МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. Куценко, С. Коваленко

Управління квазістатичними процесами

Монографія

Харків
2024

УДК 51-74
К 95

Рецензенти:

В. І. Кузнецов – доктор технічних наук, професор, завідувач відділом магнетизму технічних об’єктів Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

І. П. Гамаюн – доктор технічних наук, професор, професор кафедри програмної інженерії та інформаційних технологій управління Національного технічного університету «ХПІ».

Куценко О. С.

К 95 Управління квазістатичними процесами: монографія / О. С. Куценко, С. В. Коваленко; НТУ «ХПІ». – Харків : ФОП Панов А. М., 2024. 156 с.

ISBN 978-617-8113-72-8

У монографії розглянуто питання математичного моделювання та аналітичного синтезу систем керування квазістатичними процесами. Отримано узагальнення першого та другого початків термодинаміки на багатовимірні квазістатичні процеси. Розглянуто конкретний приклад застосування отриманих результатів до розв’язання задачі аналітичного конструювання системи управління процесом згоряння в котельному агрегаті.

Призначено для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів та студентів.

Іл. 28. Табл. 0. Бібліогр.: 50 назв.

УДК 51-74

ISBN 978-617-8113-72-8 © Куценко О., Коваленко С., 2024

ЗМІСТ

Передмова 5

Глава 1 Основні поняття та визначення рівноважної термодинаміки 8

1.1. Термодинамічна система 8

1.2. Математичні моделі термодинамічних процесів 15

1.3. Внутрішня енергія, теплота та робота в термодинамічній системі 22

Глава 2 Абстрактна теорія багатовимірних квазістатичних процесів 28

2.1. Енергетична міра впливу 28

2.2. Обернена задача 36

2.3. Досяжність та ентропія 41

Глава 3 Оптимальне управління квазістатичними термодинамічними процесами 45

3.1. Загальна постановка задачі оптимального управління 45

3.2. Постановка задачі оптимального управління термодинамічним процесом 48

3.3. Оптимальне управління термодинамічними циклами 53

Глава 4 Квазістатичні процеси у технічних системах 64

4.1. Квазістатичні математичні моделі керованих процесів 64

4.2. Критерії квазістатичності керованих процесів 72

4.3. Критерій квазістатичності лінійних одновимірних систем на основі характеристичного вектора 81

4.4. Характеристичний вектор з'єднання ланок 85

4.5. Рівновага та стійкість квазістатичних систем 89

4.6. Задача налаштування керуючих параметрів технологічного процесу 93

Глава 5 Стабілізація та програмне керування квазістатичними процесами.....104

5.1. Управління за збуренням квазістатичним лінійним об'єктом.....104

5.2. Управління за відхиленнями квазістатичним лінійним об'єктом..106

5.3. Аналітичне конструювання регулятора за квадратичним критерієм якості.....112

5.4. Синтез САР на основі методу зворотних операторів.....115

5.5. Стабілізація положень рівноваги нелінійної квазістатичної системи 118

Глава 6 Стабілізація процесу згоряння у котельному агрегаті 122

6.1. Аналіз існуючих підходів, методів та засобів автоматичного регулювання котельних установок.....123

6.2. Структурна схема водогрійного КА.....126

6.3. Математична модель процесу згоряння в котельному агрегаті.....130

6.4. Спрощена квазістатична математична модель процесу згоряння .136

6.5. Синтез оптимальної системи стабілізації процесу згоряння.....141

6.6. Обговорення результатів 148

Перелік використаних джерел 150

ПЕРЕДМОВА

Поняття «квазістатична система» та «квазістатичний процес» зобов'язані своїй появі фундаментальному розділу фізики – термодинаміці. Термодинаміка зародилася та отримала розвиток на основі феноменологічного підходу, тобто розгляду тільки спостережуваних властивостей термодинамічних систем (ТС) без детального аналізу механізмів їх прояву. В результаті такого підходу до становлення термодинаміки її основні положення: термінологія, аксіоматика та логічні побудови у вигляді фізичних законів за минулі кілька століть не зазнали істотних змін, а реальні практичні результати, що підтверджують з досить високим ступенем точності теоретичні передумови, зробили термодинаміку поряд з механікою, зразком прикладної науки. Квазистатичність процесів у ТС є одним з основних постулатів термодинаміки поряд з такими поняттями як оборотність та рівноважність. З позиції термодинаміки квазістатичним називається нескінченно повільний процес, що складається з послідовності станів рівноваги. Істотним обмеженням термодинаміки рівноважних процесів є виняток із розгляду часової координати та подання процесів у вигляді відрізків траєкторій у фазовому просторі. Математичне забезпечення термодинаміки базується на двох постулатах: першому та другому началах, на підставі яких вводяться математичні моделі основних термодинамічних процесів.

Незважаючи на обмеженість об'єкта дослідження у вигляді квазістатичної ТС, ряд понять і підходів термодинаміки можна адаптувати щодо широкого класу технологічних систем за зовнішніми властивостями подібних до ТС. У зв'язку з цим виникає проблема побудови математичної теорії квазістатичних процесів, що охоплює як ТС так і інші системи, що володіють властивістю квазістатичності. У цій роботі зроблено спробу запропонувати математичні основи теорії квазістатичних процесів з орієнтацією на задачі управління.

Класичне обґрунтування термодинаміки як системи знань

практично повністю викладено у роботах Планка [1], Карно [2], Клаузіуса [3], Больцмана та інших «класиків» термодинаміки [4, 5]. Ця гілка термодинаміки збереглася без принципових змін до нашого часу.

Одним із принципових шляхів залучення математичних методів до термодинаміки та узагальнення останніх на інші фізико-технічні процеси можна вважати підхід, викладений у [6]. Особливістю ідей Гухмана є обґрунтування однаковості компонентів диференціального рівняння першого початку термодинаміки у вигляді добутків деяких потенціалів на прирощення відповідної координати стану ТС. При цьому термічний вплив увійшов як приватний вид із різноманіття впливів на ТС, а поняття енергії та кількості впливу отримали узагальнене трактування, придатне по відношенню до будь-яких подібних процесів. Універсальність ідей, викладених у [6], наочно продемонстрована у дослідженнях у галузі екосистем [7].

Узагальнюючи результати термодинаміки, які пов'язані з першим началом або законом збереження енергії, можна зробити висновок про обмеженість математичних методів, що дозволяють адаптувати класичну рівноважну термодинаміку на широкий спектр аналогічних процесів у природі, техніці та суспільстві. Принциповим недоліком розглянутого підходу є відсутність будь-яких часових залежностей, що пов'язують зміни стану ТС з інтенсивністю (потужністю) впливів. У зв'язку з цим авторами цієї роботи раніше були отримані деякі результати «динамізації» квазістатичних процесів, що дозволило отримати математичні моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь, що пов'язують зміну у часі вектора стану квазістатичної системи зі змінами інтенсивностей керуючих впливів. Отримані в [8, 9, 10] результати вимагають подальшого узагальнення.

Найбільшу складність у формуванні термодинаміки викликав її другий закон, особливо поняття ентропії. Так у [4] наведено 18 формулювань другого закону, кожне з яких у результаті має один той самий сенс неможливості отримати механічну роботу, використовуючи лише одне джерело теплоти. На жаль, велика кількість формулювань та

інтерпретацій другого закону термодинаміки, призвели до деякого консерватизму в математизації та формалізації термодинамічних методів та їх адаптації до квазістатичних процесів іншої природи. Якісним зрушенням у напрямі аксіоматизації та математизації в термодинаміці з'явилися роботи Шіллера, Каратеодорі, Афанасьєвої-Еренфест, Білоконя в яких була сформульована узагальнена теорія квазістатичних процесів мовою математичних формулювань. Серед досліджень у цьому напрямку слід особливо виділити статтю Каратеодорі [11], в якій він витончено сформулював другий закон термодинаміки мовою пфаффових форм. Ця стаття дала поштовх широкому застосуванню аксіоматичного підходу в термодинаміці багатовимірних процесів [12, 13, 14, 15].

ГЛАВА 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ РІВНОВАЖНОЇ ТЕРМОДИНАМІКИ

Оскільки дана монографія присвячена дослідженням на стику двох розділів наук: термодинаміки і теорії управління, то читачеві управлінцю бажано згадати основні положення термодинаміки, які він вивчав у курсі загальної фізики. Фахівцю ж у галузі теплотехніки для читання даної монографії слід мати мінімальні уявлення про теорію управління, яка є, взагалі кажучи, прикладною математичною дисципліною.

Нижче будуть представлені основні поняття та визначення термодинаміки та теорії управління, що трактуються таким чином, щоб уже на цій стадії можна було простежити спільність проблем, що виникають у, здавалося б, дуже далеких один від одного розділах науки.

1.1. **Термодинамічна система**

Навколишній світ складається з матерії, що різниться у просторі та в часі наборами деяких ознак. До розряду останніх можна віднести: хімічний склад, щільність, температуру, тиск тощо. Кожна із ознак характеризується деякою величиною у вибраній системі фізичних одиниць.

На перший погляд може здатися, що не всі ознаки, такі як хімічний склад речовини або її фазовий стан мають свій кількісний вираз. Однак ці труднощі легко подолати, пронумерувавши всі N хімічних елементів відповідно до таблиці Д. І. Менделєєва, і поставивши кожній речовині у відповідність N-мірний вектор, кожна компонента якого відповідає кількості атомів цього елемента в молекулі речовини.

Будемо називати термодинамічною системою Σ частину простору із заданою конфігурацією, що заповнена деякою речовиною. Поверхня, що відокремлює термодинамічну систему від довкілля, називається

контрольною поверхнею. Контрольна поверхня в загальному випадку може змінюватися в часі та просторі.

Слід звернути увагу на те, що поняття «контрольна поверхня» у загальному випадку має сенс геометричної поверхні. Іншими словами, контрольна поверхня є об'єднанням двовимірних поверхонь у тривимірному фізичному просторі, що відокремлює деяку частину цього простору. Таким чином, координати (X,Y,Z) точок, що знаходяться всередині контрольної поверхні, можна подати у вигляді системи нерівностей, яка змінюється в часі

$$f_1(X,Y,Z,s_{11}(t)...s_{1l_1}(t)) \le 0,$$
$$f_2(X,Y,Z,s_{21}(t)...s_{2l_2}(t)) \le 0,$$
$$...$$
$$f_m(X,Y,Z,s_{m1}(t)...s_{ml_m}(t)) \le 0,$$

де $s_{ij}(t)$ – змінні в часі параметри, що регулюють конфігурацію контрольної поверхні.

Вся контрольна поверхня або її окремі фрагменти можуть наділятись певними фізичними властивостями, що обмежують ті чи інші процеси перенесення речовини та взаємодії з довкіллям. Набір параметрів, що описують контрольну поверхню і множина величин ознак речовини, що знаходиться всередині останньої, є повним описом термодинамічної системи. Будемо називати зазначений набір фізичних величин вектором стану термодинамічної системи або фазовим вектором.

Розмірність n вектора стану $x \in R^n$ залежить від обраної системи параметрів, що характеризує речовину, та множини параметрів, що описують контрольну поверхню.

Усі компоненти вектора стану x можна розбити на два різних класа. Уявімо, що система Σ розділена просторово на довільні частини $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_N$. Тоді деякі із компонент вектора x для кожної з Σ_k будуть різними, а їх сума по всіх частинах системи буде співпадати зі значенням цієї компоненти для системи в цілому. До таких ознак

можуть бути віднесені об'єм, маса, кількість молекул тощо. Інші компоненти вектора x системи Σ можуть збігатися з компонентами вектора стану окремих частин Σ_k. До останніх відносяться: щільність, тиск, хімічний склад, температура речовини та інші. Компоненти, що відносяться до першого з двох розглянутих класів називаються екстенсивними, а до другого – інтенсивними.

Широкий клас термодинамічних систем є однорідними системами, що відрізняються рівністю всіх інтенсивних параметрів між собою у всіх її частинах. Прикладом однорідної системи може бути замкнута, ізольована від зовнішніх впливів поверхня, що заповнена будь-яким газом. Така система може бути описана вектором стану $x = (V, m, p, T)$, де V – об'єм всередині системи; m, p, T – маса, тиск і температура газу відповідно. Таку термодинамічну систему називатимемо найпростішою.

Слід зазначити, що вибраний вектор стану містить надлишкове число компонентів. Одна з них може бути виключена відповідно до рівняння стану, який для ідеальних газів має відомий вигляд:

$$pV = mRT,$$

де R – газова постійна, що залежить від складу газу всередині контрольної поверхні.

Щодо поведінки у часі вектора стану $x(t)$ на деякому часовому відрізку $[t_0, t_1]$ можна зробити такі припущення:

1. $x(t) = \text{const}, t \in [t_0, t_1],$
2. $x(t) \neq \text{const}, t \in [t_0, t_1].$

У першому випадку говоритимемо, що система знаходиться в ізоляції по відношенню до зовнішнього середовища або в рівновазі з останнім. У другому випадку будемо говорити, що на систему впливають неврівноважені впливи, що виходять з різних джерел, розташованих поза системою в навколишньому середовищі.

Далі будемо розглядати однорідні термодинамічні системи, що

складаються із сумішей ідеальних газів. Термодинаміка як наука займається вивченням станів і властивостей термодинамічних систем, а також вивченням змін цих станів і властивостей, зумовлених процесами, що протікають у цих системах, та взаємодією з довкіллям.

Зовнішні впливи на систему можуть мати дуже різноманітний характер. Особливе значення у термодинаміці мають тепловий вплив та деформаційний, що здійснює механічну роботу. Крім зазначених впливів можна розглядати також електричний, магнітний та інші види впливів, що здійснюються зовнішнім середовищем по відношенню до термодинамічної системи, що розглядається.

Як джерело впливу на систему можна розглядати деяку іншу систему, яка вступає у відповідний контакт з досліджуваною. Цей контакт здійснюється на контрольній поверхні, яка наділяється певними властивостями. Так для здійснення теплового впливу контрольна поверхня передбачається теплопровідною, а для здійснення тільки механічної роботи теплонепроникною та такою, що деформується або абадіабатичною.

Зовнішній вплив на систему можна розділити на два великі класи. До першого з них відносяться контрольовані впливи. До таких впливів відносяться деформація робочого об'єму теплового двигуна, регульований підігрів робочого тіла в тепловій машині, підведення необхідних кількостей компонентів паливної суміші в камеру згоряння, тощо. Другий клас утворюють неконтрольовані впливи, що обумовлені випадковими змінами властивостей довкілля та контрольної поверхні. Перший тип впливу називатимемо керуючими впливами або управліннями, а другий – обурюючими впливами або збурюваннями. До збурень можна віднести теплові втрати в тепловій машині, що спричинені зміною умов теплообміну на контрольній поверхні, а також випадкові зміни обсягу контрольної поверхні внаслідок флуктуацій тиску у зовнішньому середовищі.

Незважаючи на відмінність причин впливу на термодинамічну систему загальним для контрольованих та неконтрольованих впливів є

те, що вони викликають зміну вектора стану x у часі. За відсутності ж впливів вектор x зберігає постійне значення, яке відповідає моменту припинення всіх впливів на систему (див. рис. 1.1).

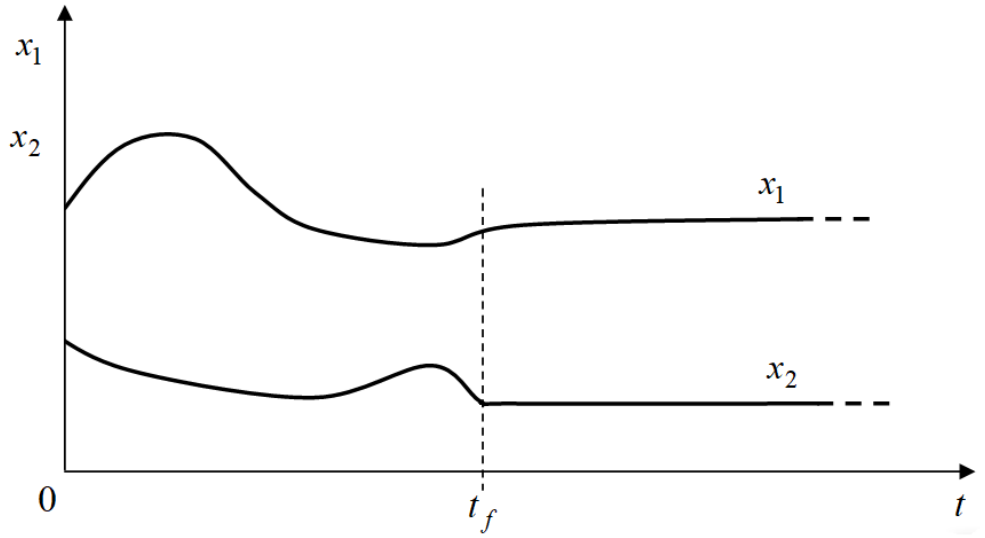


Рис. 1.1. Зміна вектора стану за наявності та відсутності впливу

На рис. 1.1. на часовому інтервалі $[0, t_f]$ система піддається до деяких впливів, про що свідчить зміна компонентів вектора стану x_1, x_2. На напівінтервалі (t_f, ∞) $x_1 = x_1(t_f)$, $x_2 = x_2(t_f)$ – постійні величини, тобто для $\forall t > t_f$ будь-які впливи на систему відсутні.

Еволюцію вектора стану зручно представляти фазової траєкторією системи, що є множиною точок у просторі станів R^n, параметризованих часом t.

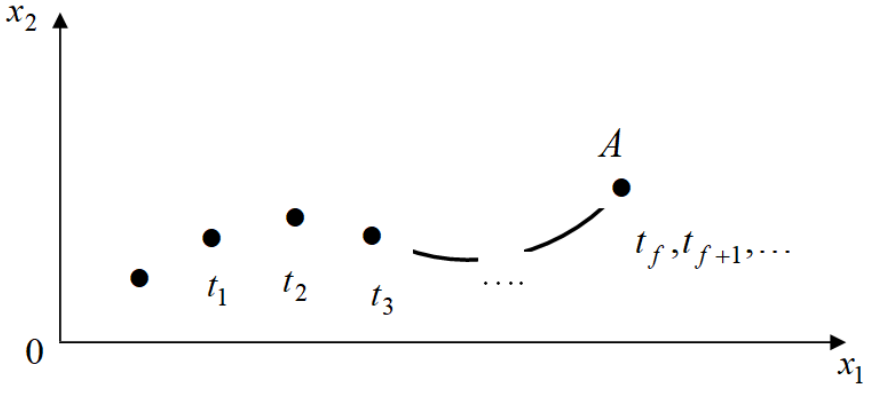


Рис. 1.2. Фазова траєкторія двовимірної термодинамічної системи

На рис. 1.2. наведено приклад фазової траєкторії у двовимірному

просторі станів. Точці A, як останній, відповідає стан спокою термодинамічної системи, що характеризується відсутністю будь-яких зовнішніх впливів як контрольованих, так і неконтрольованих.

Слід зазначити, що в класичній термодинаміці фазові траєкторії, як правило, не прив'язуються до часу, оскільки всі процеси передбачаються нескінченно повільними. Так різні процеси, що відбуваються в ідеальних теплових машинах, прийнято представляти в p, V координатах, а замість часових позначок вказувати напрямок переміщення зображувальної точки вздовж фазової траєкторії.

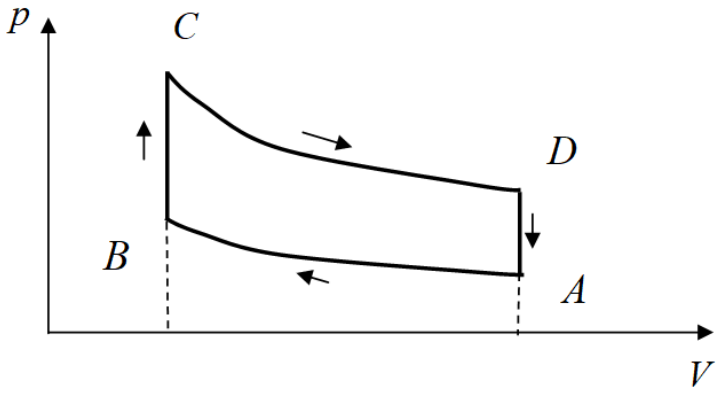


Рис. 1.3. Ідеальний цикл Отто поршневої теплової машини

Приклад фазової траєкторії термодинамічної системи є замкнутий цикл Отто, який зображено на рис. 1.3. Цей цикл починається в точці A та утворюється в результаті наступних впливів:

– на ділянці AB здійснюється стиск, що характеризується зменшенням об'єму;

– на ділянці BC до системи підводиться теплота без зміни об'єму, у результаті чого відбувається підвищення тиску;

– на ділянці CD робоче тіло розширюється та його об'єм наприкінці розширення збігається з первісним;

– на ділянці DA відбувається відведення тепла без деформації системи.

Таким чином, фазова траєкторія $ABCDA$ описує циклічний процес термодинамічної системи, в результаті якого вектор стану (p,V) «повертається» у вихідну точку A фазової площині. Як видно, описаний

циклічний процес не прив'язаний до часу і може взагалі відбуватися протягом будь-якого часового інтервалу. З точки зору класичної термодинаміки цей часовий інтервал не має принципового значення, всі основні результати визначаються конфігурацією траєкторії та напрямом руху зображувальної точки.

Кожен клас впливів на ТС відрізняється видом фазових траєкторій системи. Так, в циклічному процесі, який зображено на рис 1.3. можливо розрізнити два типи траєкторій: AB і CD відповідають впливу у вигляді механічної роботи, BC і DA – тепловому впливу. На рис. 1.4. показані сімейства фазових траєкторій, що відповідають тепловому впливу а) та механічному б).

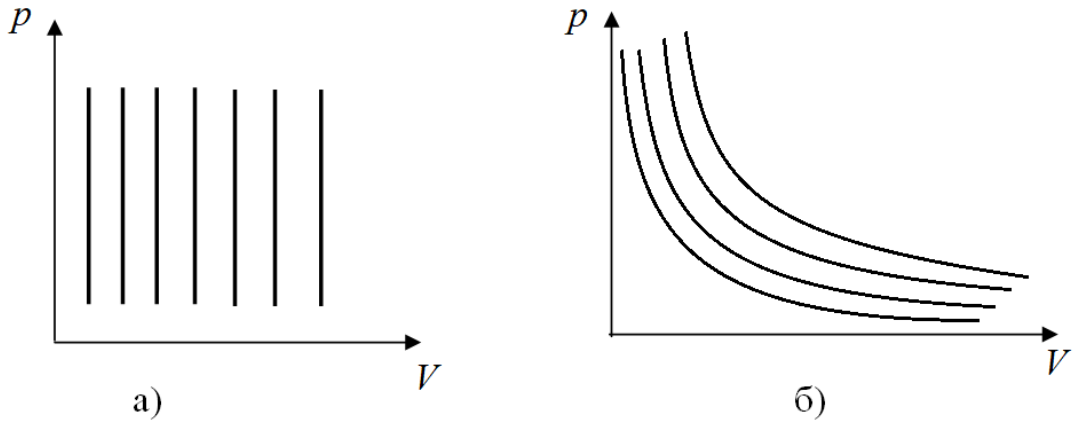


Рис. 1.4. Фазові траєкторії найпростішої термодинамічної системи

Сімейству траєкторій рис. 1.4. а) відповідає однопараметрична множина рівнянь $V = C$ – ізохор, а траєкторіям рис. 1.4. б) відповідає множина рівнянь $pV^{\gamma} = C$ – адіабат, де γ – постійний показник адіабати, який залежить від складу робочого тіла. Ізохори та адіабати важливі тим, що вони відповідають «чистим» впливам у вигляді теплоти та механічної роботи відповідно. Інші, відомі з термодинаміки типові фазові траєкторії – ізотерми і ізобари, що описуються рівняннями $pV = C$ і $p = C$ відповідно, вимагають для своєї реалізації спільного впливу у вигляді теплоти і механічної роботи в певних співвідношеннях.

Описана вище якісна модель поведінки термодинамічної системи при різноманітних впливах дещо ідеалізована. Насправді стан спокою

після припинення всіх впливів досягається через деякий час (час релаксації). У період наявності впливів вектор стану у різних точках реальної термодинамічної системи має різні значення, тобто. система неоднорідна. Так, при швидкому переміщенні поршня в циліндрі з газом, тиск газу біля днища поршня більший за тиск усередині циліндра. Отже, ступінь адекватності запропонованої моделі поведінки значною мірою залежить від швидкості зміни вектора стану, тобто від інтенсивності впливу. Це означає, що фазові траєкторії, які зображені на рис. 1.4., насправді являють собою множину близьких один до одного станів рівноваги, що утворюються в результаті послідовності впливів на систему, що нескінченно повільно змінюється. У зв'язку з цим у термодинаміці прийнято називати такі процеси квазістатичними.

На підставі викладених вище основних положень класичної термодинаміки можна зробити такі висновки:

1. Термодинамічна система описується скінченовимірним вектором стану.

2. Стан системи може змінюватися тільки при взаємодії з іншими термодинамічними системами (довкіллям).

3. Вигляд фазових траєкторій визначається типом впливу на систему. Фазові траєкторії, що відповідають деякому класу впливів, не перетинаються.

4. Швидкість та напрямок переміщення зображувальної точки вздовж фазової траєкторії визначаються величиною та знаком скалярної величини – інтенсивності відповідного впливу.

5. При припиненні всіх видів впливів система миттєво приходить у стан спокою і залишається в ньому як завгодно довго.

1.2. **Математичні моделі термодинамічних процесів**

Якісна структура фазових траєкторій термодинамічної системи, що належать деякому класу впливів, відповідає лініям струму деякого векторного поля $\varphi(x)$ або фазовим траєкторіям відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x). \qquad (1.1)$$

Залежно від виду $\varphi(x)$ система (1.1) задає множину фазових траєкторій, що відповідають даному класу впливів. Через кожну точку $x \in R^n$ проходить лише одна фазова траєкторія.

