

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

В.И. Конохов, В.Л. Хавин, А.Б. Киркач

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Учебно-методическое пособие
по разделу курса «Сопротивление материалов»
для студентов машиностроительных специальностей,
в том числе для иностранных студентов

УТВЕРЖДЕНО
редакционно-издательским
советом университета,
протокол №1 от 22.06.2017 г.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2017

УДК 539.3/6
ББК 30.121
К 64

Рецензенты:

С.А. Вамболь, д-р техн. наук, проф., зав. каф. прикладной механики
Национального университета гражданской обороны Украины,
Н.А. Ткачук, д-р техн. наук, проф., зав. каф. теории и систем автоматизи-
рованного проектирования механизмов и машин НТУ «ХПИ»

Викладаються теоретичні основи методів розрахунку статично визначуваних та невизначуваних стержньових систем при центральному розтяганні-стисканні, наводяться приклади рішення задач, надаються методичні вказівки щодо виконання індивідуальних розрахунково-проектувальних завдань.

Призначено для студентів машинобудівельних спеціальностей.

Конохов В.И.

К 64 Расчеты на прочность стержней при центральном растяжении-сжатии: учебно-метод. пособ. / В.И. Конохов, В.Л. Хавин, А.Б. Киркач. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2017. – 84 с. – На рус. яз.

ISBN

Излагаются теоретические основы методов расчёта статически определимых и неопределимых стержневых систем при центральном растяжении-сжатии, приводятся примеры решения задач, даются методические указания по выполнению индивидуальных расчётно-проектировочных заданий.

Предназначено для студентов машиностроительных специальностей.

Ил. 27. Табл. 7. Библиогр. 2 наим.

УДК 539.3/6
ББК 30.121

ISBN

© В.И. Конохов, В.Л. Хавин,
А.Б. Киркач, 2017

Вступление

В процессе эксплуатации машин и сооружений их элементы так или иначе участвуют в работе конструкции и подвергаются воздействию различных нагрузок. При этом реальные тела разрушаются и деформируются в результате приложения к ним различных типов нагрузок. Для обеспечения нормальной работы конструкция должна удовлетворять необходимым условиям прочности, жесткости и устойчивости.

Для того чтобы конструкция полностью соответствовала требованиям прочности, жесткости и устойчивости, т.е. была надежной в эксплуатации, необходимо определить соответствующие её размеры в зависимости от вида и характера нагружения и с учетом свойств материала.

В учебно-методическом пособии рассматривается один из основных видов простого деформирования – центральное растяжение-сжатие прямолинейных стержней.

Пособие включает три раздела. В первом разделе излагаются теоретические основы задачи центрального растяжения-сжатия прямых стержней. Второй раздел посвящен статически-неопределимым стержневым системам при растяжении-сжатии. В третьем разделе даются указания по выполнению расчетно-проектировочного задания, приводятся расчетные схемы и исходные данные задач, рассматриваются примеры их решения.

1. Центральное растяжение-сжатие прямолинейного стержня

1.1. Внутренняя продольная сила

Центральное растяжение-сжатие в бруске возникает в том случае, когда внешние нагрузки действуют по его оси (осевые внешние силы), или приводятся к осевым силам. В этом случае в сечении возникает единственный внутренний силовой фактор – внутренняя продольная сила N , а поперечные силы Q_x, Q_y , изгибающие моменты M_x, M_y и крутящий момент M_k тождественно равны нулю.

Брус, находящийся под действием растяжения-сжатия, будем называть стержнем.

Проанализируем распределение внутренней продольной силы. Графическое представление распределения продольной силы N по длине стержня называется эпюрой продольной силы N . Правило знаков: *продольная сила считается положительной, если она вызывает деформацию растяжения, и отрицательной, если вызывает деформацию сжатия.*

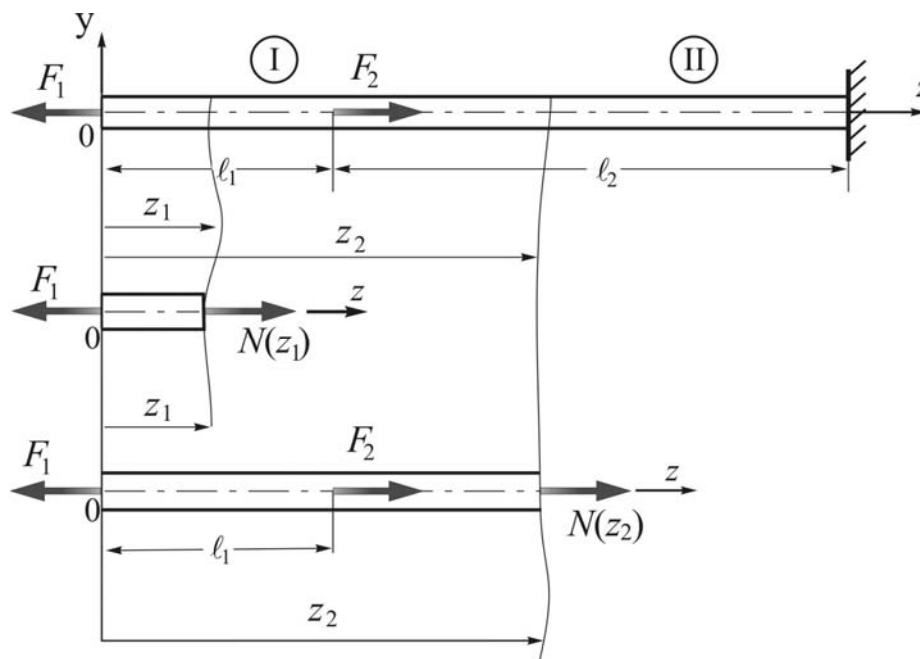


Рис. 1.1. Продольная сила на участках стержня

Рассмотрим стержень, нагруженный двумя осевыми силами F_1 и F_2 (рис. 1.1). Используя метод сечений (метод РОЗУ), определим значения продольной силы на первом и втором участках стержня в произвольных сечениях z_1 и z_2 — $N(z_1)$ и $N(z_2)$ соответственно. Отбрасывая в каждом случае правую часть стержня и заменяя действие отброшенной части на оставшуюся часть положительными (т.е. растягивающими) продольными силами $N(z_1)$ и $N(z_2)$, запишем уравнения равновесия $\sum F_{iz} = 0$ для каждого участка:

- для первого участка ($0 \leq z_1 \leq l_1$)

$$-F_1 + N(z_1) = 0;$$

- для второго участка ($l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$)

$$-F_1 + F_2 + N(z_2) = 0.$$

Откуда численные значения продольных сил на каждом участке:

$$N(z_1) = F_1, \quad N(z_2) = F_1 - F_2.$$

Обобщая изложенное выше, можно сформулировать правило для определения продольной силы в сечении с текущей координатой: *внутренняя продольная сила $N(z)$ в данном сечении образует замену действия отброшенной части на оставшуюся и численно равна алгебраической (с учетом правила знаков) сумме проекций на ось стержня (ось Z) всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения (всех односторонних сил).*

1.2. Построение эпюры внутренней продольной силы

Порядок построения эпюры внутренней продольной силы покажем на примере стержня, представленного на рис. 1.2.

1. Определяем значение опорной реакции H из условия статиче-

ского равновесия системы внешних сил $\sum F_{iz} = 0$:

$$\sum F_{iz} = -H + q \cdot (b + c) + F_2 - F_1 = 0,$$

откуда $H = 30 \cdot 1,1 + 20 - 10 = 43$ кН.

При отрицательном значении реакции необходимо изменить ее направление на противоположное, а ее числовое значение в дальнейшем считать положительным.

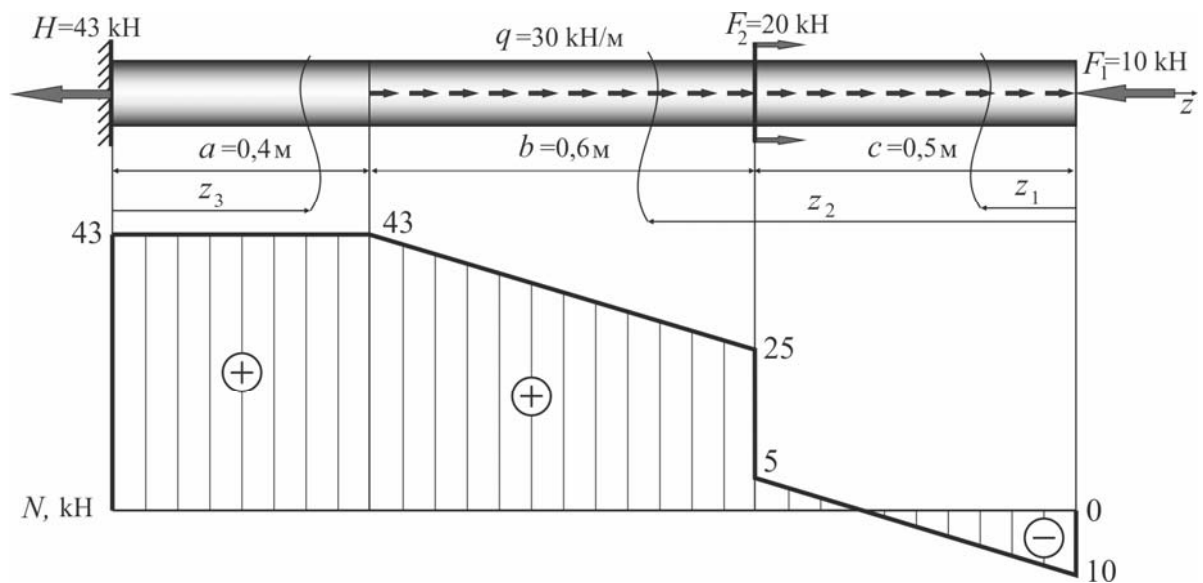


Рис. 1.2. Схема нагружения и эпюра внутренней продольной силы

2. Разбиваем стержень на участки, границами которых являются сечения стержня, в которых приложены сосредоточенные силы (в данном случае силы F_1 , F_2 и реакция H), а также сечения, где начинаются и заканчиваются распределенные нагрузки.

3. Записываем выражения для продольной силы в текущем сечении, которое определяется координатой z_i на каждом участке с учетом принятого правила знаков и определяем ее значение:

$$0 \leq z_1 \leq c : \quad N(z_1) = -F_1 + qz_1 \quad N(0) = -10 \text{ кН};$$

(линейная функция) $N(0,5) = 5 \text{ кН}.$

$$\begin{array}{ll}
c \leq z_2 \leq c + b : & N(z_2) = -F_1 + F_2 + qz_2 & N(0,5) = 25 \text{ кН}; \\
& \text{(линейная функция)} & N(1,1) = 43 \text{ кН}. \\
0 \leq z_3 \leq a : & N(z_3) = H & N(0) = N(0,4) = 43 \text{ кН}. \\
& \text{(постоянная, const)} &
\end{array}$$

По полученным данным в произвольном масштабе строим эпюру внутренних продольных сил $N(z)$.

4. Проверка правильности построения эпюр:

а) на участке с равномерно распределенной нагрузкой q эпюра $N(z)$ линейная (описывается уравнением прямой линии, наклонной к нулевой), если $q = 0$, то $N(z) = \text{const}$. В нашем случае на первом и втором участках $N(z)$ является линейной, на третьем – постоянной;

б) в сечениях, где приложены сосредоточенные силы на эпюре $N(z)$ наблюдаются скачки на величину этих сил. На рис. 1.2 в сечениях стержня, где приложены силы F_1 и F_2 , а также действует реакция H , на эпюре имеют место скачки на величину этих сил соответственно.

1.3. Напряжения при центральном растяжении-сжатии

Рассмотрим растяжение прямолинейного стержня произвольного поперечного сечения под действием двух равных по величине и противоположно направленных сил (рис. 1.3,а).

В произвольном месте стержня мысленно проведем сечение, отбросим одну из частей, а действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренним усилием $N(z)$, которое из уравнения статического равновесия $\sum F_{iz} = 0$ определится как $N(z) = F$ (рис. 1.3,б). Продольная сила является равнодействующей (результатирующей) внутренних усилий, произвольным образом приложенных в точках сечения A , перпендикулярного к оси стержня. Другие внутренние силовые факторы равны нулю. Итак, продольная сила $N(z)$, направленная по оси стержня, является нормальной (перпендикулярной) к сечению. Так как продольная сила является результирующей распределенных внутренних усилий (напряжений), то и эти внутренние усилия должны быть перпендикулярны сече-

нию. Таким образом, при центральном растяжении (так же, как и при центральном сжатии) в поперечном сечении возникает только нормальное напряжение σ (рис. 1.3,в).

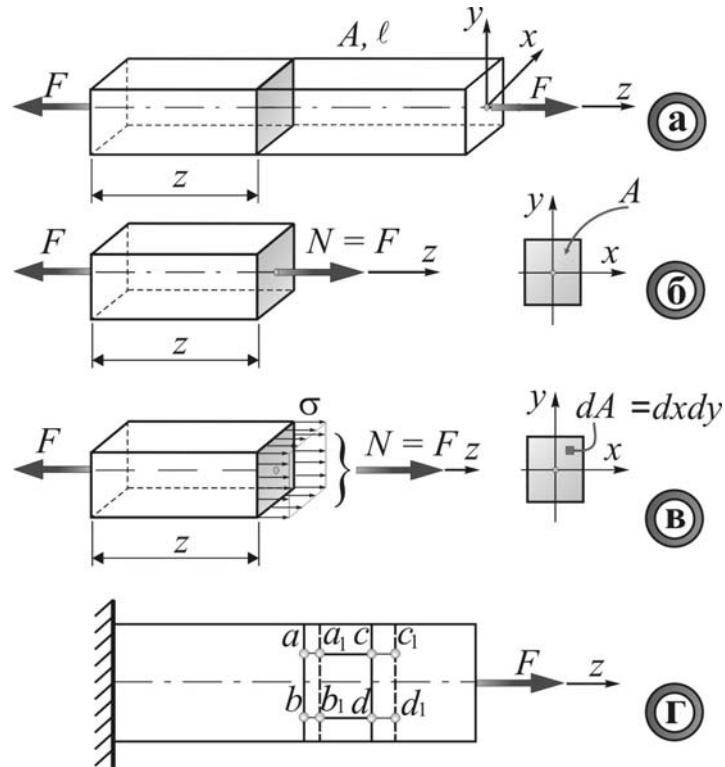


Рис. 1.3. Статический и геометрический аспекты

Очевидно, что на элементарную площадку dA действует элементарная продольная сила $dN = \sigma \cdot dA$. Отсюда получаем уравнение в интегральном виде:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (1.1)$$

Разрешить это уравнение невозможно, так как неизвестен закон распределения напряжений σ по поперечному сечению.

Чтобы записать закон распределения напряжений σ по поперечному сечению, обратимся к опыту. Как показывают эксперименты, при центральном растяжении-сжатии одинаковые продольные отрезки ac и bd стержня получают одинаковое удлинение (рис. 1.3,г):

$(a_1c_1 - ac) = (b_1d_1 - bd)$. Линии на боковой поверхности стержня, представляющие следы поперечных сечений, параллельные до деформирования, остаются параллельными и в процессе деформирования: $ab \parallel a_1b_1$ и $cd \parallel c_1d_1$.

Это позволяет считать, что при центральном растяжении-сжатии выполняется гипотеза плоских сечений: *сечение плоское и нормальное к оси (поперечное сечение) до деформации остается плоским и нормальным к оси в процессе деформации*, то есть, перемещаясь, сечение остается параллельным самому себе. Если представить стержень в виде совокупности отдельных продольных волокон, то при растяжении каждое волокно удлиняется (укорачивается) на одну и ту же величину. Следовательно, в каждом продольном волокне действует одинаковое усилие. Этот вывод позволяет считать, что при центральном растяжении-сжатии нормальное напряжение σ по поперечному сечению распределяется равномерно, т.е. $\sigma = \text{const}$.

Тогда из уравнения (1.1) имеем: $N = \sigma \int_A dA = \sigma A$, откуда следует формула для определения нормального напряжения при центральном растяжении-сжатии, одинакового во всех точках рассматриваемого сечения:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (1.2)$$

В рассматриваемом случае, когда продольная сила и площадь поперечного сечения стержня неизменны, напряжения σ остаются постоянными как по сечению, так и по длине, а следовательно, и по всему объему стержня. Такое напряженное состояние называется *однородным*.

Максимальные расчетные нормальные напряжения, вычисленные по формуле (1.2), должны сопоставляться с предельно допустимыми напряжениями для материала стержня, обеспечивающими безопасную эксплуатацию. Эти напряжения называются *допустимыми (допускаемыми) напряжениями* $[\sigma]$ и определяются как отношение опасного напряжения для данного материала $\sigma_{\text{оп}}$ к нормативному коэффициенту запаса n_H ,

т.е. $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n_H}$. Подробнее об опасных напряжениях для различных материалов см. в разделе курса "Механические характеристики материалов".

Сформулируем условие прочности при центральном растяжении-сжатии, которое должно выполняться в каждой точке стержня:

$$|\sigma| = \frac{|N|}{A} \leq [\sigma]. \quad (1.3)$$

Для материалов, которые имеют неодинаковые характеристики при растяжении и сжатии, условие прочности (1.3) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{раст}} = \frac{N_{\text{раст}}}{A} &\leq [\sigma_{\text{раст}}]; \\ |\sigma_{\text{сж}}| = \frac{|N_{\text{сж}}|}{A} &\leq [\sigma_{\text{сж}}], \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где $\sigma_{\text{раст}}$ и $\sigma_{\text{сж}}$ – максимальные нормальные напряжения при растяжении и сжатии соответственно.

Сечение стержня, в котором возникает наибольшее нормальное напряжение, является *опасным*.

1.4. Виды расчетов по допустимому напряжению

Укажем основные виды расчетов, которые выполняются с использованием условия прочности (1.3) – так называемые расчеты по допустимому напряжению.

1.4.1. Проверочный расчет

Основная цель проверочного расчета состоит в сопоставлении максимальных расчетных напряжений и допустимого напряжения. В этом расчете известной считается вся исходная информация о стержне, которая включает три группы данных:

- о внешних силах – значения нагрузок и координаты точек на оси

бруса, где приложены эти нагрузки;

- о геометрических размерах стержня – площадь поперечного сечения A ;
- о механических свойствах материала стержня – допустимое напряжение $[\sigma]$.

По формуле (1.2) вычисляются максимальные напряжения σ_{\max} и сравниваются с допустимым $[\sigma]$. Если $\sigma_{\max} \approx [\sigma]$, прочность стержня обеспечена (допускается отклонение до 5% в сторону преувеличения в значении σ_{\max} над $[\sigma]$). При $\sigma_{\max} < [\sigma]$ стержень считается недогруженным, что приводит к перерасходу материала. В случае $\sigma_{\max} > [\sigma]$ стержень перегружен, что приводит к необходимости пересмотреть исходную расчетную схему или выбрать другой материал.

1.4.2. Проектировочный расчет (подбор площади поперечного сечения)

Основная цель расчета заключается в определении безопасных в смысле прочности (т.е. допустимых) размеров сечения стержня. Известными считаются данные:

- о внешних силах – значения нагрузок и координаты точек на оси бруса, где приложены эти нагрузки;
- о механических свойствах материала стержня – допустимое напряжение $[\sigma]$.

После построения эпюры внутренних продольных сил определяется сечение с максимальным значением N_{\max} – опасное сечение. Оценка минимально необходимых поперечных размеров стержня получается из условия прочности (1.3) в его опасном сечении: $A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$.

1.4.3. Определение максимального допустимого внешнего нагружения

Основной целью данного расчета является определение безопасной в смысле прочности допускаемой внешней нагрузки для стержня. Расчет производится при следующих известных данных:

- о геометрических размерах стержня – площадь поперечного сечения A ;
- о механических свойствах его материала – допустимое напряжение $[\sigma]$.

По методу сечений (РОЗУ) внутренняя продольная сила в стержне выражается через внешнюю нагрузку в виде $N(F_i, q_i)$. Из условия прочности (1.3) определяется $N_{\max} \leq [\sigma] \cdot A$, на основе чего в дальнейшем находят допускаемые внешние нагрузки.

1.5. Деформации и перемещения при растяжении-сжатии. Закон Гука. Модуль упругости. Коэффициент Пуассона

Рассмотрим растянутый силой F стержень длиной l_0 и площадью поперечного сечения A (рис. 1.4).

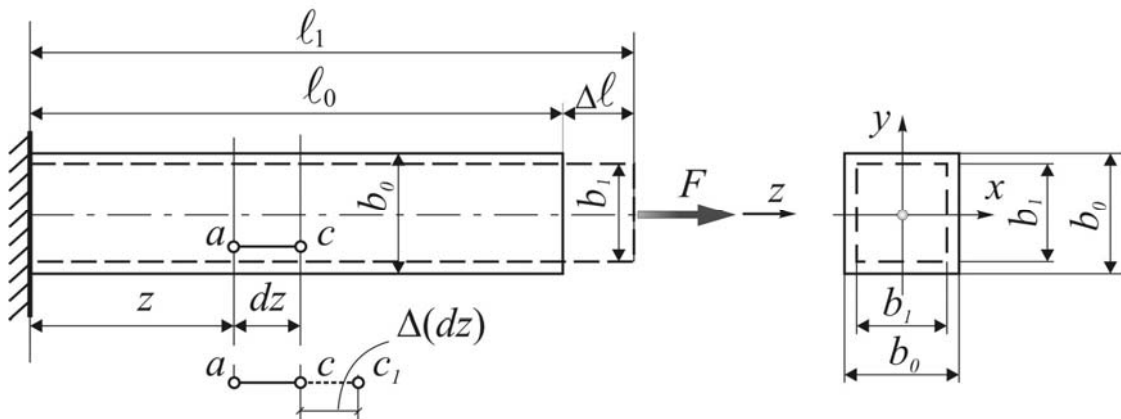


Рис. 1.4. Деформированное состояние стержня

Под действием растягивающей внешней нагрузки продольный размер стержня увеличивается до l_1 . Изменение длины $\Delta l = l_1 - l_0$ называется *абсолютным удлинением* стержня. *Относительной продольной деформацией* называется отношение

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon. \quad (1.5)$$

Если в стержне возникает неоднородное напряженное состояние,

деформация в точке a определяется путем граничного перехода к бесконечно малому элементу длиной dz :

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (1.6)$$

Из формул (1.5) и (1.6) следует, что продольная деформация является безразмерной величиной, положительной при растяжении и отрицательной при сжатии.

