-C_{2,3}^{+-}\dfrac{(x-1)(y-0,5)}{0,25}+C_{3,3}^{--}\dfrac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{2,2}, \end{cases}$$

де C – матриця коефіцієнтів:

$$C=\begin{pmatrix} C_{1,1}^{++} & C_{2,1}^{-+} & C_{1,2}^{+-} & C_{2,2}^{--}\\ C_{1,2}^{++} & C_{2,2}^{-+} & C_{1,3}^{+-} & C_{2,3}^{--}\\ C_{2,1}^{++} & C_{3,1}^{-+} & C_{2,2}^{+-} & C_{3,2}^{--}\\ C_{2,2}^{++} & C_{3,2}^{-+} & C_{2,3}^{+-} & C_{3,3}^{--} \end{pmatrix}.$$

Треба знайти такі елементи матриці C, щоб вираз (3) набував мінімального значення, тобто треба розв'язати мінімізаційну задачу $F(C)\to\min$. Ця задача була розв'язана в системі комп'ютерної математики MathCad та була отримана наступна матриця коефіцієнтів:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 1\\ -0,5 & 0 & -1 & -0,5\\ -0,5 & -1 & 0 & -0,5\\ -1 & -1,5 & -1,5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції $f(x,y)$ має вигляд:

$$S(x,y)=\begin{cases} -0,5\dfrac{x(y-0,5)}{0,25}-0,5\dfrac{(x-0,5)y}{0,25}+\dfrac{xy}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{11};\\ 0,5\dfrac{(x-0,5)(y-1)}{0,25}+\dfrac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25}-0,5\dfrac{x(y-0,5)}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{12};\\ -0,5\dfrac{(x-1)(y-0,5)}{0,25}+\dfrac{(x-0,5)(y-0,5))}{0,25}-0,5\dfrac{(x-0,5)y}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{21};\\ -\dfrac{(x-1)(y-1)}{0,25}+1,5\dfrac{(x-0,5)(y-1)}{0,25}+1,5\dfrac{(x-1)(y-0,5)}{0,25}-2\dfrac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25}, & (x,y)\in\Pi_{22}. \end{cases}$$

Після спрощення отримаємо наближувану функцію $f(x,y)$. Тобто побудований білінійний сплайн відновив точно задану кусково-лінійну розривну функцію двох змінних, що підтверджує вище викладену теорію.

Приклад 2. Нехай задано функцію $f(x,y)$, яка є нелінійною, на області $[0;\pi]\times[0;1]$ з однією лінією розриву (рис. 3):

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le 1;\\ \sin(x+y), & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\ 0\le y\le 1. \end{cases}$$

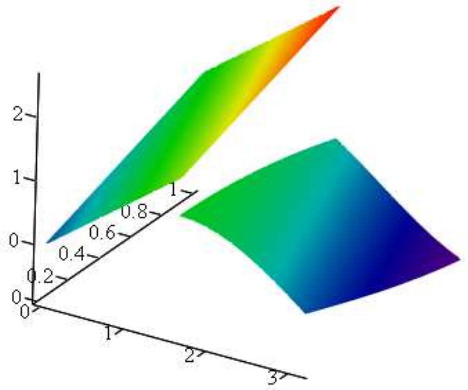
Обираємо сітку вузлів: $x_1=0,\ x_2=-\dfrac{\pi}{2}, x_3=\pi$, $y_1=0,\ y_2=1$. Наближуємо сплайном вигляду (1).

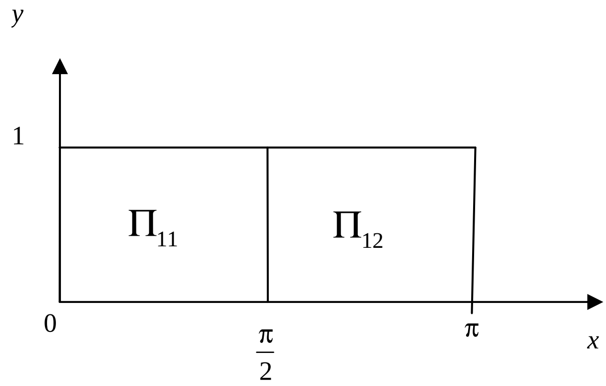
У цьому випадку маємо дві точки, в яких побудована функція має розриви першого роду:

$$f^{-+}\left(\frac{\pi}{2};0\right)=1,57;\ \ f^{++}\left(\frac{\pi}{2};0\right)=0;\ \ f^{--}\left(\frac{\pi}{2};1\right)=2,57;\ \ f^{+-}\left(\frac{\pi}{2};1\right)=-0.9 .$$

На кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайну $S(x,y)$ від функції $f(x,y)$. Оскільки на прямокутному елементі $\Pi_{1,1}$ і сплайн, і функція, яку наближуємо, є площинами, то максимальне відхилення буде дорівнювати одному з чотирьох значень відхилення:

$$J_{1,1}\max(C)=\max\Big(\left|f(X_1+0,Y_1+0)-S(X_1+0,Y_1+0,C)\right|,\left|f(X_2-0,Y_1+0)-S(X_2+0,Y_1+0,C)\right|,$$
$$\left|f(X_1+0,Y_2-0)-S(X_1+0,Y_2-0,C)\right|,\ \left|f(X_2-0,Y_2-0)-S(X_2-0,Y_2-0,C)\right|\Big).$$





а *б*

Рис. 3 – Графічний вигляд: *а* – функції $f(x,y)$; *б* – області визначення функції $f(x,y)$.

На прямокутному елементі $\Pi_{1,2}$ функція є нелінійною, то максимальне відхилення буде мати вигляд

$$J_{1,2}\max(C)=\max\Big(\left|f(X_2+0,Y_1+0)-S(X_2+0,Y_1+0,C)\right|,\left|f(X_2-0,Y_2+0)-S(X_2+0,Y_2+0,C)\right|,$$
$$\left|f(X_3+0,Y_1-0)-S(X_3+0,Y_1-0,C)\right|,\ \left|f(X_3-0,Y_2-0)-S(X_3-0,Y_2-0,C)\right|,$$
$$\left|f(D_1)-S(D_1,C)\right|,\ldots,\left|f(D_K)-S(D_K,C)\right|,\ \left|f(B_1)-S(B_1,C)\right|,\ldots,\left|f(B_L)-p_{ij}(B_L,C)\right|\Big).$$

$D_k, k=\overline{1,K};\ B_\ell, \ell=\overline{1,L}$ – стаціонарні точки всередині та на сторонах прямокутника $\Pi_{1,2}$ відповідно.

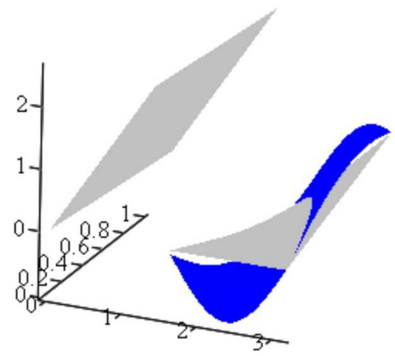


Рис. 4 – Графічний вигляд функції $f(x,y)$ (світлий колір) та сплайну $S(x,y)$ (темний колір).

Таким чином, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів C, за яких будуть виконуватися умови

$$J_{i,j}\max(C)\to\min_C .$$

Наближувальний сплайн в цьому прикладі матиме вигляд:

$$S(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\left(2xyC_{2,2}^{--}+2(y-1)(x-\dfrac{\pi}{2})C_{1,1}^{++}-2(y-1)C_{1,2}^{+-}-2y(x-\dfrac{\pi}{2})C_{2,1}^{-+}\right), & (x,y)\in\Pi_{11};\\ \dfrac{1}{\pi}\left(2(y-1)(x-\pi)C_{2,1}^{++}-2(y-1)(x-\dfrac{\pi}{2})C_{2,2}^{+-}-2y(x-\pi)C_{3,1}^{-+}+2y(x-\dfrac{\pi}{2})C_{3,2}^{--}\right), & (x,y)\in\Pi_{12}.\end{cases}$$

де C – матриця коефіцієнтів:

$$C=\begin{pmatrix}C_{1,1}^{++} & C_{2,1}^{-+} & C_{1,2}^{+-} & C_{2,2}^{--}\\ C_{2,1}^{++} & C_{2,2}^{+-} & C_{3,1}^{-+} & C_{3,2}^{--}\end{pmatrix}.$$

За допомогою системи комп'ютерної математики MathCad була отримана наступна матриця коефіцієнтів:

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1.57 & 1 & 2.57\\ 0 & 0 & -0.9 & 0.9\end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції $f(x,y)$ (рис. 4) має вигляд:

$$S(x,y)=\begin{cases}1,64xy-2\cdot\dfrac{1}{\pi}(y-1)(x-\dfrac{\pi}{2})-x(y-1), & (x,y)\in\Pi_{11};\\ y(0,58x-1,82)+y(0,58x-0,9), & (x,y)\in\Pi_{21};\end{cases}=\begin{cases}x+y, & (x,y)\in\Pi_{11};\\ 1,16xy-2,73y, & (x,y)\in\Pi_{21}.\end{cases}$$

Висновки. Таким чином, в роботі запропонований метод, за допомогою якого можна наблизити функцію двох змінних з розривами першого роду розривним білінійним сплайном, використовуючи метод мінімаксу. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайну не співпадають з точками розриву функції $f(x,y)$.

Як вже зазначалося, цей метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, в медичних [9], геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Список литературы

1. *Петухов А. П.* О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Математические заметки. – 1985. – Т. 32. – № 1. – С. 25 – 40.
2. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление: монография. – К. : Наукова думка, 2007. – 703 с.
3. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. – Новосибирск, 2012. – Т. 15. – № 1(49). – С. 3 – 13.
4. *Rossini M.* Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics. – 2007. – Vol. 1. – No. 1. – P. 1 – 13.
5. *Першина Ю. І., Пасічник В. О.* Чисельна реалізація методу виявлення точок розриву першого роду функції однієї змінної // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2017. – № 3 (62). – Т. 1. – С. 80 – 84.
6. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 2 (19). – С. 59 – 70.
7. *Першина Ю. І, Пасічник В. О.* Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімаксу // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2018. – № 3 (66). – Т. 2. – С. 82 – 87.
8. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.*. Введение в минимакс. – Москва : Наука, 1972. – 368 с.
9. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ : Національний авіаційний університет, 2008. – С. 85 – 86.

References (transliterated)

1. Petukhov A. P. O priblizhenii razryvnykh funktsiy v metrike Khausdorfa [Approximation of discontinuous functions in the Hausdorff metric]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. l985, vol. 32, no. 1, pp. 25–40.
2. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Analiz mnogokomponentnykh raspredelennykh sistem i optimal'noe upravlenie* [Analysis of multicomponent distributed systems and optimal control]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007.703 p.
3. Ageev A. L., Antonova T. V. Aproksimatsiya liniy razryva zashumlyennoy funktsii dvukh peremennykh [Approximation of discontinuity lines of noisy function of two variables]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics]. Novosibirsk, 2012, vol. 15, no. 1 (49), pp. 3–13.
4. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*. 2007. vol. 1, no. 1, pp. 1–13.
5. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Chysel'na realizaciya metodu vyyavlennya tochok rozryvu pershogo rodu funktsiyi odnieyi zminnoyi [Numerical implementation of the method of detecting the first kind discontinuity points of a function of one variable]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of KhNTU]. Kherson, 2017, no. 3 (62), vol. 1, pp. 80–84.
6. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystannyam trapecevydnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous interlinational spline using trapezoidal elements]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Tavrichnyi Bulletin of Informatics and Mathematics]. 2011, no. 2 (19), pp. 59–70.
7. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy rozryvnymy splaynamy metodom minimaksu [Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by minimax method]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of KhNTU]. Kherson, 2018, vol. 2, no. 3(66), pp. 82–87.
8. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks* [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 368 p.
9. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychne modelyuvannya v komp"yuterniy tomografiyi z vykorystannyam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computer tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi "Teoriya ta metody obrobky sygnaliv"* [Materials of the Second International Conference "Theory and methods of signal processing"]. Kyiv, Natsional'nyy aviatsiynyy universytet Publ., 2008. pp. 85–86.

Надійшла (received) 06. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна (Першина Юлия Игоревна, Pershyna Iuliia Igorivna) – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Черногор Тетяна Тимофіївна (Черногор Татьяна Тимофеевна, Chernogor Tetyana Tymofiyivna) – старший викладач кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: tatyanachernogor54@gmail.com.

Саприкін Сергій Олександрович (Сапрыкин Сергей Александрович, Saprykin Sergey Oleksandrovych) – студент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 839-07-60; e-mail: saprik280679sa@gmail.com.