Як було зазначено раніше, в математичну модель термодинамічного процесу необхідно ввести параметр, що регулює швидкість і напрямок руху зображувальної точки вздовж фазової кривої, тобто величину, що має фізичний сенс інтенсивності впливу.

Інтенсивність впливу $u(t)$ природним чином зручно ввести в мультиплікативній формі:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x)u(t). \qquad (1.2)$$

Фазова траєкторія розв'язку рівняння (1.2) задається початковим значенням $x(t_0) = x_0$ і збігається з відповідною фазовою траєкторією системи (1.1), а переміщення зображувальної точки по фазовій траєкторії задається вибором величини і знаку інтенсивності впливу $u(t)$.

Слід зазначити, що будь-який стан $x \in R^n$ у фазовому просторі може бути отримано вибором початкового значення $x_0 \in R^n$ на траєкторії, що проходить через задану точку $x \in R^n$ і вибором закону зміни $u(t)$, що переводить точку з положення рівноваги x_0 в нове положення рівноваги x.

Як ми бачили раніше, вид векторного поля $\varphi(x)$ є ідентифікатором відповідного впливу на ТС. Для його знаходження можна йти різними шляхами. Одним з можливих підходів є експериментальний, заснований на інформації про фазові траєкторії, які отримані в результаті множини експериментів, що відповідають деякому впливу на систему.

Нехай експериментальна множина траєкторій, що відповідають певному впливу в найзагальнішому вигляді, описується системою $n-1$

незалежних рівнянь.

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \\ &\ldots \\ &f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Систему (1.3) можна інтерпретувати як одновимірне різноманіття, що параметризоване $n-1$ постійною C_k. Таким чином, при фіксованому наборі $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ (1.3) уявляє собою лінію в n-мірному просторі. Фіксуючи деякий набір $C_k, k = \overline{1, n-1}$ та, обираючи одну зі змінних стану, наприклад x_n, як параметр, можна отримати всі точки однієї з фазових траєкторій. Якщо задана точка x^0, що знаходиться на фазовій траєкторії, яка цікавить нас, то вектор $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ знаходиться з (1.3) у вигляді

$$\begin{aligned} C_1 &= f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ C_2 &= f_2(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ &\ldots \\ C_{n-1} &= f_{n-1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0). \end{aligned}$$

Для отримання системи диференціальних рівнянь виду (1.1) продиференціюємо систему рівнянь (1.3) по t. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\dot{x}_n = 0, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\dot{x}_n = 0, \\ &\ldots \\ &\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\dot{x}_n = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Вибираючи одну зі змінних стану, наприклад, x_n в якості

параметра, можна (1.4) доповнити диференціальним рівнянням

$$\dot{x}_n = 1. \qquad (1.5)$$

В результаті підстановки (1.5) в (1.4), остання перетворюється на вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = -\frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \; i = \overline{1, n-1}.$$

Отримана система лінійних неоднорідних рівнянь відносно $\dot{x}_j$ $(j = \overline{1, n-1})$ в силу незалежності системи функцій (1.3) має єдиний розв'язок, який спільно з (1.5) і дає нам векторне диференціальне рівняння (1.1), що моделює термодинамічний процес при відповідному впливі.

Як приклад продемонструємо наведений метод ідентифікації до відкритої термодинамічної системи, що піддається трьом видам впливу: механічному, тепловому та матеріальному. Таку систему можна схематично подати у вигляді, зображеному на рис. 1.5.

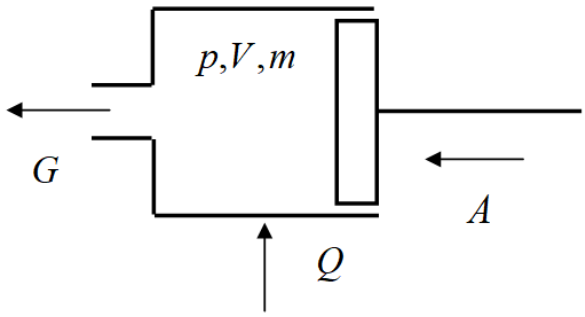


Рис. 1.5. Відкрита термодинамічна система

Система уявляє заповнений ідеальним газом циліндр з теплопровідними стінками, через які шляхом теплового контакту з навколишнім середовищем здійснюється тепловий вплив Q. Механічний вплив A здійснюється шляхом переміщення поршня, а матеріальний G – засновано на масообміні з навколишнім середовищем. Передбачається, що довкілля та газ усередині порожнини циліндра мають однаковий

хімічний склад. Усі три види впливів на систему проводяться рівноважно, тобто температура джерела нескінченно близька до температури газу T всередині циліндра, тиск на поршень з боку навколишнього середовища мало відрізняється від тиску p в системі.

Стан такої термодинамічної системи повністю описується трьома координатами, в якості яких виберемо $x=(p,V,m)$, де V і m – обсяг і маса газу всередині циліндра. Експериментально одержані фазові траєкторії при рівноважній зміні об'єму наближено описуються системою рівнянь:

$$\begin{aligned} pV^{\gamma} &= C_1, \\ m &= C_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В (1.6) і далі будемо припускати, що всі фізичні величини представлені у відносній безрозмірній формі. Вибираючи в якості незалежної змінної об'єм V, і застосовуючи до (1.6) описаний раніше алгоритм ідентифікації, отримаємо після диференціювання (1.6) по t систему диференціальних рівнянь, що моделює механічний вплив:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\gamma\frac{p}{V}, \\ \frac{dV}{dt} &= 1, \\ \frac{dm}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

При рівноважному теплообміні фазові траєкторії подаються системою рівнянь

$$\begin{aligned} V &= C_1, \\ m &= C_2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

а відповідна система диференціальних рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 1, \\ \frac{dV}{dt} &= 0, \\ \frac{dm}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

І, нарешті, для фазових траєкторій рівноважного масообміну

$$\begin{aligned} pm^{-\gamma} &= C_1, \\ V &= C_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

система диференціальних рівнянь термодинамічного процесу може бути записана як

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \gamma \frac{p}{m}, \\ \frac{dV}{dt} &= 0, \\ \frac{dm}{dt} &= 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Системи диференціальних рівнянь (1.7), (1.9) та (1.11) описують процеси в термодинамічній системі, що зумовлені одним із видів впливів. Природно поставити питання про аналогічну математичну модель квазістатичного процесу при комплексному впливі, що складається з відомих, взятих у певних співвідношеннях між собою.

Розглянемо багатовимірні квазістатичні процеси в термінах, аналогічних термінам класичної термодинаміки: стан, вплив, фазова траєкторія, робота, енергія тощо. Принциповою відмінністю від термодинаміки буде включення поняття теплоти в розряд робіт, як це запропоновано в [6]. Таким чином, у наших подальших побудовах теплота чи інший вплив не будуть займати будь-якого пріоритетного положення серед множини допустимих впливів на систему, що розглядається.

Нехай стан аналізованої системи Σ задається вектором стану $x \in R^n$. Зміна стану в часі $x(t)$ є траєкторією Σ в $(n+1)$-мірному просторі. Будь-яка зміна вектора x у часі пов'язана з наявністю одного або кількох впливів із заданої множини W. За відсутності впливів на квазістатичну систему, остання залишається в тому стані, при якому всі впливи були перервані. Тобто, будь-який стан $x \in R^n$ квазістатичної системи є положенням рівноваги на відміну від динамічних систем, для яких множина положень рівноваги є підмножиною простору R^n.

Зв'яжемо з кожним із $m \le n$ видів впливів W_k векторне поле $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$. Припускатимемо, що система векторних полів $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$ у кожній точці $x \in R^n$ лінійно незалежна. Для k-го впливу траєкторію руху Σ у фазовому просторі можна представити у виді розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_k(x) u_k(t), \tag{1.12}$$

де $u_k(t)$ – скалярна функція параметра t, що має сенс інтенсивності впливу W_k. Абсолютна величина $u_k(t)$ визначає швидкість переміщення зображувальної точки вздовж фазової траєкторії, а її знак – напрямок переміщення.

Нехай тепер до системи прикладено одночасно кілька впливів, яким відповідає векторне поле $\varphi(x)$. Розкладемо вектор $\varphi(x)$ у певній точці x по лінійно незалежним векторам $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$. Отримаємо

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) u_k ,$$

де u_k – коефіцієнти розкладання.

Тоді руху системи вздовж довільної фазової траєкторії, що відповідає комплексному впливу, відповідатиме система

диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) u_k(t), \qquad (1.13)$$

а коефіцієнти u_k можна інтерпретувати як інтенсивність відповідних впливів.

Якщо в якості параметра t вибрати час, а величини $u_k(t)$ вважати управліннями, то математична модель квазістатичного процесу у формі (1.13) є керованою системою, лінійною по управлінням. Оскільки вектори $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$ лінійно незалежні, то рівновага системи (1.13) досягається лише у разі $u_1 = u_2 = \ldots = u_m = 0$. Тобто впливи не можуть компенсувати один одного.

Запропоновані математичні моделі квазістатичних процесів при одному (1.12) та комплексному впливі (1.13) дають якісну модель поведінки Σ. Справа в тому, що векторні поля $\varphi_k(x)$ $(k = \overline{1,m})$ задають лише напрямки відповідних полів і можуть бути пронормовані довільним чином. При цьому вид фазових траєкторій буде постійним. У той же час траєкторія Σ в часі буде залежати як від нормування вектора $\varphi_k(x)$, так і від величини $u_k(t)$, що формує швидкість руху Σ вздовж фазової траєкторії, яка задається векторами $\varphi_k(x)$ і деякою початковою точкою x_0 конкретного процесу.

1.3. Внутрішня енергія, теплота та робота в термодинамічній системі

Наведена в розділі 1.2 математична модель термодинамічних процесів, яка є системою звичайних диференціальних рівнянь, що залежать від вектора управління u, повністю відповідає вимогам до математичної моделі керованого об'єкта, що розглядається в теорії оптимального управління. Відповідно до загальної постановки задачі оптимального управління крім математичної моделі необхідно

формалізувати ще три об'єкти: ціль, обмеження та критерій якості.

Щоб сформулювати перелічені об'єкти, необхідно поглибити опис термодинамічних процесів, надавши конкретний вид керуючих впливів у диференціальних рівняннях (1.12) та (1.13).

Для цього повернемося до таких фундаментальних понять класичної термодинаміки, як робота, теплота та внутрішня енергія. З приводу цих понять протягом всієї історії розвитку термодинаміки йшла безперервна дискусія, пов'язана насамперед із формулюваннями першого і другого законів термодинаміки. Так в [4] К. А. Путілов наводить шість формулювань першого та вісімнадцять – другого закону термодинаміки. Така різноманітність формулювань основних законів, що часто мають зовсім не схожу термінологічну основу, є, очевидно, наслідком загального недоліку формування фізики як науки в цілому. Цим недоліком є слабка формалізація фізичних понять і, як наслідок, неможливість побудови точних логічних висновків. Іншими словами, замість точних математичних формулювань фізики шукали так званий «фізичний сенс», що по суті був вербальним поясненням різних фізичних явищ. І перш за все там, де на допомогу фізикам приходили чіткі математичні поняття (наприклад, у механіці та електродинаміці), були отримані видатні наукові результати.

Термодинаміці у цьому сенсі не пощастило. Так вже історично склалося, що в якості її основних законів прийняті закони, пов'язані із загальними питаннями філософії – закон збереження та закон деградації енергії. Це призвело до різного тлумачення багатьох основних понять і, передусім, такого фундаментального поняття, як енергія. Різні спроби дати тлумачення цього поняття, не вдаючись до математичної формалізації, як показала історія розвитку науки, не сприяли прогресу у цьому напрямі. І це зрозуміло. Для того щоб сформулювати деяке поняття його треба висловити через інші вже відомі. Тому деякі поняття необхідно прийняти як аксіому і вважати їх первинними. У зв'язку з цим говорити про енергію взагалі абсолютно безглуздо. А ось розглядати її локальні реалізації, як це зроблено в механіці, електродинаміці та інших

розділах фізики, які засновані на точних математичних формулюваннях на противагу філософським міркуванням про збереження та перетворення енергії, представляється цілком обґрунтованим науковим підходом.

В основу концепції енергетичного підходу у фізиці покладено поняття енергії та роботи. Енергія є функцією стану досліджуваного об'єкта (механічної, електродинамічної, термодинамічної системи), а робота мірою його взаємодії з довкіллям. У загальному випадку енергія системи може складатися з кількох компонент. Так у механіці розрізняють кінетичну та потенційну, а в електродинаміці електричну та магнітну складові енергії. Впливи на систему також мають різний характер і призводять до зміни тієї чи іншої компоненти енергії, а також зміни сумарної енергії. Якщо в якості джерела впливу передбачається система подібна з природи до тієї, що розглядається, то в цьому випадку сумарна енергія двох систем залишається постійною, а її зміна для кожної з взаємодіючих систем збігається з сумою робіт, переданих через контрольну поверхню. Таким чином, у загальному вигляді для взаємодіючих систем єдиної природи можна записати дві форми закону збереження енергії:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}U_i^k = \text{const}, \tag{1.14}$$

$$2.\ \sum_{k=1}^{m}\Delta U_i^k = \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}\sum_{s=1}^{l}\Delta Q_{ji}^s,\ i=\overline{1,n}, \tag{1.15}$$

де U_i^k – енергія k-го виду i-ї системи, а $\Delta Q_{ji}^s = -\Delta Q_{ij}^s$, $\Delta Q_{ii}^s = 0$ – кососиметрична матриця роботи s-го виду.

Неважко побачити, що форма (1.15) закону збереження більш інформативна ніж (1.14), оскільки остання є наслідком (1.15), в чому легко переконатися, підсумувавши n співвідношень (1.15) по i, врахувавши кососиметричність матриць ΔQ^s.

Перша форма закону збереження енергії більшою мірою має

феноменологічний характер і фіксує кінцевий результат взаємодій між системами. Друга форма дозволяє більш детально аналізувати процеси зміни стану систем, що взаємодіють, з урахуванням різних видів впливів. Для її реалізації необхідно крім математичних виразів для компонент енергії мати відповідні співвідношення для робіт взаємодії.

Розглянемо одну з систем, що взаємодіють, при цьому припустимо, що її енергія складається з однієї компоненти. Таким чином, у цьому випадку закон збереження енергії формулюється у вигляді:

$$\Delta U = \sum_{s=1}^{n} \Delta Q^s . \qquad (1.16)$$

Останнє формулювання зовсім не означає, що існують деякі математичні співвідношення, що описують якимось чином величини ΔU і ΔQ^s, які ми підставили в (1.16) і «несподівано» виявили, що (1.16) завжди виконується. Звичайно, це не так. Щоразу математичні вирази для ΔU і ΔQ^s підбираються, виходячи з експериментальних фізичних законів так, щоб (1.16) було істиною. Розглянемо, наприклад, як це робиться у механіці. За основу візьмемо 2-й закон Ньютона для матеріальної точки у вигляді

$$m\dot{v} = f , \qquad (1.17)$$

де m – маса, v – швидкість, f – діюча сила. Помноживши обидві частини (1.17) на v і проінтегрувавши на інтервалі $[t_0, t_1]$, отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} m\dot{v}v dt = \int_{t_0}^{t_1} fv dt$$

і після елементарних перетворень остаточно

$$\frac{mv^2(t_1)}{2} - \frac{mv^2(t_0)}{2} = \int_{t_0}^{t_1} N(t) dt ,$$

де $N(t) = f(t)v(t)$ – потужність механічного впливу. Вводячи відповідні позначення:

$$U = \frac{mv^2}{2}, \quad \Delta L = \int_{t_0}^{t_1} N(t)dt$$

отримаємо форму закону збереження енергії, що шукається (1.16).

Отриманий результат наочно демонструє, що закон збереження енергії, виведений для елементарного фізичного процесу, виходить з експериментального факту порушення рівномірності руху матеріальної точки під певним впливом, названим силою. Зауважимо, що поняття «сила» не є первинним, а співвідношення (1.17), по суті, є її визначенням через поняття: маса, довжина, час.

Аналогічний підхід має місце й у класичній термодинаміці під час розгляду двох видів впливів на термодинамічну систему: механічної роботи та теплоти. Термодинаміка оперує вже відомим поняттям механічної роботи, яке для термодинамічної системи, що складається з ідеального газу, укладеного в об'єм, що деформується, має вигляд:

$$\Delta L = \int_{v_0}^{v_1} p(V)dV \,. \qquad (1.18)$$

З іншого боку експериментально встановлено, що температура системи не змінюється при раптовому розширенні газу у порожнечу, тобто без здійснення роботи та теплового впливу. У той самий час механічний вплив у вигляді деформації системи призводить до зміни її температури. Крім того, експериментально показано, що така ж кількість механічної роботи, що здійснюється валом, введеним у газове середовище, призводить до такої ж точності зміни температури системи (але вже без зміни її об'єму). На підставі зазначених експериментальних фактів можна зробити цілком обґрунтоване припущення про те, що в якості енергії термодинамічної системи, що складається з ідеального газу, укладеного в оболонку змінного обсягу, може бути прийнята

величина, пропорційна температурі. Крім того, природно припустити, що енергія U такої системи залежить від кількості газу та його хімічного складу. Ці припущення призводять до зручної форми подання внутрішньої енергії у вигляді

$$U = mc_v T, \tag{1.19}$$

де c_v – теплоємність речовини, що залежить від його хімічного складу і, загалом, від температури T.

Співвідношення (1.18) та (1.19) спільно із законом збереження енергії у вигляді (1.16) дозволяють нам обчислити кількість теплоти, підведеної до термодинамічної системи:

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta L. \tag{1.20}$$

Останнє співвідношення є ні що інше як одне з формулювань 1-го закону термодинаміки. З іншого боку, співвідношення (1.20) можна розглядати як визначення кількості теплоти у термодинамічному процесі.

ГЛАВА 2
АБСТРАКТНА ТЕОРІЯ БАГАТОВИМІРНИХ КВАЗІСТАТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У попередньому розділі були сформульовані основні положення класичної рівноважної термодинаміки, наріжним каменем якої було формулювання першого закону термодинаміки, що має сенс кількісного взаємозв'язку між внутрішньою енергією, механічною роботою та теплотою. При цьому слід зазначити принципову різницю між внутрішньою енергією, що є функцією стану термодинамічної системи, теплотою та роботою, величина яких визначається фазовою траєкторією термодинамічного процесу.

Відповідно до математичної моделі термодинамічного процесу при векторному впливі на систему фазова траєкторія процесу визначається інтенсивностями окремих впливів, що мають різну фізичну природу (теплота і деформація).

У цьому розділі на основі першого закону термодинаміки буде розглянуто абстрактний підхід, що дозволяє запровадити систему вимірювання інтенсивності та витрат ресурсів для впливів будь-якої природи, що беруть участь у термодинамічному процесі.

2.1. **Енергетична міра впливу**

Введене раніше поняття інтенсивності впливу, що має сенс керування квазістатичним процесом, вимагає кількісного виміру. Для цього в якості аналогії скористаємося класичним термодинамічним підходом для термодеформаційних систем, тобто ТС, схильних тільки до механічного і теплового впливів, фазові траєкторії яких мають вигляд $pV^{\gamma} = \text{const}$ і $p = \text{const}$ відповідно, де p, V – тиск і об'єм газу у відносних одиницях, а γ – показник адіабати $(\gamma \approx 1{,}3 \div 1{,}5)$, що залежить від хімічного складу речовини.

З глави 1 відомо, що для термодеформаційної системи справедливий перший закон термодинаміки, який формулюється таким

чином:

$$dU = \Delta L + \Delta Q, \tag{2.1}$$

де dU – збільшення внутрішньої енергії, ΔL – робота деформації, ΔQ – підведена теплота. В (2.1) внутрішня енергія $U(x)$ є функцією стану, а величини ΔL і ΔQ – функції траєкторій у просторі станів.

Для ідеальних газів [5] внутрішня енергія має вигляд

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} pV, \tag{2.2}$$

а механічна робота та теплота обчислюються у вигляді криволінійних інтегралів уздовж фазової траєкторії l

$$\Delta L = -\int_{(l)} pdV, \tag{2.3}$$

$$\Delta Q = \int_{(l)} \left(\frac{1}{\gamma - 1} Vdp + \frac{\gamma}{\gamma - 1} pdV \right). \tag{2.4}$$

Таким чином, співвідношення (2.3) та (2.4) можна інтерпретувати як кількісну міру впливів на ТС у формі механічної роботи (2.3) та теплоти (2.4). При фіксованих початковій x_0 і кінцевій x_f точках процесу $U(x_f) - U(x_0) = \text{const}$ для будь-яких траєкторій, що з'єднують x_0 і x_f, сума ΔL і ΔQ буде відповідно до (2.1) постійною при різних співвідношеннях ΔL і ΔQ.

Узагальним термодинамічний підхід стосовно знаходження аналогічних кількісних мір впливів для довільного n-мірного квазістатичного процесу з $m = n$ впливами. Введемо у просторі станів R^n скалярну безперервну функцію – енергію:

$$U(x) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Приріст енергії в деякій точці $x \in R^n$ матиме вигляд

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n . \qquad (2.5)$$

Позначаючи $\frac{\partial U}{\partial x} \triangleq g(x)$ – градієнт $U(x)$, запишемо (2.5) у вигляді

$$dU = (g, dx), \qquad (2.6)$$

а вздовж траєкторії рішення (1.12) або вздовж фазової траєкторії k-го впливу (2.5) набуде вигляду

$$dU = (g, \varphi_k)dt . \qquad (2.7)$$

Співвідношення (2.7) буде справедливим і для будь-якої фазової траєкторії, породженої довільним векторним полем $\varphi(x)$

$$dU = (g, \varphi)dt .$$

Позначимо множину можливих фазових траєкторій l_k, відповідних k-му виду впливів L_k, а множину $\bigcup L_k \triangleq L$. Множина всіх допустимих траєкторій, що відповідають довільній композиції впливів, позначимо L^*. Тоді має місце система включень

$$L_k \subset L \subset L^*, \quad \forall k = \overline{1, m} .$$

Будемо називати енергетичною мірою $J(l)$ будь-якої фазової траєкторії l величину

$$J(l) = \int_{(l)} (g, dx) . \qquad (2.8)$$

В силу (2.7) енергетична міра (2.8) залежить тільки від початкової x_0 та кінцевої x_f точок кривої l:

$$J(l) = U(x_f) - U(x_0) = J(x_0, x_f) .$$

Енергетична міра задовольняє наступним аксіомам:

$$J(x,x)=0,$$

$$J(x,y)=-J(y,x), \tag{2.9}$$

$$J(x,y)=J(x,z)+J(z,y).$$

Аксіоми 2 і 3 (2.9) відрізняються від відомих з теорії метричних просторів аксіом симетрії і трикутника

$$J(x,y)=J(y,x),$$

$$J(x,y)\le J(x,z)+J(z,y).$$

За аналогією з першим законом термодинаміки будемо шукати кількості кожного виду впливів у вигляді функціоналів $A_k(l)$, обчислених уздовж фазових траєкторій, подібних до механічної роботи і теплоти для найпростішої термодинамічної системи (2.3), (2.4)

$$A_k(l)=\int_{(l)}(q_k(x),dx),\quad k=\overline{1,n}. \tag{2.10}$$

Функціонали $A_k(l)$ будемо називати роботами впливу W_k. Вектори $q_k(x)$ вибиратимемо так, щоб виконувались наступні умови

$$A_k(l)=\begin{cases}J(l), \text{ якщо } l\in L_k,\\ 0, \quad \text{якщо } l\in L_i,\end{cases}\quad i,k=\overline{1,n},\ i\ne k. \tag{2.11}$$

Вимоги (2.11) будуть виконані за наступних умов на вибір $q_k(x)$:

$$(q_k,\varphi_i)=\delta_{ik}(g,\varphi_i),\quad i,k=\overline{1,n}, \tag{2.12}$$

де δ_{ik} – символ Кронекера.

Умови (2.12) по суті, є умовами квазібіортогональності векторних систем $(\varphi_1,\varphi_2\dots\varphi_n)$ і $(q_1,q_2\dots q_n)$.

Останнє рівняння у матричній формі має вигляд

$$Q\Phi = \mathrm{diag}\left(\Phi^T g\right), \tag{2.13}$$

де рядки матриці Q – вектори $(q_1, q_2 \ldots q_n)$, що шукаються, а стовпці матриці Φ – векторні поля $(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n)$ впливів на систему.

Оскільки вектори $\varphi_k(x)$ передбачаються лінійно незалежними $\forall x \in R^n$, то матриця Φ невироджена, отже, розв'язок (2.13) може бути записаний як

$$Q = \mathrm{diag}\left(\Phi^T g\right)\Phi^{-1}. \tag{2.14}$$

Покажемо тепер, що для системи робіт $A_1, A_2 \ldots A_n$ з векторними полями, що визначені відповідно до (2.14), $\forall l \in L^*$ має місце наступне співвідношення:

$$J(l) = \sum_{k=1}^{n} A_k(l). \tag{2.15}$$

Для доказу (2.15) підсумуємо співвідношення (2.12) по k. В результаті отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}(q_k, \varphi_i) = \sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}(g, \varphi_i), \quad i = \overline{1,n},$$

або

$$\left(\sum_{k=1}^{n} q_k, \varphi_i\right) = (g, \varphi_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

З останнього безпосередньо випливає

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = g = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{2.16}$$

Підсумуємо по k величини $A_k(l)$, що визначені відповідно до (2.10). В результаті отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(l) = \int_l (\sum_{k=1}^{n} q_k, dx). \qquad (2.17)$$

Враховуючи (2.8) і (2.16), з (2.17) отримаємо (2.15), тобто. сума робіт, обчислених уздовж довільної траєкторії дорівнює приросту енергії системи на кінцях цієї траєкторії.