Важным свойством линейных упругих систем является прямо пропорциональная зависимость между напряжениями и деформациями в них:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) называется законом Гука при центральном растяжении-сжатии (при одноосном напряженном состоянии).

Коэффициент пропорциональности E в законе Гука называется *модулем продольной упругости, или модулем Юнга* и представляет собой физическую постоянную (константу) материала.

Ориентировочные значения модуля упругости для некоторых материалов имеют значения:

- сталь – $E = (2 \dots 2,1) \cdot 10^5$ МПа;
- медь и сплавы меди – $E = (1 \dots 1,2) \cdot 10^5$ МПа;
- алюминий и сплавы алюминия – $E = (0,7 \dots 0,72) \cdot 10^5$ МПа.

Так как при центральном растяжении-сжатии $\sigma = \frac{N}{A}$, а $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$, то, с учетом (1.7), зависимость между нагрузкой и удлинением в рамках упругих деформаций задается соотношением $\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA}$, знаменатель которого EA называется *жесткостью стержня при растяжении*.

Тогда, возвращаясь к рассмотрению бесконечно малого элемента

dz стержня, изменение его длины будет равно $\Delta dz = \frac{N(z)dz}{EA(z)}$, а изменение длины всего стержня (абсолютное удлинение стержня длиной ℓ_0) определится по формуле

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell_0} \frac{N(z)dz}{EA(z)}. \quad (1.8)$$

Кроме продольных деформаций, в стержне возникают и поперечные деформации. Разность $\Delta b = b_1 - b_0$ (рис. 1.4) называется *абсолютной поперечной деформацией*, а соотношение $\frac{\Delta b}{b_0} = \varepsilon'$ – *относительной поперечной деформацией*.

Относительная поперечная деформация в линейно упругих системах имеет знак, противоположный знаку относительной продольной деформации. При этом существует прямо пропорциональная зависимость между относительной продольной деформацией и относительной поперечной деформацией $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$.

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации называется *коэффициентом поперечной деформации*, или *коэффициентом Пуассона* μ , т.е. $\mu = \left| \varepsilon' / \varepsilon \right|$. Коэффициент Пуассона μ , так же как и модуль продольной упругости E , является физической константой материала и характеризует его упругие свойства.

Величины коэффициента Пуассона для реальных материалов, используемых в машиностроении, размещаются в диапазоне $0 \leq \mu \leq 0,5$:

- для каучука он составляет около 0,5;
- для стали – $\mu = 0,25 \dots 0,3$;
- для меди – $\mu = 0,31 \dots 0,35$;
- для алюминия – $\mu = 0,32 \dots 0,36$.

Для *изотропных материалов* (сталь, медь, каучук и т.д.) E и μ во

всех направлениях одинаковы, для *анизотропных материалов* E и μ в разных направлениях разные (дерево вдоль и поперек волокон, слоистые пластмассы и др.).

Если нагружение, действующее на стержень, является термосиловым, то в упругой области справедливо применить принцип суперпозиции, т.е. можно записать:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t, \quad (1.9)$$

где $\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$ – упругая часть деформации, а $\varepsilon^t = \alpha_t \Delta t$ – температурная её составляющая, в которой α_t – температурный коэффициент линейного расширения материала. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta t, \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA} + \alpha l \Delta t. \quad (1.10)$$

Необходимо отметить, что, вообще говоря, упругие константы E и μ , как и прочие свойства материала, зависят от температуры. Однако в небольших диапазонах температур этой зависимостью, как правило, можно пренебречь и считать их постоянными.

2. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии

В практике расчетов при растяжении-сжатии часто встречаются расчетные схемы, для которых при известных активных внешних усилиях одних лишь уравнений статического равновесия оказывается недостаточно для определения реактивных усилий и внутренних сил. Такие системы принято называть статически неопределимыми.

Статически неопределимыми называется кинематически неизменные системы, в которых число неизвестных усилий, включая реакции опор и внутренние силы, больше числа уравнений статики, которые

можно составить для данной системы или ее части.

Разница между количеством неизвестных усилий и количеством независимых уравнений статического равновесия, которые можно записать для всей системы или ее части, называется степенью статической неопределенности системы.

Это число показывает, сколько дополнительных уравнений в геометрическом анализе процесса деформирования системы необходимо составить, чтобы можно было решить задачу. Раскрытие статической неопределенности таких систем методом перемещений состоит из четырех основных этапов.

1. Статическая сторона задачи (ССЗ). Устанавливаются направления реакций связей и внутренних усилий в стержнях, составляются уравнения равновесия, определяется степень статической неопределенности задачи.

2. Геометрическая сторона задачи (ГСЗ). Устанавливается связь между перемещениями отдельных сечений конструкции исходя из условий совместности (неразрывности) перемещений. Составляем необходимое количество уравнений связи между перемещениями. Число таких равенств должно равняться степени статической неопределенности системы. Полученные уравнения называются условиями совместности перемещений (деформаций).

3. Физическая сторона задачи (ФСЗ). Удлинения отдельных элементов конструкции в условиях совместности перемещений выражаются через действующие в них неизвестные усилия на основании закона Гука.

4. Синтез. Полученная система алгебраических уравнений, состоящая из уравнений равновесия и условий совместности, решается относительно неизвестных усилий.

Рассмотрим методику решения статически неопределимых задач при центральном растяжении-сжатии на примерах.

2.1. Жестко закрепленный стержень под действием сосредоточенной силы

Жестко закрепленный обоими концами стержень длиной $(a + b)$ и площадью поперечного сечения A нагружен силой F (рис. 2.1). Модуль

упругости материала E . Определить опорные реакции и построить эпюру продольных сил.

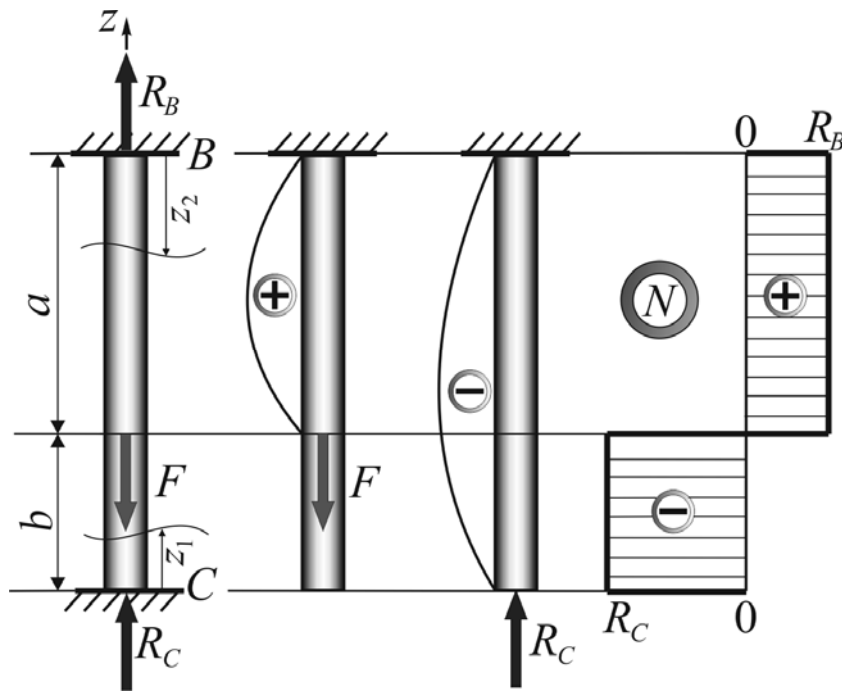


Рис. 2.1. Расчетная схема примера 2.1

1. **ССЗ.** Показываем опорные реакции R_C и R_B . Записываем единственное уравнение равновесия, которое можно составить для данной задачи:

$$\sum F_{zi} = R_C + R_B - F = 0. \quad (2.1)$$

2. **ГСЗ.** Так как опоры жесткие, то полное удлинение стержня равняется нулю, т.е. $\Delta l = 0$. Конкретизируем это условие на основе принципа суперпозиции. Для этого мысленно отбросим одну из опор (например, опору C) и будем по очереди прикладывать к стержню внешние силы, включая неизвестную реакцию в отброшенной опоре. Тогда полное удлинение стержня можно представить в виде

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_R = 0, \quad (2.2)$$

где $\Delta\ell_F$ – удлинение от активного внешнего нагружения (в данном случае от силы F), $\Delta\ell_R$ – удлинение от реакции R_C .

3. **ФСЗ.** Удлинение от внешнего усилия в рассматриваемом случае составляет $\Delta\ell_F = \frac{Fa}{EA}$, а укорочение от реакции – $\Delta\ell_R = -\frac{R_C(a+b)}{EA}$ (рис. 2.1). Таким образом, полная абсолютная деформация (полное удлинение)

$$\Delta\ell = \frac{Fa}{EA} - \frac{R_C(a+b)}{EA} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) представляет собой условие совместности перемещений (деформаций) для данной задачи.

4. **Синтез.** Из уравнения (2.3) с учетом (2.1) получаем:

$$R_C = F \frac{a}{a+b}, \quad R_B = F - R_C = F \frac{b}{a+b}. \quad (2.4)$$

Разбиваем стержень на два участка и записываем выражения для продольной силы на каждом участке:

$$\text{1-й участок: } 0 \leq z_1 \leq b: \quad N(z_1) = -R_C = -F \frac{a}{a+b}; \quad (2.5)$$

$$\text{2-й участок: } 0 \leq z_2 \leq a: \quad N(z_2) = R_B = F \frac{b}{a+b}. \quad (2.6)$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил (рис. 2.1).

2.2. Жестко закрепленный стержень под действием температурного нагружения

Особый интерес вызывают задачи расчетов статически неопределимых систем при термосиловом нагружении. Отметим, что в статически

определимых стержневых конструкциях при нагревании-охлаждении напряжения не возникают, если материал однородный.

В статически неопределимых стержнях и стержневых системах даже небольшие перепады температур приводят к появлению заметных величин напряжений.

Дополним выше рассмотренный пример расчетом температурных напряжений. При этом будем считать, что стержень нагрет (охлажден) на Δt °С (рис. 2.2).

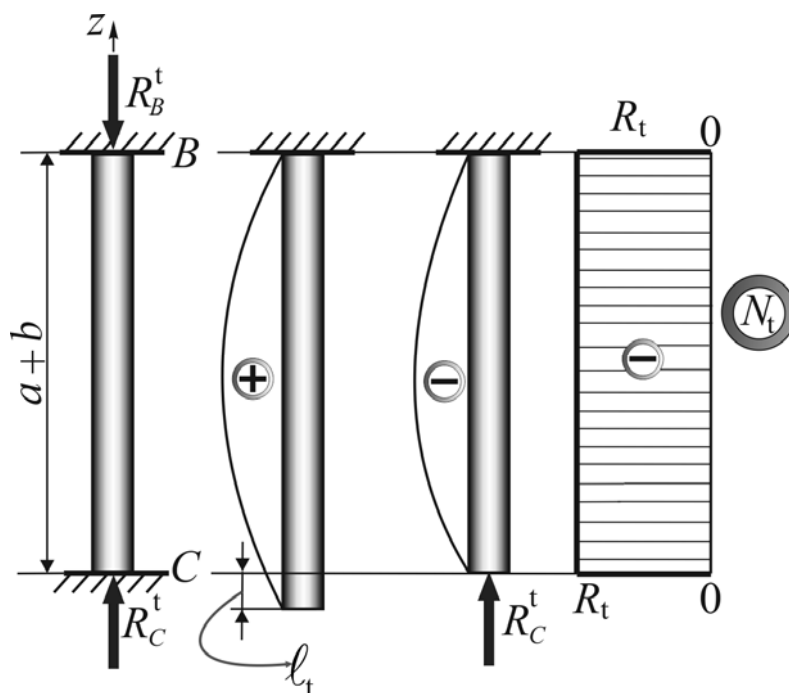


Рис. 2.2. Расчетная схема примера 2.2

1. ССЗ. Показываем опорные реакции R_C^t , R_B^t и записываем единственное уравнение равновесия, которое можно составить для данной задачи:

$$\sum F_{zi} = R_C^t - R_B^t = 0; \quad R_C^t = R_B^t. \quad (2.7)$$

Реакции R_C^t и R_B^t , которые возникают в защемлениях, равны между собой и направлены в противоположные стороны.

2. **ГСЗ.** Полное удлинение стержня можно представить в виде алгебраической суммы свободного температурного расширения (укорочения) стержня Δl_t и укорочения (удлинения) Δl_R от реакции R_C^t (рис. 2.2), т.е.

$$\Delta l_t + \Delta l_R = 0. \quad (2.8)$$

3. **ФСЗ & Синтез.** Слагаемые в (2.8) можно представить в виде

$$\Delta l_R = -\frac{R_C^t(a+b)}{EA}, \quad \Delta l_t = \alpha_t(a+b)\Delta t, \quad (2.9)$$

где α_t – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Подстановка (2.9) в (2.8) и решение относительно R_C^t с учетом (2.7) дает:

$$R_C^t = R_B^t = \frac{\Delta l_t EA}{a+b} = \alpha_t EA \Delta t, \quad (2.10)$$

что приводит к одинаковому во всех сечениях стержня значению продольной силы (рис. 2.2):

$$N_t = -R_C^t = -R_B^t = -\alpha_t EA \Delta t. \quad (2.11)$$

Знак минус в формуле (2.11) говорит о том, что изменение температуры жестко заземленного стержня всегда вызывает в нем деформации противоположного знака – сжатие при нагревании ($\Delta t > 0$) и растяжение при охлаждении ($\Delta t < 0$). Из (2.11) также следует формула для температурных напряжений в стержне постоянного поперечного сечения, из которой, в частности, следует, что от площади сечения они не зависят:

$$\sigma_t = \frac{N_t}{A} = -\alpha_t E \Delta t. \quad (2.12)$$

2.3. Жестко закрепленный стержень при наличии неточности изготовления (монтажный фактор)

Аналогично примеру, рассмотренному выше, решается задача определения монтажных напряжений, вызванных наличием монтажной неточности δ , определяемой как разность длины стержня (фактического размера) и расстояния между опорами (номинального размера), (рис. 2.3).

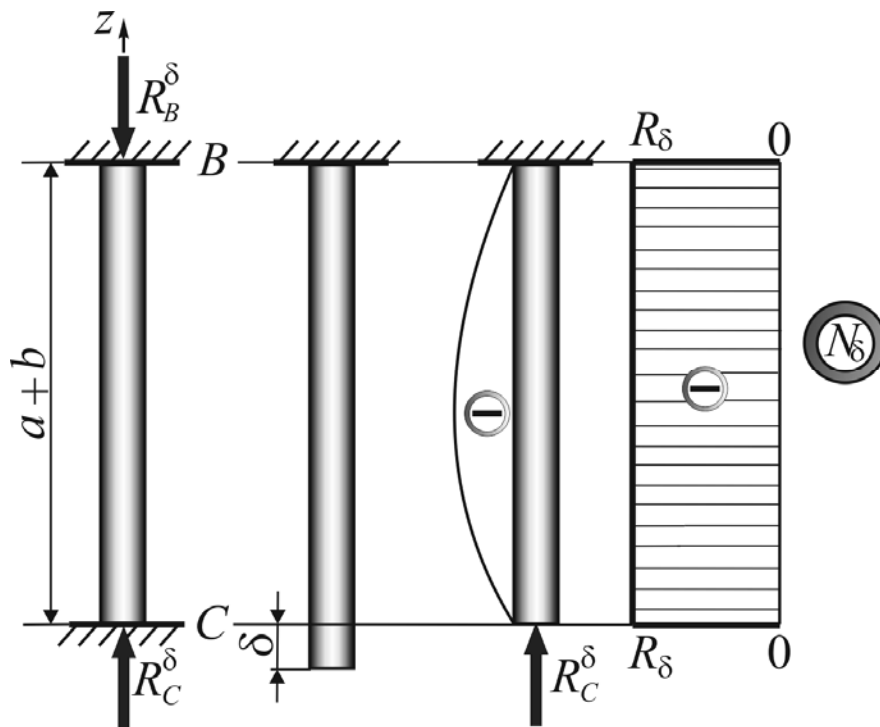


Рис. 2.3. Расчетная схема примера 2.3

1. ССЗ. Показываем опорные реакции R_C^δ , R_B^δ и записываем единственное уравнение равновесия, которое можно составить для данной задачи:

$$\sum F_{zi} = R_C^\delta - R_B^\delta = 0; \quad R_C^\delta = R_B^\delta. \quad (2.13)$$

Как и в случае температурного нагружения, реакции в защемлениях R_C^δ и R_B^δ равны между собой и направлены в противоположные стороны.

2. **ГСЗ.** Полное удлинение стержня состоит из алгебраической суммы удлинений: неточности изготовления δ и удлинения (укорочения) $\Delta\ell_R$ от реакции R_C^δ (рис. 2.3), т.е.

$$\delta + \Delta\ell_R = 0. \quad (2.14)$$

3. **ФСЗ & Синтез.** Второе слагаемое в (2.14) имеет вид, аналогичный первому уравнению (2.9):

$$\Delta\ell_R = -\frac{R_C^\delta(a+b)}{EA} \quad (2.15)$$

Подстановка (2.15) в (2.14) и решение относительно R_C^δ с учетом (2.13) дает:

$$R_C^\delta = R_B^\delta = \frac{\delta EA}{a+b}, \quad (2.16)$$

что, в свою очередь, приводит к одинаковому во всех сечениях стержня значению внутреннего осевого усилия (рис. 2.3):

$$N_\delta = -R_C^\delta = -R_B^\delta = -\frac{\delta EA}{a+b}. \quad (2.17)$$

По аналогии с (2.11) знак минус в формуле (2.17) указывает на то, что при монтаже с натягом (случай $\delta > 0$, т.е. фактическая длина стержня больше номинальной) стержень будет сжат, а при монтаже с зазором (случай $\delta < 0$, когда фактическая длина стержня меньше номинальной) – наоборот, растянут.

Монтажные напряжения в стержне постоянного поперечного сечения определяются по формуле

$$\sigma_{\delta} = \frac{N_{\delta}}{A} = -\frac{\delta \cdot E}{a+b}, \quad (2.18)$$

и, как видно, не зависят от размеров сечения.

2.4. Расчет стержневой системы при силовом нагружении

Рассмотрим абсолютно твердое тело $BCDK$, шарнирно закрепленное в точке B и поддерживаемое стержнями 1 и 2, длины которых $l_1 = h_1$ и $l_2 = \frac{h_2}{\sin \alpha}$, площади поперечных сечений A_1 и A_2 , модули упругости материалов E_1 и E_2 соответственно (рис. 2.4). Система нагружена внешней сосредоточенной силой F , собственным весом конструкции пренебрегаем. Необходимо определить внутренние усилия в стержнях (т.е. выразить продольные силы в стержнях N_1 и N_2 через внешнее нагружение F).

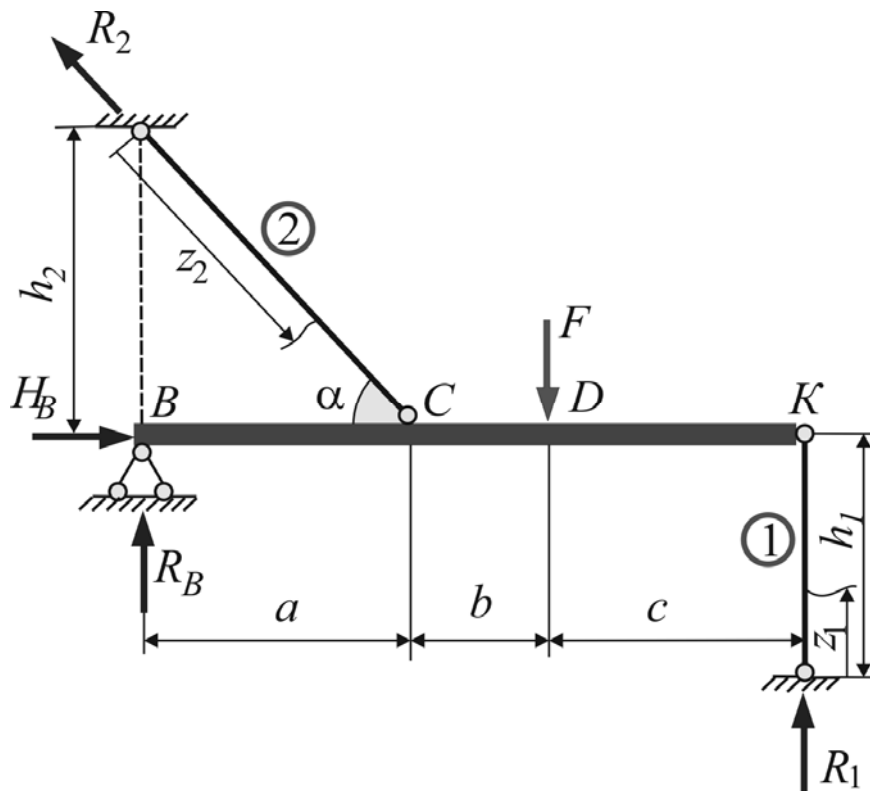


Рис. 2.4. Расчетная схема примера 2.4

1. **ССЗ.** Прикладываем реакции опор H_B , R_B , R_1 , R_2 и составляем уравнения равновесия для данной плоской системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0: H_B - R_2 \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{yi} = 0: R_B + R_1 + R_2 \sin \alpha - F = 0; \\ \sum M_{Bi} = 0: R_1(a + b + c) - F(a + b) + R_2 a \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} (2.19)$$

Применив метод сечений к стержням 1 и 2, получаем, что внутренние продольные силы в них равны реакциям соответствующих опор: $N_1(z_1) = -R_1$ и $N_2(z_2) = R_2$. С учетом этого, уравнения (2.19) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0: H_B - N_2 \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{yi} = 0: R_B - N_1 + N_2 \sin \alpha - F = 0; \\ \sum M_{Bi} = 0: -N_1(a + b + c) - F(a + b) + N_2 a \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} (2.20)$$

Первые два уравнения системы (2.20) не могут быть непосредственно использованы для отыскания усилий N_1 и N_2 , так как содержат неизвестные составляющие реакции неподвижного шарнира H_B и R_B , не представляющие интереса в данной задаче. Вместе с тем, одного третьего уравнения системы (2.20) недостаточно для определения двух неизвестных N_1 , N_2 ; следовательно, задача является статически неопределимой, со степенью статической неопределимости, равной единице.

2. **ГСЗ.** Под действием внешнего нагружения стержень 2 растянется, стержень 1 сожмется, а брус $BCDK$ займет новое положение $BC_1D_1K_1$ (рис. 2.5), причем точки C и K перейдут в точки C_1 и K_1 соответственно. Определим изменение длин стержней.

Абсолютное значение укорочения стержня 1: $|\Delta \ell_1| = |KK_1|$.

Чтобы найти удлинение наклонного стержня 2, необходимо из точки C провести дугу окружности радиуса ℓ_2 с центром в точке подвеса

стержня до пересечения с новым его положением. Однако, в связи с малостью деформаций стержней по сравнению с размерами стержневой системы, перемещения точек C , D , K при повороте абсолютно твердого тела можно считать происходящими не по дуге, а по касательной к ней, по нормали к первоначальному положению твердого тела. Тогда удлинение стержня 2 будет приблизительно равняться длине отрезка C_1C_2 , т.е. $\Delta l_2 = C_1C_2$.

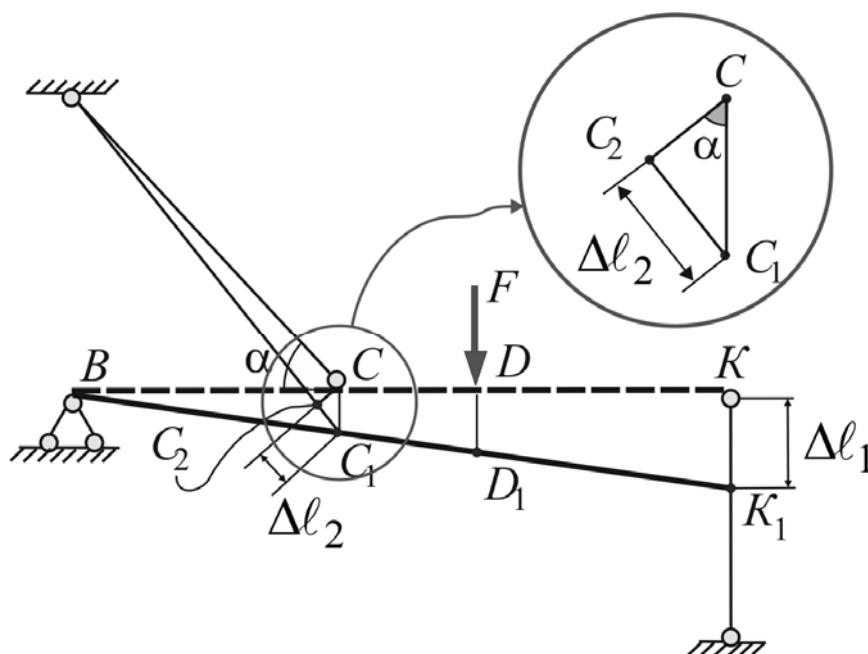


Рис. 2.5. Деформированная схема примера 2.4

Из подобия треугольников BCC_1 и BKK_1 (рис. 2.5) следует, что $\frac{CC_1}{BC} = \frac{KK_1}{BK}$. Так как $KK_1 = |\Delta l_1|$ и $CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$, а также учитывая, что по условию $BC = a$, $BK = a + b + c$ (рис. 2.4), получаем:

$$\frac{\Delta l_2}{a \sin \alpha} = \frac{|\Delta l_1|}{a + b + c}. \quad (2.21)$$

Окончательно уравнение совместности перемещений запишется в

виде

$$|\Delta l_1| = \Delta l_2 \frac{a+b+c}{a \sin \alpha}. \quad (2.22)$$

3. **ФСЗ.** Поскольку удлинения стержней определяются выражениями

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2}, \quad (2.23)$$

то условие (2.22) можно представить в виде $\frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2} \cdot \frac{a+b+c}{a \sin \alpha}$. Или, после несложных преобразований:

$$N_1 = N_2 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cdot \frac{(a+b+c) \cdot \ell_2}{a \cdot \ell_1 \sin \alpha}. \quad (2.24)$$

4. **Синтез.** Подставив (2.24) в последнее уравнение системы (2.20), получим разрешающую формулу для N_2 :

$$N_2 = F \frac{E_2 A_2 \ell_1 a (a+b) \sin \alpha}{E_1 A_1 \ell_2 (a+b+c)^2 + E_2 A_2 \ell_1 a^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2.25)$$

Последним шагом решения является подстановка (2.25) в (2.24), которая дает выражение для другого усилия N_1 :

$$N_1 = F \frac{E_1 A_1 \ell_2 (a+b)(a+b+c)}{E_1 A_1 \ell_2 (a+b+c)^2 + E_2 A_2 \ell_1 a^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2.26)$$

В заключение отметим одно из главных преимуществ статически неопределимых стержневых систем, которое состоит в том, что при ис-

ключении одного из стержней усилия автоматически перераспределяются между оставшимися элементами. К недостаткам этих систем можно отнести их высокую чувствительность к неточностям изготовления и изменениям температуры.

2.5. Монтажные напряжения в стержневой системе

Рассмотрим определение монтажных напряжений на примере выше проанализированной стержневой системы. Предположим, что фактическая длина первого стержня после изготовления оказалась меньше номинального (требуемого) значения, т.е. $\delta_1 = l_1^{\text{факт.}} - l_1^{\text{ном.}} < 0$. Вследствие этого, после сборки системы твердое тело займет некоторое промежуточное положение BC_1K_2 , а в закреплениях возникнут реактивные силы R_1^δ , R_2^δ , R_B^δ , H_B^δ (рис. 2.6).

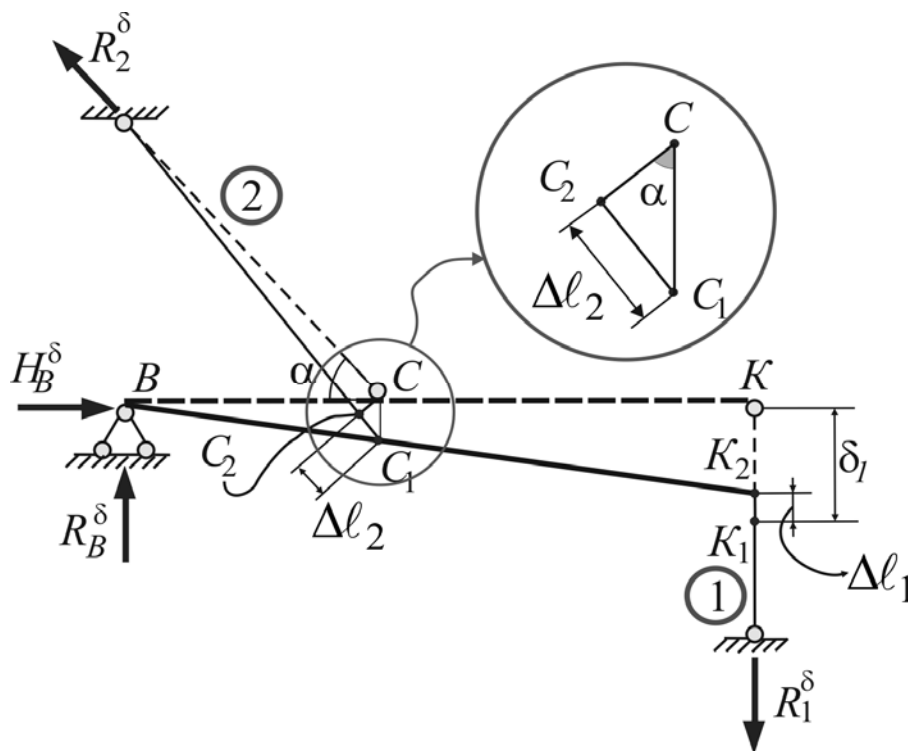


Рис. 2.6. Деформированная схема примера 2.5

1. ССЗ. Уравнения равновесия для представленной плоской системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0: H_B^\delta - R_2^\delta \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{yi} = 0: R_B^\delta - R_1^\delta + R_2^\delta \sin \alpha = 0; \\ \sum M_{Bi} = 0: -R_1^\delta (a + b + c) + R_2^\delta a \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Из рассмотрения деформированной системы следует, что стержни удлиняются и поэтому – на основании метода сечений, – растягивающие усилия в них будут равны соответствующим реакциям, т.е. $N_1^\delta = R_1^\delta$ и $N_2^\delta = R_2^\delta$. С учетом этого, уравнения (2.27) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0: H_B^\delta - N_2^\delta \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{yi} = 0: R_B^\delta - N_1^\delta + N_2^\delta \sin \alpha = 0; \\ \sum M_{Bi} = 0: -N_1^\delta (a + b + c) + N_2^\delta a \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Так как искомыми величинами являются N_1^δ и N_2^δ , а неизвестные составляющие реакции неподвижного шарнира H_B^δ и R_B^δ в данном случае интереса не представляют, первые два уравнения в системе (2.28) следует отбросить. По аналогии с предыдущим примером получаем, что оставшегося третьего уравнения системы (2.28) недостаточно для определения двух неизвестных, и задача является один раз (единожды) статически неопределимой.

2. ГСЗ. Из подобия треугольников BCC_1 и BKK_2 (рис. 2.6) получаем $\frac{CC_1}{BC} = \frac{KK_2}{BK}$, причем $CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta \ell_2}{\sin \alpha}$, а $KK_2 = KK_1 - K_1K_2 = |\delta_1| - \Delta \ell_1$. Учитывая также, что по условию $BC = a$, $BK = a + b + c$ (рис. 2.4), находим:

$$\frac{\Delta \ell_2}{a \sin \alpha} = \frac{|\delta_1| - \Delta \ell_1}{a + b + c}. \quad (2.29)$$

Таким образом, условие совместности перемещений в данной зада-

че можно записать в следующем виде:

$$\frac{a+b+c}{a \cdot \sin \alpha} \Delta l_2 + \Delta l_1 = |\delta_1|. \quad (2.30)$$

3. **ФСЗ.** Согласно закону Гука, удлинения стержней следующим образом связаны с внутренними силами в них:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1^\delta \ell_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2^\delta \ell_2}{E_2 A_2}, \quad (2.31)$$

что после подстановки в (2.30) дает:

$$\frac{a+b+c}{a \cdot \sin \alpha} \frac{N_2^\delta \ell_2}{E_2 A_2} + \frac{N_1^\delta \ell_1}{E_1 A_1} = |\delta_1|. \quad (2.32)$$

4. **Синтез.** Выразив из последнего уравнения системы (2.28) N_1^δ в виде

$$N_1^\delta = N_2^\delta \frac{a \cdot \sin \alpha}{a+b+c}, \quad (2.33)$$

и, подставив в (2.32), получим:

$$N_2^\delta = \frac{|\delta_1|}{\frac{a+b+c}{a \cdot \sin \alpha} \frac{\ell_2}{E_2 A_2} + \frac{a \cdot \sin \alpha}{a+b+c} \frac{\ell_1}{E_1 A_1}}. \quad (2.34)$$

Монтажные напряжения в стержнях вычисляются по известным формулам:

$$\sigma_1^\delta = \frac{N_1^\delta}{A_1}, \quad \sigma_2^\delta = \frac{N_2^\delta}{A_2}. \quad (2.35)$$

Выражения (2.33)–(2.35) представляют собой решение задачи. В случае, когда первый стержень изготовлен длиннее, чем это необходимо ($\delta_1 > 0$), расчетная схема будет идентичной, но усилия и напряжения получатся сжимающими.

2.6. Определение температурных напряжений в стержневой системе

Продолжим рассмотрение стержневой системы из примеров 2.4 и 2.5. Предположим, что первый стержень нагревается на $\Delta t_1 > 0$ (рис. 2.7).

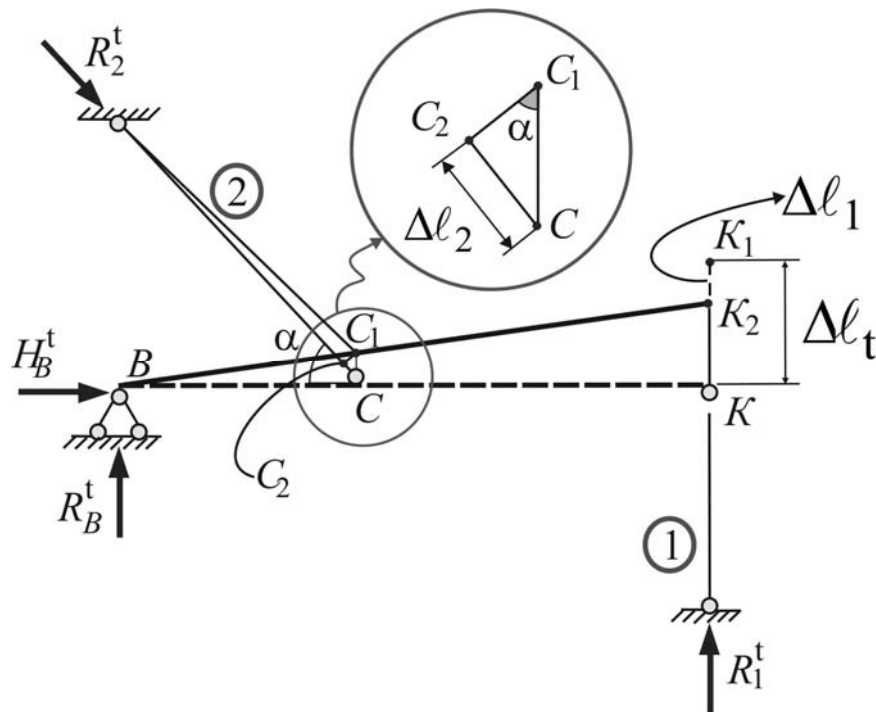


Рис. 2.7. Деформированная схема примера 2.6

Чтобы получить представление о механизме деформирования системы в этом случае, используем следующий прием. Мысленно отсоединим первый стержень от тела BCK , после чего нагреем стержень на Δt_1 , предоставив ему возможность свободно удлиниться на величину $\Delta l_t = \alpha_1 \cdot l_1 \cdot \Delta t_1$. Затем снова соберем систему в нагретом состоянии. Для этого, сжимая второй стержень, повернем твердое тело в шарнире B до

положения BK_1 (рис. 2.7). Удерживая тело в этом положении, присоединим к нему первый стержень, после чего "отпустим" систему, предоставив её самой себе.

После сборки системы твердое тело займет некоторое промежуточное положение BC_1K_2 , а в неподвижной шарнирной опоре и точках подвеса стержней возникнут реактивные усилия R'_B , H'_B , R'_1 и R'_2 (рис. 2.7). При этом реакции в стержнях R'_1 и R'_2 будут сжимающими, поскольку из рассмотрения деформированной системы следует, что оба стержня укорачиваются.

1. ССЗ. Уравнения равновесия для рассматриваемой системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0: H'_B + R'_2 \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{yi} = 0: R'_B + R'_1 - R'_2 \sin \alpha = 0; \\ \sum M_{Bi} = 0: R'_1(a + b + c) - R'_2 a \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Последовательно применяя метод сечений к каждому из стержней, выразим внутренние усилия в них через соответствующие реакции: $N'_1 = -R'_1$ и $N'_2 = -R'_2$. Тогда можно переписать систему (2.36) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0: H'_B - N'_2 \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{yi} = 0: R'_B - N'_1 + N'_2 \sin \alpha = 0; \\ \sum M_{Bi} = 0: -N'_1(a + b + c) + N'_2 a \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Из трех уравнений системы (2.37) для определения искомых стержневых усилий N'_1 и N'_2 может быть использовано только последнее уравнение, так как первые два уравнения содержат неизвестные составляющие реакции неподвижной опоры R'_B и H'_B , не представляющие интереса в данном случае, и потому должны быть отброшены. Таким образом, как и в примерах 2.4 и 2.5, рассмотренных ранее, данная задача является единожды (один раз) статически неопределимой, так как для оты-

скания двух неизвестных усилий N_1^t и N_2^t имеется всего одно уравнение статики.

2. **ГСЗ.** Из подобия треугольников BCC_1 и BKK_2 (рис. 2.7) имеем $\frac{CC_1}{BC} = \frac{KK_2}{BK}$, при этом $CC_1 = \frac{C_1 C_2}{\sin \alpha} = \frac{|\Delta \ell_2|}{\sin \alpha}$, $KK_2 = KK_1 - K_1 K_2 = \Delta \ell_t - |\Delta \ell_1|$, где $\Delta \ell_t = \alpha_t \cdot \ell_1 \cdot \Delta t_1$. Так как по условию задачи $BC = a$, $BK = a + b + c$ (рис. 2.4), получаем:

$$\frac{|\Delta \ell_2|}{a \sin \alpha} = \frac{\Delta \ell_t - |\Delta \ell_1|}{a + b + c}. \quad (2.38)$$

Это позволяет записать уравнение совместности перемещений в данной задаче следующим образом:

$$\frac{a + b + c}{a \cdot \sin \alpha} |\Delta \ell_2| + |\Delta \ell_1| = \Delta \ell_t. \quad (2.39)$$

3. **ФСЗ.** Выражая по закону Гука удлинения стержней через внутренние усилия в уже знакомой форме: $\Delta \ell_1 = -\frac{N_1^t \ell_1}{E_1 A_1}$, $\Delta \ell_2 = -\frac{N_2^t \ell_2}{E_2 A_2}$ (знаки минус в правых частях отражают тот факт, что оба стержня укорачиваются), и подставляя эти выражения в (2.39), будем иметь:

$$\frac{a + b + c}{a \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{N_2^t \ell_2}{E_2 A_2} + \frac{N_1^t \ell_1}{E_1 A_1} = \Delta \ell_t. \quad (2.40)$$

4. **Синтез.** Из последнего уравнения системы (2.37) получим:

$$N_1^t = N_2^t \frac{a \cdot \sin \alpha}{a + b + c}, \quad (2.41)$$

что после подстановки в (2.40) приведет к результату:

$$N_2^t = \frac{|\Delta \ell_t|}{\frac{a+b+c}{a \cdot \sin \alpha} \frac{\ell_2}{E_2 A_2} + \frac{a \cdot \sin \alpha}{a+b+c} \frac{\ell_1}{E_1 A_1}} \quad (2.42)$$

Теперь по известным формулам можно вычислить напряжения от изменения температуры первого стержня:

$$\sigma_1^t = -\frac{N_1^t}{A_1}, \quad \sigma_2^t = -\frac{N_2^t}{A_2}. \quad (2.43)$$

Таким образом, получено решение задачи в виде выражений (2.41)–(2.43). В случае, когда первый стержень охлаждается ($\Delta t_1 < 0$), расчетная схема остается аналогичной рассмотренной, но усилия и напряжения будут растягивающими.

2.7. Учет совместного действия внешнего нагружения и дополнительных факторов в стержневой системе

Рассмотрим последовательность решения задачи, в которой на стержневую систему, изображенную на рис. 2.8, действует внешнее нагружение в виде сосредоточенных сил F , к тому же стержни с номером 1 изготовлены длиннее номинального размера на δ_1 и охлаждаются на Δt_1 . Брус DCD' считается абсолютно жестким.

Дано:

$$F = 250 \text{ кН}; \delta_1 = 0,2 \text{ см}; \Delta t_1 = -40 \text{ }^\circ\text{C}; \alpha_t = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C};$$

$$\sigma_T = 240 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; a = 1,8 \text{ м}; c = 1,2 \text{ м}; h = 1,6 \text{ м};$$

Необходимо:

1. Раскрыть статическую неопределимость стержневой системы при действии силового нагружения. Выразить значения реактивных уси-

лий и внутренних силовых факторов через параметр нагружения F . Определить напряжения в стержнях.

2. Раскрыть статическую неопределимость конструкции при наличии неточности изготовления первого стержня. Определить монтажные напряжения в стержнях.

3. Раскрыть статическую неопределимость конструкции при наличии изменения температуры первого стержня. Определить температурные напряжения в стержнях.

4. Проверить прочность стержневой системы при действии трех факторов (внешнего нагружения, неточности изготовления и изменения температуры первого стержня) и определить коэффициент запаса по текучести.