Як приклад розглянемо термодинамічну систему з впливами у вигляді масообміну, деформації і теплообміну. Векторні поля таких впливів отримані раніше та можуть бути представлені матрицею $\Phi(p,V,m)$, що має вигляд

$$\Phi = \begin{pmatrix} \gamma\frac{p}{m} & -\gamma\frac{p}{V} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.18)$$

Стовпці матриці (2.18) являють собою векторні поля масообмінного, деформаційного та теплового впливів відповідно.

Ведемо енергію системи як відомого співвідношення для ідеальних газів (2.2), тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{1}{\gamma-1}V, \frac{1}{\gamma-1}p, 0\right) = (g_1, g_2, g_3). \qquad (2.19)$$

Підставляючи (2.18) та (2.19) у формулу (2.14), отримаємо матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{pV}{m} \\ 0 & -p & 0 \\ \frac{V}{\gamma-1} & \frac{\gamma p}{\gamma-1} & -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{pV}{m} \end{pmatrix},$$

рядки якої є компонентами векторів кількостей відповідних впливів

$$A_1 = \int_{(l)} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{pV}{m} dm,$$

$$A_2 = \int_{(l)} -pdV,$$

$$A_3 = \int_{(l)} \left(\frac{V}{\gamma - 1} dp + \frac{\gamma}{\gamma - 1} pdV - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{pV}{m} dm \right),$$

де A_1 – робота масообміну, A_2 – механічна робота, A_3 – теплота.

Неважко переконатися, що сума рядків матриці Q збігається з градієнтом внутрішньої енергії, а

$$A_1(l) + A_2(l) + A_3(l) = J(l).$$

Розглянутий підхід до побудови системи функціоналів, що задовольняють умові адитивності (2.15), можна поширити також на той випадок, якщо кількість впливів m менше розмірності системи n. У цьому випадку матриця Φ у системі рівнянь (2.13) прямокутна, отже, побудови (2.14) – (2.19) втрачають сенс. Вихід із цього становища може бути отриманий в результаті довизначення системи впливів відсутніми $n - m$ фіктивними впливами. Ці фіктивні дії вибираються так, щоб квадратна матриця $\Phi = (\Phi_1 \ \vdots \ \Phi_2)$, де $\Phi_1 - (n \times m)$ матриця заданих впливів, а $\Phi_2 - (n \times (n - m))$ матриця фіктивних впливів, була невиродженою. Підставляючи отриману таким чином матрицю Φ у співвідношення (2.14) отримаємо матрицю робіт, яка буде залежати від довільної матриці Φ_2.

Повернемося тепер до вихідної математичної моделі термодинамічної системи (1.13) і знайдемо фізичний зміст величин u_k – інтенсивностей впливів W_k. Для цього вчинимо так: нехай робота A_j задається інтегралом виду

$$A_j = \int_{(l)} (q_j, dx), \tag{2.20}$$

де q_j – визначений раніше вектор j-ї роботи. Помножимо ліву та праву частини (1.13) скалярно на вектор q_j, в результаті отримаємо

$$(q_j, \dot{x}) = \sum_{k=1}^{n} (q_j, \varphi_k) u_k \,. \tag{2.21}$$

Враховуючи умови ортогональності робіт (2.12), із співвідношень (2.20), (2.21) отримаємо

$$\frac{dA_j}{dt} = (q_j, \varphi_j) u_j \,.$$

З останнього виразу, а також з (2.12) виходить

$$u_j = \frac{1}{(q_j, \varphi_j)} \dot{A}_j = \frac{1}{(g, \varphi_j)} \dot{A}_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.22}$$

Підставимо (2.22) у вихідне диференціальне рівняння (1.13). В результаті отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)}{(g, \varphi_k)} \dot{A}_k \,. \tag{2.23}$$

З (2.23) слідує, що, якщо вектори-стовпці $\varphi_k(x)$ матриці $\Phi(x)$ розділити відповідно на скалярні добутки (g, φ_k), то кожне з управлінь u_k збігатиметься з інтенсивністю відповідної роботи $\dot{A}_k$, тобто, використовуючи електромеханічну термінологію, u_k при такому нормуванні відповідає потужності впливу W_k. Крім того, вихідну систему рівнянь (1.13) можна відразу пронормувати відповідно до (2.23), що ніяк не вплине на вигляд фазових траєкторій, що відповідають певним типам впливів та на відповідний вектор роботи $q_k(x)$.

Таким чином, без обмеження спільності можна вважати, що права

частина системи рівнянь (1.13) пронормована відповідно до (2.23), а вектор управління u_j відповідає вектору потужностей $\dot{A}_j$. Отже, будь-яку з робіт можна обчислити як у вигляді криволінійного інтеграла (2.20), так і у вигляді інтеграла за часом

$$A_j = \int_{t_0}^{t_1} u_j(t)dt\,.$$

2.2. **Обернена задача**

Проведений аналіз показав, що, якщо відомі закономірності зміни фазових координат термодинамічної системи в залежності від виду впливів, то для довільно заданої функції стану $U(x)$ може бути обрана система функціоналів, яка задовольняє структурі закону збереження енергії. Виникає питання, а чи не можна вирішити обернену задачу: по заданому функціоналу, що відповідає роботі деякого впливу, побудувати відповідну функцію $U(x)$, яка має сенс енергії термодинамічної системи. Такий підхід є досить прагматичним, оскільки дозволяє «стикувати» різні фізичні процеси, що мають однакові види зовнішніх впливів. Наприклад, у механіці та термодинаміці таким впливом є деформація, а відповідна робота в обох випадках обчислюється аналогічними функціоналами:

$$A = -\int_{(l)} fds \ - \text{механіка};$$

$$L = -\int_{(l)} pdV \ - \text{термодинаміка}.$$

Отже, сформулюємо задачу в такий спосіб. Нехай заданий деякий еталонний вплив, якому відповідають фазові траєкторії системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in R^n,$$

де $\varphi(x)$ – відома вектор-функція.

Нехай еталонному впливу відповідає відомий функціонал, за допомогою якого обчислюється робота цього впливу:

$$L = \int_{(l)} q_1(x)dx_1 + q_2(x)dx_2 + \ldots + q_n(x)dx_n = \int_{(l)} (q, dx).$$

Тоді через співвідношення (2.12) вектор-функції $\varphi(x)$, $q(x)$ і $g(x)$ повинні задовольняти умові

$$(q, \varphi) = (\varphi, g).$$

Останнє рівняння можна інтерпретувати як лінійне диференціальне рівняння у приватних похідних щодо функції $U(x)$ – енергії термодинамічної системи:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \varphi\right) = (q, \varphi). \qquad (2.24)$$

Для розв'язання рівняння (2.24) скористаємося методом характеристик. Система диференціальних рівнянь характеристик у симетричній формі, відповідна (2.24) запишеться як

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(x)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{\varphi_n(x)} = \frac{dU}{(q(x), \varphi(x))}. \qquad (2.25)$$

Оскільки всі $\varphi_k(x)$, що входять до (2.25) не залежать від функції $U(x)$, що шукається, то множина перших інтегралів підсистеми диференціальних рівнянь (2.25)

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(x)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{\varphi_n(x)} \qquad (2.26)$$

буде також і підмножиною множини інтегралів повної системи (2.25).

Нехай

$$\Psi_k(x) = C_k, \quad k = \overline{1, n-1} \tag{2.27}$$

перші інтеграли системи (2.26). Виразимо на підставі (2.27) перші $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ через x_n і $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ x_2 &= \lambda_2(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \lambda_{n-1}(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \end{aligned} \tag{2.28}$$

і підставимо отримані співвідношення в останнє з рівнянь (2.25)

$$\frac{dx_n}{\varphi_n(x)} = \frac{dU}{(q(x), \varphi(x))}.$$

В результаті такої підстановки отримаємо диференціальне рівняння з змінними x_n і U, що розділяються

$$\frac{dx_n}{\overline{\varphi_n}(x_n, C)} = \frac{dU}{(\overline{q}(x_n, C), \overline{\varphi}(x_n, C))},$$

де $\overline{\varphi_n}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{q}$ – функції вектора x_n та вектора постійних $C = (C_1, C_2, ..., C_{n-1})$, які отримані після підстановки (2.28) у вирази для φ_n, φ, q відповідно.

Інтегруючи останнє диференціальне рівняння, отримаємо n-й перший інтеграл вихідної системи диференціальних рівнянь характеристик (2.25) як

$$U + \lambda_n(x_n, C) = C_n. \tag{2.29}$$

Підставляючи в (2.29) вирази для компонент вектора постійних C у вигляді (2.27) отримаємо остаточно

$$U + \Psi_n(x) = C_n.$$

Як відомо з теорії диференціальних рівнянь у приватних похідних

загальний розв'язок $U(x)$ задовольняє рівнянню

$$\Phi\left(U+\Psi_n(x),\Psi_1(x),\Psi_2(x),\ldots,\Psi_{n-1}(x)\right)=0,$$

де Φ – довільна функція своїх аргументів.

Розв'язуючи останнє рівняння щодо першого аргументу, отримаємо остаточно

$$U=U_0(x)+\Phi\left[\Psi_1(x),\Psi_2(x),\ldots,\Psi_{n-1}(x)\right], \qquad (2.30)$$

де $U_0(x)=-\Psi_n(x)$, а Φ – довільна функція своїх аргументів.

Проаналізуємо отриманий результат. Як видно з (2.30) функція $U(x)$, що задовольняє диференціальному рівнянню для роботи заданого впливу, складається з двох доданків. Перший доданок $U_0(x)$ визначається як видом фазової траєкторії системи, схильної до еталонного впливу, так і видом еталонного функціоналу (вектор $q(x)$). Другий доданок залежить тільки від фазових траєкторій і є довільною функцією перших інтегралів системи диференціальних рівнянь, що моделюють поведінку термодинамічної системи при еталонному впливі.

Таким чином, усі $\Psi_i(x)$ $i=\overline{1,n-1}$, що є аргументами довільної функції Φ є постійними величинами, а отже $\Phi\left[\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_{n-1}\right]$ також довільна стала. Таким чином

$$U(x)=U_0(x)+C,$$

тобто енергія квазістатичної системи визначається з точністю до деякої постійної C.

Розглянемо приклад знаходження внутрішньої енергії $U(p,V)$ для найпростішої термодинамічної системи, що схильна до еталонного деформаційного впливу, робота якого визначається у вигляді

$$L=-\int_{V_1}^{V_2} pdV\,.$$

Система диференціальних рівнянь, що моделюють деформаційний вплив, як слідує з (1.7) має вигляд

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma \frac{p}{V},$$
$$\frac{dV}{dt} = 1,$$

а диференціальне рівняння (2.24) для $U(p,V)$ запишеться у вигляді

$$-\gamma \frac{p}{V}\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial V} = -p.$$

Відповідна система звичайних диференціальних рівнянь характеристик запишеться як

$$\frac{dp}{-\gamma \frac{p}{V}} = \frac{dV}{1} = \frac{dU}{-p}. \qquad (2.31)$$

Перший інтеграл $\Psi_1(p,V)$, що є рівнянням фазової кривої адіабати, отримується в результаті інтегрування диференціального рівняння

$$\frac{dp}{-\gamma \frac{p}{V}} = \frac{dV}{1}$$

і має відомий вигляд

$$pV^{\gamma} = C_1. \qquad (2.32)$$

Виразивши p через C_1 і V, та підставляючи результат в (2.31), отримаємо диференціальне рівняння для визначення енергії $U(p,V)$. Отже $p = C_1 V^{-\gamma}$, $dU = -C_1 V^{-\gamma} dV$, $U = -C_1 \int V^{-\lambda} dV$, $U = -C_1 \frac{V^{-\gamma+1}}{1-\gamma} + C$.

Підставляючи в останнє співвідношення вираз (2.32) для C_1,

отримаємо остаточно відомий з термодинаміки вираз для внутрішньої енергії ідеального газу

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} pV + C .$$

Слід зазначити, що цей результат отримано лише на підставі відомих експериментальних адіабатичних кривих без залучення результатів експериментів Гей-Люссака та Джоуля, які показали незмінність температури газу при його розширенні в порожнечу.

2.3. **Досяжність та ентропія**

Досить абстрактні побудови теорії багатовимірних рівноважних термодинамічних процесів, які проведені в попередніх розділах, дозволили багато в чому формалізувати поняття енергії та робіт різних впливів на ТС та інтерпретувати останню як керовану динамічну систему з керуючими впливами $u_k(t)$ $(k = \overline{1,m})$. Якщо система впливів буде повною, тобто $m = n$ то, очевидно, можна підібрати послідовність управлінь таку, що фазова траєкторія пройде через будь-яку наперед задану точку простору станів. Розглянемо інший крайній випадок, коли всі управління крім u_k тотожно дорівнюють нулю. Тоді досяжною множиною є ізольована фазова траєкторія, на якій зараз знаходиться точка, що зображується. Якщо $1 < m < n$, то аналіз областей досяжності вже не настільки тривіальний, як у граничних випадках. В теорії управління введено поняття керованості динамічної системи. Система називається повністю керованою, якщо існує керуючий вплив, що переводить систему з довільного початкового в довільний кінцевий стан. Проблема керованості динамічних систем тісно перетинається з проблемою адіабатичної недосяжності в термодинаміці, сформульованої Каратеодорі [11], і є одним з альтернативних формулювань другого закону термодинаміки. Згідно з Каратеодорі в околиці довільного стану ТС, існують адіабатично недосяжні стани. Іншими словами, за

відсутності теплового впливу фазові траєкторії ТС належать деяким гіперповерхням, що є однопараметричним сімейством

$$f(x) = c\,.$$

Для здійснення переходу зображувальної точки з гіперповерхні $f(x) = c_1$ на гіперповерхню $f(x) = c_2$ необхідно залучити термічний вплив. Каратеодорі довів, що в цьому випадку диференціальна форма, що входить до підінтегрального виразу (2.10), для елементарної кількості теплоти dq голономна, тобто повинна мати інтегруючий множник $\psi(x)$:

$$dq = (\beta(x), dx) = \psi(x)(\overline{\beta}(x), dx) = \psi(x)dS(x)\,.$$

Функція $S(x)$, що зберігає постійну величину за відсутності термічної взаємодії, відповідає ентропії ТС. У [16] сформульовані загальні критерії голономності диференціальних пфаффових форм.

Таким чином, другий закон термодинаміки у формулюванні Каратеодорі з точки зору теорії управління є критерієм керованості n-мірної динамічної системи виду (1.13) при $n-1$ керуючому впливі. Оскільки в цій главі викладається абстрактний підхід до рівноважної термодинаміки, то авторам видається важливим поширити спосіб Каратеодорі на довільну кількість керуючих впливів. Іншими словами, нижче буде проведено аналіз керованості динамічних систем виду (1.13) з кількістю впливів $m \le n-1$.

Для розв'язання сформульованої задачі досліджуємо структуру множини фазових траєкторій диференціальних рівнянь, що відповідають m впливам

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x), ..., \frac{dx}{dt} = \varphi_m(x)\,. \qquad (2.33)$$

Щодо множини фазових траєкторій m систем (2.33) припустимо, що вона належить деякому однопараметричному різноманіттю

$$S(x) = c, \tag{2.34}$$

тобто всі точки фазових траєкторій множини систем (2.33) $x(t)$, задовольняють умові

$$S(x(t)) = c,$$

де постійна c визначається з початкових умов

$$c = S(x(t_0)).$$

У цьому випадку множина станів, що не задовольняють рівнянню (2.34), буде недосяжною для цього набору впливів, а з точки зору теорії управління така система буде некерованою.

Для пошуку поверхні рівня $S(x)$ складемо систему диференціальних рівнянь у приватних похідних, якій вона має задовольнити

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \varphi_1(x)\right) = 0, ..., \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \varphi_m(x)\right) = 0. \tag{2.35}$$

Система (2.35) є умовами ортогональності вектора-градієнта функції $S(x)$ та всіх векторних полів, що визначають траєкторії ТС при заданій структурі впливів (2.33). Таким чином, проблема досяжності ТС при довільному наборі впливів звелася до аналізу розв'язності системи рівнянь (2.35), що є системою лінійних диференціальних рівнянь у приватних похідних, щодо функції $S(x)$.

Теорія лінійних диференціальних рівнянь у приватних похідних досить добре розроблена і містить алгоритм розв'язання, що включає аналіз умов існування розв'язку [17]. Цю умову можна подати у вигляді

$$\operatorname{rank}\left\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m, [\varphi_1, \varphi_2], [\varphi_1, \varphi_3] ... [\varphi_{m-1}, \varphi_m], [\varphi_1, [\varphi_2, \varphi_3]] ...\right\} < n, \tag{2.36}$$

де $[\varphi, \psi]$ – комутатор векторних полів φ і ψ:

$$\left[\varphi,\psi\right]=\frac{\partial\psi}{\partial x}\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi\,.$$

Отже, виконання умови (2.36) свідчить про те, що існує поверхня $S(x)=c$, до якої належать всі можливі траєкторії руху ТС, тобто (2.36) є критерієм некерованості узагальненої термодинамічної системи.

ГЛАВА 3
ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ КВАЗІСТАТИЧНИМИ ТЕРМОДИНАМІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Запропонована математична модель квазістатичних процесів у формі системи звичайних диференціальних рівнянь, що залежать від зовнішніх керуючих впливів, дає підстави для постановки та розв'язання різноманітних задач управління квазістатичними процесами. Слід зазначити, що людство задовго до створення теорії управління намагалося формулювати та розв'язувати тим чи іншим способом задачі побудови найкращих термодинамічних замкнутих циклів, що забезпечують найбільш ефективне перетворення теплоти на механічну роботу. Визначним прикладом практичного розв'язання задачі побудови оптимального термодинамічного циклу, що здійснюється в заданому температурному діапазоні, було обґрунтування циклу Карно, що має найкращий термічний коефіцієнт корисної дії (ККД). Пізніше були отримані й інші термодинамічні цикли Отто, Дизеля, Ренкіна та інші, що максимізують ККД за інших умов, що обмежують. Слід зазначити, що ці цикли були отримані без залучення складних математичних викладок, а на основі глибоких умовиводів, що базуються іноді на помилкових передумовах, таких як теорія теплорода при виведенні результатів С. Карно. Проте кінцевий результат виявився правильним.

У цьому розділі для отримання оптимальних циклів буде залучено математичну теорію оптимального управління процесами, які моделюються системами звичайних диференціальних рівнянь.

3.1. Загальна постановка задачі оптимального управління

Постановка задачі оптимального управління містить чотири компоненти:

1. математичну модель об'єкта управління чи керованого процесу;
2. ціль управління;

3. обмеження на керуючі впливи та фазову траєкторію;

4. критерій якості (або вартість) управління.

Серед безлічі відомих математичних моделей об'єктів управління особливо слід виділити клас скінченовимірних, автономних динамічних систем, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{3.1}$$

де $x \in R^n$ – вектор стану динамічної системи, $u \in R^m$ – вектор управління, а $f(x,u)$ – безперервна вектор-функція своїх аргументів.

Математична модель об'єкта класу (3.1) найпопулярніша в теорії управління, оскільки більшість електричних, механічних, пневматичних, економічних, біологічних та інших керованих процесів можна з достатньою мірою адекватності подати у вигляді (3.1). Більше того, розподілені об'єкти управління, що найчастіше з'являються при керуванні тепломасообмінними процесами, шляхом раціональної дискретизації можуть бути перетворені до вигляду (3.1).

Другою перевагою математичної моделі об'єкта управління виду (3.1) є досить добре розроблена теорія диференціальних рівнянь, а також методики та програмне забезпечення для їх розв'язання. Особливо слід виділити випадок коли $f(x,u)$ в (3.1) лінійна за x та u. Тоді дослідження поведінки розв'язків при різних впливах може бути здійснено без чисельного інтегрування, завдяки відносній завершеності теорії лінійних диференціальних рівнянь. Можна без перебільшення сказати, що переважна більшість наукових та практичних результатів у галузі теорії управління отримано щодо об'єктів управління виду (3.1).

Слід зазначити, що у загальному випадку права частина (3.1) містить крім вектору управління u вектора w та ξ, які символізують неконтрольовані та контрольовані незалежні від нас впливи відповідно. Тобто математична модель керованого процесу в загальному вигляді набуває вигляду

$$\dot{x} = f(x,u,w,\xi). \tag{3.2}$$

Система диференціальних рівнянь виду (3.2) представляє собою більш адекватний рівень моделювання реальних процесів і систем, незважаючи не те, що в неї закладено відсутність повної інформації про об'єкт управління. Зазвичай передбачається, що деякою інформацією про вид обурюючих впливів ми все ж таки маємо в своєму розпорядженні або можемо її отримати в процесі спостереження за еволюцією системи (3.2). Якщо відомі статистичні характеристики випадкових впливів, такі системи називаються стохастичними. Найбільш складними є задачі управління, якщо відомі лише діапазони, в яких змінюються компоненти вектору w. Ці задачі належать до проблеми синтезу робастних систем управління. Надалі ми обмежимося класом детермінованих об'єктів управління, які мають вигляд (3.1).

Ціль управління являє собою в загальному випадку дві підмножини $X_0 \subset R^n$ і $X_1 \subset R^n$, яким належать розв'язки системи (3.1) у моменти часу t_0 і t_1. Причому, t_0 і t_1 можуть бути нефіксованими. Зазвичай підмножина X_0 складається з однієї точки. Підмножина ж X_1 може бути одноточковою або збігатися з усім простором станів. У загальному випадку X_1 має структуру гладкого різноманіття. Особливе значення, стосовно термодинамічних систем мають циклічні процеси, що характеризуються початковим і кінцевим станами, які збігаються.

Отже, четвірка

$$(X_0, X_T, t_0, t_1) \tag{3.3}$$

символізує нам ціль управління.

Природно припускати, що керуючі дії u та поточні значення фазових координат x не можуть бути довільними. Найбільш типовими обмеженнями на вибір u є інтервальні обмеження виду $u_{\min} \le u \le u_{\max}$. Вектор x також передбачається належним до деякої замкнутої області $G \subset R^n$. У загальному випадку обмеження на управління і фазові координати може бути пов'язані між собою і змінюються у часі тобто

$$(x(t),u(t)) \in G(t), \quad G(t) \subset R^n \times R^m, \quad \forall t \in [t_0,t_1], \tag{3.4}$$

де $G(t)$ – допустима область існування керованого процесу.

Керований процес $(x(t),u(t))$ прийнято називати допустимим, якщо він задовольняє системі (3.1), реалізує ціль управління (3.3) і не суперечить обмеженням (3.4). Знаходження множини допустимих процесів і є розв'язком задачі управління.

Природно припустити, що розв'язок задачі управління не єдиний, а є підмножиною допустимих керованих процесів. Тоді можна сформулювати задачу пошуку такого керованого процесу $(x^*(t),u^*(t))$, що доставляє екстремум деякому функціоналу, який має сенс критерію якості управління

$$J(x(t),u(t)) \to \text{extr}. \tag{3.5}$$

Сукупність чотирьох об'єктів: моделі (3.1), цілі (3.3), обмежень (3.4) та критерію якості (3.5) і є постановою математичної задачі оптимального управління динамічними системами.

3.2. **Постановка задачі оптимального управління термодинамічним процесом**

Розглянемо тепер компоненти постановки задачі оптимального управління стосовно термодинамічних процесів.

Ціль управління термодинамічним процесом зазвичай полягає у вимозі реалізації замкнутої фазової траєкторії або циклу. Причому час циклу $t_1 - t_0$ може бути як фіксованим, так і нефіксованим. Тобто ціль управління має вигляд

$$x(t_0) = x(t_1).$$

У загальному випадку можуть бути сформульовані також цілі довільного вигляду, що відповідають перетворенню вихідного фазового вектора $x(t_0)$ в деякий новий стан $x(t_1)$, причому останній може, в свою

чергу, належати деякому гладкому різноманіттю. Такі задачі управління характерні для відкритих систем, що перетворюють речовину з одного стану в інший, наприклад, в хімічних технологічних процесах.

Обмеження на управління, насамперед, пов'язані з максимальним та мінімальним допустимими значеннями потужності впливів

$$u_{\min} \le u \le u_{\max}.$$

У загальному випадку ці обмеження можуть залежати від фазового вектору, тобто

$$u_{\min}(x) \le u \le u_{\max}(x).$$

Останній вид обмежень пов'язаний з неможливістю здійснення впливу при досягненні певних значень вектора стану, наприклад, температури або тиску.

Найважливішим класом обмежень, характерних для термодинамічних систем, є ізоперіметричні обмеження, що задають граничне значення ресурсів деяких видів впливів, і мають вигляд

$$\int_{t_0}^{t_1} u_k^{(t)} dt = Q_{\max}^k.$$

Ізоперіметричні обмеження можуть бути усунені шляхом розширення простору станів системи включенням до його складу всіх видів робіт з обмеженим ресурсом їх виконання

$$\frac{dQ^k}{dt} = u_k, \quad Q^k(t_0) = 0, \quad Q^k(t_1) = Q_{\max}^k.$$

Критерії якості управління термодинамічною системою можуть бути як інтегральними, так і фінітними. Особливий інтерес для практичних задач представляють критерії, що відображають ефективність взаємоперетворення різних видів робіт у циклічних

процесах. Для циклічних процесів $U(t_0)=U(t_1)$, а отже

$$\sum_{k=1}^{n} Q^k = 0. \tag{3.6}$$

Останнє балансове співвідношення відображає процес виконання одних видів робіт за рахунок інших, оскільки у нетривіальному випадку, принаймні, одне із доданків у (3.6) має бути додатним і одне – від'ємним. Наприклад, у двовимірному випадку співвідношення (3.6) набуде вигляду

$$Q + L = 0, \tag{3.7}$$

де Q і L – теплота та механічна робота, підведені до системи в циклічному процесі. Якщо $Q>0$, то $L<0$ тобто у цьому випадку система виконує механічну роботу за рахунок отримання деякої кількості теплоти Q.