2.7.1. Учет сосредоточенных сил. Определение напряжений в стержнях от внешнего нагружения

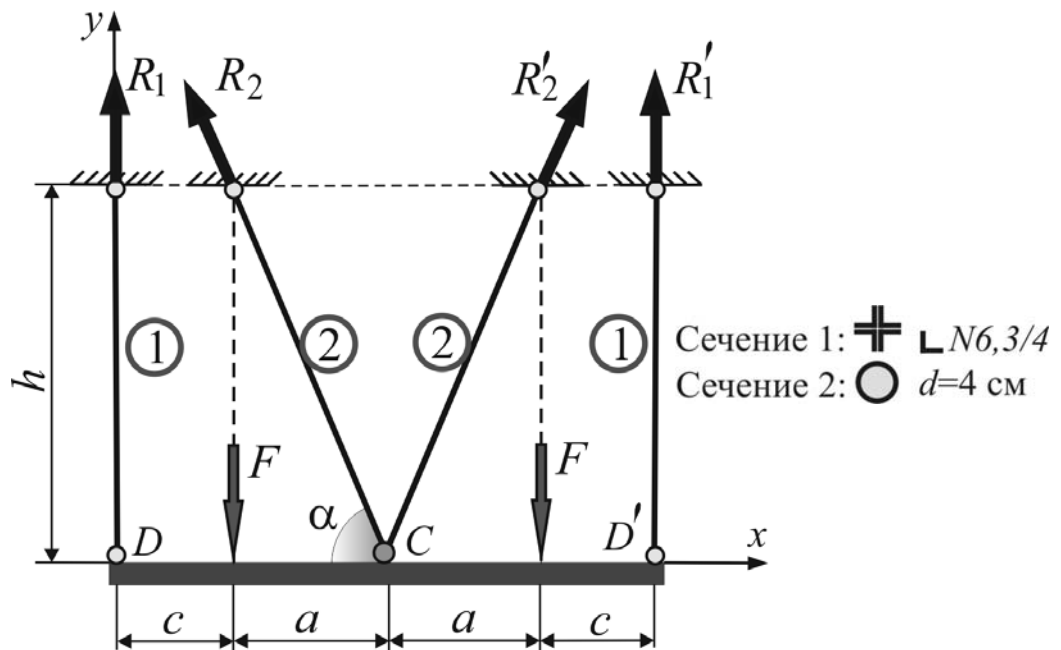


Рис. 2.8. Расчетная схема примера 2.7.1

Определение площадей поперечных сечений стержней и значений синуса и косинуса угла α для последующих вычислений:

$$A_1 = 4 \cdot 4,96 \approx 19,8 \text{ см}^2; \quad A_2 = \frac{\pi d^2}{4} \approx 12,6 \text{ см}^2;$$

$$\ell_2 = \sqrt{a^2 + h^2} = 2,42 \text{ м}; \quad \sin \alpha = \frac{h}{\ell_2} = 0,664; \quad \cos \alpha = \frac{a}{\ell_2} = 0,747.$$

Установление степени статической неопределимости: $n = 4 - 3 = 1$.

1. **ССЗ.** Уравнения равновесия системы в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_{xi} = 0: & -R_2 \cos \alpha + R_2' \cos \alpha = 0; \\ \Sigma F_{yi} = 0: & R_1 + R_2 \sin \alpha + R_2' \sin \alpha + R_1' - 2F = 0; \\ \Sigma M_{Ci} = 0: & -R_1(c + a) + R_1'(a + c) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Поскольку конструкция и нагрузка симметричны относительно вертикальной оси, проходящей через точку C , реакции в точках подвеса стержней с одинаковыми номерами должны быть равны, т.е. должны выполняться условия:

$$R_1' = R_1, \quad R_2' = R_2. \quad (2.45)$$

Подстановка условий симметрии (2.45) в уравнения статики (2.44) исключает из рассмотрения первое и третье уравнения системы, обращая их в тождества, а оставшееся второе уравнение принимает более простой вид:

$$R_1 + R_2 \sin \alpha - F = 0. \quad (2.46)$$

Таким образом, число неизвестных задачи уменьшается с 4 до 2, что соответствует рассмотрению только левой половины конструкции с учетом симметрии её деформирования в целом (рис. 2.9). Степень статической неопределимости задачи при этом не изменяется.

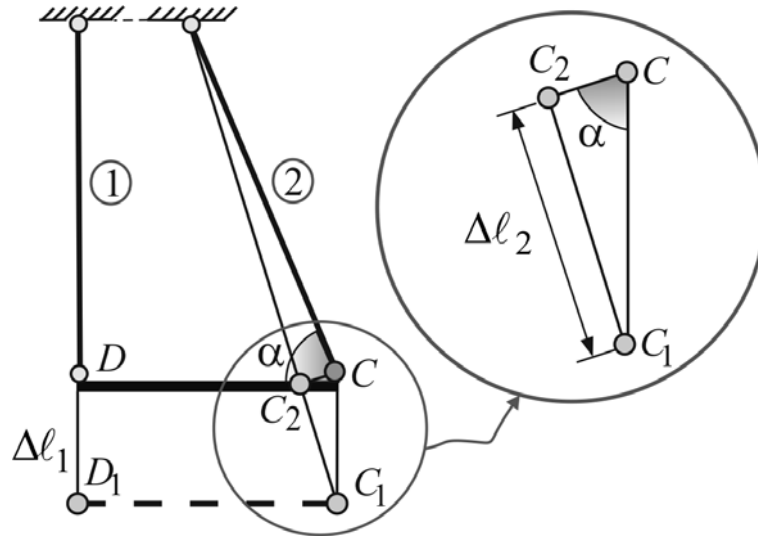


Рис. 2.9. Деформированная схема в примере 2.7.1

2. **ГСЗ.** Под нагрузкой недеформируемая балка DC переместится в положение D_1C_1 , из соображений симметрии параллельное исходному (рис. 2.9). При этом $DD_1 = CC_1$, $DD_1 = \Delta l_1$, $C_1C_2 = \Delta l_2$, а из треугольника CC_1C_2 получаем $CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$. Следовательно, условие совместности перемещений имеет вид:

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}. \quad (2.47)$$

3. **ФСЗ.** Применяя к стержням метод сечений, получим

$$N_1 = R_1; \quad N_2 = R_2. \quad (2.48)$$

Используя (2.48), удлинения стержней можно определить по формулам (с учетом того, что $l_1 = h$ и $l_2 = h/\sin \alpha$):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} = \frac{R_1 \cdot h}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} = \frac{R_2 \cdot h}{EA_2 \sin \alpha}. \quad (2.49)$$

4. **Синтез.** Подставив физические зависимости (2.49) в условие совместности перемещений (2.47), получим

$$\frac{R_1 \cdot h}{EA_1} = \frac{R_2 \cdot h}{EA_2 \sin^2 \alpha}; \quad R_1 = R_2 \frac{A_1}{A_2 \sin^2 \alpha} = 3,564R_2. \quad (2.50)$$

Подстановка (2.50) в уравнение равновесия (2.46) дает:

$$R_1 + R_2 \cdot \sin \alpha - F = 3,564R_2 + 0,664R_2 - F = 4,228R_2 - F = 0. \quad (2.51)$$

Из (2.51) с учетом (2.50) получаем реакции и усилия в стержнях:

$$R_2 = \frac{F}{4,228} = 0,237F = N_2; \quad R_1 = 3,564R_2 = 0,843F = N_1. \quad (2.52)$$

Заключительным действием подсчитаем напряжения в стержнях от внешнего силового нагружения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,843 \cdot 250 \cdot 10^3}{19,8 \cdot 10^{-4}} = 106,4 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,237 \cdot 250 \cdot 10^3}{12,6 \cdot 10^{-4}} = 47 \text{ МПа}.$$

Как и следовало ожидать, при данной схеме нагружения все стержни растягиваются.

2.7.2. Учет неточности изготовления стержней

Рассмотрим теперь влияние неточности изготовления элементов стержневой системы на внутренние усилия и напряжения в ней – по условию задачи оба стержня 1 изготовлены на величину δ_1 длиннее, чем требуется (рис. 2.10).

Установление степени статической неопределимости: $n = 4 - 3 = 1$.

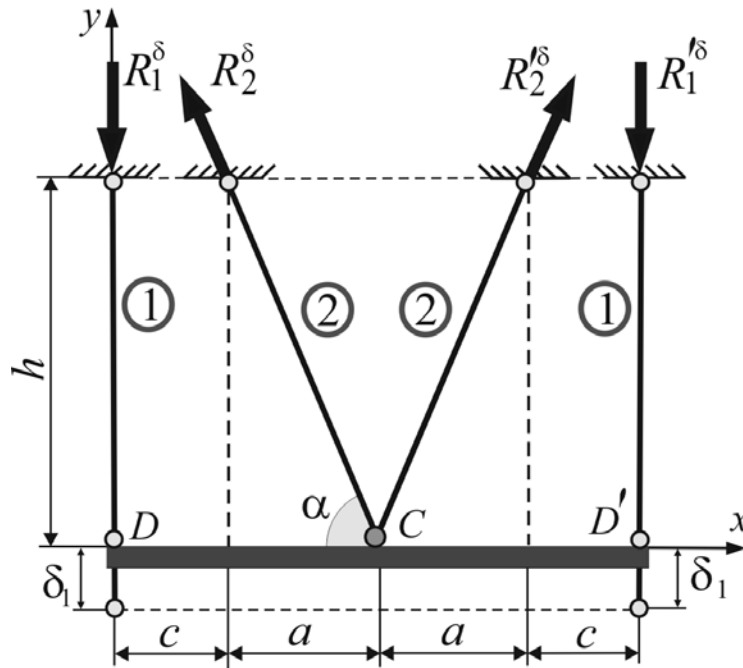


Рис. 2.10. Расчетная схема примера 2.7.2

1. **ССЗ.** Повторяя рассуждения, аналогичные описанным выше при рассмотрении силового нагружения, отметим, что, с учетом условий симметрии расчетной схемы $R_1^\delta = R_1'^\delta$, $R_2^\delta = R_2'^\delta$, единственное уравнение равновесия для левой половины конструкции на рис. 2.10 будет иметь вид:

$$\sum F_y = 0; \quad -R_1^\delta + R_2^\delta \cdot \sin \alpha = 0. \quad (2.53)$$

2. **ГСЗ.** Поскольку в силу симметрии задачи новое положение элемента недеформируемого бруса D_1C_1 должно быть параллельно исходному его положению DC , то по рис. 2.11 имеем: $DD_2 = \delta_1$, $D_1D_2 = |\Delta l_1^\delta|$, $DD_1 = \delta_1 - |\Delta l_1^\delta|$, $DD_1 = CC_1$, $C_1C_2 = \Delta l_2^\delta$, а из треугольника CC_1C_2 следует $CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_2^\delta}{\sin \alpha}$. Таким образом, условие совместности перемещений можно записать в виде

$$\delta_1 - |\Delta \ell_1^\delta| = \frac{\Delta \ell_2^\delta}{\sin \alpha}. \quad (2.54)$$

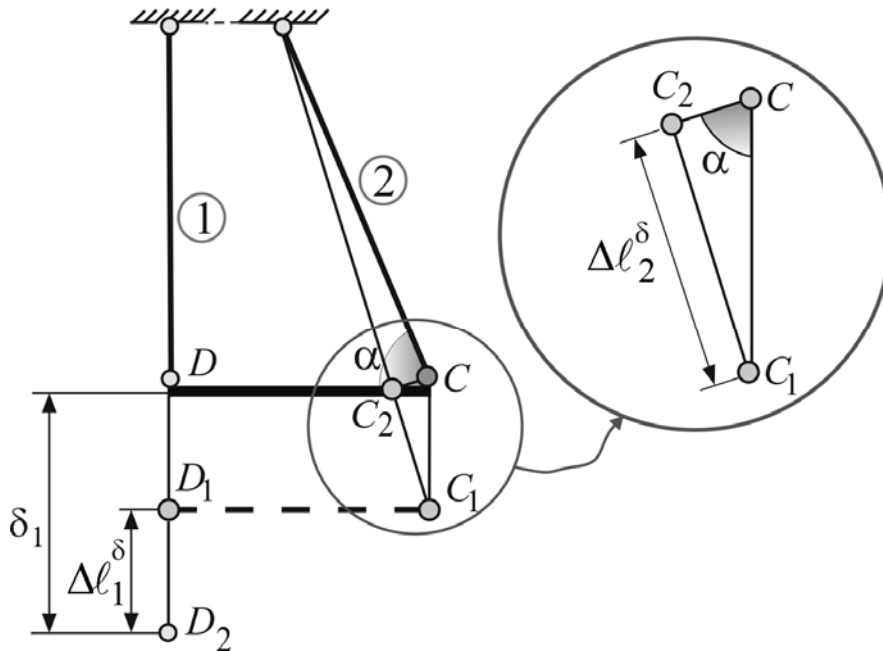


Рис. 2.11. Деформированная схема в примере 2.7.2

3. **ФСЗ.** Внутренние усилия в стержнях (метод сечений):

$$N_1^\delta = -R_1^\delta; \quad N_2^\delta = R_2^\delta. \quad (2.55)$$

Удлинения стержней составят (учитывая, что $l_1 = h$ и $l_2 = h/\sin \alpha$):

$$\Delta \ell_1^\delta = \frac{N_1^\delta \cdot l_1}{EA_1} = -\frac{R_1^\delta \cdot h}{EA_1}; \quad \Delta \ell_2^\delta = \frac{N_2^\delta \cdot l_2}{EA_2} = \frac{R_2^\delta \cdot h}{EA_2 \sin \alpha}. \quad (2.56)$$

4. **Синтез.** Подставим физические уравнения (2.56) в уравнение совместности перемещений (2.54):

$$\delta_1 - \frac{R_1^\delta \cdot h}{EA_1} = \frac{R_2^\delta \cdot h}{EA_2 \sin^2 \alpha}, \text{ из чего следует}$$

$$R_1^\delta = \delta_1 \frac{EA_1}{h} - R_2^\delta \frac{A_1}{A_2 \sin^2 \alpha} = 495 \cdot 10^3 - 3,564 R_2^\delta. \quad (2.57)$$

Решая (2.57) совместно с уравнением статики (2.53), найдем реакции и усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} -R_1^\delta + R_2^\delta \sin \alpha &= -495 \cdot 10^3 + 3,564 R_2^\delta + 0,664 R_2^\delta = 0; \\ -495 \cdot 10^3 + 4,228 R_2^\delta &= 0; \\ R_2^\delta &\approx 117,1 \text{ кН} = N_2^\delta; \quad R_1^\delta \approx 77,7 \text{ кН} = -N_1^\delta. \end{aligned}$$

Таким образом, монтажные напряжения в стержнях составят

$$\sigma_1^\delta = \frac{N_1^\delta}{A_1} = -\frac{77,7 \cdot 10^3}{19,8 \cdot 10^{-4}} = -39,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_2^\delta = \frac{N_2^\delta}{A_2} = \frac{117,1 \cdot 10^3}{12,6 \cdot 10^{-4}} = 92,9 \text{ МПа}.$$

Результаты показывают, что стержни 1 находятся в сжатом состоянии, а стержни 2 – в растянутом.

2.7.3. Учет температурных нагрузок

Температурной нагрузкой в задаче будем считать охлаждение стержней 1 на 40°C , вследствие чего они будут стремиться укоротиться на величину $\delta_t = \alpha_t h \Delta t_1 = 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot (-40) = -0,8 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 2.12).

Установление степени статической неопределимости: $n = 4 - 3 = 1$.

1. **ССЗ.** Поскольку расчетные схемы на рис. 2.11 и 2.12 отличаются лишь противоположными направлениями реакций, и принимая во внимание условия симметрии расчетной схемы $R_1^t = R_1^{t'}$, $R_2^t = R_2^{t'}$, запишем уравнение равновесия для левой половины конструкции по аналогии с предыдущим случаем:

$$\sum F_y = 0; \quad R_1^t - R_2^t \cdot \sin \alpha = 0. \quad (2.58)$$

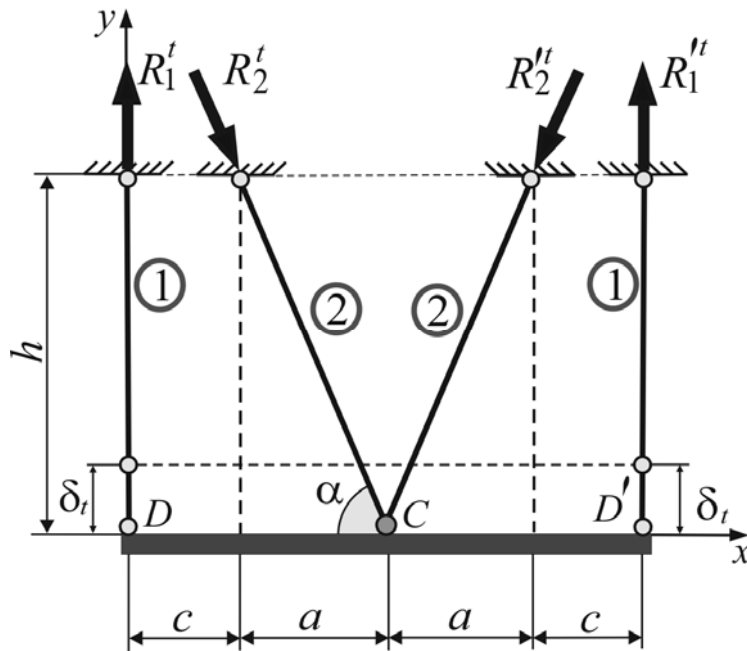


Рис. 2.12. Расчетная схема примера 2.7.3

2. ГСЗ. Из рассмотрения деформированной схемы имеем (рис. 2.13): $DD_2 = |\delta_t|$, $D_1D_2 = \Delta l_1^t$, $DD_1 = |\delta_t| - \Delta l_1^t$, $DD_1 = CC_1$, $CC_2 = |\Delta l_2^t|$, $CC_1 = \frac{CC_2}{\sin \alpha} = \frac{|\Delta l_2^t|}{\sin \alpha}$. Следовательно, условие совместности перемещений будет иметь вид

$$|\delta_t| - \Delta l_1^t = \frac{|\Delta l_2^t|}{\sin \alpha}. \quad (2.59)$$

3. ФСЗ. Внутренние усилия в стержнях (метод сечений):

$$N_1^\delta = R_1^\delta; \quad N_2^\delta = -R_2^\delta. \quad (2.60)$$

Удлинения стержней с учетом соотношений $l_1 = h$ и $l_2 = h/\sin \alpha$:

$$\Delta \ell_1^t = \frac{N_1^t \cdot \ell_1}{EA_1} = \frac{R_1^t \cdot h}{EA_1}; \quad \Delta \ell_2^t = \frac{N_2^t \cdot \ell_2}{EA_2} = -\frac{R_2^t \cdot h}{EA_2 \sin \alpha}. \quad (2.61)$$

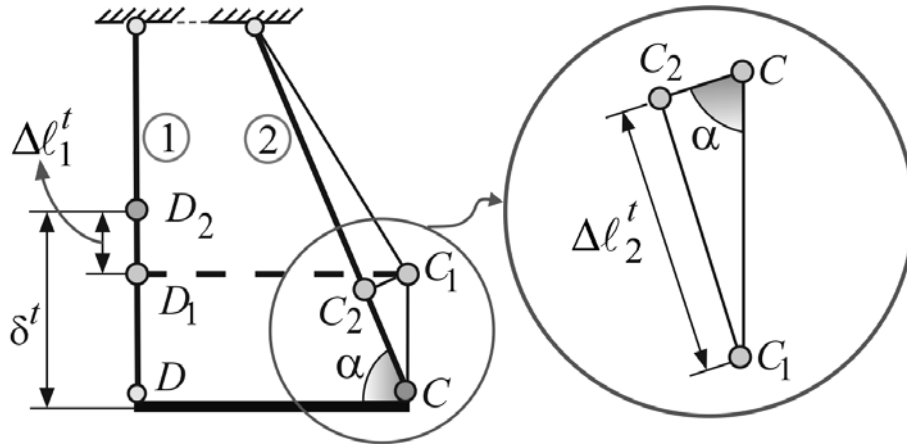


Рис. 2.13. Деформированная схема в примере 2.7.3

4. **Синтез.** Подстановка физических зависимостей (2.61) в условие совместности перемещений (2.59) дает:

$$\delta_t - \frac{R_1^t \cdot h}{EA_1} = \frac{R_2^t \cdot h}{EA_2 \sin^2 \alpha}, \text{ из чего следует}$$

$$R_1^t = \delta_t \frac{EA_1}{h} - R_2^t \frac{A_1}{A_2 \sin^2 \alpha} = 198 \cdot 10^3 - 3,564 R_2^t. \quad (2.62)$$

Подставив (2.62) в уравнение равновесия (2.58), получим реакции и усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} -R_1^t + R_2^t \cdot \sin \alpha &= -198 \cdot 10^3 + 3,564 R_2^t + 0,664 R_2^t = 0; \\ -198 \cdot 10^3 + 4,228 R_2^t &= 0; \\ R_2^t &\approx 46,8 \text{ кН} = -N_2^\delta; \quad R_1^t \approx 31,1 \text{ кН} = N_1^\delta. \end{aligned}$$

Последним действием определяем температурные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1^t = \frac{N_1^t}{A_1} = \frac{31,1 \cdot 10^3}{19,8 \cdot 10^{-4}} = 15,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_2^t = \frac{N_2^t}{A_2} = -\frac{46,8 \cdot 10^3}{12,6 \cdot 10^{-4}} = -37,1 \text{ МПа}.$$

Отметим, что стержни 2 находятся в сжатом состоянии, а стержни 1 – в растянутом.

2.7.4. Определение суммарных напряжений

Для подсчета напряжений, возникающих в стержнях при одновременном действии различных нагрузок, рассмотренных выше в примерах 2.7.1–2.7.3, воспользуемся принципом суперпозиции, в соответствии с которым суммарные напряжения представляют собой сумму напряжений от каждой из нагрузок в отдельности, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_1^\Sigma &= \sigma_1 + \sigma_1^\delta + \sigma_1^t = 106,4 - 39,3 + 15,7 = 82,8 \text{ МПа}, \\ \sigma_2^\Sigma &= \sigma_2 + \sigma_2^\delta + \sigma_2^t = 47 + 92,9 - 37,1 = 102,8 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Наибольшее напряжение действует во втором стержне, т.е.

$$\sigma_{\max} = \left| \sigma_2^\Sigma \right| = 102,8 \text{ МПа}.$$

Отсюда коэффициент запаса по текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{|\sigma_{\max}|} = \frac{240}{102,8} = 2,34 > 1,$$

из чего следует, что условие прочности выполнено.

2.8. Стержневая система под силовым нагружением

Стержневая система (рис. 2.14) состоит из абсолютно твердого тела $BCDK$, шарнирно закрепленного в точке B и поддерживаемого стержнями 1 и 2 (длины которых $l_1 = l_2 = h$, площади поперечных сечений

A_1, A_2 , модули упругости материала E_1, E_2). Система нагружена внешней сосредоточенной силой F , собственным весом её элементов пренебрегаем. Требуется определить внутренние усилия в стержнях N_1 и N_2 (т.е. выразить их через внешнее нагружение F).

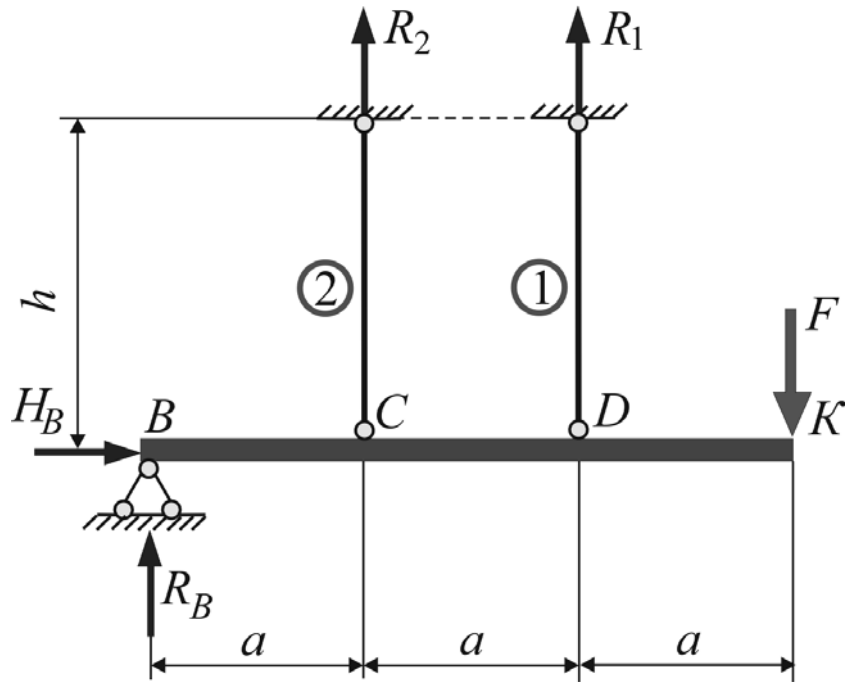


Рис. 2.14. Расчетная схема примера 2.8

1. **ССЗ.** Прикладываем реакции шарнирной опоры H_B, R_B и реакции в точках подвеса стержней R_1 и R_2 . Записываем систему уравнений статического равновесия для рассматриваемой плоской системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0; H_B = 0; \\ \sum F_{yi} = 0; R_B + R_1 + R_2 - F = 0; \\ \sum M_{Bi} = 0; R_1 2a - F 3a + R_2 a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Первое и второе уравнения системы (2.63) следует отбросить, так как они содержат составляющие реакции шарнирной опоры H_B и R_B , определение которых по условию задачи не требуется. Применяя метод

сечений к стержням 1 и 2, получаем, что внутренние продольные силы N_1 и N_2 равны соответствующим реакциям, т.е. $N_1 = R_1$ и $N_2 = R_2$. С учетом этого последнее уравнение системы (2.63) можно переписать в виде

$$2N_1a + N_2a = 3Fa. \quad (2.64)$$

Таким образом, степень статической неопределимости задачи равна $n = 2 - 1 = 1$.

2. ГСЗ. Под действием внешней нагрузки стержни 1 и 2 растянутся, а брус $BCDK$ займет новое положение $BC_1D_1K_1$ (рис. 2.15), при этом точки C и D перейдут в положения C_1 и D_1 соответственно. Рассмотрим изменения длин стержней.

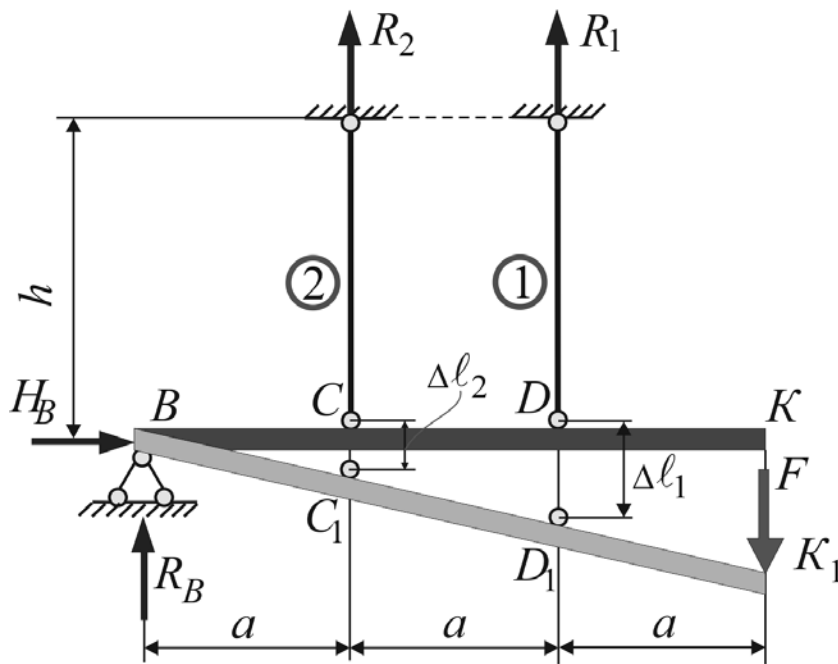


Рис. 2.15. Деформированная схема в примере 2.8

Абсолютное значение удлинения стержня 1 – $|\Delta l_1| = DD_1$, стержня 2 – $|\Delta l_2| = CC_1$. Из подобия треугольников BCC_1 и BDD_1 имеем

$\frac{CC_1}{BC} = \frac{DD_1}{BD}$. Учитывая, что $BC = a$, $BD = 2a$, последнее соотношение можно переписать в виде $\frac{\Delta l_2}{a} = \frac{\Delta l_1}{2a}$, из чего следует условие совместности перемещений в задаче:

$$\Delta l_1 = 2\Delta l_2. \quad (2.65)$$

3. **ФСЗ.** Выразим удлинения стержней через осевые силы в них, их длины и жесткости на растяжение-сжатие по известным формулам:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2}. \quad (2.66)$$

Подстановка (2.66) в условие совместности перемещений (2.65) дает:

$$\frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1} = 2 \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2}, \quad (2.67)$$

откуда, с учетом $\ell_1 = \ell_2$, получим:

$$N_2 = N_1 \frac{E_2 A_2}{2E_1 A_1}. \quad (2.68)$$

4. **Синтез.** Искомые выражения для внутренних сил в стержнях получаются из совместного решения уравнений (2.68) и (2.64) в следующем виде:

$$N_1 = F \frac{6E_1 A_1}{4E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad N_2 = F \frac{3E_2 A_2}{4E_1 A_1 + E_2 A_2}. \quad (2.69)$$

В случае равенства модулей продольной упругости $E_1 = E_2$ и площадей поперечных сечений $A_1 = A_2$ выражения (2.69) упрощаются и принимают вид

$$N_1 = \frac{6}{5}F, \quad N_2 = \frac{3}{5}F.$$

3. Расчетно-проектировочное задание

При изучении раздела "Растяжение-сжатие" в курсе "Сопротивление материалов" ставится цель научить студентов основам инженерного расчета элементов конструкций машин и механизмов на прочность и жесткость при нагрузках, действующих вдоль их оси (продольных силах), с учетом изменяющейся площади поперечного сечения, а также условий работы и свойств материала.

Для лучшей организации и более эффективной самостоятельной работы студентов, в соответствии с требованиями программы курса "Сопротивление материалов", студентам предлагается к выполнению расчетно-проектировочное задание (РПЗ) по теме "Расчеты на прочность при центральном растяжении-сжатии". Выполняя эту работу, студент практически знакомится с методами вычисления и построения эпюр внутренних продольных сил, расчета нормальных напряжений и перемещений, определения безопасных в смысле выполнения условий прочности размеров поперечного сечения для различных расчетных схем.

3.1. Содержание расчетно-проектировочного задания

Расчетно-проектировочное задание выполняется в три этапа:

1. Решение предложенных преподавателем задач для определенных вариантов расчетных схем и исходных данных, оформление их в соответствии с требованиями кафедры «Механики сплошных сред и сопротивления материалов».
2. Написание контрольных работ по теме РПЗ.
3. Защита РПЗ. Защита включает в себя пояснение методов и

принципов решения задач и ответ на контрольные теоретические вопросы. Количество и объем этих вопросов определяется преподавателем индивидуально для каждого студента.

Цель задания – определение внутренних силовых факторов для предложенных расчетных схем на отдельных участках стержней, построение эпюр внутренних усилий, напряжений, перемещений, проведение проверочного и проектировочного расчетов для определения размеров поперечного сечения, грузоподъемности конструкции, обеспечивающих заданный коэффициент запаса, определение коэффициента запаса.

Исходными данными для решения задач являются:

1. Схема заданной системы с указанием длин участков и внешнего нагружения – таблицы 3.1–3.6.

2. Механические характеристики применяемых сталей – таблица 3.7.

3. Геометрические характеристики поперечных сечений для прокатных профилей – приложения 1–4.

РПЗ состоит из трех обязательных для решения задач:

1. *Статически определимый стержень (проверочный расчет)*. Для заданной схемы нагружения стержня ступенчатого поперечного сечения построить эпюры внутренних продольных сил, нормальных напряжений, перемещений и проверить прочность стержня.

Варианты расчетных схем приведены в табл. 3.1, численные данные – в табл. 3.2 и 3.7.

2. *Статически определимая стержневая система (определение максимально допустимого нагружения)*. Для заданной схемы стержневой системы определить из условия прочности допустимое значение внешней силы F .

Варианты расчетных схем приведены в табл. 3.3, численные данные – в табл. 3.4 и 3.7, а также в приложениях 1–4.

3. *Статически неопределимый стержень (проектировочный расчет)*. Для заданной статически неопределимой системы с последовательно расположенными участками стержня из расчета на прочность определить площади поперечных сечений участков и построить эпюру продольных сил и нормальных напряжений. Для этой же расчетной схемы про-

вести расчеты для определения влияния температурного нагружения и неточности изготовления на напряженное состояние. Проверить прочность конструкции при совместном действии силового нагружения, температуры и неточности изготовления.

Варианты расчетных схем приведены в табл. 3.5, численные данные – в табл. 3.6 и 3.7.

3.2. Порядок выполнения задания

3.2.1. Задача 1. Статически определимый стержень

Для статически определимого стержня с последовательно размещенными участками разной площади поперечного сечения, нагруженного сосредоточенными продольными силами и распределенной нагрузкой, необходимо построить эпюры внутренних продольных сил, нормальных напряжений и перемещений, проверить прочность.

Последовательность решения:

1. Выписать численные данные для заданного варианта. В определенном масштабе начертить схему заданной системы с обозначением ее линейных размеров и внешних нагрузок.

2. Определить значения внутренней продольной силы в сечениях на участках стержня и построить для заданной схемы эпюру внутренних продольных сил.

3. В соответствии с эпюрой внутренних продольных сил и значениями площадей поперечных сечений участков стержня вычислить нормальные напряжения на участках стержня и построить их эпюру.

4. По эпюре нормальных напряжений определить опасное сечение (участок) стержня, проверить прочность стержня в этом сечении (на этом участке). В случае невыполнения условия прочности соответствующим образом увеличить площади поперечных сечений участков стержня, после чего повторить п. 3 решения.

5. Построить эпюру продольных перемещений сечений стержня.

3.2.2. Задача 2. Статически определимая стержневая система

Для заданной статически определимой стержневой системы определить допустимое нагружение – максимальное значение внешней на-

грузки (сосредоточенной силы F), удовлетворяющее условию прочности.

Последовательность решения:

1. Выписать численные данные для заданного варианта. В определенном масштабе начертить схему заданной системы с обозначением ее линейных размеров.

2. Записать систему уравнений равновесия для рассматриваемой системы, включив в нее внутренние продольные силы в стержнях по методу сечений.

3. Из уравнений равновесия выразить внутренние стержневые силы в долях внешней нагрузки F . По условию прочности для каждого из стержней определить значение допустимой силы F для всей системы.

4. Определить нормальные напряжения в стержнях, проконтролировать выполнение условий прочности.

3.2.3. Задача 3. Статически неопределимый стержень

Для статически неопределимого стержня при центральном растяжении-сжатии из условия прочности определить параметр площади поперечного сечения. Провести проверочный расчет с учетом дополнительных факторов – изменения температуры и неточности изготовления.

Последовательность решения:

1. Выписать численные данные для заданного варианта и в определенном масштабе начертить схему заданной системы с обозначением линейных размеров и внешних нагрузок.

2. Установить степень статической неопределимости системы.

3. Рассмотреть *статическую сторону задачи* – составить и записать уравнение равновесия. Выбрать основную статически определимую систему, мысленно отбросив одну из опор и заменив ее соответствующей неизвестной реакцией.

4. Рассмотреть *геометрическую сторону задачи* – совместное (т.е. не противоречащее закреплениям и не нарушающее целостности конструкции) деформирование основной системы. Записать уравнение совместности перемещений – суммарное перемещение на отброшенной опоре от действия внешних сил и реактивного усилия должно равняться нулю.

5. Рассмотреть *физическую сторону задачи* – записать выражения, связывающие по закону Гука абсолютные деформации и перемещения участков стержня с приложенными к нему внешними силами.

6. Выполнить *синтез* – провести решение полученных уравнений, результатом которого должны быть значения реактивных усилий в опорах.

7. Построить эпюру продольных сил.

8. Из условия прочности для наиболее нагруженного (опасного) участка (участков) стержня определить параметр площади поперечного сечения.

9. Построить эпюру нормальных напряжений для всех участков схемы.

10. Построить эпюру перемещений и сделать деформационную проверку.

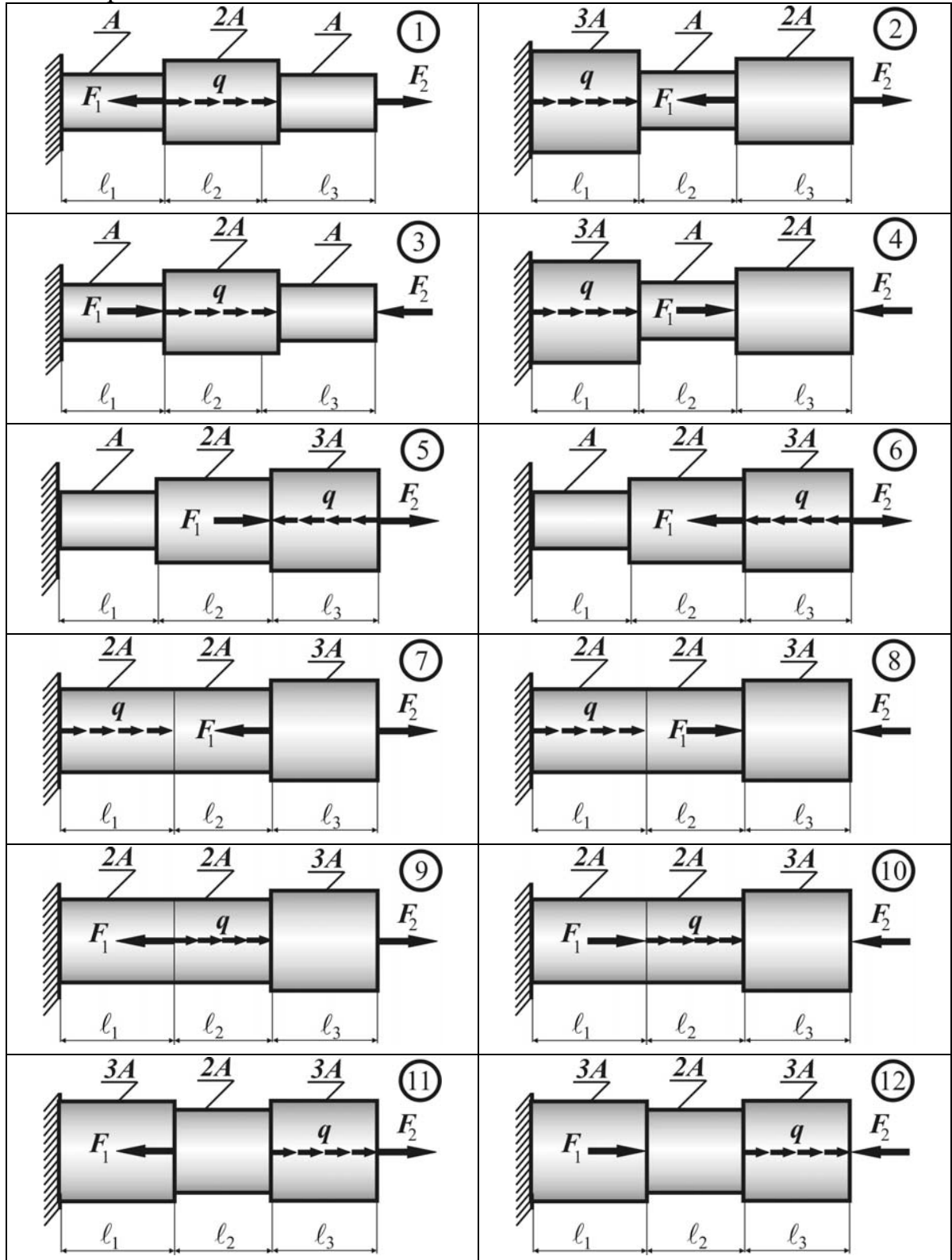
11. Для исходной расчетной схемы провести расчет статически неопределимого стержня с учетом изменения температуры. Построить эпюры внутренних продольных сил и нормальных напряжений от действия этого дополнительного фактора.

12. Для исходной расчетной схемы провести расчет статически неопределимого стержня с учетом неточности изготовления конструкции. Построить эпюры внутренних продольных сил и нормальных напряжений от действия этого дополнительного фактора.

13. Определить суммарные напряжения от действия внешнего нагружения, действия температуры и неточности изготовления, построить эпюру этих напряжений и проверить прочность стержня.