З іншого боку, будь-яка з робіт, що входить до балансового співвідношення (3.6), може бути представлена у вигляді інтеграла від відповідної потужності впливу

$$Q^j = \int_{t_0}^{t_1} u_j(t)dt, \tag{3.8}$$

в якому підінтегральна функція може набувати як додатних, так і від'ємних значень на інтервалі $[t_0, t_1]$. Тобто (3.8) може бути представлено у вигляді

$$Q^j = \int_{t_0}^{t_1} u_j^+(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} u_j^-(t)dt = Q_j^+ - Q_j^-, \tag{3.9}$$

$$u_j^+(t) = \begin{cases} u_j(t), \text{ якщо } u_j(t) > 0, \\ 0, \quad \text{якщо } u_j(t) \le 0, \end{cases}$$

$$u_j^-(t)=\begin{cases}-u_j(t), \text{ якщо } u_j(t)<0,\\ 0, \quad \text{якщо } u_j(t)\geq 0.\end{cases}$$

Неважко переконатися (див. рис. 3.1), що функції $u^+(t)$ і $u^-(t)$ можуть бути записані як

$$\begin{aligned} u^+(t)&=\frac{1}{2}[|u_j(t)|+u_j(t)],\\ u^-(t)&=\frac{1}{2}[|u_j(t)|-u_j(t)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

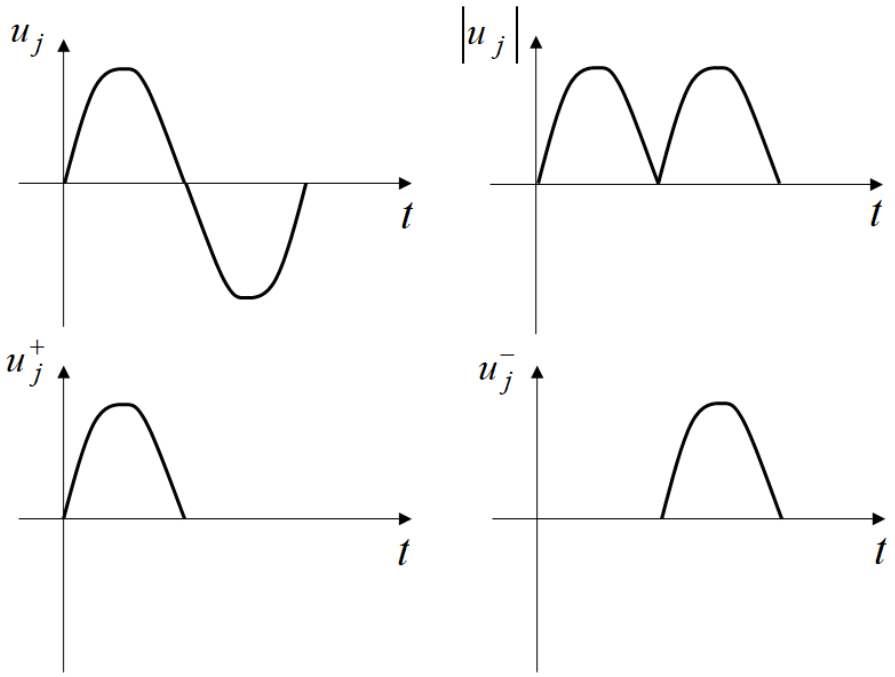


Рис. 3.1. Часові діаграми керуючих впливів

Потужності $u^+(t)$, $u^-(t)$ та відповідні їм роботи Q^+ та Q^- можна інтерпретувати як міри впливів, що підводять або відводять у термодинамічному процесі. У термодинаміці найважливіше значення набуває термічний коефіцієнт корисної дії, який відображає ефективність перетворення підведеної в циклі теплоти в механічну роботу для термодинамічної системи 2-го порядку. Позначаючи інтенсивність теплопідведення q^+, а тепловідведення q^- і відповідно

кількість підведеної теплоти Q^+, а відведеної Q^-, запишемо вираз для термічного ККД

$$\eta = \frac{L}{Q^+}.$$

Враховуючи балансове співвідношення для Q і L (3.7), а також співвідношення для Q (3.9), отримаємо

$$\eta = \frac{Q^+ - Q^-}{Q^+}. \tag{3.11}$$

Перетворюючи (3.11) далі, і враховуючи співвідношення для q^+ і q^- відповідні (3.10), представимо (3.11) у вигляді

$$\eta = \frac{L}{\frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t_1} q(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} |q(t)|\,dt\right)} = \frac{L}{\frac{1}{2}\left(L + \int_{t_0}^{t_1} |q(t)|\,dt\right)}.$$

Будемо далі, замість вимоги максимуму ККД мінімізувати величину

$$\eta^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2L}\int_{t_0}^{t_1} |q(t)|\,dt.$$

Природно далі припустити, що робота циклу L має бути фіксованою, тоді вимога мінімуму η^{-1} еквівалентна вимозі мінімуму функціоналу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} |q(t)|\,dt. \tag{3.12}$$

Виходячи з співвідношення $Q^+ = \frac{1}{2}(J + L)$, що пов'язує витрати

ресурсу теплоти Q^+ з виконаною роботою L можна запропонувати інші формулювання критерію ефективності управління циклічним термодинамічним процесом.

3.3. **Оптимальне управління термодинамічними циклами**

Створена кілька десятиліть тому теорія управління дозволила докорінно переглянути постановки більшості задач синтезу механічних, електричних, теплотехнічних, хіміко-технологічних систем та інших процесів. Вона дуже вплинула на розвиток авіакосмічної та ракетної техніки, транспорту та енергетики. «Немає нічого практичнішого за хорошу теорію» – це відоме висловлювання Л. Больцмана повною мірою відноситься до теорії оптимального управління, що є апогеєм сучасної науки про управління і має чітку практичну спрямованість. Про це свідчить і постановка проблеми у вигляді поєднання чотирьох об'єктів: математичної моделі процесу, цілі, обмежень та критерію якості, що відображають природні формулювання більшості реальних задач.

Незважаючи на те, що теорія оптимального управління знайшла своє місце в більшості наукових напрямів, її застосування до найстарішого та найважливішого розділу фізичної науки термодинаміки практично відсутні. Цей факт, безумовно, суперечить логіці, оскільки першою задачею оптимального управління, вирішеним людством, була задача про організацію термодинамічного процесу з максимальним коефіцієнтом корисної дії, що розв'язана Сарді Карно на початку XIX століття.

Як було показано в попередньому розділі, постановка задачі про оптимальний цикл містить усі компоненти сучасної теорії управління: математичну модель, що складається з набору елементарних процесів, цілі управління – отримання замкнутого циклу у фазовому просторі, обмеження у вигляді максимальної та мінімальної температур, критерію якості – термічного ККД. Карно не був знайомий з методами оптимального управління та вирішив проблему оптимізації термодинамічного циклу шляхом тонких логічних побудов, заснованих

на постулаті про неможливість створення вічного двигуна другого роду. У цій роботі зроблено спробу залучити методи теорії управління динамічними системами до оптимізації термодинамічних процесів.

Розглянемо математичну модель термодинамічного процесу виду, що обумовлено двома видами впливів: деформаційним та тепловим. Відповідно до подання такого процесу у формі (1.13), і, враховуючи сталість маси системи, з (2.18) отримаємо матрицю системи диференціальних рівнянь квазістатичного процесу у вигляді

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\gamma \dfrac{p}{v} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а відповідна система диференціальних рівнянь, що описують термодинамічний процес у замкнутій системі, набуде вигляду

$$\dot{p} = -\gamma \frac{p}{v} u_1 + u_2,$$
$$\dot{v} = u_1,$$

де v – питомий об'єм, u_1 і u_2 – інтенсивність деформаційного та термічного впливів.

Проводячи нормування отриманої системи рівнянь відповідно до (2.23), отримаємо систему диференціальних рівнянь термодинамічного процесу з управліннями у вигляді механічної потужності l та інтенсивності теплопідведення q

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma}{v} l + \frac{\gamma - 1}{v} q,$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{p} l. \qquad (3.13)$$

Замість керуючого впливу l будемо розглядати нове управління: швидкість зміни об'єму $w = \dot{v}$. Така заміна призводить до наступного

виду системи диференціальних рівнянь, що описують найпростіший термодинамічний процес:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\gamma \frac{w}{v} p + \frac{\gamma - 1}{v} q, \\ \frac{dv}{dt} &= w. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Відповідно до загальної постановки задачі оптимального управління математичну модель (3.14) необхідно доповнити ціллю управління, що має у разі побудови циклічного процесу, наступний вид:

$$\begin{aligned} p(t_0) &= p(t_0 + \tau), \\ v(t_0) &= v(t_0 + \tau), \end{aligned} \tag{3.15}$$

де τ – період циклу, який може бути, як заданий, так і незаданий.

В якості обмежень на управління та на фазові траєкторії природно розглянути, перш за все, ізоперіметричну умову

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} q(t)\,dt = L, \tag{3.16}$$

де L – робота, що здійснюється в результаті проведення циклу.

Крім умови (3.16) природно припускати, що інтенсивність теплообміну q також обмежена

$$0 > q_{\min} \le q \le q_{\max} > 0. \tag{3.17}$$

Аналогічне обмеження може бути введене і для швидкості зміни об'єму w

$$w_{\min} \le w \le w_{\max}. \tag{3.18}$$

Крім обмежень на керуючі дії, природно розглянути й обмеження на фазові змінні. Щодо цих обмежень, слід зазначити, що останні задаються залежно від умов проведення термодинамічного циклу. Так у

разі проведення циклу в умовах заданого температурного діапазону це обмеження набуде вигляду

$$T_{\min} \le T(t) \le T_{\max}, \ \ \forall t \in [t_0, t_0 + \tau], \tag{3.19}$$

де $T(t)$ – температура робочої речовини.

У разі фіксованого діапазону зміни об'єму фазове обмеження представимо як

$$v_{\min} \le v(t) \le v_{\max}, \ \ \forall t \in [t_0, t_0 + \tau]. \tag{3.20}$$

Таким чином, задачу оптимального управління найпростішим термодинамічним процесом можна сформулювати в наступному вигляді: для процесу (3.14) знайти управління $w(t)$ і $q(t)$, що задовольняють обмеженням (3.16) – (3.18), цілі управління (3.15) та мінімізують критерій оптимальності (3.12). Крім того, на фазові координати в керованому процесі можуть накладатися обмеження, наприклад, виду (3.19) або (3.20).

Сформульована задача оптимального управління за своєю структурою відноситься до класу задач, які розв'язуються за допомогою принципу максимуму. Розглянемо дві її приватні постановки, що мають теоретичну і практичну значимість.

3.3.1 Оптимальний цикл у заданому температурному діапазоні

Постановка цієї задачі оптимального управління термодинамічним процесом сформульована в попередньому розділі. Для спрощення подальших висновків перетворимо вихідну систему (3.14), скориставшись рівнянням стану ідеальних газів

$$pv = RT\,. \tag{3.21}$$

Диференціюючи (3.21) по t, після нескладних перетворень отримаємо систему рівнянь термодинамічного процесу у вигляді

$$\begin{aligned} c_v \frac{dT}{dt} &= -\frac{RT}{v} w + q, \\ \frac{dv}{dt} &= w. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Отримана система (3.22) описує той самий термодинамічний процес, що і система диференціальних рівнянь (3.14), але тільки в координатах (T, v). Ціль управління для (3.22) очевидно прийме вигляд аналогічний (3.15)

$$\begin{aligned} T(t_0) &= T(t_0 + \tau), \\ v(t_0) &= v(t_0 + \tau). \end{aligned} \tag{3.23}$$

З метою подальших спрощень припустимо, що управління $w(t)$ є довільною функцією t, що задовольняє другому з умов циклічності (3.23). У цьому випадку достатньо розглянути лише перше з двох рівнянь системи (3.22):

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{R}{c_v}\frac{w}{v}T + \frac{1}{c_v}q. \tag{3.24}$$

Отримане рівняння (3.24) термодинамічного процесу являє собою лінійне нестаціонарне неоднорідне рівняння з коефіцієнтом, що періодично змінюється, обумовленим вимогою циклічності процесу з періодом τ. Це рівняння слід доповнити диференціальним рівнянням

$$\frac{dQ}{dt} = q \tag{3.25}$$

з граничними умовами

$$Q(t_0) = 0, \;\; Q(t_0 + \tau) = L, \tag{3.26}$$

отриманому з ізоперіметричної умови (3.16).

Перетворимо рівняння (3.24), розділивши всі доданки на T з урахуванням умови $w = \dot{v}$ до вигляду

$$c_v \frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v} = \frac{q}{T}dt\,.$$

Останнє можна представити у вигляді

$$\frac{dS}{dt} = \frac{q}{T}, \tag{3.27}$$

де $S = c_v \ln T + R\ln v$ – ентропія системи.

Канонічну форму диференціального рівняння процесу (3.24) у формі (3.27) слід розглядати як математичну модель керованого термодинамічного процесу в координатах (T,S). Оскільки функція $v(t)$ передбачається довільною, але такою, що задовольняє граничній умові циклічності (3.23), то це еквівалентно вимозі довільності функції $T(t)$ (3.27) з урахуванням виконання вимог циклічності (3.23).

Знайдемо необхідні умови оптимальності термодинамічного процесу, що описується системою диференціальних рівнянь (3.27) і (3.25), скориставшись принципом максимуму [18]. Гамільтоніан задачі має вигляд

$$H = -|q| + \psi_1 \frac{q}{T} + \psi_2 q, \tag{3.28}$$

де ψ_1 і ψ_2 – спряжені змінні.

Система рівнянь для спряжених змінних з урахуванням довільного вибору функції $T(t)$ запишеться як

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt} = 0\,. \tag{3.29}$$

З (3.29) випливає, що ψ_1 і ψ_2 – постійні величини. Умова ж максимуму гамільтоніана (3.28) набуде вигляду

$$q=\begin{cases} q_{\max}, \text{ при } \lambda>1, \\ 0, \text{ при } -1\le\lambda\le 1, \\ q_{\min}, \text{ при } \lambda<-1, \end{cases} \tag{3.30}$$

де $\lambda(t)$ – функція перемикання:

$$\lambda(t)=\frac{\psi_1}{T(t)}+\psi_2. \tag{3.31}$$

Оскільки значення функції $T(t)$ на границях інтервалу $[t_0, t_0+\tau]$ збігаються, то без обмеження спільності можна прийняти умову, що $T(t)$ на вказаному інтервалі має по одному максимуму та мінімуму. У цьому випадку функція перемикання (3.31) також матиме по одному мінімуму і максимуму в тих самих точках, що і $T(t)$. Через безперервність функції $\lambda(t)$ і структури оптимального управління (3.30) слідує, що оптимальний цикл складається з інтервалів підведення та відведення теплоти з максимально допустимими інтенсивностями, що розділені адіабатичними інтервалами, причому аргументи екстремальних точок функції $\lambda(t)$ містяться всередині інтервалів підведення та відведення теплоти (см. рис. 3.2)

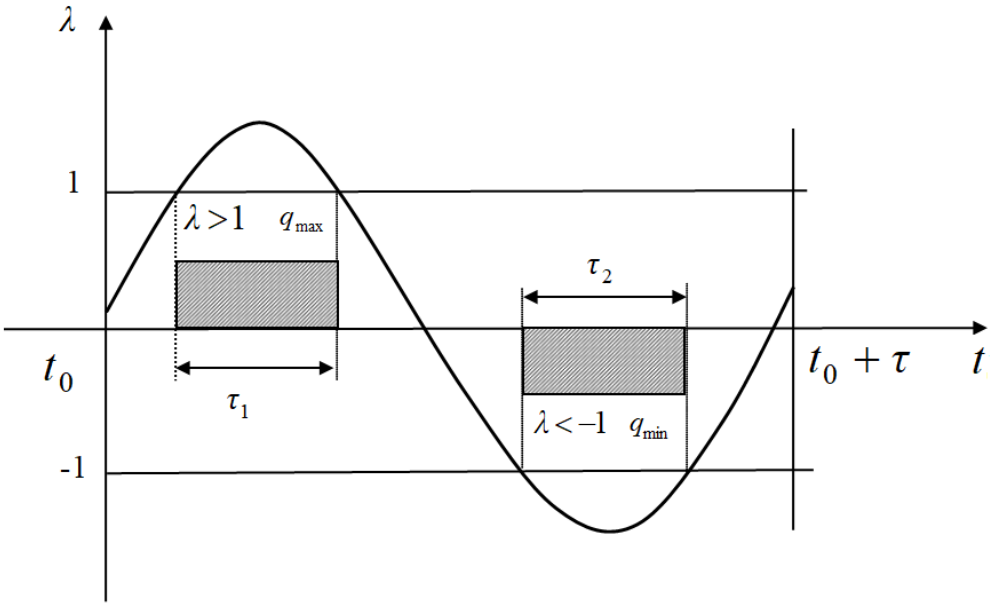


Рис. 3.2. Діаграма оптимального закону управління термодинамічної системи

Нехай тепер, в силу оптимального закону теплопідведення, тривалості інтервалів підведення та відведення теплоти будуть τ_1 і τ_2 відповідно. Тоді, інтегруючи вихідну систему диференціальних рівнянь процесу (3.27) та (3.25), з урахуванням граничних умов (3.23) та (3.26), отримаємо

$$\begin{aligned} q_{\max}\tau_1\xi_1 + q_{\min}\tau_2\xi_2 = 0, \\ q_{\max}\tau_1 + q_{\min}\tau_2 = L, \end{aligned} \tag{3.32}$$

де ξ_1 і ξ_2 – деякі середні значення функції $T^{-1}(t)$ на ділянках підведення та відведення теплоти відповідно.

Очевидно також, що кількість підведеної Q^+ та відведеної Q^- теплоти при оптимальній структурі теплопідведення можуть бути записані як

$$Q^+ = q_{\max}\tau_1,\ Q^- = -q_{\min}\tau_2.$$

Тоді із системи рівнянь (3.32) випливає

$$\begin{aligned} Q^+\xi_1 - Q^-\xi_2 = 0, \\ Q^+ - Q^- = L. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Розв'язуючи (3.33) щодо Q^+ і Q^-, і підставляючи результат у вираз для термодинамічного ККД (3.11), отримаємо

$$\eta = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2}. \tag{3.34}$$

Врахуємо тепер, що величини ξ_1 і ξ_2, що входять до (3.34), задовольняють обмеженням, що обумовлені постановою задачі управління (3.19), тобто

$$\xi_1 \geq \frac{1}{T_{\max}},\ \xi_2 \leq \frac{1}{T_{\min}}.$$

Тоді оцінка ККД оптимального циклу (3.34) набуває вигляду

$$\eta \le 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Останнє співвідношення говорить про те, що максимальне значення термічного ККД у циклі із заданим температурним інтервалом не може перевищити ККД відомого циклу Карно

$$\eta_{opt} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Це значення досягається при підведенні та відведенні теплоти при максимальному та мінімальному допустимих значеннях температури робочої речовини відповідно.

3.3.2 Оптимальний цикл у заданому діапазоні зміни об'єму

Розглянемо дещо іншу, але більш важливу постановку задачі управління термодинамічною системою, що відмінна від розглянутої вище обмеженням зміни об'єму системи виду (3.20).

Для зручності розв'язання задачі оптимального управління перетворимо вихідну математичну модель найпростішого термодинамічного процесу (3.14) шляхом заміни змінних до канонічної форми аналогічної (3.25), (3.27). Для цього відповідно до [19] введемо нову змінну $y(t)$ у вигляді

$$p(t) = \varphi(t)\, y(t), \tag{3.35}$$

де $\varphi(t)$ – фундаментальний розв'язок однорідного диференціального рівняння, що відповідає першому із рівнянь системи (3.14), яке має вигляд

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma \frac{\dot{v}}{v} p. \tag{3.36}$$

В останньому рівнянні змінні розділяться:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma \frac{dv}{v}.$$

Таким чином, розв'язок (3.36) має вигляд

$$p(t) = Cv(t)^{-\gamma},$$

де C – деяка постійна, а фундаментальне рішення (3.36) $\varphi(t) = v(t)^{-\gamma}$.

Змінна $y(t)$, виходячи з (3.35) запишеться як

$$y = pv^{\gamma}. \tag{3.37}$$

Після диференціювання (3.35) по t та підстановки у вихідне рівняння (3.14) з урахуванням (3.37) отримаємо систему канонічних рівнянь для термодинамічного процесу

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v^{\gamma-1}q, \\ \frac{dQ}{dt} &= q. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Слід зазначити, що у співвідношеннях (3.38) тепловий потік q відрізняється від вихідного постійним множником $(\gamma - 1)$, що ніяк не впливає на остаточний результат.

Отриману канонічну форму (3.38) можна розглядати як математичну модель керованого термодинамічного процесу в координатах (v, y).

Як і раніше, скористаємося принципом максимуму. Гамільтоніан задачі має вигляд

$$H = -|q| + \psi_1 v^{\gamma-1} q + \psi_2 q.$$

Відповідна система сполучених рівнянь запишеться як

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt} = 0,$$

тобто ψ_1 та ψ_2 – постійні величини.

Слідуючи далі за схемою, аналогічною розділу (3.31) отримаємо закон управління у вигляді (3.30), в якому функція перемикання $\lambda(t)$ набуде вигляду

$$\lambda(t) = \psi_1 v^{\gamma-1}(t) + \psi_2,$$

з якого за аналогією з циклом Карно, слідує, що оптимальний цикл і в цьому випадку складається з інтервалів підведення і відведення теплоти з граничними значеннями інтенсивностей, які розділені адіабатичними інтервалами.

Враховуючи обмеження щодо зміни об'єму термодинамічної системи (3.20), отримаємо оцінку величин ξ_1 і ξ_2

$$\xi_1 \geq \frac{1}{v_{\max}^{\gamma-1}}, \ \xi_2 \leq \frac{1}{v_{\min}^{\gamma-1}}.$$

Тоді оцінка ККД оптимального циклу набуде вигляду

$$\eta \leq 1 - \varepsilon^{1-\gamma}, \tag{3.39}$$

де $\varepsilon = v_{\max} / v_{\min}$ – ступінь стиснення.

Отриманий оптимальний цикл називається циклом Отто, а його ККД (3.39) є теоретичною границею для поршневих двигунів внутрішнього згоряння.

ГЛАВА 4
КВАЗІСТАТИЧНІ ПРОЦЕСИ У ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

У попередніх розділах було розглянуто математичну модель та низку задач управління термодинамічними квазістатичними процесами. Термодинамічний підхід узагальнено на багатовимірні квазістатичні системи. Основною особливістю розглянутих систем була їх рівновага в кожній точці фазового простору за відсутності будь-яких допустимих впливів з боку зовнішнього середовища. У той самий час, безліч реальних процесів, які у першу чергу протікають у технічних системах, описуються векторним полем $f(x,u)$, що залежить від управління u, положення рівноваги якого можуть досягатися при $u \neq 0$. Таким системам відповідають математичні моделі у формі звичайних диференціальних рівнянь, а постановка та методи розв'язання задач управління добре розроблені, у тому числі, і для розв'язання задач оптимального управління. У цьому розділі буде розглянуто спрощений підхід до розв'язання задач управління на основі квазістатичного підходу, аналогічного термодинамічним методам, що викладені у попередніх розділах. Суть методу полягає у пошуку керованого процесу, що проходить через положення рівноваги керованої системи. При цьому математичну модель у вигляді диференціальних рівнянь динамічної системи можна замінити на математичну модель статичних взаємозв'язків «вхід–вихід». У свою чергу, квазістатична система може бути представлена в диференціальній формі, що аналогічна узагальненому термодинамічному методу, розглянутому раніше.

4.1. **Квазістатичні математичні моделі керованих процесів**

Подання математичних моделей керованих процесів у формі диференціальних рівнянь дозволяє зробити висновок щодо поведінки системи в часі. Така математична модель дозволяє оцінити як власний рух, що зумовлений деяким початковим станом за відсутності впливу –

вільну складову, так і рух, обумовлений зовнішнім впливом – вимушену складову. Математична модель фізичних явищ у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь зазвичай асоціюється з процесами перетворення та акумулювання того чи іншого виду енергії в механіці, електродинаміці, термодинаміці та інших галузях науки. Системи, процеси в яких моделюються системами диференціальних рівнянь, що побудовані виходячи із законів збереження та перетворення енергії в механічних, електричних, гідравлічних та інших технічних системах утворили клас динамічних систем. Головною відмінністю динамічних систем є «запам'ятовування» передісторії системи по відношенню до контрольованих або не контрольованих впливів з боку навколишнього середовища. Такий «енергосиловий» підхід відтінив лише один бік математичних моделей, що базуються на теорії диференціальних рівнянь.

У той же час має місце й інший аспект прикладної теорії диференціальних рівнянь – математичне подання деяких класів кривих у багатовимірному просторі. До таких кривих можна віднести статичні характеристики більшості керованих технологічних процесів. В цьому випадку, статичні характеристики технологічних процесів можна розглядати як множину розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь.

Подальший аналіз і синтез систем управління об'єктами, заданими як системи диференціальних рівнянь, є суто математичною задачею, що заснована на структурі їх розв'язків у аналітичній формі або чисельних методах інтегрування останніх. Таким чином, наріжним каменем теорії автоматичного управління є отримання часових залежностей параметрів, що визначають стан об’єкта управління. Крім того, більшість фундаментальних результатів теорії управління отримано виходячи з математичних моделей керованих процесів у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь.

Безліч реальних об'єктів управління, насамперед це стосується теплоенергетики та хімічних технологій, настільки складні, що їхнє

математичне моделювання вкрай важко.