3.3. Расчетные схемы и численные данные

Таблица 3.1 – Расчетные схемы к задаче 1 – статически определимый стержень



Окончание таблицы 3.1

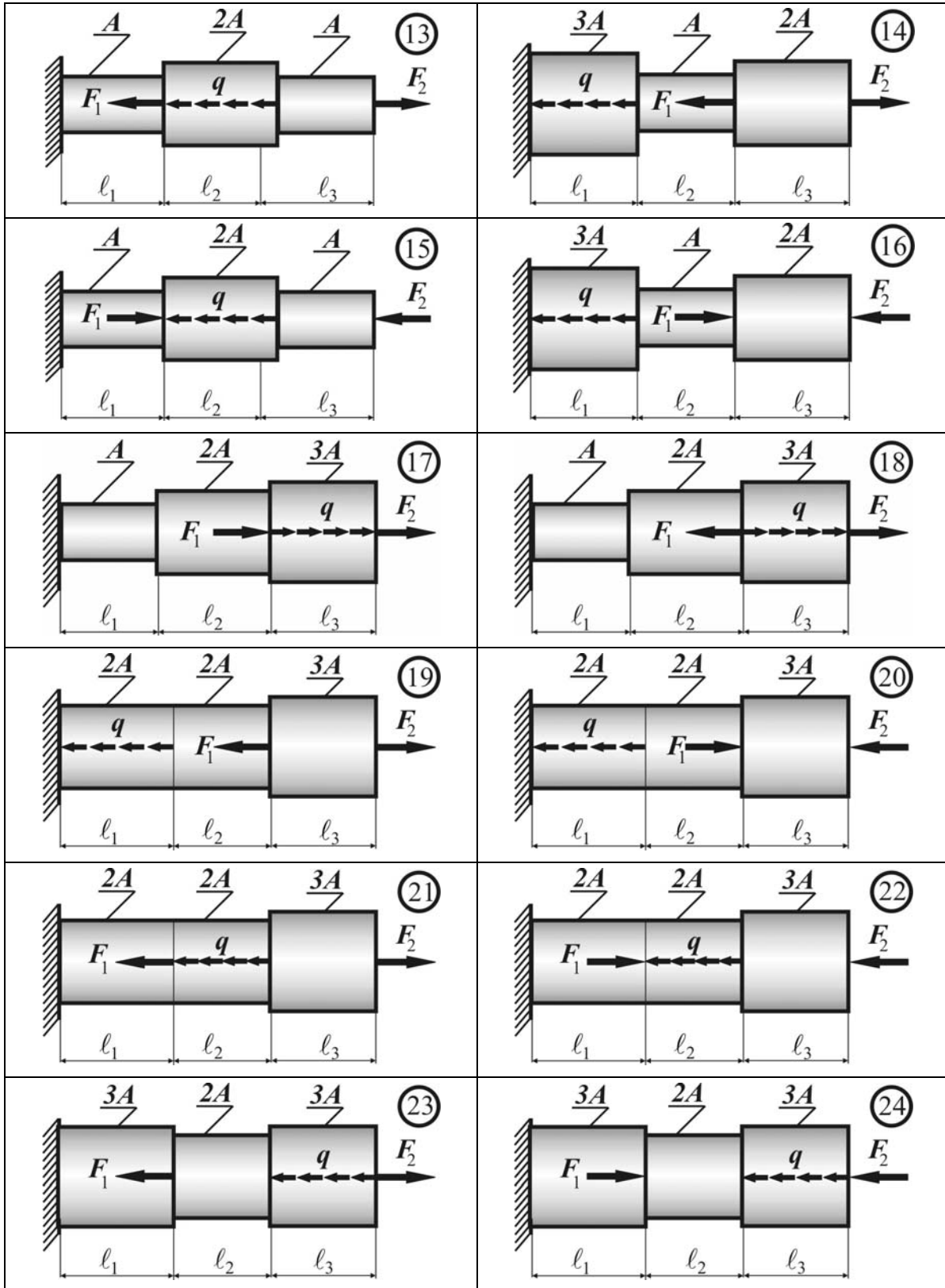
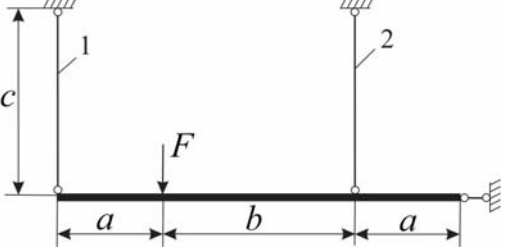
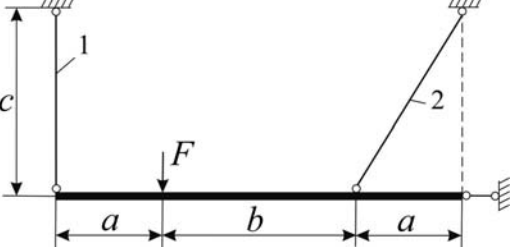
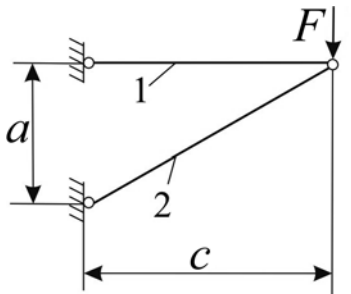
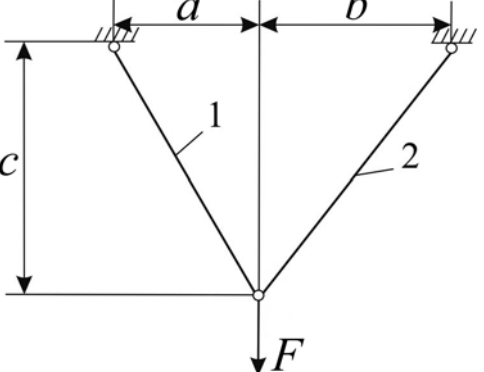
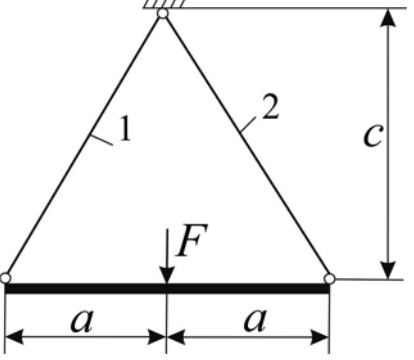
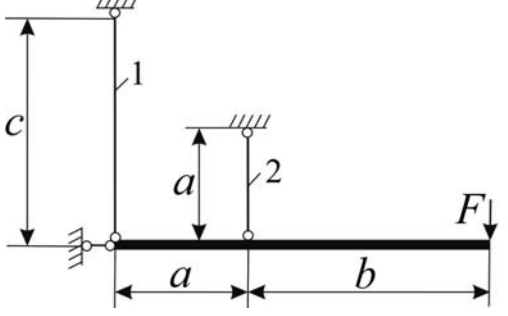
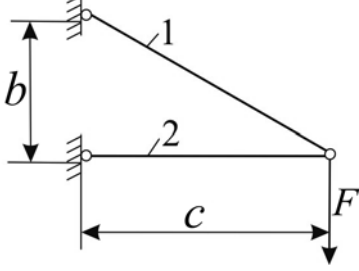
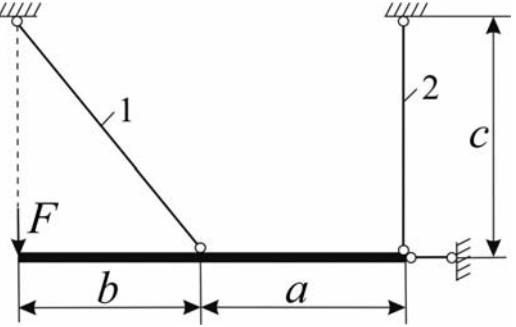


Таблица 3.2 – Исходные данные к задаче 1 – статически определимый стержень

№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	q , кН/м	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	$A \cdot 10^3$, м ²	n_r
1	200	400	500	0,5	0,4	0,3	1,90	1,2
2	300	250	400	0,4	0,5	0,6	1,75	1,5
3	400	200	250	0,3	0,4	0,5	2,00	1,8
4	100	300	100	0,2	0,3	0,4	2,10	1,6
5	250	400	300	0,4	0,3	0,5	1,80	1,4
6	400	200	250	0,3	0,5	0,4	1,50	1,2
7	250	300	100	0,6	0,4	0,5	1,60	1,5
8	200	400	300	0,5	0,3	0,4	1,90	1,8
9	300	100	500	0,4	0,2	0,3	1,75	1,6
10	400	250	400	0,5	0,4	0,3	2,00	1,4
11	500	200	400	0,4	0,3	0,5	1,90	1,2
12	400	300	250	0,5	0,6	0,4	1,75	1,5
13	250	400	200	0,4	0,5	0,3	2,00	1,8
14	100	100	300	0,3	0,4	0,2	2,10	1,6
15	300	250	400	0,3	0,5	0,4	1,80	1,4
16	250	400	200	0,5	0,4	0,3	1,50	1,2
17	100	250	300	0,4	0,5	0,6	1,60	1,5
18	300	200	400	0,3	0,4	0,5	1,90	1,8
19	500	300	100	0,2	0,3	0,4	1,75	1,6
20	400	400	250	0,4	0,3	0,5	2,00	1,4
21	200	400	500	0,4	0,5	0,6	1,75	1,5
22	400	200	250	0,2	0,3	0,4	2,10	1,6
23	400	200	250	0,6	0,4	0,5	1,60	1,5
24	250	400	200	0,4	0,3	0,5	2,00	1,4

Таблица 3.3 – Расчетные схемы к задаче 2 – статически определимая стержневая система

<p style="text-align: right;">1</p> 	<p style="text-align: right;">2</p> 
<p style="text-align: right;">3</p> 	<p style="text-align: right;">4</p> 
<p style="text-align: right;">5</p> 	<p style="text-align: right;">6</p> 
<p style="text-align: right;">7</p> 	<p style="text-align: right;">8</p> 

Продолжение таблицы 3.3

	9		10
	11		12
	13		14
	15		16

Окончание таблицы 3.3

	<p>17</p>
	<p>18</p>
	<p>19</p>
	<p>20</p>
	<p>21</p>
	<p>22</p>
	<p>23</p>
	<p>24</p>

Таблица 3.4 – Исходные данные к задаче 2 – статически определимая стержневая система

















































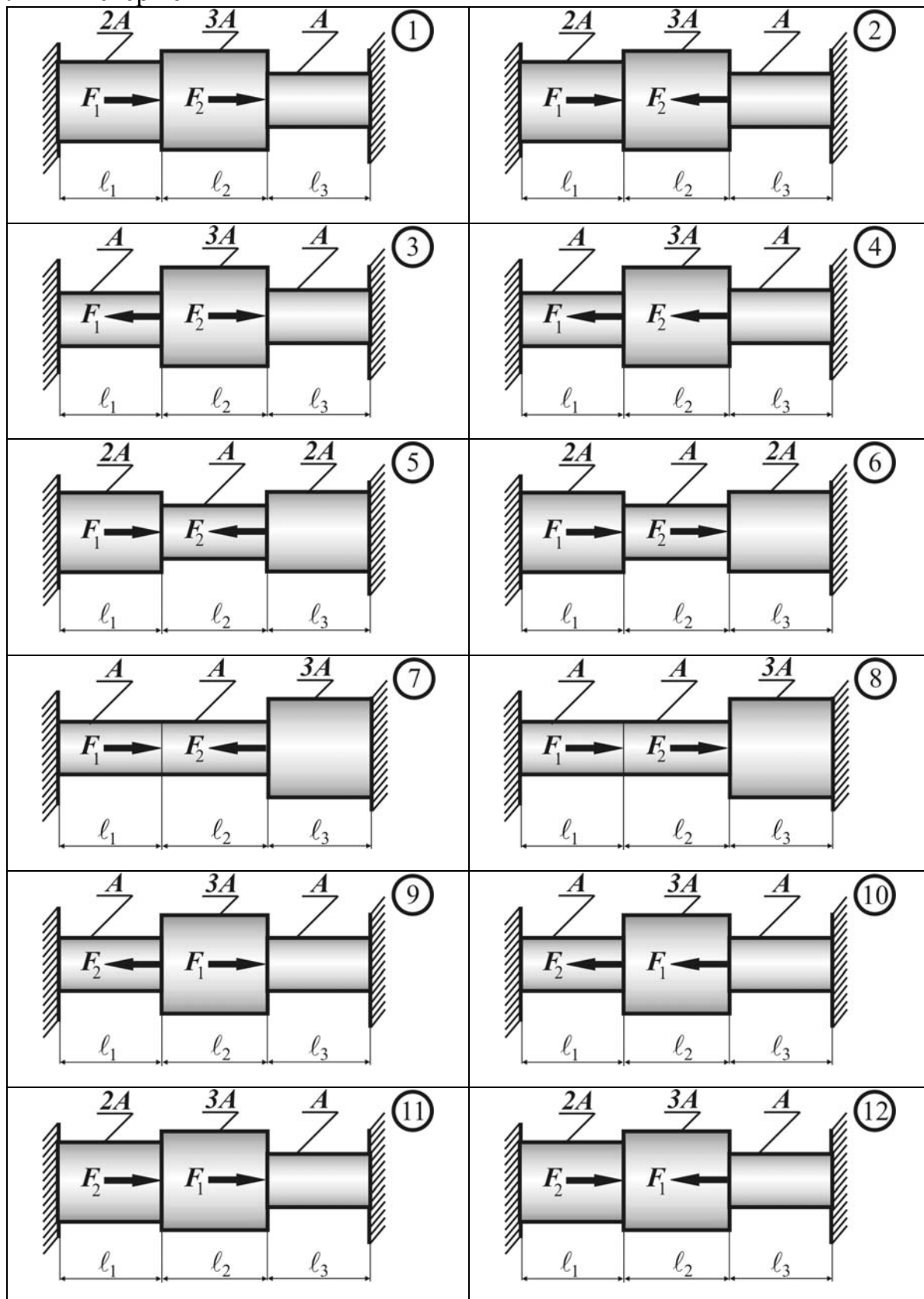
№ вар.	Стержень 1	Стержень 2	a , м	b , м	c , м	n_T
1	 I № 10	 d=4 см	1,5	2,0	1,8	1,2
2	 d=4 см	 I № 12	1,6	1,8	2,0	1,4
3	 № 5,6/4	 d=4 см	1,8	2,0	1,6	1,5
4	 I № 16	 d=5 см	1,4	1,6	1,8	1,6
5	 d=5 см	 I № 12	2,0	1,8	1,6	1,8
6	 I № 22	 № 6,3/6	2,2	2,0	1,8	1,2
7	 d=4 см	 I № 16	1,8	1,5	2,0	1,4
8	 d=4 см	 I № 12	2,0	1,6	1,8	1,5
9	 № 5/4	 I № 14	1,6	1,8	2,0	1,6
10	 d=4 см	 I № 10	1,8	1,4	1,6	1,8
11	 I № 12	 d=4 см	1,6	2,0	1,8	1,2
12	 d=4 см	 № 5,6/4	1,8	2,2	2,0	1,4
13	 d=5 см	 I № 16	1,5	2,0	1,8	1,5
14	 I № 12	 d=5 см	1,6	1,8	2,0	1,6
15	 № 6,3/6	 I № 22	1,8	2,0	1,6	1,8
16	 I № 16	 d=4 см	1,4	1,6	1,8	1,2
17	 I № 12	 d=4 см	2,0	1,8	1,6	1,4
18	 I № 14	 № 5/4	2,2	2,0	1,8	1,5
19	 I № 14	 d=4 см	1,8	1,5	2,0	1,6
20	 I № 10	 d=5 см	2,0	1,6	1,8	1,8
21	 d=4 см	 I № 12	1,6	1,8	2,0	1,2
22	 № 5,6/4	 d=4 см	1,8	1,4	1,6	1,4
23	 I № 16	 I № 14	1,6	2,0	1,8	1,5
24	 d=5 см	 I № 12	1,8	2,2	2,0	1,6

Таблица 3.5 – Расчетные схемы к задаче 3 – статически неопределенный стержень



Окончание таблицы 3.5

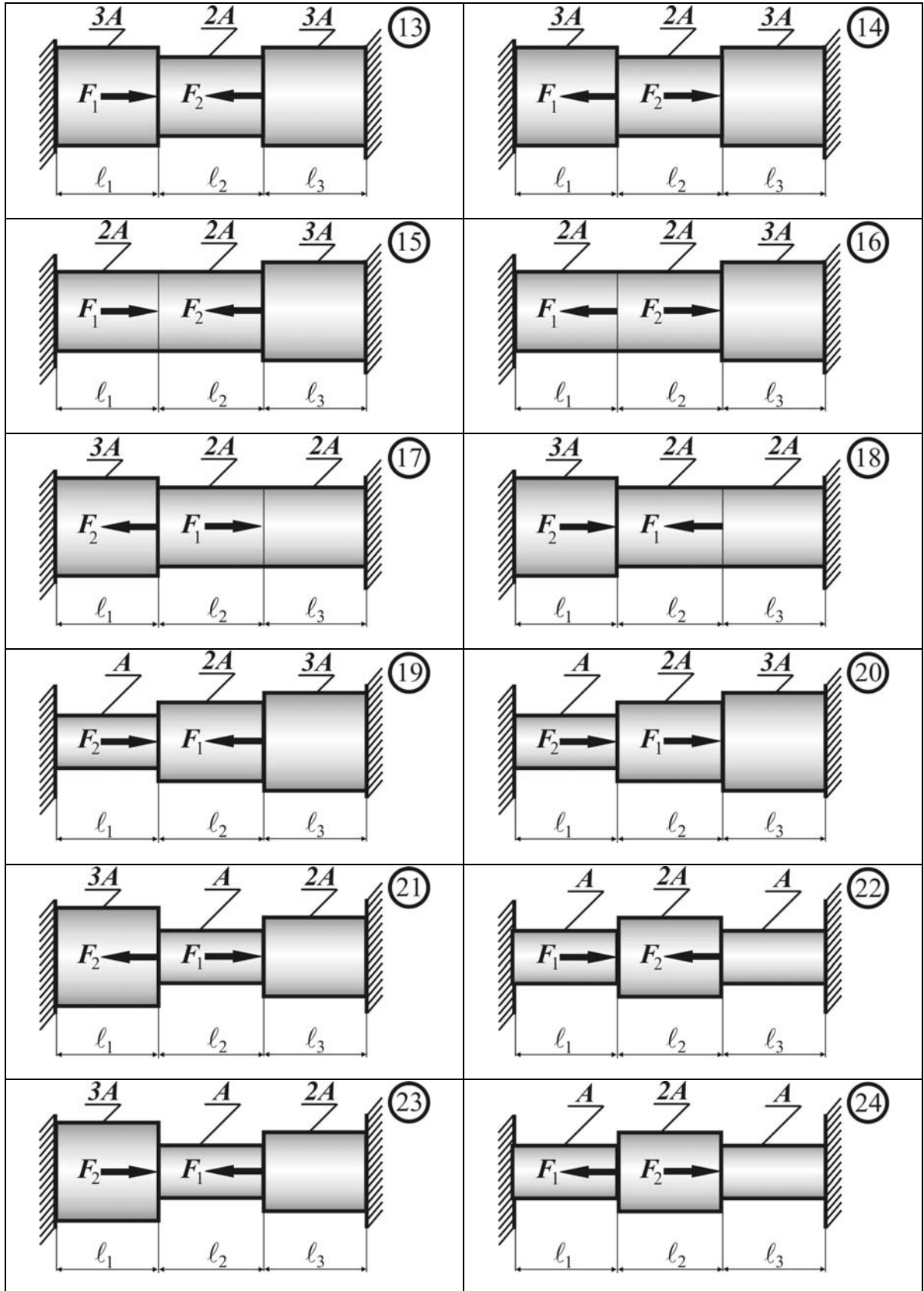


Таблица 3.6 – Исходные данные к задаче 3 – статически неопределенный стержень

№ вар.	F_1 , кН	F_2 , кН	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	Δt , °C	δ , см	n_T
1	200	400	0,5	0,4	0,3	20	-0,03	1,2
2	300	250	0,4	0,5	0,6	25	-0,04	1,5
3	400	200	0,3	0,4	0,5	30	-0,02	1,8
4	100	300	0,2	0,3	0,4	-20	0,03	1,6
5	250	400	0,4	0,3	0,5	-25	0,02	1,4
6	400	200	0,3	0,5	0,4	-30	0,03	1,2
7	250	300	0,6	0,4	0,5	25	-0,03	1,5
8	200	400	0,5	0,3	0,4	30	-0,04	1,8
9	300	100	0,4	0,2	0,3	-20	-0,02	1,6
10	400	250	0,5	0,4	0,3	-25	0,03	1,4
11	500	200	0,4	0,3	0,5	20	0,02	1,2
12	400	300	0,5	0,6	0,4	25	0,03	1,5
13	250	400	0,4	0,5	0,3	30	-0,02	1,8
14	100	100	0,3	0,4	0,2	-20	0,03	1,6
15	300	250	0,3	0,5	0,4	-25	0,02	1,4
16	250	400	0,5	0,4	0,3	-30	0,03	1,2
17	100	250	0,4	0,5	0,6	25	-0,03	1,5
18	300	200	0,3	0,4	0,5	30	-0,04	1,8
19	500	300	0,2	0,3	0,4	-20	-0,02	1,6
20	400	400	0,4	0,3	0,5	-25	0,03	1,4
21	200	400	0,4	0,5	0,6	20	0,02	1,5
22	400	200	0,2	0,3	0,4	-20	-0,04	1,6
23	400	200	0,6	0,4	0,5	25	-0,02	1,5
24	250	400	0,4	0,3	0,5	20	0,03	1,4

Таблица 3.7 – Механические характеристики сталей и сплавов

№ вар.	Марка стали	Модуль упругости $E \cdot 10^{-5}$, МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Коэффициент температурного расширения $\alpha_t \cdot 10^6$, 1/°С
1	Ст 10	2,10	210	11,6
2	Ст 20	2,13	250	11,1
3	Ст 25	1,98	280	11,1
4	Ст 30	2,00	300	12,6
5	Ст 35	2,06	320	11,9
6	Ст 40	2,13	340	12,4
7	Ст 45	2,00	360	11,7
8	Ст 50	2,16	380	12,0
9	Ст 55	2,10	390	11,0
10	Ст 60	2,04	410	11,1
11	Ст 20Г	2,04	280	12,3
12	Ст 30Г	2,04	320	12,6
13	Ст 50Г	2,16	400	11,6
14	Ст 20Х	2,16	650	11,3
15	Ст 40Х	2,14	800	13,4
16	Ст 45Х	2,06	850	12,8
17	Ст 30ХМ	2,03	750	12,3
18	Ст 35ХМ	2,04	850	12,3
19	Ст 40ХН	2,00	800	11,8
20	Ст 50ХН	2,00	900	11,8
21	Ст 15ХФ	2,06	550	12,0
22	Ст 40ХФА	2,00	750	11,0
23	Ст 20ХГСА	1,96	650	11,0
24	Ст 30ХГС	1,94	850	11,0

3.4. Примеры решения задач

3.4.1. Образец выполнения задачи 1

Дано:

$$F_1 = 400 \text{ кН}; F_2 = 200 \text{ кН}; q = 500 \text{ кН/м}; A = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$\ell_1 = 0,2 \text{ м}; \ell_2 = 0,4 \text{ м}; \ell_3 = 0,4 \text{ м}; \ell_4 = 0,5 \text{ м};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \sigma_T = 240 \text{ МПа}; n_T = 1,6.$$

Допустимое напряжение: $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 150 \text{ МПа}$.

Необходимо:

1. Определить внутренние усилия на участках стержня и построить эпюру внутренних продольных сил N .

2. Определить нормальные напряжения на участках стержня и построить эпюру напряжений σ . Проверить прочность стержня.

3. Определить абсолютные деформации участков стержня и построить эпюру продольных перемещений поперечных сечений W .

Решение:

1. Определение реакции H_B :

$$\sum F_z = 0; H_B - F_1 - q\ell_2 + F_2 = 0.$$

$$H_B = F_1 + q\ell_2 - F_2 = 400 \text{ кН}.$$

2. Построение эпюры внутренних усилий N :

$$\underline{0 \leq z_1 \leq \ell_1}: \quad N_1(z_1) = -H_B = -400 \text{ кН}.$$

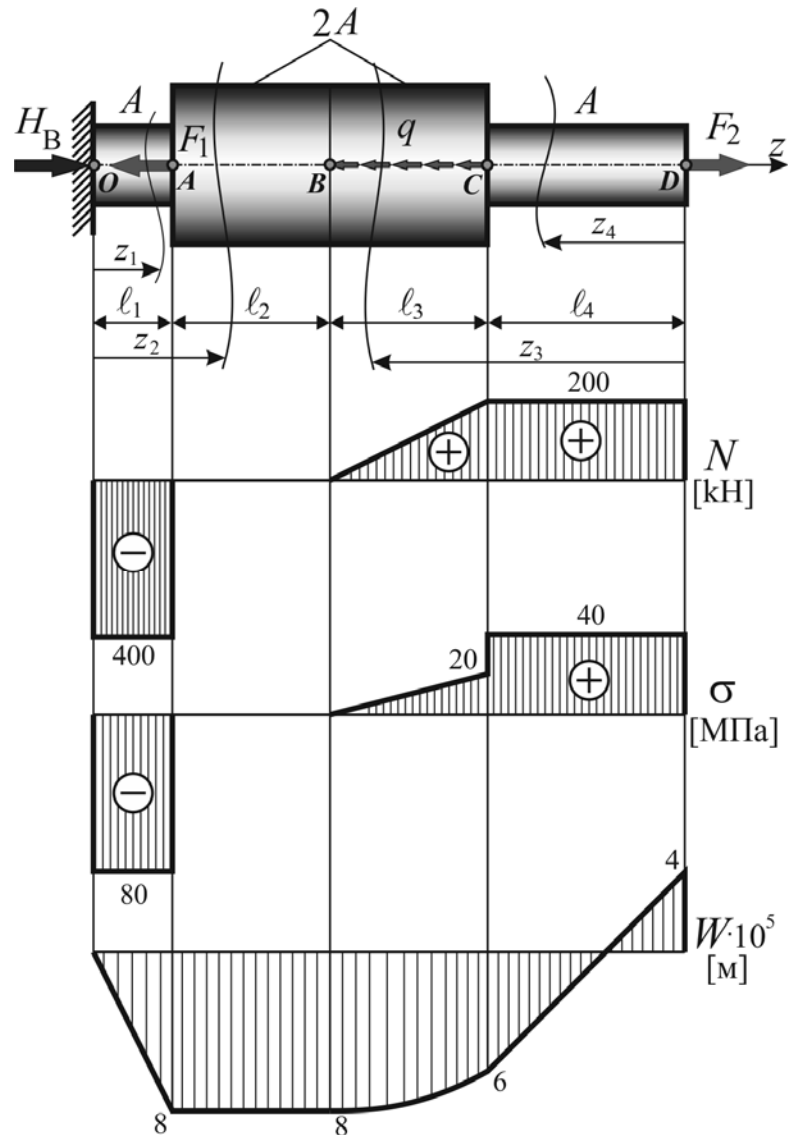
$$\underline{\ell_1 \leq z_2 \leq \ell_1 + \ell_2}: \quad N_2(z_2) = -H_B + F_1 = 0.$$

$$\underline{\ell_4 \leq z_3 \leq \ell_4 + \ell_3}: \quad N_3(z_3) = F_2 - q(z_3 - \ell_4).$$

$$N_3(\ell_4) = F_2 = 200 \text{ кН};$$

$$N_3(\ell_4 + \ell_3) = F_2 - q\ell_3 = 0.$$

$$\underline{0 \leq z_4 \leq \ell_4}: \quad N_4(z_4) = F_2 = 200 \text{ кН}.$$



3. Определение нормальных напряжений на участках стержня и построение эпюры σ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-2}} = -80 \cdot 10^6 \text{ Па} = -80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 0;$$

$$\sigma_3(l_4) = \frac{N_3(l_4)}{A_3} = \frac{200 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3(l_4 + l_3) = \frac{N_3(l_4 + l_3)}{A_3} = 0;$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа.}$$

Наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигается на первом участке стержня:

$\sigma_{\max} = |\sigma_1| = 80 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа} \Rightarrow$ условие прочности выполнено.

4. Определение абсолютных деформаций участков стержня и построение эпюры перемещений W :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{EA_1} = -\frac{400 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = -8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{EA_2} = 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta l_3 &= \int_{\ell_4}^{\ell_4+\ell_3} \frac{N_3(z_3) dz}{EA_3} = \int_{\ell_4}^{\ell_4+\ell_3} \frac{[F_2 - q(z_3 - \ell_4)] dz}{EA_3} = \\ &= \frac{1}{EA_3} \left[\int_{\ell_4}^{\ell_4+\ell_3} F_2 dz - \int_{\ell_4}^{\ell_4+\ell_3} q(z_3 - \ell_4) dz \right] = \\ &= \frac{1}{EA_3} \left[F_2 z_3 \Big|_{\ell_4}^{\ell_4+\ell_3} - q \frac{(z_3 - \ell_4)^2}{2} \Big|_{\ell_4}^{\ell_4+\ell_3} \right] = \frac{1}{EA_3} \left[F_2 \ell_3 - q \frac{\ell_3^2}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} \left[200 \cdot 10^3 \cdot 0,4 - 500 \cdot 10^3 \frac{0,4^2}{2} \right] = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot \ell_4}{EA_4} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 10 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

$$W_O = 0; \quad W_A = \Delta l_1 = -8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_B = W_A + \Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (-8 + 0) \cdot 10^{-5} = -8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$W_C = W_B + \Delta l_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = (-8 + 0 + 2) \cdot 10^{-5} = -6 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\begin{aligned} W_D = W_C + \Delta l_4 &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = (-8 + 0 + 2 + 10) \cdot 10^{-5} = \\ &= 4 \cdot 10^{-5} \text{ м.} \end{aligned}$$

3.4.2. Образец выполнения задачи 2

Дано:

$$a = 2,0 \text{ м}; \quad c = 1,5 \text{ м}; \quad h = 2,5 \text{ м}.$$

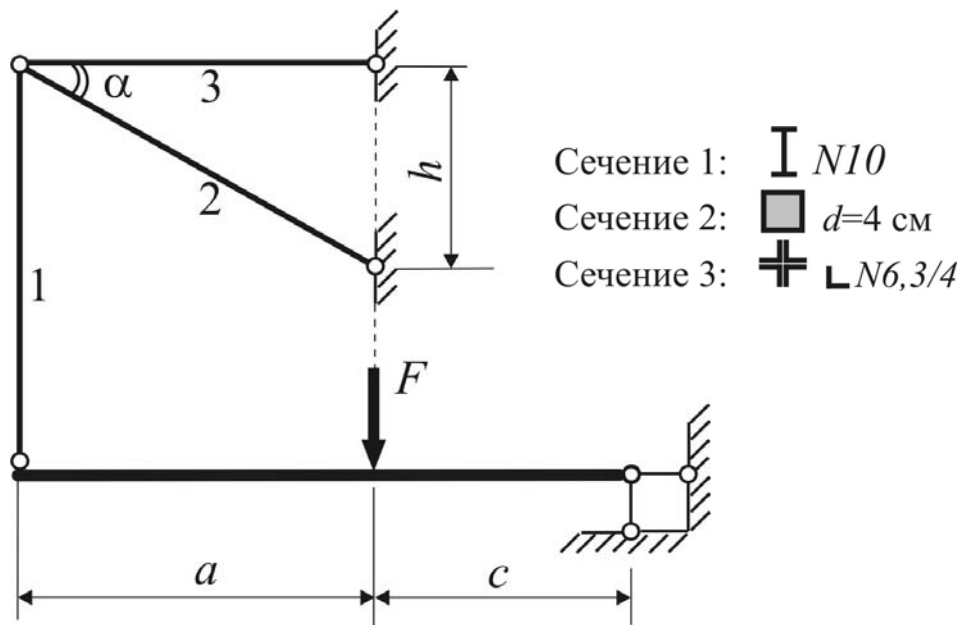
$$\sigma_T = 240 \text{ МПа}; \quad n_T = 1,2.$$

Допустимое напряжение: $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 200 \text{ МПа}$.

Необходимо:

1. Выразить значения внутренних усилий в стержнях системы через параметр нагружения F .
2. Из условия прочности стержней определить допустимую нагрузку.
3. Определить напряжения в стержнях системы.

Решение:



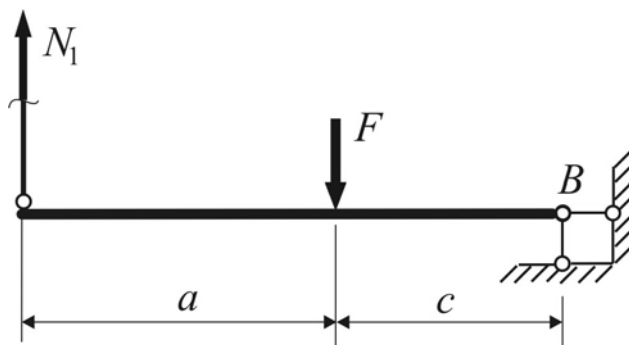
1. Определяем площади поперечных сечений стержней, а также значения синуса и косинуса угла α для последующих вычислений:

$$A_1 = 12,0 \text{ см}^2 \text{ (см. приложение 1)}; \quad A_2 = d^2 = 16,0 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = 4 \cdot 4,96 \approx 19,8 \text{ см}^2 \text{ (см. приложение 3)};$$

$$\ell_2 = \sqrt{a^2 + h^2} = 3,2 \text{ м}; \quad \cos \alpha = \frac{a}{\ell_2} = 0,625; \quad \sin \alpha = \frac{h}{\ell_2} = 0,781.$$

2. Применим метод сечений к стержню 1, тем самым разделив систему на две части. Запишем уравнение равновесия моментов сил для нижней части конструкции относительно точки В:

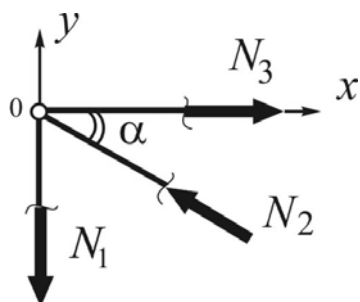


$$\sum M_B = 0: N_1(a+c) - Fc = 0,$$

откуда следует

$$N_1 = \frac{Fc}{a+c} = 0,43F.$$

3. Теперь применим метод сечений также к стержням 2 и 3, вырезав таким образом узел, в котором сходятся все три стержня. Запишем уравнения равновесия для этого узла:



$$\sum F_{iy} = 0: -N_1 + N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$N_2 = \frac{N_1}{\sin \alpha} = 0,55F.$$

$$\sum F_{ix} = 0: N_3 - N_2 \cos \alpha = 0; N_3 = 0,34F.$$

4. Определение допустимого значения параметра нагрузки F :

- из условия прочности стержня 1:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,43F_1}{A_1} \leq [\sigma];$$

$$F_1 \leq \frac{[\sigma] \cdot A_1}{0,43} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 12,0 \cdot 10^{-4}}{0,43} \approx 558,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 558,1 \text{ кН} = [F_1].$$

- из условия прочности стержня 2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,55F_2}{A_2} \leq [\sigma];$$

$$F_2 \leq \frac{[\sigma] \cdot A_2}{0,55} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 16,0 \cdot 10^{-4}}{0,55} \approx 581,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 581,8 \text{ кН} = [F_2]$$

- из условия прочности стержня 3:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0,34 F_3}{A_3} \leq [\sigma]$$

$$F_3 \leq \frac{[\sigma] \cdot A_3}{0,34} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 19,8 \cdot 10^{-4}}{0,34} \approx 11747,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 11747,1 \text{ кН} = [F_3]$$

Для обеспечения прочности всей конструкции необходимо ограничить внешнюю нагрузку наименьшим из полученных значений силы F , т.е.

$$[F] = \min\{[F_1]; [F_2]; [F_3]\} = 558,1 \text{ кН.}$$

5. Определение напряжений в стержнях:

$$\sigma_1 = 200 \text{ МПа} = [\sigma]$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{0,55 \cdot 558,1 \cdot 10^3}{16,0 \cdot 10^{-4}} \approx -192 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0,34 \cdot 558,1 \cdot 10^3}{19,8 \cdot 10^{-4}} \approx 96 \text{ МПа.}$$

Как и следовало ожидать, условие прочности выполняется.

3.4.3. Образец выполнения задачи 3

Дано:

$$F_1 = 200 \text{ кН}; \quad F_2 = 500 \text{ кН}; \quad \ell_1 = 0,4 \text{ м}; \quad \ell_2 = 0,4 \text{ м}; \quad \ell_3 = 0,1 \text{ м};$$

$$\delta = 0,02 \text{ см}; \quad \Delta t = -25 \text{ }^\circ\text{C}; \quad \alpha_t = 11 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \sigma_T = 240 \text{ МПа}; \quad n_T = 1,6.$$

Допустимое напряжение: $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 150 \text{ МПа.}$

Необходимо:

1. Раскрыть статическую неопределимость стержня при действии внешних сил, построить эпюру внутренних продольных сил. Из условия прочности определить размеры поперечного сечения (параметр площади A). Определить напряжения на участках стержня, построить эпюру напряжений от действия внешнего нагружения.

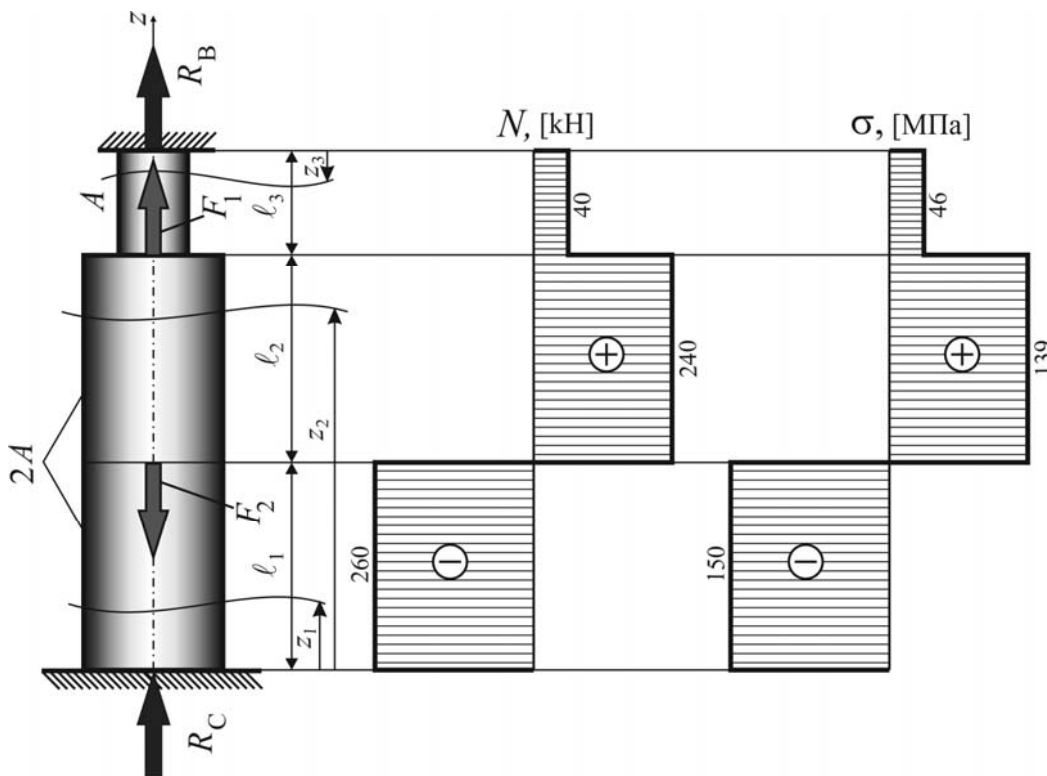
2. Раскрыть статическую неопределимость конструкции при наличии неточности изготовления стержня. Определить монтажные напряжения в частях стержня, построить эпюру монтажных напряжений.

3. Раскрыть статическую неопределимость конструкции при наличии изменения температуры. Определить температурные напряжения в частях стержня, построить эпюру температурных напряжений.

4. Построить эпюру суммарных напряжений. Проверить прочность стержня.

Решение:

1. Учет действия внешних сил. Определение размеров поперечных сечений



Степень статической неопределимости задачи: $n = 2 - 1 = 1$.

I.1. ССЗ. Уравнение статического равновесия:

$$\sum F_{iZ} = 0: R_B + R_C + F_1 - F_2 = 0.$$

I.2. ГСЗ. Уравнение совместности перемещений:

$$\Delta l_C = \Delta l_C(F_1) + \Delta l_C(F_2) + \Delta l_C(R_C) = 0.$$

I.3. ФСЗ. Связь абсолютных деформаций с вызвавшими их силами:

$$\Delta l_C(F_1) = -\frac{F_1 \cdot l_3}{EA}; \quad \Delta l_C(F_2) = \frac{F_2 \cdot l_3}{EA} + \frac{F_2 \cdot l_2}{2EA};$$
$$\Delta l_C(R_C) = -\frac{R_C \cdot l_3}{EA} - \frac{R_C \cdot (l_2 + l_1)}{2EA}.$$

I.4. Синтез. Совместное решение уравнений:

$$-\frac{F_1 \cdot l_3}{EA} + \frac{F_2 \cdot l_3}{EA} + \frac{F_2 \cdot l_2}{2EA} - \frac{R_C \cdot l_3}{EA} - \frac{R_C \cdot (l_2 + l_1)}{2EA} = 0;$$
$$-F_1 \cdot 2l_3 + F_2 \cdot 2l_3 + F_2 \cdot l_2 - R_C \cdot 2l_3 - R_C \cdot (l_2 + l_1) = 0;$$
$$R_C = \frac{-F_1 \cdot 2l_3 + F_2 \cdot 2l_3 + F_2 \cdot l_2}{2l_3 + l_1 + l_2} = \frac{-40 + 100 + 200}{1,0} = 260 \text{ кН};$$
$$R_B = -R_C - F_1 + F_2 = -260 - 200 + 500 = 40 \text{ кН}.$$

I.5. Построение эпюры продольных сил:

$$0 \leq z_1 \leq l_1: N(z_1) = -R_C = -260 \text{ кН};$$
$$l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2: N(z_2) = -R_C + F_2 = 240 \text{ кН};$$
$$0 \leq z_3 \leq l_3: N(z_3) = R_B = 40 \text{ кН}.$$

I.6. Деформационная проверка правильности построения эпюры N – контроль равенства нулю суммарного удлинения стержня, что соответствует нулевому линейному перемещению точки закрепления C :

$$\begin{aligned}\Delta l_C &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N(z_1) \cdot l_1}{2EA} + \frac{N(z_2) \cdot l_2}{2EA} + \frac{N(z_3) \cdot l_3}{EA} = \\ &= \frac{10^3}{EA} \left(-\frac{260 \cdot 0,4}{2} + \frac{240 \cdot 0,4}{2} + \frac{40 \cdot 0,1}{1} \right) = \frac{10^3}{EA} (-52 + 48 + 4) = 0.\end{aligned}$$

I.7. Определение параметра площади A из условия прочности:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{N(z_1)}{2A} = -\frac{260}{2A} = -\frac{130}{A}; \\ \sigma_2 &= \frac{N(z_2)}{2A} = \frac{240}{2A} = \frac{120}{A}; \\ \sigma_3 &= \frac{N(z_3)}{2A} = \frac{40}{A}.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\sigma_{\max} &= |\sigma_1| = \frac{|N(z_1)|}{2A} \leq [\sigma]; \\ A &\geq \frac{|N(z_1)|}{2 \cdot [\sigma]} = \frac{260 \cdot 10^3}{2 \cdot 150 \cdot 10^6} \approx \\ &\approx 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.\end{aligned}$$

I.8. Построение эпюры нормальных напряжений от действия внешнего нагружения:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\approx -[\sigma]; \\ \sigma_2 &= \frac{N(z_2)}{2A} = \frac{240 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}} \approx 139 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= \frac{N(z_3)}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,87 \cdot 10^{-3}} \approx 46 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

II. Учет неточности изготовления

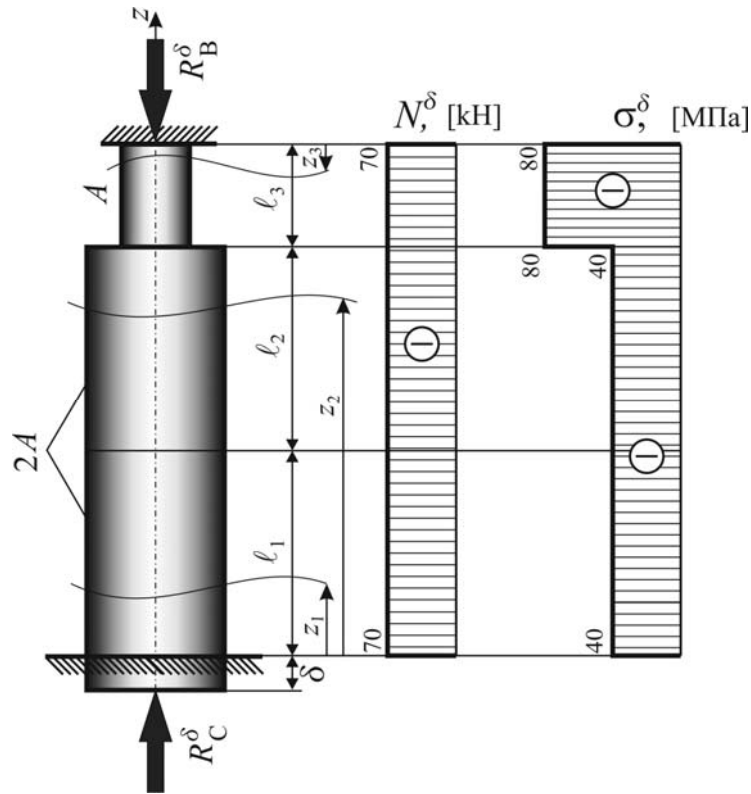
Степень статической неопределимости задачи: $n = 2 - 1 = 1$.