У загальному випадку математичні моделі технологічних процесів (ТП) у теплоенергетиці та хіміко-переробній промисловості складаються з композиції підсистем звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь у приватних похідних. У літературі, яка присвячена сфері моделювання ТП, наприклад [20 – 23], представлені основні підходи до побудови адекватних математичних моделей, які орієнтовані на розв'язання різноманітних задач, що спрямовані на управління ТП. Головною особливістю технологічних об'єктів є їх структурна складність і різноманітність елементарних процесів, що відбуваються в окремих підсистемах. Детальний аналіз динамічних властивостей структурних компонентів технологічних систем у сфері теплоенергетики та хімії, проведений у [20 – 23], досить аргументовано свідчить про можливість їх моделювання системами звичайних диференціальних рівнянь із слабко вираженими нелінійностями. Розподілені підсистеми у свою чергу апроксимуються системами із зосередженими параметрами. Таким чином, можна з достатньою мірою обґрунтованості вважати, що система звичайних диференціальних рівнянь, принципово допустима у якості математичної моделі значного класу технологічних процесів.

У той самий час, процес створення математичної моделі ТП з урахуванням зібрання елементів із зосередженими параметрами у кожній конкретній реалізації зустрічає низку значних труднощів. По-перше, це висока розмірність моделюючої системи диференціальних рівнянь. Наприклад, математична модель процесу ректифікації містить більше 20 диференціальних рівнянь, а системи рівнянь, що описують динаміку згоряння до 30 [24]. По-друге, постійні часу сепаратних підпроцесів у ТП, зазвичай, мають істотний розкид, що призводить до серйозних труднощів при інтегруванні великих «жорстких» систем диференціальних рівнянь [25]. Це, у свою чергу, ускладнює процес розв'язання задачі параметричного синтезу систем автоматичного управління ТП. По-третє, адекватний опис елементарних процесів в

окремих ланках технологічного об'єкта утруднено у зв'язку з відсутністю достовірних даних про величини деяких фізичних параметрів, що визначають хід їхнього протікання. До останніх відносяться коефіцієнти тепловіддачі, константи швидкостей реакції, коефіцієнти тертя та інші параметри, визначення яких засноване на тонких експериментальних дослідженнях або на емпіричних співвідношеннях, отриманих при дослідженні аналогічних процесів. Виняток становлять методи моделювання, що ґрунтуються на використанні в якості елементів системи двополюсників різної природи [26], та дозволяють отримати досить точні моделі динамічних процесів у вигляді систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь.

Методології побудови та аналізу математичних моделей ТП та їх окремих компонентів, стосовно проблеми синтезу систем управління останніми присвячено безліч наукових досліджень. Ці дослідження пройшли тривалий історичний шлях від квазістатичного підходу до процесів управління та регулювання до динамічного, а потім до інформаційного підходу, основою якого послужили термодинамічні аналогії. Глибокий всебічний аналіз перерахованих підходів до побудови математичних моделей технологічних процесів викладено у [27].

Таким чином, проблему складності формалізації ТП у теплоенергетиці та хімії можна вважати основною при створенні структури та синтезі параметрів систем керування ТП.

Розглянемо стійку динамічну автономну систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in R^n, \quad u \in G_u \subset R^m, \tag{4.1}$$

де x – вектор стану, u – вектор впливів, що може включати як управління, так і обурення, $f(x,u)$ – n-мірна, безперервна вектор-функція, що диференціюється. Далі, якщо це спеціально не обумовлено, вважатимемо, що вектор u містить лише керуючі дії.

Особливий інтерес для подальшого дослідження є множина $X^* \subset R^n$ рівноважних станів керованої системи (4.1):

$$X^* = \left\{ x^* \,\middle|\, f(x^*, u) = 0, \forall u \in G_u \right\}.$$

Будемо називати систему (4.1) нормальною, якщо кожному значенню $u \in G_u$ відповідає єдиний стан рівноваги x^*.

Підмножину $X_L^* \subset X^*$ рівноважних станів нормальної системи називатимемо стійкою, якщо будь-яке положення рівноваги $x^* \in X^*$ асимптотично стійке. Якщо $X_L^* = X^*$, то таку систему називатимемо абсолютно стійкою.

Квазістатичною математичною моделлю (КММ) абсолютно стійкої динамічної системи (4.1) називатимемо відображення $g : G_u \times R^1 \to X^* \times R^1$, що ставить у відповідність будь-якому впливу $u(\cdot)$ статичну фазову траєкторію $x^*(\cdot)$, що визначається множиною розв'язків системи рівнянь $f(x^*, u) = 0$ для послідовності $u(\cdot)$.

Розглянемо докладніше КММ абсолютно стійкої динамічної системи. Виберемо деяку функцію $u(t)$ на інтервалі $[0, \tau]$. Розіб'ємо інтервал $[0, \tau]$ на N відрізків довжини $\Delta = \tau / N$. У кожній точці $t_k = k\Delta, (k = \overline{0, N})$ визначимо стан рівноваги $x^*(k\Delta)$, що відповідає впливу $u(k\Delta)$ шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$f\left(x^*(k\Delta), u(k\Delta)\right) = 0.$$

В результаті отримаємо послідовність положень рівноваги $x^*(\Delta) = \left\{ x^*(k\Delta) \right\}$, що є функцією інтервалу Δ. Квазістатичною траєкторією $x^*(t)$, що відповідає управлінню $u(t)$, називатимемо послідовність $x^*(\Delta)$ при $N \to \infty$. Таким чином, КММ динамічної системи (4.1) являє собою систему рівнянь

$$f(x, u) = 0, \tag{4.2}$$

що виходить в результаті прирівнювання нулю правої частини (4.1).

Знаходження квазістатичної траєкторії полягає у розв'язанні (4.2) відносно x на послідовності керуючих впливів $u(t)$. Якщо аналітичне рішення (4.2) відсутнє, то природно необхідно залучити обчислювальні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь. Таким чином, знаходження квазістатичної траєкторії для заданого управління $u(\cdot)$ є, загалом, досить трудомісткою задачею.

На практиці система статичних взаємозв'язків «вхід-вихід» зазвичай визначається експериментально і є явною залежністю

$$x = f(u), \tag{4.3}$$

де u та x – n-мірні вектори входу та виходу.

Будемо припускати, що відображення (4.3) гомеоморфно, тобто існує зворотне перетворення

$$u = g(x), \tag{4.4}$$

таке, що $g(f(u)) = u$ та $f(g(x)) = x$.

Будемо також припускати, що функції $f(u)$ і $g(x)$ неперервні та такі, що диференціюються. Тоді, розглядаючи x і u як деякі функції t та диференціюючи (4.3), отримаємо

$$\dot{x} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\dot{u}. \tag{4.5}$$

Позначаючи $\dot{u} \triangleq \delta$ і, підставляючи (4.4) у вираз для матриці $\frac{\partial f(u)}{\partial u}$, отримаємо остаточно

$$\dot{x} = \Phi(x)\delta, \tag{4.6}$$

де $\Phi(x) = \frac{\partial f(g(x))}{\partial u}$ – $n \times n$ матриця-функція вектору стану x.

Компоненти вектора управління δ мають сенс швидкості зміни керуючих параметрів u і можуть розглядатися в якості управління.

Величини параметрів u, що управляють, можуть бути визначені в результаті інтегрування системи диференціальних рівнянь $\dot{u} = \delta$, що є доповненням до (4.6).

Зауважимо, що заміна традиційних управлінь, представлених компонентами вектора u, швидкостями їх змін δ більшою мірою відповідає реальним поняттям управляючих впливів на систему. А якщо врахувати фізико-механічні обмеження швидкості зміни управляючих параметрів u, то таке трактування терміна «управління» безумовно, більш прагматичне і відповідає змісту управління як цілеспрямованого впливу на систему, що керується.

Проаналізуємо докладніше взаємозв'язок між статичною (4.3) та диференціальною (4.6) формами математичного моделювання квазістатичних керованих процесів. Для цього зафіксуємо всі компоненти вектора u крім u_k (4.3) і відповідно прирівняємо нулю $\delta_1,...,\delta_{k-1},\delta_{k+1},...,\delta_n$ в (4.6). Тоді перетворення (4.3) можна інтерпретувати як параметричне задання деякої кривої в n-вимірному просторі з параметром u_k.

Змінюючи довільним чином $n-1$ параметр $u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_n$, що належить деякій області визначення U^{n-1}, отримаємо $(n-1)$-параметричне сімейство статичних характеристик об'єкта, що відповідають впливу U_k (див. рис. 4.1).

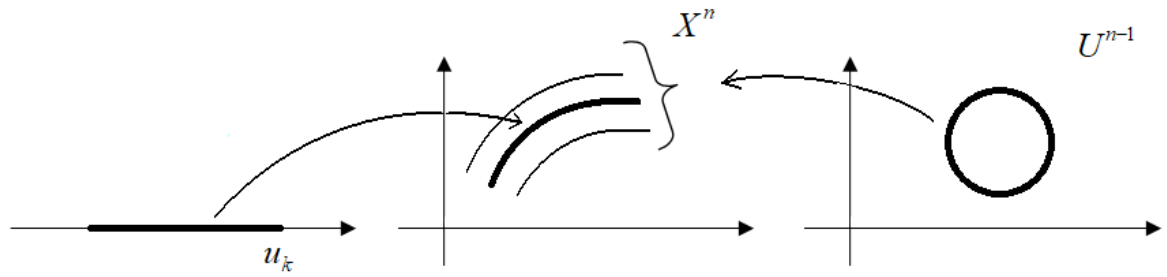


Рис. 4.1. Структура побудови сімейства статичних характеристик по входу k

Сімейства статичних характеристик, що відповідають варіації k-го управляючого впливу можна уявити й в іншій формі. Для цього

виключимо u_k із системи рівнянь (4.2). В результаті отримаємо систему з $n-1$ рівняння

$$\psi_1(x_1,...,x_n,u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_n)=0,$$
$$.....$$
$$\psi_{n-1}(x_1,...,x_n,u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_n)=0,$$

вирішуючи яку щодо фіксованих управляючих параметрів отримаємо

$$\Psi_1(x_1,...,x_n)=u_1,$$
$$.....$$
$$\Psi_{n-1}(x_1,...,x_n)=u_n. \qquad (4.7)$$

Отримана множина співвідношень являє собою $(n-1)$-параметричне сімейство ліній у n-мірному просторі. Кожному набору $u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_n$ відповідає деяка ізольована крива L в R^n, а управлінню u_k відповідає точка на цій кривій. Аналогічним чином можуть бути побудовані сімейства статичних характеристик, які відповідають будь-якому з вхідних впливів на об'єкт управління.

З іншого боку система диференціальних рівнянь (4.6) у разі лише одного управління δ_k перетворюється на систему

$$\dot{x}=\varphi_k(x)\delta_k, \qquad (4.8)$$

де $\varphi_k(x)$ – k-й стовпець матриці $\Phi(x)$.

Зрозуміло також, що множина інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (4.8) збігається з множиною фазових траєкторій однорідної системи

$$\dot{x}=\varphi_k(x). \qquad (4.9)$$

При цьому функція $\delta_k(t)$ визначає лише швидкість і напрямок переміщення точки, що зображує переміщення вздовж фазової траєкторії розв'язку (4.9).

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що множину інтегральних кривих однорідної системи (4.9) можна представити у вигляді $n-1$ перших інтегралів

$$\begin{aligned} X_1(x_1,...,x_n) &= C_1 \\ &..... \\ X_{n-1}(x_1,...,x_n) &= C_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Неважко бачити, що сімейства траєкторій (4.7) і (4.10) відображають той самий квазістатичний процес. Таким чином, подання квазістатичного об'єкта в алгебраїчній (4.3) та диференціальній (4.6) формах еквівалентно.

4.2. **Критерії квазістатичності керованих процесів**

Проведений аналіз показує, що рух зображувальної точки по квазістатичній траєкторії, яка проходить через положення рівноваги, залежить від параметрів динамічної системи та від характеристик управляючого впливу, що діє на систему. Цікавим є знаходження взаємозв'язків між параметрами системи та управляючими сигналами, що забезпечують найкраще наближення реального процесу до квазістатичного.

Припустимо, що множина допустимих впливів, що розглядаються як множина функцій часу, належить деякому заданому класу функцій U. Надалі обмежимося класом U_l, що є множиною всіх безперервних обмежених функцій, які мають обмежені похідні до l-го порядку включно, а похідні вищих порядків рівними нулю:

$$U_l = \left\{ u(\cdot) \,|\, \left\| u^k(t) \right\| \le \mu_k,\ \forall t \in [0,\tau],\ \forall k \in [0,l],\ \mu_k = 0, \forall k > l \right\}. \tag{4.11}$$

Керований процес будемо називати квазістатичним порядку k по відношенню до впливів класу U, якщо для будь-якої вимушеної складової розв'язку $x(t)$ системи (4.1), обумовленої впливом $u(\cdot) \in U$ та

відповідною статичною траєкторією $x^*(t)$ виконується умова близькості k-го порядку

$$\max_{i=0,k} \left\| x^{(i)}(t) - x^{*(i)}t \right\| \le \varepsilon, \ \forall u(\cdot) \in U, \tag{4.12}$$

де ε – деяке задане додатне число.

У окремому випадку при $k = 0$, тобто при близькості функцій нульового порядку умова (4.12) набуде вигляду

$$\left\| x(t) - x^*t \right\| \le \varepsilon, \ \forall u(\cdot) \in U.$$

Знайдемо умови квазістатичності для випадку лінійного стаціонарного керованого об'єкта, математична модель якого має вигляд

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x \in R^n, \ u \in R^m, \tag{4.13}$$

де A – гурвіцева $n \times n$ матриця, а B – матриця впливів розмірності $n \times m$.

Для знаходження вимушеної складової розв'язку (4.13), обумовленої впливом $u(t)$, скористаємося методом аналогічним методу коефіцієнтів помилок, який широко застосовується для аналізу та синтезу автоматичних систем, що стежать. У роботі [27] розглядається розвиток цього підходу для багатовимірних об'єктів, заданих системою диференціальних рівнянь у просторі станів. Саме там зазначено, що запропонований метод практично неможливо реалізувати у зв'язку з необхідністю обертання поліноміальних матриць. Нижче розглянуто простіший шлях знаходження вимушеної складової розв'язку системи диференціальних рівнянь, що не вимагає знаходження матричної імпульсної перехідної функції.

Будемо шукати вимушену складову розв'язку системи (4.13) у вигляді нескінченного ряду

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k u^{(k-1)}(t), \tag{4.14}$$

де C_k – деякі матриці розмірності $n\times m$, що надалі підлягають визначенню.

Підставляючи (4.14) у вихідну систему рівнянь (4.13), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k u^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}AC_k u^{(k-1)}+Bu. \tag{4.15}$$

Прирівнюючи матричні коефіцієнти при похідних $u^{(k)}$ одного порядку в лівій і правій частинах (4.15) для $k=\overline{1,\infty}$, отримаємо наступну систему рекурентних співвідношень для визначення матриць C_k:

$$AC_1+B=0,\ AC_{k+1}=C_k,\ k=\overline{1,\infty}. \tag{4.16}$$

Зі співвідношень (4.16) безпосередньо випливає

$$C_1=-A^{-1}B,\ C_2=-A^{-2}B,...,\ C_k=-A^{-k}B,... . \tag{4.17}$$

Таким чином, з (4.17) та (4.14) вимушену складову розв'язку $x(t)$ можна подати у вигляді

$$x(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}Bu^{(k-1)}(t). \tag{4.18}$$

Рівняння (4.13) можна формально подати дещо в іншому вигляді, більш звичному з погляду класичної теорії автоматичного управління:

$$T\dot{x}+x=Ku, \tag{4.19}$$

де $T\triangleq -A^{-1}$ – матрична постійна часу, а $K\triangleq -A^{-1}B$ – матричний коефіцієнт посилення.

Таке уявлення можливе через невиродженість матриці A. У цьому випадку співвідношення (4.18) для вимушеної складової $x(t)$ набуде

вигляду

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}T^{k-1}Ku^{(k-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}T^{k}Ku^{(k)}\,. \qquad (4.20)$$

Відповідні (4.17) вирази для матричних коефіцієнтів C_k запишуться як

$$C_1=K,\ C_2=-TK,...,\ C_k=(-1)^{k-1}T^{k-1}K\,. \qquad (4.21)$$

Як випливає з (4.14), множина матриць C_k визначає «внесок» похідних вхідного впливу до вимушеної складової розв'язку (4.13), аналогічно коефіцієнтам помилок систем, що стежать. Множину матриць $\{C_k\}$, $k=\overline{1,\infty}$, визначених відповідно до (4.17) або (4.21), будемо надалі називати характеристичною множиною динамічної системи.

В окремому випадку, якщо впливи належать класу U_l (4.11), то (4.18) і (4.20) набудуть відповідного вигляду

$$x(t)=-\sum_{k=1}^{l+1}A^{-k}Bu^{(k-1)}(t), \qquad (4.22)$$

$$x(t)=-\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k}T^{k}Ku^{(k)}(t)\,. \qquad (4.23)$$

Розглянемо випадок поліноміального m-мірного впливу $u(t)$, який можна подати у векторно-матричній формі [28]

$$u(t)=VT\,, \qquad (4.24)$$

де $T=\left(1,t,\frac{t^2}{2!},\frac{t^3}{3!},...,\frac{t^l}{l!}\right)^T$ – $(l+1)$-мірний вектор коефіцієнтів векторного поліному, а V – матриця розмірності $m\times(l+1)$.

У цьому випадку похідна $\dot{u}(t)$ може бути подана у вигляді

$$\dot{u}(t) = V\Lambda T, \tag{4.25}$$

де Λ – оператор диференціювання матричного полінома:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Використовуючи (4.25) і (4.26), k похідну впливу $u^{(k)}(t)$ можна представити як

$$u^{(k)}(t) = V\Lambda^k T. \tag{4.27}$$

Оператор k-кратного диференціювання Λ^k матричного полінома, являє собою ступінь k матриці Λ і має наступну структуру:

$$\lambda_{k+j,j} = 1, \quad j = \overline{1,(l+1-k)}.$$

Інші елементи матриці Λ^k дорівнюють 0.

Підставляючи (4.27) в (4.22), отримаємо остаточний вираз для матричного полінома – вимушеного розв'язку рівняння (4.13):

$$x(t) = XT, \quad X = -\sum_{k=1}^{l+1} A^{-k} B \vee \Lambda^{k-1}. \tag{4.28}$$

Матрицю X можна знайти й іншим способом. Для цього підставимо вирази для $x(t)$ з (4.28) і для $x(t)$ (4.24) у вихідне рівняння (4.13). Тоді з урахуванням введеного раніше оператора диференціювання матричного полінома отримаємо лінійне матричне рівняння для знаходження матриці X

$$X\Lambda - AX = BV, \tag{4.29}$$

яке може бути розв'язано одним із безлічі відомих способів. Неважко

перевірити безпосередньою підстановкою (4.28) в (4.29), що (4.28) є розв'язком матричного рівняння (4.29). Таким чином, отриманий попутно результат можна інтерпретувати як знаходження у загальному вигляді розв'язку лінійного матричного рівняння

$$AX - XB = C, \tag{4.30}$$

де A і B – квадратні $n \times n$ та $m \times m$ матриці, а X і C – $n \times m$ прямокутні матриці.

Цей розв'язок за аналогією з (4.28) має вигляд нескінченного ряду

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} C B^{k-1}. \tag{4.31}$$

Знайдемо умови, за яких ряд (4.31) збігається. Збіжність ряду (4.31) матиме місце у разі збіжності відповідного скалярного ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| A^{-k} C B^{k-1} \right\|. \tag{4.32}$$

Застосовуючи до (4.32) правила оперування з нормами матриць, отримаємо оцінку k-го члена ряду

$$\left\| A^{-k} C B^{k-1} \right\| \le \left\| A^{-1} \right\|^{k} \cdot \|C\| \cdot \|B\|^{k-1} = \|C\| \cdot \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left(\left\| A^{-1} \right\| \cdot \|B\| \right)^{k-1}.$$

Неважко бачити, що отримана оцінка є геометричною прогресією. Отже, необхідною та достатньою умовою збіжності ряду (4.32) є

$$\left\| A^{-1} \right\| \cdot \|B\| < 1. \tag{4.33}$$

Врахуємо тепер відоме співвідношення для матричних норм

$$\left\| A^{-1} \right\| \ge \|A\|^{-1}. \tag{4.34}$$

Тоді з (4.33) з урахуванням (4.34) випливає

$$\|A\|^{-1}\|B\|<1.$$

Таким чином, необхідною та достатньою умовою збіжності ряду (4.31) буде

$$\|A\|\geq\|B\|. \tag{4.35}$$

Слід зазначити, що остання умова несуттєво обмежує застосування формули (4.31) як розв'язку рівняння (4.30).

Дійсно, у разі невиконання умови збіжності (4.35), рівняння (4.30) можна замінити еквівалентним йому рівнянням

$$DY-YF=G, \tag{4.36}$$

де $D=-B^T$, $F=-A^T$, $Y=X^T$, $G=C^T$, що виходять в результаті транспонування (4.30).

Тоді умова збіжності матричного ряду – розв'язок рівняння (4.36)

$$Y=\sum_{k=1}^{\infty}D^{-k}GF^{k-1} \tag{4.37}$$

матиме вигляд

$$\|D\|>\|F\|,$$

що еквівалентно нашій передумові

$$\|B\|>\|A\|$$

для вихідного матричного рівняння.

Таким чином, вирази (4.31) або (4.37) в залежності від знака різниці величини

$$\|A\|-\|B\|$$

є розв'язком матричного лінійного рівняння виду (4.30).

Слід зазначити, що для випадку коли рівняння (4.30) є рівнянням

Ляпунова

$$QX + XQ^T = R,$$

запропонований метод не може бути застосованим, оскільки в цьому випадку умова

$$\|A\| \neq \|B\|$$

не виконується у зв'язку з тим, що

$$\|Q\| = \|-Q^T\|.$$

Знайдемо тепер оцінку величини

$$\varepsilon_j = \left\| x^{(j)}(t) - x^{*(j)}(t) \right\|, \quad j = \overline{0,(l-1)}. \tag{4.38}$$

Диференціюючи (4.22) j разів, отримаємо

$$x^{(j)}(t) = -\sum_{k=1}^{l-j+1} A^{-k} B u^{(k+j-1)}. \tag{4.39}$$

У свою чергу, похідна порядку j відповідної квазістатичної траєкторії запишеться як

$$x^{*(j)}(t) = -A^{-1} B u^{(j)}(t). \tag{4.40}$$

Підставляючи (4.40) та (4.39) до (4.38), отримаємо з урахуванням (4.11):

$$\varepsilon_j = \left\| -\sum_{k=2}^{l-j+1} A^{-k} B u^{(k+j-1)} \right\| \leq b \sum_{k=2}^{l-j+1} \bar{a}^k \mu_{k+j-1},$$

де $b \triangleq \|B\|$, $\bar{a} \triangleq \left\|A^{-1}\right\|$.

Таким чином, умова квазістатичності s-го порядку процесу, що управляється, може бути представлена у вигляді

$$b\sum_{k=2}^{l-j+1}\bar{a}^k\mu_{k+j-1}\le\varepsilon,\ \forall j\in\overline{0,s}, \tag{4.41}$$

де ε – деяке задане додатне число.

У разі оцінки близькості квазістатичної та динамічної траєкторій як близькості нульового порядку (4.41) набуде вигляду

$$\|\Delta x\| = b\sum_{k=1}^{l}\bar{a}^{k+1}\mu_k \le \varepsilon, \tag{4.42}$$

де $\|\Delta x\|$ – норма відхилення динамічної траєкторії $x(t)$ від квазістатичної $x^*(t)$.

Оцінку (4.42) можна віднести до оцінки величини норми квазістатичної траєкторії

$$\|x^*(t)\| \le \bar{a}b\mu_0,$$

$$\delta = \frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} = \frac{1}{\mu_0}\sum_{k=1}^{l}\bar{a}^k\mu_k,$$

яка може бути прийнята як міра квазістатичності лінійної системи (4.13) по відношенню до впливів заданого класу (4.11).

На закінчення, наведемо основні співвідношення для оцінки ступеня квазистатичності керованого процесу при описі об'єкта в (T,K) термінології (4.19). У цьому випадку співвідношення (4.39) і (4.40) набудуть вигляду

$$x^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{l-j}(-1)^k T^k K u^{(k+j)},$$

$$x^{*(j)}(t) = K u^{(j)}(t),$$

а вираз (4.41) для умови квазістатичності s-го порядку набуде вигляду

$$\nu\sum_{k=1}^{l-j}\Theta^k\mu_{k+j}\le\varepsilon,\ \ \forall j\in\overline{0,s},$$

де $\nu\triangleq\|K\|$, а $\Theta\triangleq\|T\|$.

За аналогією з (4.42) оцінка динамічної помилки нульового порядку може бути представлена як

$$\|\Delta x\|=\nu\sum_{k=1}^{l}\Theta^k\mu_k,$$

а відносна помилка

$$\delta=\frac{1}{\mu_0}\sum_{k=1}^{l}\Theta^k\mu_k.$$

4.3. Критерій квазістатичності лінійних одновимірних систем на основі характеристичного вектора

У розділі 4.2 було розглянуто загальний підхід до формулювання умов квазистатичності лінійних керованих процесів. При цьому передбачалося, що об'єкт управління описується системою диференціальних рівнянь у формі Коши. Проте, на практиці, системи автоматичного управління в багатьох випадках представлені у вигляді диференціальних рівнянь n-го порядку або у вигляді передавальних функцій. При такому завданні математичної моделі об'єкта управління можна піти шляхом перетворення моделі до моделі у просторі станів та використовувати критерії квазистатичності, що отримані у 4.2. Нижче буде розглянуто дещо інший підхід, який методологічно ближчий до методів класичної теорії автоматичного управління. Метод заснований на визначенні характеристичного вектора, аналога матриць C_k (4.17), для структурного елемента, заданого диференціальним рівнянням n-го порядку або передавальної функцією, і подальшого визначення характеристичного вектора всієї системи в цілому.