II.1. ССЗ. Уравнение статического равновесия:

$$\sum F_{iZ} = 0: \quad -R_B^\delta + R_C^\delta = 0; \quad R_B^\delta = R_C^\delta.$$

II.2. ГСЗ. Уравнение совместности перемещений:

$$\Delta l_C = \Delta l_C(R_C^\delta) + \delta = 0.$$



II.3. ФСЗ. Связь абсолютных деформаций с вызвавшими их силами:

$$\Delta l_C(R_C^\delta) = -\frac{R_C^\delta \cdot l_3}{EA} - \frac{R_C^\delta \cdot (l_2 + l_1)}{2EA}.$$

II.4. Синтез. Совместное решения уравнений:

$$\delta - \frac{R_C^\delta \cdot l_3}{EA} - \frac{R_C^\delta \cdot (l_2 + l_1)}{2EA} = 0; \quad \delta - R_C^\delta \cdot \frac{2l_3 + l_2 + l_1}{2EA} = 0;$$

$$R_C^\delta = \frac{2\delta \cdot EA}{2l_3 + l_1 + l_2} = \frac{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}}{1,0} \approx 70 \text{ кН};$$

$$R_B^\delta = R_C^\delta \approx 70 \text{ кН}.$$

II.5. Построение эпюры продольных сил:

$$0 \leq z_1 \leq l_1: \quad N^\delta(z_1) = -R_C^\delta = -70 \text{ кН};$$

$$l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2: \quad N^\delta(z_2) = -R_C^\delta = -70 \text{ кН};$$

$$0 \leq z_3 \leq l_3 : N^\delta(z_3) = -R_B^\delta = -70 \text{ кН.}$$

II.6. Деформационная проверка правильности построения эпюры N^δ – контроль равенства нулю суммарного перемещения стержня с учетом неточности изготовления, что соответствует нулевому линейному перемещению точки закрепления C :

$$\begin{aligned} \Delta l_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \delta &= \frac{N^\delta(z_1) \cdot l_1}{2EA} + \frac{N^\delta(z_2) \cdot l_2}{2EA} + \frac{N^\delta(z_3) \cdot l_3}{EA} + \delta = \\ &= -\frac{70 \cdot 10^3}{EA} \left(\frac{0,4}{2} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,1}{1} \right) + 0,2 \cdot 10^{-3} \approx 0. \end{aligned}$$

II.7. Построение эпюры напряжений:

$$\sigma_1^\delta = \frac{N^\delta(z_1)}{2A} = -\frac{70 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}} \approx -40 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2^\delta = \frac{N^\delta(z_2)}{2A} = -\frac{70 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}} \approx -40 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3^\delta = \frac{N^\delta(z_3)}{A} = -\frac{70 \cdot 10^3}{0,87 \cdot 10^{-3}} = -80 \text{ МПа.}$$

III. Учет температурного нагружения

Степень статической неопределимости задачи: $n = 2 - 1 = 1$.

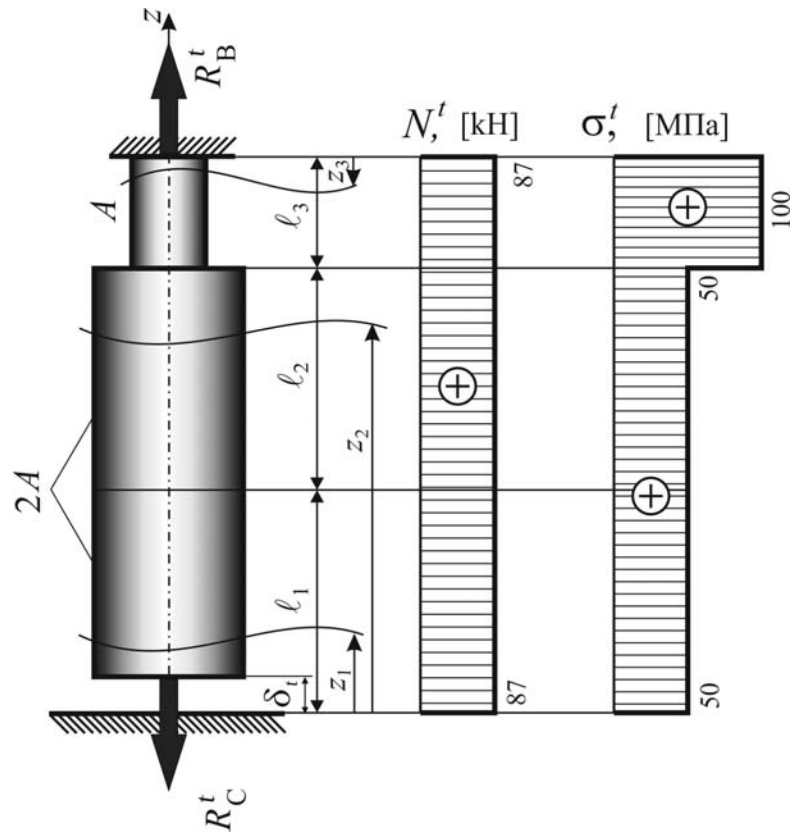
$$\delta_t = \alpha_t (l_1 + l_2 + l_3) \Delta t = 11 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9 \cdot (-25) \approx -0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

III.1. ССЗ. Уравнение статического равновесия:

$$\sum F_{iZ} = 0 : R_B^t - R_C^t = 0; \quad R_B^t = R_C^t.$$

III.2. ГСЗ. Уравнение совместности перемещений:

$$\Delta l_C = \Delta l_C(R_C^t) + \delta_t = 0.$$



III.3. ФСЗ. Связь абсолютных деформаций с вызвавшими их силами:

$$\Delta l_C(R_C^t) = \frac{R_C^t \cdot l_3}{EA} + \frac{R_C^t \cdot (l_2 + l_1)}{2EA}.$$

III.4. Синтез. Совместное решение уравнений:

$$\delta_t + \frac{R_C^t \cdot l_3}{EA} + \frac{R_C^t \cdot (l_2 + l_1)}{2EA} = 0; \quad \delta_t + R_C^t \cdot \frac{2l_3 + l_2 + l_1}{2EA} = 0;$$

$$R_C^t = -\frac{\delta_t \cdot 2EA}{2l_3 + l_1 + l_2} = \frac{0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}}{1,0} = 87 \text{ кН};$$

$$R_B^t = R_C^t = 87 \text{ кН}.$$

III.5. Построение эпюры продольных сил:

$$0 \leq z_1 \leq l_1: \quad N^t(z_1) = R_C^t = 87 \text{ кН};$$

$$l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2 : N^t(z_2) = R_C^t = 87 \text{ кН};$$

$$0 \leq z_3 \leq l_3 : N^t(z_3) = R_B^t = 87 \text{ кН}.$$

III.6. Деформационная проверка правильности построения эпюры N^t – контроль равенства нулю суммарного перемещения стержня с учетом удлинения стержня от температуры, что соответствует нулевому линейному перемещению точки закрепления C :

$$\begin{aligned} \Delta l_C &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \delta_t = \frac{N^t(z_1) \cdot l_1}{2EA} + \frac{N^t(z_2) \cdot l_2}{2EA} + \frac{N^t(z_3) \cdot l_3}{EA} + \delta_t = \\ &= \frac{87 \cdot 10^3}{EA} \left(\frac{0,4}{2} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,1}{1} \right) - 0,25 \cdot 10^{-3} = 0. \end{aligned}$$

III.7. Построение эпюры напряжений:

$$\sigma_1^t = \frac{N^t(z_1)}{2A} = \frac{87 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2^t = \frac{N^t(z_2)}{2A} = \frac{87 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,87 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3^t = \frac{N^t(z_3)}{A} = \frac{87 \cdot 10^3}{0,87 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ МПа}.$$

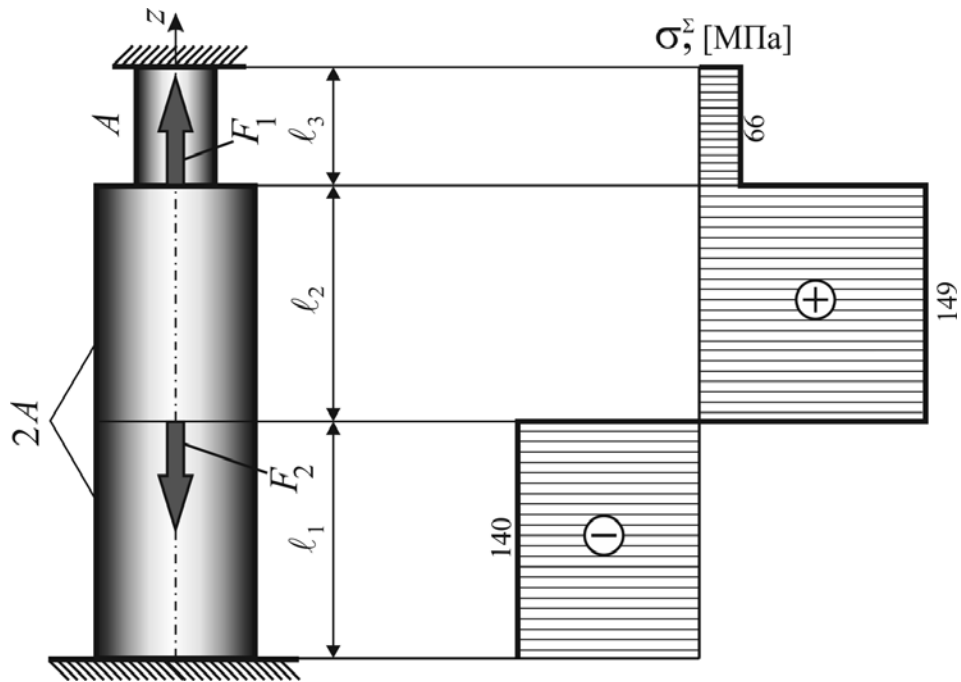
IV. Определение суммарных напряжений

Поскольку предполагается, что под действием приложенных нагрузок система деформируется линейно-упруго, должен выполняться принцип суперпозиции. Согласно этому принципу суммарные (результатирующие) напряжения на соответствующих участках стержня определяются как алгебраическая сумма напряжений, вызванных каждой из рассмотренных выше нагрузок в отдельности. Знаки напряжений при этом подчиняются правилу знаков для нормальных напряжений, т.е. растягивающее напряжение считается положительным, а сжимающее – отрицательным:

$$\sigma_1^{\Sigma} = \sigma_1 + \sigma_1^{\delta} + \sigma_1^t = -150 - 40 + 50 = -140 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2^{\Sigma} = \sigma_2 + \sigma_2^{\delta} + \sigma_2^t = 139 - 40 + 50 = 149 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3^{\Sigma} = \sigma_3 + \sigma_3^{\delta} + \sigma_3^t = 46 - 80 + 100 = 66 \text{ МПа}.$$



Наибольшее по абсолютной величине суммарное напряжение – на втором участке:

$\sigma_{\max} = |\sigma_2| = 149 \text{ МПа} < [\sigma] = 150 \text{ МПа} \Rightarrow$ условие прочности выполнено.

Контрольные вопросы

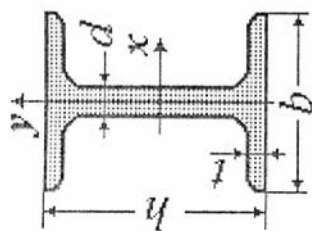
1. Что называется центральным растяжением-сжатием?
2. Какие внутренние силовые факторы имеют место в сечениях стержня при центральном растяжении-сжатии?
3. Назовите правило построения эпюры внутренней продольной силы.

4. Сформулируйте гипотезу плоских сечений в условиях центрального растяжения-сжатия.
5. По какой формуле вычисляются нормальные напряжения при центральном растяжении-сжатии?
6. Запишите условие прочности при центральном растяжении-сжатии.
7. Что такое допустимое (допускаемое) напряжение?
8. Какие виды расчетов возможны по условию прочности?
9. По какой формуле вычисляются абсолютные деформации стержней при центральном растяжении-сжатии на участках, где $q = 0$?
10. По какой формуле вычисляются абсолютные деформации стержней при центральном растяжении-сжатии на участках, где $q \neq 0$?
11. Какой вид имеет закон Гука при центральном растяжении-сжатии? Все ли материалы подчиняются этому закону?
12. Что такое модуль упругости материала?
13. Что такое коэффициент Пуассона?
14. Какие геометрические характеристики используются в расчетах на прочность при центральном растяжении-сжатии?
15. Что называется жесткостью стержня при растяжении-сжатии?
16. Какие системы называются статически неопределимыми?
17. Какие уравнения необходимо составить (дополнительно к уравнениям статического равновесия) для решения статически неопределимой задачи?
18. В каком порядке выполняется расчет статически неопределимых систем при центральном растяжении-сжатии (методика раскрытия статической неопределимости)?
19. В чем заключается деформационная проверка правильности раскрытия статической неопределимости при центральном растяжении-сжатии?
20. Как влияет изменение температуры на прочность статически неопределимых систем?
21. Как влияет неточность изготовления отдельных элементов на прочность статически неопределимых систем?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Балки двутавровые стальные горячекатаные (ГОСТ 8239-89)

Номер профиля	Размеры, мм				$A_x, \text{см}^2$	$I_{x^2, 4} \text{см}^4$	$W_{x^2, 3} \text{см}^3$	$S_{x^2, 3} \text{см}^3$	$I_{y^2, 4} \text{см}^4$	$W_{y^2, 3} \text{см}^3$
	h	b	d	t						
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23,0	17,9	6,49
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,50
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	62,3	58,6	14,50
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	81,4	82,6	18,40
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	104,0	115,0	23,10
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	131,0	157,0	28,60
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	163,0	198,0	34,50
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	210,0	260,0	41,50
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	268,0	337,0	49,90
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	339,0	419,0	59,90
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743,0	423,0	516,0	71,10
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953,0	545,0	667,0	86,10
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231,0	708,0	808,0	101,00



Обозначения:

h – высота балки;

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

A – площадь сечения;

I – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения.

**Приложение 2. Швеллеры стальные горячекатаные (серия У) с уклоном внутренних граней полок
(ДСТУ 3436-96, ГОСТ 8240-97)**

Номер профиля	Размеры, мм			$A, \text{ см}^2$	$I_{x^3, 4} \text{ см}^4$	$W_{x^3, 4} \text{ см}^3$	$S_{x^3, 4} \text{ см}^3$	$I_{y^3, 4} \text{ см}^4$	$W_{y^3, 4} \text{ см}^3$	$z_0, \text{ см}$	
	h	b	d								t
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	9,00	8,70	3,68	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	13,30	12,80	4,75	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	20,40	20,40	6,46	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	29,60	31,20	8,52	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,60	491,0	70,2	40,80	45,40	11,00	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,10	747,0	93,4	54,10	63,60	13,80	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,50	823,0	103,0	59,40	78,80	16,40	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,70	1090,0	121,0	69,80	86,00	17,00	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,20	1190,0	132,0	76,10	105,00	20,00	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,40	1520,0	152,0	87,80	113,00	20,50	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,70	2110,0	192,0	110,00	151,00	25,10	2,21
24	240	90	5,6	10,0	30,60	2900,0	242,0	139,00	208,00	31,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,20	4160,0	308,0	178,00	262,00	37,30	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,50	5810,0	387,0	224,00	327,00	43,60	2,52

Обозначения:

h – высота балки;

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

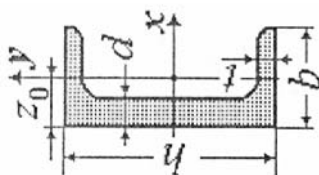
A – площадь сечения;

I – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения;

z_0 – расстояние от оси y до внешней грани стенки.



Приложение 3. Уголки стальные равнополочные горячекатаные (ДСТУ 2251-93, ГОСТ 8509-93)

Номер профиля	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$I_{x0 \max}, \text{см}^4$	$I_{y0 \min}, \text{см}^4$	$W_{y0}, \text{см}^3$	$z_0, \text{см}$
	b	d							
5	50	3	2,96	7,11	1,94	11,27	2,95	1,57	1,33
		4	3,89	9,21	2,54	14,63	3,80	1,95	1,38
		5	4,8	11,2	3,13	17,77	4,63	2,30	1,42
5,6	56	6	5,69	13,07	3,69	20,72	5,43	2,63	1,46
		4	4,38	13,1	3,21	20,79	5,41	2,52	1,52
6,3	63	5	5,41	15,97	3,96	25,36	6,59	2,97	1,57
		4	4,96	18,86	4,09	29,90	7,81	3,26	1,69
		5	6,13	23,10	5,05	36,80	9,52	3,87	1,74
7	70	6	7,28	27,06	5,98	42,91	11,18	4,44	1,78
		4,5	6,20	29,04	5,67	46,03	12,04	4,53	1,88
		5	6,86	31,94	6,27	50,67	13,22	4,92	1,90
		6	8,15	37,58	7,43	59,64	15,52	5,66	1,94
7	70	7	9,42	42,98	8,57	68,19	17,77	6,31	1,99
		8	10,67	48,16	9,68	76,35	19,97	6,99	2,02

Обозначения:

b – ширина полки;

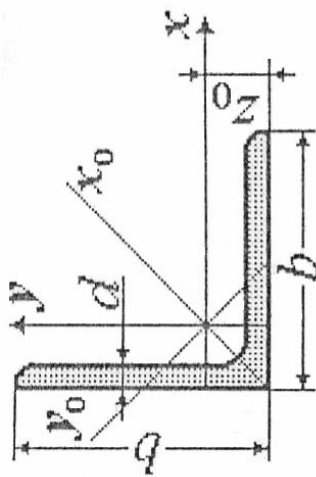
d – толщина полки;

A – площадь сечения;

I – момент инерции;

W – момент сопротивления;

z_0 – расстояние от оси y до внешней грани полки.



Окончание приложения 3

Номер профиля	Размеры, мм		A_3 , см ²	I_{x_3} , см ⁴	W_{x_3} , см ³	$I_{x_0 \max}$, см ⁴	$I_{y_0 \min}$, см ⁴	W_{y_0} , см ³	z_0 , см
	b	d							
7,5	75	5	7,39	39,53	7,21	62,65	16,41	5,74	2,02
		6	8,78	46,57	8,57	73,87	19,28	6,62	2,06
		7	10,15	53,34	9,89	84,61	22,07	7,43	2,10
8	80	8	11,50	59,84	11,18	94,89	24,80	8,16	2,15
		9	12,83	66,10	12,43	104,72	27,48	8,91	2,18
		5,5	8,63	52,68	9,03	83,56	21,80	7,10	2,17
8	80	6	9,38	56,97	9,80	90,40	23,54	7,60	2,19
		7	10,85	65,31	11,32	103,60	26,97	8,55	2,23
		8	12,30	73,36	12,80	116,39	30,32	9,44	2,27
9	90	6	10,61	82,10	12,49	130,00	33,97	9,88	2,43
		7	12,28	94,30	14,45	149,67	38,94	11,15	2,47
		8	13,93	106,11	16,36	168,42	43,80	12,34	2,51
10	100	9	15,60	118,00	18,29	186,00	48,60	13,48	2,55
		6,5	12,82	122,10	16,69	193,46	50,73	13,38	2,68
		7	13,75	130,59	17,90	207,01	54,16	14,13	2,71
10	100	8	15,60	147,19	20,30	233,46	60,92	15,66	2,75
		10	19,24	178,95	24,97	283,83	74,08	18,51	2,83
		12	22,80	208,90	29,47	330,95	86,84	21,10	2,91
11	110	14	26,28	237,15	33,83	374,98	99,32	23,49	2,99
		16	29,68	263,82	38,04	416,04	111,61	25,79	3,06
		7	15,15	175,61	21,83	278,54	72,68	17,36	2,96
		8	17,20	198,17	24,77	314,51	81,83	19,29	3,00

Литература

1. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др.; под ред. Г.С. Писаренко. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

Содержание

Вступление.....	3
1. Центральное растяжение-сжатие прямолинейного стержня.....	4
1.1. Внутренняя продольная сила.....	4
1.2. Построение эпюры внутренней продольной силы.....	5
1.3. Напряжения при центральном растяжении-сжатии.....	7
1.4. Виды расчетов по допустимому напряжению.....	10
1.5. Деформации и перемещения при растяжении-сжатии. Закон Гука. Модуль упругости. Коэффициент Пуассона.....	12
2. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии.....	15
2.1. Жестко закрепленный стержень под действием сосредоточенной силы.....	16
2.2. Жестко закрепленный стержень под действием температурного нагружения.....	18
2.3. Жестко закрепленный стержень при наличии неточности изготовления (монтажный фактор).....	21
2.4. Расчет стержневой системы при силовом нагружении.....	23
2.5. Монтажные напряжения в стержневой системе.....	27
2.6. Определение температурных напряжений в стержневой системе.....	30
2.7. Учет совместного действия внешнего нагружения и дополнительных факторов в стержневой системе.....	33
2.8. Стержневая система под силовым нагружением.....	43
3. Расчетно-проектировочное задание.....	47
3.1. Содержание расчетно-проектировочного задания.....	47
3.2. Порядок выполнения задания.....	49
3.3. Расчетные схемы и численные данные.....	52
3.4. Примеры решения задач.....	63
Контрольные вопросы.....	76
Приложение 1. Балки двутавровые стальные горячекатаные (ГОСТ 8239-89).....	78
Приложение 2. Швеллеры стальные горячекатаные (серия У) с уклоном внутренних граней полок (ДСТУ 3436-96, ГОСТ 8240-89).....	79
Приложение 3. Уголки стальные равнополочные горячекатаные (ДСТУ 2251-93, ГОСТ 8509-93).....	80
Литература.....	82

Навчальне видання

КОНОХОВ Володимир Іванович
ХАВІН Валерій Львович
КИРКАЧ Олексій Борисович

РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ СТЕРЖНІВ
ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМУ РОЗТЯГАННІ-СТИСКАННІ

Навчально-методичний посібник
з розділу курсу «Опір матеріалів»
для студентів машинобудівних спеціальностей

Роботу до друку рекомендував доц. Шелковий С.К.
Відповідальний за випуск проф. Хавін В.Л.

В авторській редакції

План 2017 р., поз. 92

Підп. до друку 2017 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.
Наклад 100 прим. Зам. № Ціна договірна.

Видавець і виготовлювач
видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Багалія, 21