Нехай структурний елемент системи управління описаний

диференціальним рівнянням

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = u, \qquad (4.43)$$

де $(a_0, a_1, ..., a_n)$ – вектор постійних коефіцієнтів, u – скалярний вплив.

Припустимо також, що всі корені характеристичного рівняння, відповідного (4.43), мають від'ємні дійсні частини.

Будемо шукати вимушену складову розв'язку (4.43) у вигляді

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^{(k-1)}, \qquad (4.44)$$

де $c_1, c_2, ...$ – нескінченномірний характеристичний вектор, аналог коефіцієнтів помилок в теорії систем, що стежать.

Після підстановки (4.44) в (4.43) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових похідних у лівій і правій частинах рівняння, отримаємо нескінченну систему лінійних рівнянь для визначення вектора $c_1, c_2, ...$

$$\begin{aligned}
&a_n c_1 = 1 \\
&a_n c_2 + a_{n-1} c_1 = 0 \\
&a_n c_3 + a_{n-1} c_2 + a_{n-2} c_1 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_n c_{n+1} + a_{n-1} c_n + ... + a_1 c_2 + a_0 c_1 = 0 \\
&a_n c_{n+2} + a_{n-1} c_{n+1} + ... + a_1 c_3 + a_0 c_2 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_n c_l + a_{n-1} c_{l-1} + ... + a_1 c_{l-n+1} + a_0 c_{l-n} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (4.45)$$

Оскільки отримана система рівнянь відноситься до класу трикутних, то її розв'язок легко знаходиться послідовним розв'язанням лінійних рівнянь 1-го порядку, починаючи з першого в (4.45).

У матричній формі система (4.45) виглядає наступним чином

$$Ac = \bar{u}$$

$$\begin{array}{c} \\ \Delta_{\bar{1}} \\ \Delta_{\bar{2}} \\ \Delta_{\bar{3}} \\ \vdots \end{array} \overset{A}{\begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & .. \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & .. \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & .. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}} \overset{c}{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \end{pmatrix}} = \overset{\bar{u}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}. \tag{4.46}$$

Неважко бачити, що матриця A^{-1} має вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\Delta_1}{a_n^2} & \frac{1}{a_n} & 0 & \dots \\ \frac{\Delta_2}{a_n^3} & -\frac{\Delta_1}{a_n^2} & \frac{1}{a_n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

В (4.47) визначники $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ – це визначники блоків матриці A, що показані в (4.46). З (4.47) випливає, що характеристичний вектор має вигляд

$$c_1 = \frac{1}{a_n}, c_2 = -\frac{\Delta_1}{a_n^2}, \dots, c_k = (-1)^{k-1} \frac{\Delta_{k-1}}{a_n^k} \dots . \tag{4.48}$$

Оскільки визначники Δ_k в (4.48), є визначниками матриць R_k, одержуваних послідовним облямуванням, починаючи з $R_1 = (a_{n-1})$ (4.46), то обчислення послідовності $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ може бути досить просто реалізовано на підставі послідовного застосування відомих формул для визначника і обернення блокових матриць [29]. Дійсно, структура послідовності матриць $R_k, k = 2,3,\dots$ має вигляд:

$$R_k = \left(\begin{array}{c|c} R_{k-1} & b \\ \hline c_k^{\mathrm{T}} & a_{n-1} \end{array} \right),$$

де $b = (0, 0, ..., 0, a_n)^{\mathrm{T}}$, $c_k^{\mathrm{T}} = (a_{n-k}, ..., a_{n-2})$.

Тоді, на підставі формул Шура та Фробеніуса [29]:

$$h_k = a_{n-1} - c_k^{\mathrm{T}} R_{k-1}^{-1} b, \tag{4.49}$$

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} h_k, \tag{4.50}$$

$$R_k = \frac{1}{h_k} \left(\begin{array}{c|c} h_k R_{k-1}^{-1} + R_{k-1}^{-1} b c_k^{\mathrm{T}} R_{k-1}^{-1} & -R_{k-1}^{-1} b \\ \hline -c_k^{\mathrm{T}} R_{k-1}^{-1} & 1 \end{array} \right), \tag{4.51}$$

$$\Delta_1 = R_1 = a_{n-1}, \quad k = 2, 3, ...$$

Отже, рекурентна процедура (4.49) – (4.51), дозволяє легко обчислити визначники $\Delta_1, \Delta_2, ...$, а, отже, і матрицю A^{-1} (4.47).

Нехай структурний елемент САУ заданий передавальною функцією

$$W(p) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n}$$

або еквівалентним диференціальним рівнянням

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} u^{(k)} .$$

Використовуючи представлення $x(t)$ у вигляді (4.44), отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження характеристичного вектора c виду (4.46), яка відрізняється тим, що вектор $\bar{u}$ набуде вигляду

$$\bar{u}^{\mathrm{T}} = (b_m, b_{m-1}, ..., b_0, 0, ...).$$

В випаду якщо вплив $u(t)$ належить класу U_l, то система рівнянь (4.46), і навіть характеристичний вектор c стають кінцевомірними

розмірності $l+1$, а $x(t)$ запишеться як

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l+1} c_k u^{(k-1)} . \tag{4.52}$$

Квазістатична траєкторія, що відповідає (4.52) набуде вигляду:

$$x^*(t) = c_1 u(t) . \tag{4.53}$$

Тоді оцінка відхилення істинної траєкторії від квазістатичної запишеться на підставі (4.52) та (4.53) як

$$\left\|\Delta x\right\| = \left\|x(t) - x^*(t)\right\| \le \sum_{k=2}^{l+1} c_k \mu_{k-1} , \tag{4.54}$$

а відносне відхилення

$$\delta = \frac{\left\|\Delta x\right\|}{\left\|x^*(t)\right\|} = \frac{\sum_{k=2}^{l+1} c_k \mu_{k-1}}{c_1 \mu_0} . \tag{4.55}$$

Співвідношення (4.54) і (4.55) можуть бути прийняті як критерії квазістатичності одновимірних керованих процесів.

4.4. **Характеристичний вектор з'єднання ланок**

У попередньому розділі були наведені основні співвідношення, що дозволяють визначити характеристичний вектор $c = (c_1, c_2, ...)$ для ланки із заданою передавальною функцією $W(s)$. Наслідуючи методологію, покладену в основу теорії автоматичного управління, знайдемо характеристичний вектор основних з'єднань ланок.

4.4.1 Послідовне з'єднання

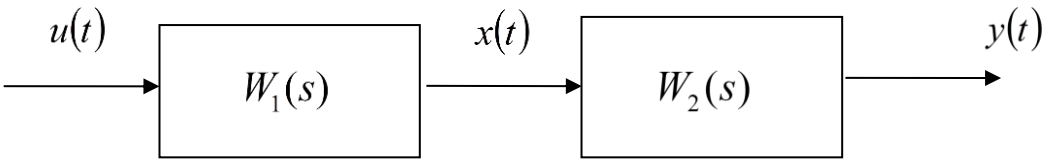


Рис. 4.2. Структурна схема послідовного з'єднання

Нехай c і b характеристичні вектори ланок з передавальними функціями $W_1(s)$ та $W_2(s)$. Тоді вихід $y(t)$ послідовного з'єднання ланок можна подати у вигляді

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{(j)}(t). \tag{4.56}$$

В свою чергу

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^{(k)}(t). \tag{4.57}$$

Підставляючи (4.57) в (4.56), отримаємо

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{d^j \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^{(k)}}{dt^j} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d^j u^{(k)}}{dt^j} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^{(k+j)}. \tag{4.58}$$

Таким чином, характеристичний вектор $d = (d_1, d_2, ...)$ послідовного з'єднання ланок, на підставі (4.58), набуде вигляду:

$$d_i = \sum_{j+k=i} b_j c_k .$$

4.4.2 Паралельне з'єднання

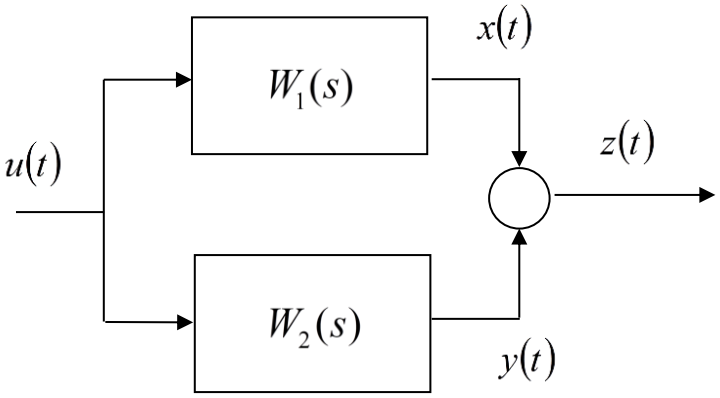


Рис. 4.3. Структурна схема паралельного з'єднання

Оскільки при паралельному з'єднанні

$$z(t) = x(t) + y(t),$$

то

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j u^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + b_k) u^{(k)}(t).$$

Отже, для паралельного з'єднання

$$d_k = c_k + b_k.$$

4.4.3 Зустрічно-паралельне з'єднання

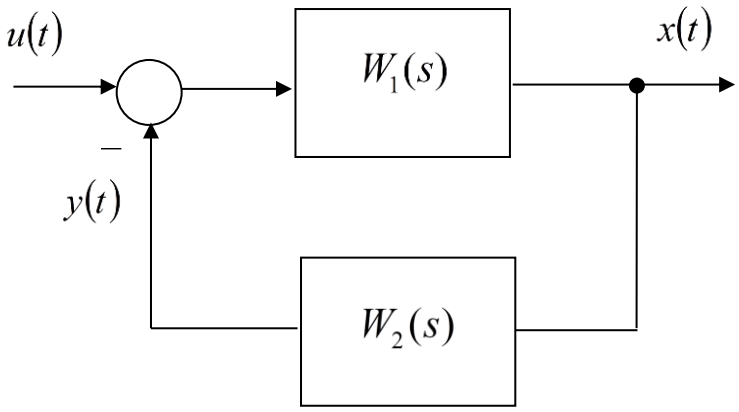


Рис. 4.4. Структурна схема зустрічно-паралельного з'єднання

Попередньо розглянемо зустрічно-паралельне з'єднання з одиничним від'ємним зворотним зв'язком

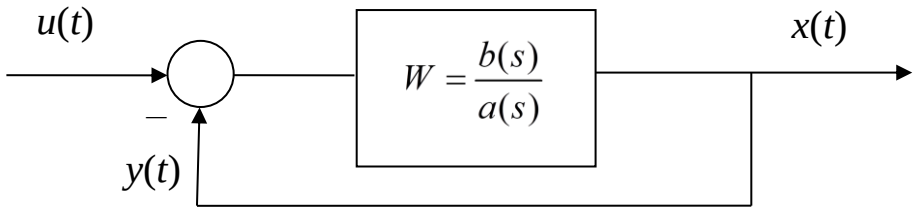


Рис. 4.5. Структурна схема зустрічно-паралельного з'єднання з одиничним зворотним зв'язком

Передавальна функція з'єднання, представленого на рис. 4.5, має вигляд

$$W_1 = \frac{b(s)}{a(s)+b(s)}. \tag{4.59}$$

Відповідно до рівнянь (4.45) та (4.46) для визначення характеристичного вектора одновимірної керованої системи систему алгебраїчних рівнянь для визначення характеристичного вектора $\overline{c}$ ланки з передавальною функцією (4.59) можна представити у вигляді:

$$A\overline{c} + B\overline{c} = b, \tag{4.60}$$

де матриці A та B побудовані відповідно до (4.46), а вектор у правій частині (4.60) має вигляд

$$b^{\mathrm{T}} = (b_m, b_{m-1}, ..., b_0, 0, ...).$$

З іншого боку, характеристичний вектор c розімкнутої системи задовольняє системі рівнянь

$$Ac = b. \tag{4.61}$$

Розв'язуючи систему (4.60) з урахуванням (4.61) отримаємо остаточно вираз для $\overline{c}$ у вигляді:

$$\overline{c} = (E + A^{-1}B)^{-1}c. \tag{4.62}$$

Незважаючи на складність співвідношення (4.62), що здається, його реалізація не викликає значних труднощів. Як випливає з (4.47) та (4.48) матриця A^{-1} має вигляд

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots \\ c_2 & c_1 & 0 & \dots \\ c_3 & c_2 & c_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Матриці B, отже і $A^{-1}B$ є нижньо-трикутні матриці. Таким чином, матриця $(E + A^{-1}B)$ – нижньо-трикутна та для її обернення існує безліч простих методів.

Скористаємося отриманим результатом знаходження характеристичного вектора з'єднання, зображеного на рис 4.4. Для цього перетворимо його на еквівалентне (рис. 4.5) з одиничним зворотним зв'язком.

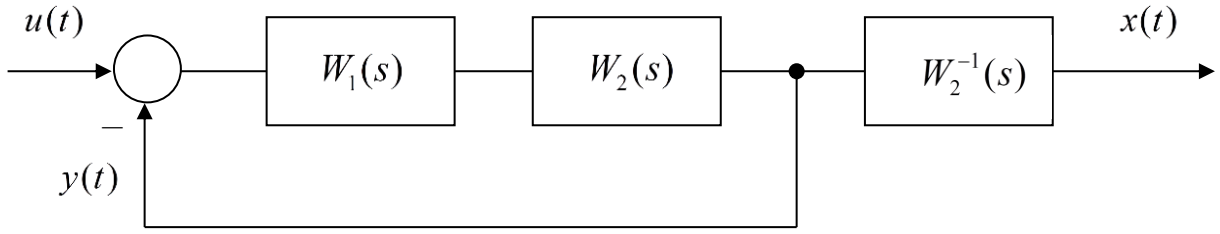


Рис. 4.6. Структурна схема еквівалентної системи з одиничним зворотним зв'язком

Отримана структура складається з послідовного з'єднання окремого елемента та зустрічно-паралельного з одиничним зворотним зв'язком. Характеристичний вектор такої системи може бути отриманий в результаті послідовного застосування раніше отриманих алгоритмів.

4.5. **Рівновага та стійкість квазістатичних систем**

На практиці значний інтерес становлять положення рівноваги квазістатичної системи. Для знаходження останніх необхідно прирівняти

нулю праві частини диференціальних рівнянь квазістатичного процесу (4.6)

$$\Phi(x)\delta = 0 \tag{4.63}$$

та дослідити рішення однорідної лінійної системи (4.63) відносно δ. Якщо матриця $\Phi(x)$ невироджена для всіх $x \in R^n$, то (4.63) має тільки тривіальний розв'язок $\delta = 0$, тобто рівновага системи має місце тільки при $u = \text{const}$. Умовою нетривіального розв'язку (4.63) є наявність хоча б одного вектору $x = x^*$ такого, що матриця $\Phi(x^*)$ вироджена, тобто

$$\text{rank}\,\Phi(x^*) = k < n\,.$$

Останній умові відповідає наступна:

$$\det \Phi(x^*) = 0\,,$$

яка може бути інтерпретована як гіперповерхня у n-вимірному просторі.

У цьому разі множина нетривіальних розв'язків системи (4.63) буде мати структуру лінійного підпростору R^s розмірності $s = n - k$:

$$\delta = \sum_{j=1}^{s} c_j \delta_j\,. \tag{4.64}$$

де δ^j – s лінійно незалежних рішень системи (4.63), c_j – s довільних постійних. Таким чином, рівновага у такій системі може досягатися в результаті балансу керуючих впливів, що дозволяють підтримувати обране положення рівноваги.

Як видно з (4.64) рівновага системи може підтримуватися при довільних значеннях постійних c_j. Тобто вибором c_j можна забезпечити ті чи інші властивості фазових траєкторій поблизу положення рівноваги. Природним чином виникає задача про стійкість деякого положення рівноваги x^* залежно від вибору параметрів c_j, $j = \overline{1, s}$. Система диференціальних рівнянь квазістатичного процесу (4.6)

з урахуванням (4.64) набуде вигляду

$$\dot{x} = \Phi(x)\sum_{j=1}^{s} c_j \delta^j(x^*), \tag{4.65}$$

де $\delta^j(x^*)$ – система базисних векторів підпростору розв'язків рівняння (4.63), що відповідають обраному рівноважному стану x^*.

Неважко бачити, що (4.65) є однорідною системою диференціальних рівнянь у формі Коші. Для дослідження стійкості (4.65) найпростіше скористатися теоремою Ляпунова, згідно з якою (4.65) стійка, якщо стійке її лінійне наближення. Лінеаризована система рівнянь (4.65) у відхиленнях від положення рівноваги x^* може бути записана у вигляді

$$\Delta\dot{x} = \sum_{j=1}^{s} c_j \sum_{i=1}^{n} \delta_i^j \frac{\partial \varphi_i(x^*)}{\partial x}\Delta x, \tag{4.66}$$

де δ_i^j – i-й елемент j-го базисного вектора δ^j, а $\frac{\partial \varphi_i(x^*)}{\partial x}$ – матриця-функція, що є похідною i-го стовпця $\varphi_i(x)$ матриці $\Phi(x)$ за вектором x, обчислену в рівноважному стані x^*.

Лінійну систему першого наближення (4.66) після відповідних позначень можна подати у вигляді:

$$\Delta\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} d_i A_i(x^*)\Delta x, \tag{4.67}$$

де $A_i(x^*) = \frac{\partial \varphi_i(x^*)}{\partial x}$ – множина постійних квадратних $n \times n$ матриць, а $d_i = \sum_{j=1}^{s} c_j \delta_i^j$.

Таким чином, застосовуючи який-небудь із відомих критеріїв стійкості до системи (4.67) можна досліджувати положення рівноваги на стійкість залежно від обраних значень c_j. Можна сформулювати і

обернену задачу – задачу синтезу сталого процесу відповідним вибором коефіцієнтів c_j.

При розв'язанні різних задач управління квазістатичними об'єктами цікавить розгляд лінеаризованих математичних моделей при малих відхиленнях від рівноважного стану при змінах як фазових координат, так і керуючих впливів.

Зафіксуємо деякий рівноважний стан x^* квазістатичної системи

$$\dot{x} = \Phi(x)\delta, \quad x \in R^n, \quad \delta \in R^n, \tag{4.68}$$

що обумовлений рівноважним вектором управління δ^*.

Рівноважна пара (δ^*, x^*) задовольняє лінійній однорідній системі рівнянь

$$\Phi(x^*)\delta^* = 0. \tag{4.69}$$

Якщо матриця $\Phi(x^*)$ невироджена, то рівноважний вектор керування δ^* може бути як нульовим, так і відмінним від нуля і мати вигляд (4.64).

Введемо нові змінні Δx і $\Delta\delta$, що пов'язані з вихідними x і δ співвідношенням

$$\begin{aligned} x &= x^* + \Delta x, \\ \delta &= \delta^* + \Delta\delta. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Змінні Δx і $\Delta\delta$ являють собою «малі» відхилення від положення рівноваги. Після підстановки (4.70) у (4.68) отримаємо

$$\Delta\dot{x} = \Phi(x^* + \Delta x)(\delta^* + \Delta\delta). \tag{4.71}$$

Розкладемо функцію у правій частині (4.71) в ряд Тейлора в точці (x^*, δ^*), обмежившись лінійними членами по Δx і $\Delta\delta$. В результаті отримаємо

$$\Delta\dot{x} = \Phi(x^*)(\delta^* + \Delta\delta) + \sum_{i=1}^{m}(\delta_i^* + \Delta\delta_i)A_i(x^*)\Delta x, \qquad (4.72)$$

де $A_i(x^*)$ – $n \times n$ матриця приватних похідних від вектор-функції $\varphi_i(x)$, що обчислена в точці x^*.

Після розкриття дужок (4.72), враховуючи (4.69) і, зберігаючи тільки лінійні члени, отримаємо остаточно

$$\Delta\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^{m}\delta_i^* A_i(x^*)\right)\Delta x + \Phi(x^*)\Delta\delta. \qquad (4.73)$$

Отримана лінеаризована система у відхиленнях (4.73) для випадку коли матриця $\Phi(x^*)$ невироджена, а $\delta^* = 0$ набуває дуже простого вигляду

$$\Delta\dot{x} = \Phi(x^*)\Delta\delta. \qquad (4.74)$$

4.6. Задача налаштування керуючих параметрів технологічного процесу

Будь-який технологічний процес характеризується, як мінімум, двома групами параметрів. Перша група представляє результати ТП, а друга – величини параметрів, що налаштовуються та забезпечують задані показники ТП. Першу групу природно назвати вихідними чи результатом, а другу – вхідними або керуючими параметрами технологічного процесу. У силу природних фізичних умов і структури різноманітних вимог стосовно результатів ТП зміни параметрів обмежено межами деякої допустимої області їх значень.

Таким чином, природним є поставити два взаємопов'язані задачі управління ТП:

– знайти величини параметрів ТП, які налаштовуються та забезпечують результуючі параметри, що задовольняють обмеженням;

– зміною параметрів, що настроюються, із заданого стану технологічного процесу переналаштувати ТП на отримання необхідних

або найкращих значень результату.

Першу з перелічених задач можна назвати задачею початкового налаштування, другу – задачею налаштування заданого режиму технологічного процесу. Передбачувана постановка задачі налаштування ТП не претендує на єдиність, можна розглянути інші підходи до рішення задачі налаштування.

В основу розв'язання задачі управління або налаштування ТП безумовно слід покласти його адекватну математичну модель. У цій роботі розглядатимуться узагальнені феноменологічні математичні моделі, що побудовані за принципом «чорної скриньки», згідно з якою залежності між параметрами ТП формуються без докладної деталізації механізмів, що визначають ці залежності.

Математичні моделі окремих підпроцесів можуть бути лінійними, нелінійними, розподіленими, дискретними, описуватись алгебраїчними, трансцендентними, диференціальними чи різницевими рівняннями. Така різноманітність класів математичних моделей призводить до серйозних труднощів при розробці та проектуванні систем автоматичного управління ТП. З іншого боку, математичні моделі деяких елементарних підпроцесів є дуже наближеними за структурою і містять низку невизначених параметрів, для знаходження яких необхідно застосовувати досить трудомісткі методи параметричної ідентифікації.

Вказані обставини призводять до необхідності розгляду спрощених математичних моделей ТП, які дозволяють синтезувати наближені закони програмного управління. Уточнення процесу управління здійснюється на основі стабілізуючого впливу за відхиленнями від програмної траєкторії. Така дворівнева концепція побудови систем управління розглядається в роботі [30].

Особливий інтерес з практичної точки зору представляє математична модель ТП, що заснована на квазістатичному підході, розглянутому раніше. При такому підході реальні фазові траєкторії ТП, що отримані в результаті зміни керуючих параметрів, замінюються послідовностями рівноважних положень, відповідних послідовностям

значень керуючих впливів. За певних умов при швидкості зміни останніх таке уявлення контрольованого процесу дає досить непогане наближення до реального. Основною перевагою квазістатичного моделювання керованих процесів є можливість побудови математичної моделі на основі статичних співвідношень «вхід-вихід», яку можна отримати в результаті експериментальних досліджень.

Розглянемо деякий абстрактний технологічний процес, що характеризується вектором результату $x \in R^m$ та вектором $u \in R^n$ керуючих параметрів. Припустимо, що компоненти векторів x і u пов'язані між собою системою p технологічних рівнянь

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, ..., x_m, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \\ &f_2(x_1, x_2, ..., x_m, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_p(x_1, x_2, ..., x_m, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \end{aligned} \qquad (4.75)$$

які являють собою систему трансцендентних або алгебраїчних рівнянь, що отримана на підставі різних фізичних законів і експериментальних даних. У векторній формі (4.75) записуватимемо у вигляді $f(x,u) = 0$.

При фіксованому векторі виходу $x = x^*$ система (4.75) за умови $n \geq p$ буде являти собою гладке $(n-p)$-мірне різноманіття M в просторі змінних $u \in R^n$.

Друга група умов на вибір технологічних параметрів складається з обмежень типу нерівностей на деякі функції компонент векторів x і u. Для компонент вектора u керуючих параметрів це, як правило, обмеження по їх мінімальним і максимальним значенням, а для компонент x це допустимі межі зміни вихідних параметрів як в абсолютних величинах, так і по відношенню до інших технологічних параметрів. У загальному випадку вважатимемо, що допустима відповідно до зазначених умов область є опуклим багатогранником L.

Таким чином, задачу налаштування технологічного процесу можна сформулювати в наступному вигляді: для заданого виходу x^* знайти вектор $u \in M \cap L$, або, простіше кажучи, знайти будь-який розв'язок

системи рівнянь (4.75), що задовольняє умові $u \in L$.

Система нелінійних рівнянь (4.75) з фіксованим вихідним вектором x^*, являє собою систему p рівнянь по відношенню до n невідомих $u_1, u_2, ..., u_n$. Якщо $n = p$, тобто кількість рівнянь збігається з числом невідомих, то система (4.75) називається нормальною і може мати кінцеве число розв'язків. Якщо $n > p$, то (4.75) має нескінченну кількість розв'язків, які можна отримати, зафіксувавши $n - p$ невідомих і розв'язавши отриману нормальну систему p рівнянь з p невідомими. У випадку $p > n$ система (4.75) не має розв'язків.

Отже, як у випадку $n = p$, так і у випадку $n > p$ для розв'язання задачі налаштування ТП необхідно мати ефективний метод для багаторазового розв'язання нормальної системи нелінійних рівнянь, орієнтований на пошук розв'язку, що задовольняє тим чи іншим вимогам.

Розглянемо квазістатичний підхід до розв'язання нормальної системи нелінійних трансцендентних або алгебраїчних рівнянь

$$f_k(u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{4.76}$$

Хід розв'язання будемо асоціювати з керованим квазістатичним процесом, який визначає деяку траєкторію у фазовому просторі $u(t) \in (R^n \times R^1)$, де t – параметр, в якості якого можна прийняти поточний час.

В якості керуючого впливу приймемо вектор нев'язок $y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))$ системи (4.76).

Таким чином, керована квазістатична система буде мати вигляд

$$f_k(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)) = y_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{4.77}$$

Нехай в початковий момент система (4.77) знаходиться в деякому початковому стані (нулевому наближенні) $u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$, якому відповідає початкове значення вектора нев'язок y^0

$$y_k^0 = f_k(u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0), \quad k = \overline{1,n}.$$

Якщо вибором деякого закону зміни $y(t)$ $t \in (0, t_f)$ система (4.77) в момент часу t_f прийшла в новий стан u^f, що визначається співвідношеннями

$$f_k(u_1^f, u_2^f, ..., u_n^f) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

тоді, отримане значення вектора $u = (u_1^f, u_2^f, ..., u_n^f)$ і буде розв'язком вихідної системи (4.76).

Як видно із сформульованого підходу, задача керування полягає у знаходженні такої траєкторії у просторі нев'язок $y(t) \in (R^n \times R^1)$, що задовольняє граничним умовам

$$y(0) = u^0, \quad y(t_f) = 0. \tag{4.78}$$

Таким чином, вектор $y(t)$ за своєю суттю також може бути віднесений до категорії фазових координат і всю задачу необхідно розглядати в $2n$-вимірному розширеному фазовому просторі векторів (u, y), а в якості керувань розглядати швидкість зміни δ вектора $y(t)$

$$\dot{y} = \delta. \tag{4.79}$$

Для того, щоб прив’язати траєкторію $u(t)$ розв'язку (4.77) до величини δ, продиференціюємо (4.77) по t.

В результаті отримаємо:

$$\dot{u} = W^{-1}(u)\delta. \tag{4.80}$$

де $W(u) = \dfrac{\partial f(u)}{\partial u}$ – невироджена матриця Якобі вектор-функції $f(u)$.

Тепер задача керування полягає у виборі керуючої функції $\delta(t)$ такої, щоб виконувалися граничні умови (4.78). Найпростішим законом керування, що реалізує поставлену мету, можна вважати

$$\delta(t) = -\frac{y^0}{t_f}.$$

У загальному випадку, в якості $\delta(t)$ можна обрати будь-який закон керування, що реалізує спадання норми вектора $y(t)$ до нульового значення.

Неважко бачити, що метод Ньютона є окремим випадком запропонованого підходу. Для цього виберемо закон керування у вигляді

$$\delta(t) = -y(t).$$

Тоді (4.80) прийме вигляд:

$$\dot{u} = -W^{-1}(u) f(u). \tag{4.81}$$

Дискретний аналог (4.81) при кроці $\Delta t = 1$, очевидно, збігається з основною формулою методу Ньютона.

Отже, позначаючи $\Phi(u) = W^{-1}(u)$ (4.79) та (4.80) можна записати як систему $2n$ диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{u} = \Phi(u)\delta, \\ \dot{y} = \delta. \end{cases} \tag{4.82}$$

Нехай u^0 – деяке довільне наближення вектора розв'язку u. Йому відповідає значення нев'язки $y = y^0$, що обчислюється у вигляді:

$$y^0 = f(u^0). \tag{4.83}$$

Вектори y^0 та u^0 приймемо за початкові значення керованого процесу при $t = 0$. Будемо шукати закон керування $\delta(t), t \in [0,1]$ так, щоб траєкторія системи (4.82) в момент $t = 1$ завершилася у точці $y(1) = 0$. Тоді отримане при цьому значення $u(1)$ і буде шуканим розв'язком.

Отже, оберемо найпростіший закон керування, де $\delta(t) = -y^0$. Тоді $y(t) = y^0 - y^0 t$ в силу (4.82). Тобто при $t = 1$ $u(1) = 0$.

Таким чином, розв'язання зводиться до інтегрування першої підсистеми (4.82) при фіксованому значенні $\delta(t) = y^0$

$$\dot{u} = -\Phi(u)y^0 . \qquad (4.84)$$

при довільних початкових умовах $u(0) = u^0$. При цьому y^0 знаходиться із співвідношення (4.83).

Розв'язок диференціального рівняння (4.84) у точці $t = 1$ має збігатися з шуканим розв'язком системи (4.76).

Чисельне інтегрування (4.84) вимагає обернення матриці Якобі $W(u)$ на кожному кроці. Для оптимізації обчислювального процесу тут можна скористатися різними алгоритмами обертання матриць, заснованих на тому, що при малому кроці обчислювань наступна матриця $W(u^{l+1})$ буде мало відрізнятися від матриці $W(u^l)$. Також можливо на деяких проміжках цю матрицю фіксувати на підставі оцінки процесу збіжності. При цьому існують багато інших підходів, які дозволяють прискорити процес розрахунку без прямого обернення матриць на кожному кроці. Простішим є метод Шульца [31].

Нехай дана квадратна невироджена матриця A порядку n. Будемо шукати зворотну матрицю A^{-1} в результаті послідовних наближень, позначаючи ці наближення $U^{(0)}, U^{(1)}, ..., U^{(k)}, ...$. Відхилення (нев'язку) поточного наближення від шуканої оберненої матриці будемо оцінювати нормою $\left\|\Psi^{(k)}\right\|$, де $\Psi^{(k)} = E - AU^{(k)}$. Рівність нев'язки нулю означає, що поточне наближення збігається з оберненою матрицею.

Таким чином, алгоритм ітераційного методу Шульца буде мати вигляд:

1. Покласти $k = 0$. Задати $U^{(0)}$ – початкове наближення оберненої матриці; ε – мале додатне число; m – порядок методу.

2. Обчислити $\Psi^{(k)} = E - AU^{(k)}$.

3. Обчислити $\left\|\Psi^{(k)}\right\|$. Якщо $\left\|\Psi^{(k)}\right\| < \varepsilon$, процес завершити і покласти $A^{-1} \equiv U^{(k)}$. Інакше перейти до пункту 4.

4. Знайти наступне наближення

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} \cdot \left\{ E + \Psi^{(k)} + [\Psi^{(k)}]^2 + ... + [\Psi^{(k)}]^m \right\},$$

покласти $k = k+1$ та перейти до пункту 2.

В якості початкового наближення $W^{-1}(x^{p+1})$ на $l+1$ кроці процесу інтегрування (4.84) будемо обирати матрицю $W^{-1}(x^l)$, яка є результатом обернення за методом Шульца на l-му кроці.

Розглянемо тепер випадок коли $n > p$. Для знаходження множини розв'язків такої системи розіб'ємо вектор u на два підвектора: u^1 розмірності p і u^2 розмірності $n - p = r$.

Введемо на розгляд вектор нев'язок $y \in R^p$

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(u_1,...,u_n), \\ y_2 &= f_2(u_1,...,u_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_p &= f_p(u_1,...,u_n) \end{aligned}. \qquad (4.85)$$

або у векторній формі

$$y = f(u^1, u^2).$$

де $u^1 = (u_1, u_2, ..., u_p)$, а $u^2 = (u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_n)$. Розглянемо вектори u і y як деякі функції часу.

Після диференціювання (4.85) отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial f}{\partial u^2}\dot{u}^2 = \dot{y}.$$

Позначаючи $\frac{\partial f}{\partial u^1} = W(u)$, $\frac{\partial f}{\partial u^2} = V(u)$, представимо математичну модель налаштування технологічних параметрів у вигляді керованої системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{u}^1 &= \Phi(u)\delta - \Phi(u)V(u)v, \\ \dot{u}^2 &= v, \\ \dot{y} &= \delta, \end{aligned} \quad . \qquad (4.86)$$

в якій (u, y) – вектор станів, а v і δ – вектори управлінь, $\Phi(u) = W^{-1}(u)$.

Таким чином, задачу налаштування технологічного процесу можна звести до наступної задачі управління: з деякого початкового стану (u_0, y_0) необхідно перевести систему (4.86) у кінцевий стан $(u_L, 0)$, де $u_L \in L$. Початковий стан вибирається шляхом обчислення вектора y_0 в результаті підстановки деякого початкового значення u_0 у (4.85), тобто $y_0 = f(u_0)$. Зазначимо також, що оскільки часовий масштаб не заданий, то можна прийняти часовий інтервал одиничним $t \in [0,1]$, а значення величин δ і v необмеженими.

Керована система (4.86) містить два управління, одне з яких v керує вибором підвектора u^2, що формує нормальну $p \times p$ підсистему рівнянь для знаходження підвектора u^1. У свою чергу, управління δ керує нев'язкою нормальної системи і його обґрунтування було наведено вище. На підставі попередніх результатів закон управління $\delta(t)$ будемо вибирати у вигляді постійної величини

$$\delta(t) = -u_0^1 = c.$$

Таким чином, вихідна керована система (4.86) трансформується у систему з одним (векторним) управлінням v

$$\begin{aligned} \dot{u}^1 &= \Phi(u)c - \Phi(u)V(u)v, \\ \dot{u}^2 &= v. \end{aligned} \qquad (4.87)$$

Для того щоб використовувати класичні методи теорії управління введемо зручний для подальшого розгляду критерій оптимальності

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 v^{\mathrm{T}} v dt,$$

а замість багатогранників L будемо розглядати його наближення у формі еліпсоїда E [32]. Така заміна цілі управління дозволяє скористатися традиційною формою умов трансверсальності варіаційного обчислення та принципу максимуму Понтрягіна. З урахуванням зроблених припущень функція Гамільтона набуде вигляду

$$H = \frac{1}{2} v^{\mathrm{T}} v + \lambda_1^{\mathrm{T}} \Phi c - \lambda_1^{\mathrm{T}} \Phi V v + \lambda_2^{\mathrm{T}} v,$$

де $\lambda^{\mathrm{T}} = (\lambda_1^{\mathrm{T}}, \lambda_2^{\mathrm{T}})$ – вектор сполучених змінних. Вектор λ_1^{T} відповідає підсистемі рівнянь (4.86) для u^1, а λ_2^{T} – підсистемі для u^2. Розмірності λ_1^{T} і λ_2^{T} складають p і r відповідно.

Відповідно до принципу максимуму оптимальний закон управління знайдемо з умови

$$\frac{\partial H}{\partial v} = v^{\mathrm{T}} - \lambda_1^{\mathrm{T}} \Phi V + \lambda_2^{\mathrm{T}} = 0,$$

тобто оптимальний закон управління набуде вигляду

$$v^{\mathrm{T}} = \lambda_1^{\mathrm{T}} \Psi(u) - \lambda_2^{\mathrm{T}}, \tag{4.88}$$

де $\Psi(u) = \Phi V$.

В свою чергу, вектор сполучених змінних задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\dot{\lambda}^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda_1^{\mathrm{T}} \Phi(u) c - \lambda_1^{\mathrm{T}} \Psi(u) v\right), \tag{4.89}$$

що утворює спільно з системою (4.87) гамільтонову систему $2n$ диференціальних рівнянь.

Після підстановки закону управління (4.88) у (4.87) та (4.89), отримаємо однорідну систему $2n$ диференціальних рівнянь відносно n компонент вектора u і n компонент сполученого вектора λ

$$\begin{aligned}
\dot{u}^1 &= \Phi c - \overline{\Psi}\lambda_1 + \Psi\lambda_2, \\
\dot{u}^2 &= \Psi^{\mathrm{T}}\lambda_1 - \lambda_2, \\
\dot{\lambda}^{\mathrm{T}} &= -\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial u}\lambda_1^i c_j + \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial \overline{\psi}_{ij}}{\partial u}\lambda_1^i\lambda_1^j - \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial u}\lambda_1^i\lambda_1^k,
\end{aligned} \tag{4.90}$$

де $\overline{\Psi} = \Psi\Psi^{\mathrm{T}}$, а змінні з індексами – компоненти відповідних матриць та векторів.

Постановка двоточкової крайової задачі закінчується формулюванням умови трансверсальності, що полягає в ортогональності спряженого вектора λ та еліпсоїда $E(u)$ в момент часу $t = 1$

$$\lambda^{\mathrm{T}} = \mu \frac{\partial E}{\partial u}, \tag{4.91}$$

де μ – невизначена постійна.

Таким чином, розв'язання двоточкової крайової задачі полягає у знаходженні початкових умов для сполученого вектора λ, такого щоб рішення гамільтонової системи (4.90) в кінцевий момент часу $t = 1$ задовольняли умовам $u \in L$ та умовам (4.91).

Рішення сформульованої двоточкової крайової задачі може бути отримано в результаті застосування чисельних методів, що викладені у відповідній літературі [33].

ГЛАВА 5
СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ КВАЗІСТАТИЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Як було зазначено раніше, квазістатичні процеси в технологічних і, перш за все, енергетичних установках можуть бути прийняті як модель першого наближення для опису досить складних, що не мають надійного формалізованого уявлення, процесів. Проте, таке спрощення, що пов'язане із заміною диференціальних рівнянь динаміки об'єкта квазістатичною математичною моделлю в алгебраїчній або диференціальній формах дозволяє істотно спростити задачу синтезу системи управління технологічним процесом.

Одним з основних режимів функціонування різних теплоенергетичних установок є режим підтримки заданих параметрів процесу в умовах різного роду зовнішніх збурень. Таким чином, задачі синтезу системи стабілізації деякої множини рівноважних станів ТП та виконання заданої програми зміни вихідних координат представляють особливий інтерес і будуть розглянуті нижче.

5.1. **Управління за збуренням квазістатичним лінійним об'єктом**

Розглянемо керований об'єкт, математична модель якого є лінійним перетворенням

$$x = Au + Bv, \tag{5.1}$$

де $x \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^l$ – вектори виходу, управляючих та збурюючих параметрів відповідно, A і B – матриці відповідних розмірностей $(m \le n)$. Ранг матриці A передбачається максимальним, тобто $\operatorname{rank} A = m.$

Розв'яжемо наступну задачу: нехай $z(t)$ – необхідне значення вектора виходу x, а $v(t)$ – збурення, що вимірюється. Потрібно знайти закон управління $u(v, z)$, що мінімізує задану додатно визначену

квадратичну форму

$$\rho = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}} Q \varepsilon, \tag{5.2}$$

де $\varepsilon = z - x$ – вектор помилок, а Q сильвестрова матриця розмірності $n \times n$, що задана.

Підставляючи (5.1) у (5.2), отримаємо

$$\rho = \frac{1}{2}(z - Au - Bv)^{\mathrm{T}} Q (z - Au - Bv). \tag{5.3}$$

Для знаходження мінімуму ρ обчислимо похідну співвідношення (5.3) по u і, після прирівнювання її нулю, отримаємо лінійну систему рівнянь для визначення u

$$(z - Au - Bv)^{\mathrm{T}} QA = 0, \tag{5.4}$$

з якої безпосередньо виходить:

$$u = (A^{\mathrm{T}} QA)^{-1} A^{\mathrm{T}} Qz - (A^{\mathrm{T}} QA)^{-1} QBv. \tag{5.5}$$

З (5.5) і (5.1) виходять очевидні співвідношення для вектора виходу

$$x = Cz - (C - E)Bv \tag{5.6}$$

і вектора помилок

$$\varepsilon = (C - E)(z - Bv), \tag{5.7}$$

де $C = A(A^{\mathrm{T}} QA)^{-1} A^{\mathrm{T}} Q$.

Неважко бачити, що при $m = n$ матриця $C = E$, а отже, $\varepsilon = 0$. Тобто в цьому випадку управління (5.5) забезпечує повну компенсацію збурення $v(t)$.

5.2. **Управління за відхиленнями квазістатичним лінійним об'єктом**

5.2.1 Пропорційний закон управління

Управління за збуренням, яке розглянуто в 5.1 передбачає наявність повної інформації про збурюючий вплив v, яка в більшості випадків відсутня. У зв'язку з цим розглянемо управління за відхиленнями ε у вигляді пропорційного закону керування

$$u = K\varepsilon, \tag{5.8}$$

де K – матричний коефіцієнт посилення.

Закон управління (5.8) носить переважно теоретичний характер, оскільки передбачає безінерційну зміну управляючих змінних, що має місце у дуже обмеженому ряді окремих випадків.

Знайдемо вираз для помилки ε, виходячи із співвідношень (5.1) і (5.8). В результаті отримаємо:

$$\varepsilon = (E + AK)^{-1}(z - Bv). \tag{5.9}$$

Оскільки другий співмножник (5.9) може приймати довільні значення, то мінімізацію помилки ε можна зв'язати тільки з матрицею

$$D = (E + AK)^{-1}, \tag{5.10}$$

що залежить від вибору матричного коефіцієнта посилення K. Слід зазначити, що мінімізація квадратичної форми від помилки ε виду (5.2) викликає значні труднощі через складність залежності $\varepsilon(K)$ виду (5.9).

Розглянемо евристичний підхід до раціонального вибору K в випадку $m = n$. Будемо шукати K таким чином, щоб матриця D мала, по-перше, діагональну структуру, а по-друге, її діагональні елементи були досить малі. У цьому випадку буде забезпечена автономність системи регулювання з одного боку і малі значення компонентів вектора помилок ε з іншого боку.

Задаємося діагональною матрицею

$$F = \mathrm{diag}(f_1, f_2, ..., f_n) \tag{5.11}$$

і будемо шукати матрицю K, виходячи з умови

$$AK = F. \tag{5.12}$$

Якщо A – невироджена матриця, то

$$K = A^{-1}F,$$

а матриця (5.10) прийме діагональну структуру

$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{1+f_1}, \frac{1}{1+f_2}, ..., \frac{1}{1+f_n}\right). \tag{5.13}$$

Вибираючи тепер числа $f_1, f_2, ..., f_n$ досить великими, можна отримати скільки завгодно малу величину компонент вектора помилок ε.

Якщо $m < n$, то система рівнянь (5.12) в загальному випадку несумісна, й можна говорити лише про знаходження її наближеного рішення у сенсі мінімуму квадратичного відхилення нев'язки. Тобто:

$$K = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}F. \tag{5.14}$$

Отриманий результат, що пов'язує помилку замкнутої системи автоматичного регулювання з величиною матричного коефіцієнта посилення, дає підстави припускати, що нескінченно підвищуючи величини $f_1, f_2, ..., f_n$ можна досягти якої завгодно високої точності регулювання. Насправді, це не так. Розглянемо структурну схему системи автоматичного управління, яка показана на рис. 5.1.

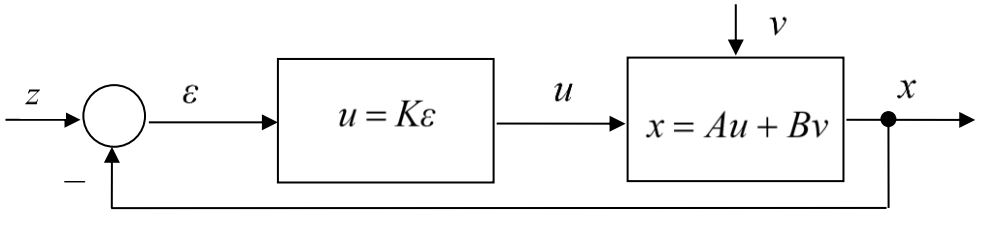


Рис. 5.1. Структурна схема замкнутої САУ із пропорційним регулятором

Дотримуючись підходу, викладеного в [34], для систем, що складені з ланок з одним входом і одним виходом розірвемо структурну схему на вході регулятора. В результаті отримаємо розімкнуту систему, що зображена на рис. 5.2.

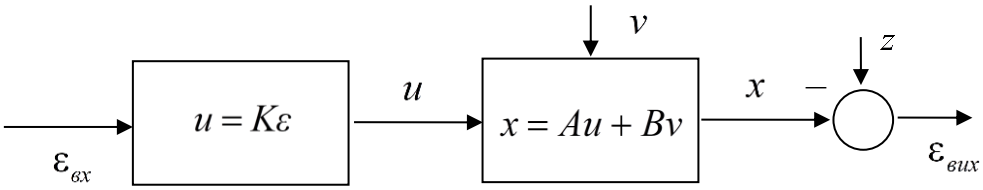


Рис. 5.2. Структурна схема розімкнутої САУ

Наведені структури на рис. 5.1 та рис. 5.2 будуть еквівалентними, якщо для розімкнутої схеми можна підібрати таке $\varepsilon_{вх}$, що $\varepsilon_{вх} = \varepsilon_{вих} = \varepsilon$. Схема на рис. 5.1 по суті реалізує ітераційний процес пошуку помилки ε (5.9):

$$\varepsilon^{k+1} = -AK\varepsilon^{k} + (z - Bv). \qquad (5.15)$$

Наведений (5.15) ітераційний процес відображає і фізичну картину, що відбувається в квазістатичній САУ, оскільки сигнал помилки на виході завжди запізнюватиметься по відношенню до сигналу на вході.

Умови збіжності ітераційного процесу (5.15) відповідають умовам стійкості дискретних систем автоматичного регулювання: всі власні значення матриці AK по модулю повинні бути меншими за 1. Ця умова, очевидно, вступає в протиріччя з вимогою високої статичної точності та автономності, що полягає у призначенні «великих» значень елементів матриці F (5.11), (5.12), які збігаються за модулем із власними числами матриці AK.

Таким чином, для забезпечення стійкості пропорційного регулятора необхідною та достатньою умовою є

$$|f_i| < 1, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (5.16)$$

Відповідно до (5.16) матриця (5.13) D, що визначає максимальну

статичну точність регулювання, набуде вигляду

$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}E. \qquad (5.17)$$

Підставляючи (5.17) в (5.10), отримаємо остаточний вираз для оптимального матричного коефіцієнта посилення $K = A^{-1}$.

Отже, можна зробити висновок про те, що помилка в стійкій системі регулювання з пропорційним законом управління оцінюється як

$$\varepsilon > \frac{1}{2}(z - Bv). \qquad (5.18)$$

5.2.2 Інтегральний закон управління

У попередньому розділі було розглянуто пропорційний регулятор для квазістатичного об'єкта управління, що реалізує практично безінерційну зміну положення керуючих органів. В реальних умовах формування управляючих впливів здійснюється виконавчими пристроями, які представляють або інтегруючі, або інерційні ланки. Розглянемо випадок, коли виконавчі пристрої є інтеграторами. Тоді математична модель регулятора набуде вигляду:

$$T\dot{u} = K\varepsilon, \qquad (5.19)$$

де $T = \mathrm{diag}(T_1, T_2, ..., T_n)$ – діагональна матриця постійних часу векторного інтегратора, K – матричний коефіцієнт посилення, що підлягає визначенню. З (5.1) та (5.19) неважко отримати систему диференціальних рівнянь регулятора щодо вектора керуючих впливів u:

$$T\dot{u} + KAu = K(z - Bv). \qquad (5.20)$$

Динамічні характеристики замкнутої системи визначаються матрицями T, A, K. Вибором останньої у випадку $m = n$ можна отримати будь-який заздалегідь заданий розподіл коренів характеристичного рівняння системи (5.20). Якщо ж $m < n$, то матриці

K та A стають прямокутними розмірами $m \times n$ і $n \times m$ відповідно. У цьому випадку реалізація матриці системи із заданим розподілом власних чисел може бути отримана приблизно на основі методу найменших квадратів.

Розглянемо поведінку керованої системи (5.20) у квазістатичному режимі, прирівнявши $\dot{u}$ нулю. В результаті отримаємо лінійну систему для визначення множини положень рівноваги:

$$KAu - Kz + KBv = 0,$$

розв'язок якої, у загальному випадку, коли $m < n$ має вигляд

$$u^* = (KA)^{-1} Kz - (KA)^{-1} KBv. \qquad (5.21)$$

Відповідні управлінню u^* вектор вихідних координат x^* та вектор помилок ε^* знаходяться підстановкою (5.21) у рівняння об'єкта:

$$\begin{aligned} x^* &= A(KA)^{-1} Kz - A(KA)^{-1} KBv + Bv \\ \varepsilon^* &= (E - \bar{K})(z - Bv), \end{aligned} \qquad (5.22)$$

де $\bar{K} = A(KA)^{-1} K$.

Співвідношення (5.22) для помилки в цьому випадку збігається за структурою з виразом (5.7) для випадку управління з впливом, що обурює. Вони стають ідентичними у разі «квадратної» системи при $m = n$, коли $\bar{K} = E$, що призводить до нульової помилки. В загальному випадку ($m < n$) помилка ε^*, що встановилася, буде завжди відмінна від нуля і може бути мінімізована відповідним вибором матриці коефіцієнтів посилення K з урахуванням вимог до динамічних показників системи (5.20).

5.2.3 Пропорційно-інтегрально-диференціальний закон управління

З теорії автоматичного управління одновимірними процесами відомо, що найкращим законом управління є закон, що враховує як пропорційну та інтегральну складову, так і похідну від величини

помилки (ПІД-регулятор). Такий закон управління у матричній формі для багатовимірного об'єкта управління можна записати у вигляді

$$u = K_0 \int_{t_0}^{t} \varepsilon dt + K_1 \varepsilon + K_2 \dot{\varepsilon}. \qquad (5.23)$$

де K_0, K_1, K_2 – матричні коефіцієнти посилення багатовимірного ПІД-регулятора розмірності $m \times n$ кожен. З рівняння об'єкта (5.1) та регулятора (5.23) після нескладних перетворень можна отримати систему диференціальних рівнянь, що моделює процеси в замкнутій системі

$$\dot{u} + \sum_{i=0}^{2} K_i A u^{(i)} = \sum_{i=0}^{2} K_i z^{(i)} - \sum_{i=0}^{2} K_i B v^{(i)}. \qquad (5.24)$$

Система лінійних диференціальних рівнянь (5.24) є найбільш загальною математичною моделлю замкнутої САУ з ПІД-регулятором. Прирівнюючи відповідні коефіцієнти посилення нулю, з (5.24) можуть бути отримані різні окремі випадки багатовимірних регуляторів. Так математична модель САУ з ПІ-регулятором представлена наступною системою диференціальних рівнянь:

$$(E + K_1 A)\dot{u} + K_0 A u = K_0 (z - Bv) + K_1 (\dot{z} - B\dot{v}).$$

Її динамічні характеристики визначаються $m \times m$ матрицею D

$$D = -(E + K_1 A)^{-1} K_0 A,$$

яка залежить від $2n \times m$ незалежних коефіцієнтів матриць K_1 та K_0. Таким чином, можна вибором K_1 і K_0 отримати будь-яку, наперед задану матрицю D.

В загальному випадку ПІД-регулятора порядок системи диференціальних рівнянь (5.24) становить $2m$, тобто кількість елементів матриці системи, наведеної до форми Коші, становить $4m^2$. Таким чином, умовою можливості отримання будь-якої наперед заданої

матриці системи вибором коефіцієнтів посилення K_0, K_1, K_2 є $3m \times n > 4m^2$ або $3n > 4m$. Остання умова очевидно нездійсненна для квадратних систем.

Режим САУ з ПІД-регулятором, що встановився, описується лінійною системою рівнянь аналогічною (5.21) і результати, що стосуються значень векторів управлінь, виходу і помилок відповідають розглянутому вище інтегруючому регулятору.

5.3. **Аналітичне конструювання регулятора за квадратичним критерієм якості**

Розглянемо постановку лінійно-квадратичної задачі оптимального управління [35] стосовно умов квазістатичності керованого об'єкта. Нехай рівняння об'єкта задані у диференційній формі, тобто:

$$\dot{x} = A\delta, \quad x \in R^n, \quad \delta \in R^m, \tag{5.25}$$

де δ – швидкість зміни параметра, що управляє.

Критерій якості задамо у вигляді

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x^{\mathrm{T}} Q x + \delta^{\mathrm{T}} R \delta) dt, \tag{5.26}$$

де Q і R – симетричні, сильвестрові матриці розмірностей $n \times n$ та $m \times m$ – відповідно.

Необхідно знайти закон управління, який мінімізує (5.26). Передбачається, що задані лише початкові умови $x(t_0)$, правий кінець – вільний.

У наведеній постановці задачі є відомий алгоритм її розв'язування, що базується на варіаційному численні. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x + \frac{1}{2} \delta^{\mathrm{T}} R \delta + \lambda^{\mathrm{T}} A \delta,$$

де λ – вектор сполучених змінних, що задовольняє системі

диференціальних рівнянь

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = -Qx. \tag{5.27}$$

Оптимальний закон управління виходить з умови стаціонарності функції Гамільтона H, що має вигляд:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \delta}\right)^{\mathrm{T}} = R\delta + A^{\mathrm{T}}\lambda = 0. \tag{5.28}$$

З (5.28) слідує оптимальний закон управління

$$\delta = -R^{-1}A^{\mathrm{T}}\lambda, \tag{5.29}$$

підстановка якого в (5.25) дає спільно з (5.27) замкнуту систему $2n$ лінійних диференціальних рівнянь відносно векторів x і λ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -AR^{-1}A^{\mathrm{T}}\lambda, \\ \dot{\lambda} &= -Qx. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Відомо, що вектори x і λ в (5.30) зв'язані лінійним співвідношенням

$$\lambda = Px, \tag{5.31}$$

де симетрична матриця P є розв'язком матричного диференціального рівняння Ріккаті, що приймає для квазістатичної системи наступний вид

$$\dot{P} - PAR^{-1}A^{\mathrm{T}}P + Q = 0, \tag{5.32}$$

з кінцевою умовою $P(t_1) = 0$.

Для випадку $t_1 = \infty$, замість диференціального рівняння (5.32) для знаходження P має місце матричне рівняння

$$PAR^{-1}A^{\mathrm{T}}P = Q, \tag{5.33}$$

а його єдиний додатне визначений розв'язок, є шуканою матрицею P. З урахуванням (5.31) система диференціальних рівнянь замкнутої системи набуває вигляду

$$\dot{x} = -AR^{-1}A^{\mathrm{T}}Px. \tag{5.34}$$

Проаналізуємо якісну картину перехідних процесів у замкнутій оптимальній системі (5.34). Для цього представимо останню у вигляді

$$F\dot{x} + Px = 0, \tag{5.35}$$

де матриця $F = (AR^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Неважко бачити, що матриця F є симетричною матрицею додатне визначеної квадратичної форми [29]. У зв'язку з цим існує лінійне перетворення [29]

$$x = Yy, \tag{5.36}$$

таке, що в нових координатах y матриці F і P приймуть діагональний вигляд, а система диференціальних рівнянь (5.35) запишеться як

$$\dot{y} + \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_n)y = 0, \tag{5.37}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – корені рівняння

$$\left|P - \lambda F\right| = 0.$$

Оскільки матриці F і P сильвестрові, то $\lambda_k > 0$, $\forall k = \overline{1,n}$, а, отже, розв'язки систем (5.37) і (5.35) можуть бути представлені у вигляді лінійних комбінацій експонент, що сходяться

$$\begin{aligned} y &= C \circ e^{-\lambda t}, \\ x &= YC \circ e^{-\lambda t}, \end{aligned} \tag{5.38}$$

де C – вектор довільних постійних, а $e^{-\lambda t} \triangleq (e^{-\lambda_1 t}, e^{-\lambda_2 t}, ..., e^{-\lambda_n t})$. Операція $a \circ b = c$ для векторів $a, b, c \in R^n$ визначена у векторному просторі R^n у

вигляді $c_k = a_k b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$.

Структура регулятора (рис. 5.3), отриманого відповідно до методу аналітичного конструювання, повністю відповідає структурі регулятора з відхилення, розглянутого в 5.2 і дозволяє отримати оптимальний у сенсі квадратичного критерію стійкий аперіодичний перехідний процес, параметри якого визначаються вибором (завданням) матриць критерію Q та R.

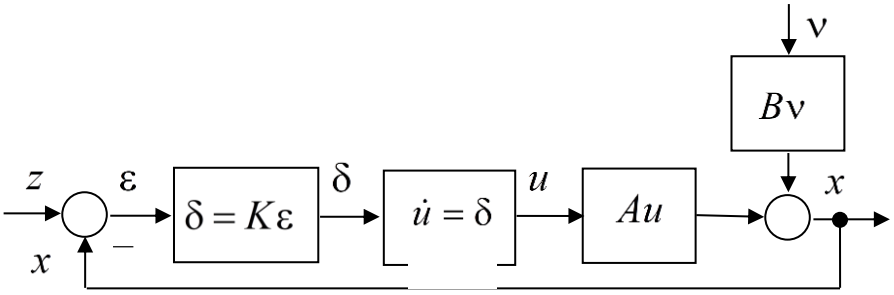


Рис. 5.3. Структурна схема системи автоматичного управління на основі методу АКОР

5.4. **Синтез САР на основі методу зворотних операторів**

Системи автоматичного регулювання на основі принципу управління за відхиленнями, розглянуті в 5.2 та 5.3, передбачають відсутність інформації про всі компоненти вектора обурювальних впливів. У той же час пряма або опосередковано отримана інформація про величини збурень може бути використана для підвищення якості процесів управління технологічними об'єктами.

У цьому напрямку основні результати пов'язані з системами комбінованого управління [36], що передбачають вимірювання деяких компонент вектора обурювальних впливів з подальшим їх урахуванням при формуванні керуючих впливів. Іншим підходом, що не вимагає прямого вимірювання обурювальних впливів є метод зворотних операторів [37], суттю якого є оцінка обурювальних впливів на основі відомих значень компонент векторів виходу і управління. Основна ідея методу зворотних операторів базується на інформації про математичну модель об'єкта управління та можливості побудови зворотних

операторів, що пов'язують вектор збурень із входом та виходом об'єкта, а також вектор управління з векторами входу та збурення [37]. Реалізація таких операторів у разі динамічних об'єктів управління є досить складною проблемою [38]. Що стосується ж квазістатичного, а тим паче лінійного об'єкта управління, проблема знаходження зворотних операторів значно спрощується. На рис 5.4 представлена структурна схема САР на основі методу зворотних операторів.

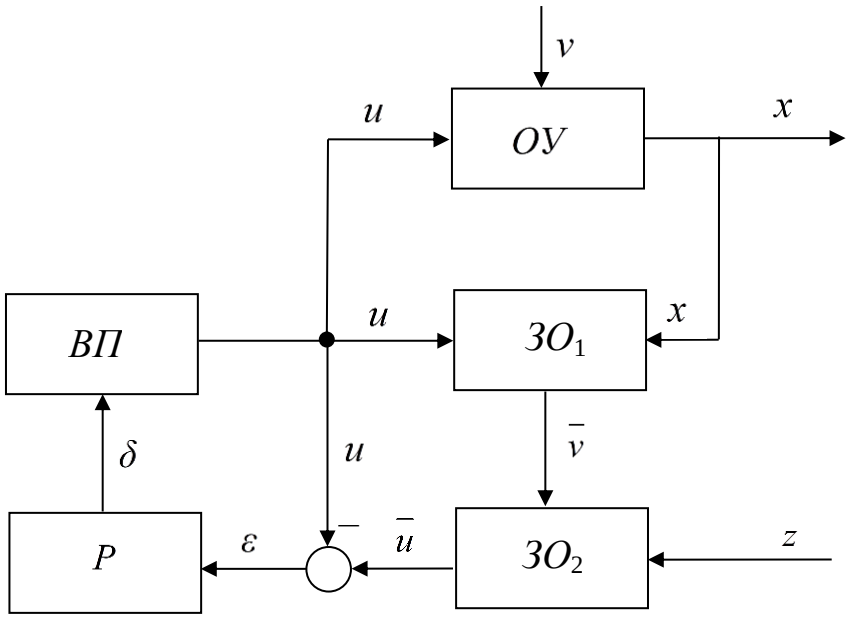


Рис. 5.4. Структурна схема САР на основі методу зворотних операторів

На рис 5.4 $ОУ$ – об'єкт управління, що є лінійною статичною керованою системою, математична модель якої має вигляд (5.1):

$$x = Au + Bv. \tag{5.39}$$

$ЗО_1$ – зворотний оператор, що реалізує залежність

$$\bar{v} = Dx + Cu, \tag{5.40}$$

де $\bar{v}$ – оцінка впливу, що обурює. Матриці D та C (5.40) можуть бути отримані шляхом псевдообернення матриці B у випадку $m \neq n$.

$$\begin{aligned} D &= B^{+}, \\ C &= -B^{+}A. \end{aligned} \tag{5.41}$$

$ЗО_2$ – зворотний оператор, що реалізує залежність

$$\bar{u} = Fz + G\bar{v}, \tag{5.42}$$

де $\bar{u}$ – оцінка необхідного керуючого впливу. Матриці F і G знаходяться на основі псевдообернення матриці A

$$\begin{aligned} F &= A^{+}, \\ G &= -A^{+}B. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Як видно з (5.43), у разі рівності кількості входів та виходів $F = A^{-1}$, $G = -A^{-1}B$.

$ВП$ – виконавчий пристрій, у найпростішому випадку є векторним інтегратором, що реалізує наступний закон функціонування:

$$T\frac{du}{dt} = \delta, \tag{5.44}$$

де T – діагональна матриця постійних часу сепаратних виконавчих пристроїв, а δ – вектор управління виконавчими пристроями, що формується регулятором згідно із законом

$$\delta = K\varepsilon, \tag{5.45}$$

де K – матричний коефіцієнт посилення регулятора, що підлягає визначенню.

Виключаючи з (5.39), (5.40), (5.42), (5.44), (5.45) змінні x, $\bar{u}$, δ, ε, $\bar{v}$, отримаємо остаточно систему рівнянь, що описують динаміку регулювання САУ зі зворотними моделями у вигляді

$$T\dot{u} + K(E - GDA - GC)u = K(Fz + GDBv). \tag{5.46}$$

У випадку квадратних матриць A та B диференціальне рівняння (5.46) набуває виключно простого вигляду

$$T\dot{u} + Ku = KA^{-1}(z - Bv). \tag{5.47}$$

Динамічні характеристики (5.47) визначаються відповідним вибором матриці K. Стан, що встановився, при $z = \text{const}$ та $v = \text{const}$ системи (5.47) знаходиться прирівнюванням нулю $\dot{u}$, тобто

$$u^* = A^{-1}(z - Bv).$$

Підставляючи останнє співвідношення в рівняння об'єкта, отримаємо

$$x = z,$$

тобто статична помилка у цьому випадку дорівнює нулю.

5.5. Стабілізація положень рівноваги нелінійної квазістатичної системи

Вище було розглянуто різні підходи до структурного та параметричного синтезу лінійних стаціонарних квазістатичних систем управління. Запропоновані підходи можуть бути реалізовані для досить обмеженого кола об'єктів управління та призначені для забезпечення стійкості об'єктів управління, математичні моделі яких представлені у статичній лінійній формі. В той же час при побудові математичних моделей різного роду технологічних процесів, зв'язаних з перетворенням речовини та енергії, використовуються балансові моделі [39], які за своєю структурою відповідають диференційній формі рівнянь квазістатичних процесів

$$\dot{x} = \Phi(x)\delta. \qquad (5.48)$$

Умови рівноваги для такої системи розглянуті у розділі 4.5. Аналіз стійкості рівноважних станів зводиться до аналізу стійкості лінеаризованої системи першого наближення.

При динамічній рівновазі в точці (x^*, δ^*) може виявитися, що система першого наближення (4.67) нестійка. Таким чином, виникає постановка задачі синтезу системи стабілізації деякого положення

рівноваги шляхом введення лінійного зворотного зв'язку за відхиленнями:

$$\Delta\delta = K\Delta x, \tag{5.49}$$

де K – матричний коефіцієнт посилення.

Структурну схему системи стабілізації заданого положення рівноваги (x^*, δ^*) представлено на рис. 5.5

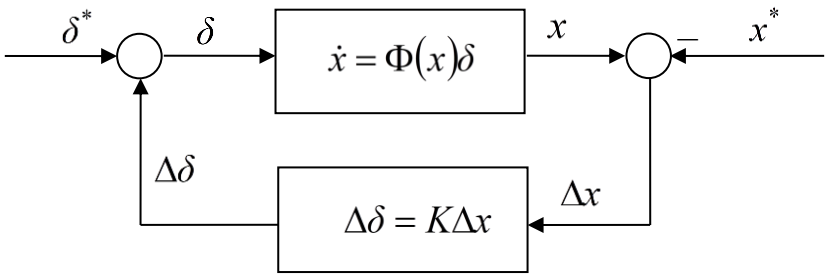


Рис. 5.5. Структурна схема системи стабілізації ненульового положення рівноваги

Неважко бачити, що система першого наближення, що відповідає рис. 5.5, з урахуванням (4.73) та (5.49) запишеться як

$$\Delta\dot{x} = (A(x^*, \delta^*) + \Phi(x^*)K)\Delta x. \tag{5.50}$$

Вибір матриці K, що забезпечує стійкість (5.50), зручно здійснити на основі розв'язку допоміжної лінійно-квадратичної задачі оптимального управління. Для цього задамо квадратичний критерій якості

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\Delta x^{\mathrm{T}} Q\Delta x + \Delta\delta^{\mathrm{T}} R\Delta\delta)dt, \tag{5.51}$$

де Q і R – сильвестрові симетричні вагові матриці. Тоді матричний коефіцієнт посилення K, що гарантує стійкість замкнутої системи, знаходиться у вигляді

$$K = -R^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}(x^*)P, \qquad (5.52)$$

де P – розв'язок матричного алгебраїчного рівняння

$$A^{\mathrm{T}}(x^*,\delta^*)P + PA(x^*,\delta^*) - P\Phi(x^*)R^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}(x^*)P + Q = 0. \qquad (5.53)$$

Іншим підходом до розв'язання задачі стабілізації положення динамічної рівноваги є включення до контуру регулювання інтегруючих елементів [39]. Такий підхід пов'язаний також і з тією обставиною, що управління δ у багатьох випадках технічно реалізуються виконавчими пристроями інтегруючого типу. У цьому випадку систему диференціальних рівнянь об'єкта (5.48) необхідно доповнити m диференціальними рівняннями інтегруючих елементів

$$\dot{\delta} = \nu, \quad \nu \in R^m, \qquad (5.54)$$

де ν – вектор швидкості зміни вектора управління δ, що представляє, по суті, нове управління $(m+n)$-мірною системою (5.48), (5.54). Структурну схему такої системи стабілізації представлено на рис. 5.6

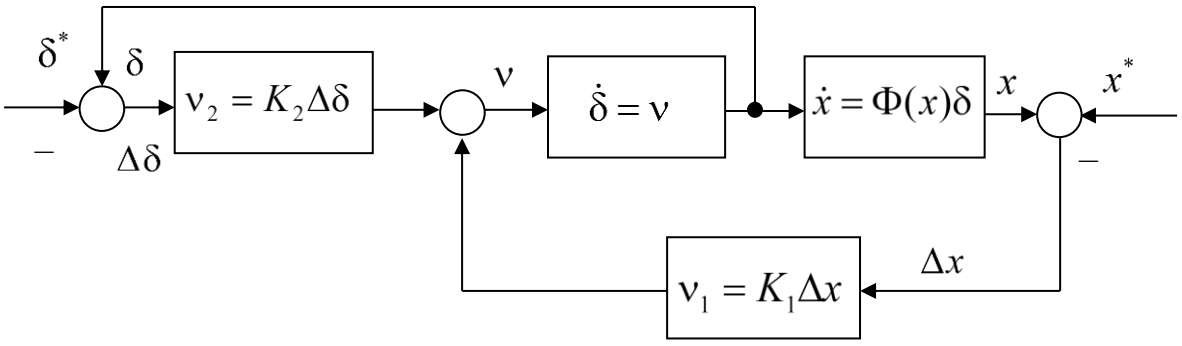


Рис. 5.6. Структурна схема системи стабілізації динамічного положення рівноваги з інтегруючим регулятором

Наведена на рис. 5.6 структурна схема, по суті, аналогічна структурній схемі рис. 5.5. Матричний коефіцієнт посилення $K = (K_1 \mid K_2)$ в ланцюзі зворотного зв'язку можна знайти в результаті розв'язання допоміжної лінійно-квадратичної задачі оптимального управління для лінеаризованої розширеної системи (5.48), (5.54):

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= A(x^*, \delta^*)\Delta x + \Phi(x^*)\Delta\delta, \\ \Delta\dot{\delta} &= v. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Відповідні рівняння замкнутої системи щодо відхилень від положення рівноваги набудуть вигляду

$$\Delta\dot{x} = A(x^*, \delta^*)\Delta x + \Phi(x^*)\Delta\delta,$$

$$\Delta\dot{\delta} = K_1\Delta x + K_2\Delta\delta.$$

Слід зазначити, що системи (5.50) та (5.55) мають місце за точного виконання умови рівноваги (4.63). Якщо ця умова не виконана, то в цьому випадку в правій частині (5.50) і (5.55) з'явиться додатковий постійний доданок $\Phi(x)\delta \neq 0$. У зв'язку з цим значення $\Delta\delta$ та Δx, що встановилися, вже будуть відмінні від нуля. Тобто в системі встановиться нове стійке положення рівноваги, відмінне від (x^*, δ^*).

ГЛАВА 6
СТАБІЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ЗГОРЯННЯ У КОТЕЛЬНОМУ АГРЕГАТІ

В основу робочого процесу котельного агрегату (КА) покладено два пов'язані між собою підпроцеси. Перший – це процес згоряння, фізична сутність якого полягає у перетворенні хімічної енергії паливоповітряної суміші на термічну енергію продуктів згоряння. Другий підпроцес – теплопередача від продуктів згоряння до теплоносія (води). Зазначені процеси є фундаментальними та їх дослідженню присвячено величезну кількість публікацій, з яких слід зазначити роботи [24, 40 – 42], що склали теоретичну та прикладну основу створення теорій горіння та тепломасообміну. Ці роботи стали основою розробки математичних моделей перелічених процесів стосовно до енергетичних установок. Математичному моделюванню процесів в енергоустановках присвячена велика кількість фундаментальних та прикладних досліджень, серед яких слід виділити [20, 23], що спрямовані на уявлення динамічних процесів згоряння та теплообміну в КА як процесів із зосередженими параметрами. Таке спрощення математичного опису основних процесів у КА обумовлено тим, що математичні моделі систем з розподіленими параметрами, якими є процеси згоряння та теплообміну, видаються надзвичайно складними з точки зору їх комп'ютерної реалізації. Крім того, для розв'язання диференціальних рівнянь у приватних похідних необхідно задати систему граничних умов на внутрішній поверхні КА, а також на зрізах органів подачі палива та повітря. Додаткові складнощі при реалізації математичних моделей процесу згоряння обумовлені аеродинамічними обставинами в камері згоряння хімічними перетвореннями, невизначеність яких може привести до значних помилок результатів комп'ютерного моделювання.

Таким чином, більш адекватна за своєю суттю математична модель процесів КА вимагає великої кількості неточно відомих параметрів для

реалізації, що, природно, знижує ступінь достовірності результатів комп'ютерного моделювання. З іншого боку, недоліки простіших моделей компенсуються зменшеною кількістю невизначених параметрів, а також простотою комп'ютерної реалізації.

Крім того, слід враховувати, що математичні моделі КА, в значній мірі повинні бути орієнтованими на їх використання при структурному і параметричному синтезі систем управління процесами в котельному агрегаті.

Як було зазначено у попередніх главах, для складних технологічних процесів, що задовольняють певним умовам, найпростішою математичною моделлю є квазістатична модель. Її головними особливостями є відносна простота та довільна точність (в рамках прийнятих припущень). Нижче буде розглянуто квазістатичну математичну модель процесу згоряння у водогрійному КА та аналітичний синтез системи стабілізації процесу згоряння паливоповітряної суміші на її основі.

6.1. Аналіз існуючих підходів, методів та засобів автоматичного регулювання котельних установок

Сучасні котельні водогрійні установки, що використовуються у виробництві теплової енергії у складі систем теплопостачання, відносяться до класу складних технічних систем. Тому автоматичне регулювання їх параметрів з метою оптимального управління режимами робіт під час експлуатації являє собою складну науково-технічну задачу, для рішення якої у нас в країні і за кордоном використовуються різні підходи, методи та засоби.

Відомо, що технологічні процеси, які відбуваються у котельних установках під час роботи, характеризуються рядом взаємозалежних параметрів. Зміна одного з них, наприклад, температури мережної води, повинна відбиватися на всіх інших: витраті палива, кількості повітря, що подається в топку та димових газів, що відходять, тощо.

Системи автоматичного регулювання котлів або котельних установок [43, 44] класифікують залежно від побудови та методів реалізації функціональних можливостей. За принципом дії вони поділяються на комбіновані системи автоматичного регулювання теплової потужності опалювальних котелень і на системи з регулюванням теплової потужності за збуренням. Так, температура гарячої води на виході з котла регулюється в залежності від температури навколишнього повітря, зміна якої є впливом, що обурює. Збурення, що надходить на вхід регулятора, змінює величину регулюючого впливу (витрати палива) так, що вона компенсує вплив зміни температури зовнішнього повітря.

Схеми автоматичних регуляторів котельних, що розглянуті в [44] можуть бути використані при розробці проектів їх автоматизації на основі широкого спектра математичних методів регулювання технологічних параметрів.

У роботі [45] докладно розглянуто автоматизацію роботи комбінованих пароводогрейних котлів. За допомогою системи автоматизації комбінованого котла вирішуються задачі регулювання в певних межах заздалегідь заданих величин, що характеризують протікання процесів КА. В систему автоматики котла включено також захист обладнання від пошкоджень через порушення технологічних процесів та блокування, що забезпечує автоматичне включення та вимикання обладнання, допоміжних механізмів та органів управління з певною послідовністю, яка потрібна по технологічному процесу.

Системи автоматичного регулювання комбінованих котлів розв'язують задачі:

а) стабілізації, при якій керуючий вплив спрямований на підтримку постійного тиску, температури та деяких інших параметрів топочних газів у камері згоряння;

б) стеження, коли регульована величина або параметр змінюється в залежності від значень іншої величини, наприклад, при регулюванні подачі повітря в залежності від витрати палива;

в) програмного керування, коли значення параметра, що керується, змінюється в часі за заздалегідь заданою програмою. Останнє здійснюється при циклічних процесах, наприклад, при пусках та зупинках котельного обладнання.

У загальному випадку система автоматичного регулювання під час роботи у комбінованому пароводяному режимі парового контуру котла складається з наступних систем регулювання: процесу горіння, живлення (рівня води у зрівняльних ємностях, циклонах) та водного режиму.

В якості виконавчих механізмів застосовуються гідравлічні поршневі сервомотори, пневматичні та електричні пристрої, які розрізняються за наявністю і видом зворотнього зв'язку (жорстким або гнучким) і кількістю датчиків цього зв'язку.

Задачею регулювання процесу згоряння в топці котла є підтримка витрат палива відповідно до витрат пара, води або теплоти, забезпечення подачі повітря в топковий пристрій відповідно до витрати палива для здійснення економічного спалювання останнього, і, нарешті, при встановленому режимі роботи комбінованого котла приймається, що витрата палива B пропорційна виробленню сумарної теплоти Q_{sum}:

$$BQ_l^w \eta_b^{gr} = Q_{sum},$$

де Q_l^w – нижча робоча теплота згоряння палива; η_b^{gr} – ККД котла.

Подача повітря в топку повинна проводитися в кількості, необхідній для підтримки його надлишку α, що забезпечує економічне та екологічно досконале спалювання палива. На практиці α оцінюється за формулою

$$\alpha = \frac{21}{21 - O_2},$$

де O_2 – об'ємна доля кисню в димових газах (%).

Оскільки показання газоаналізаторів, що входять в якості датчиків

в систему автоматичного регулювання, як правило, запізнюються, то вважається, що для виділення одиниці теплоти при спалюванні будь-якого виду і складу палива потрібна однакова кількість кисню на одиницю нижчої теплоти згоряння.

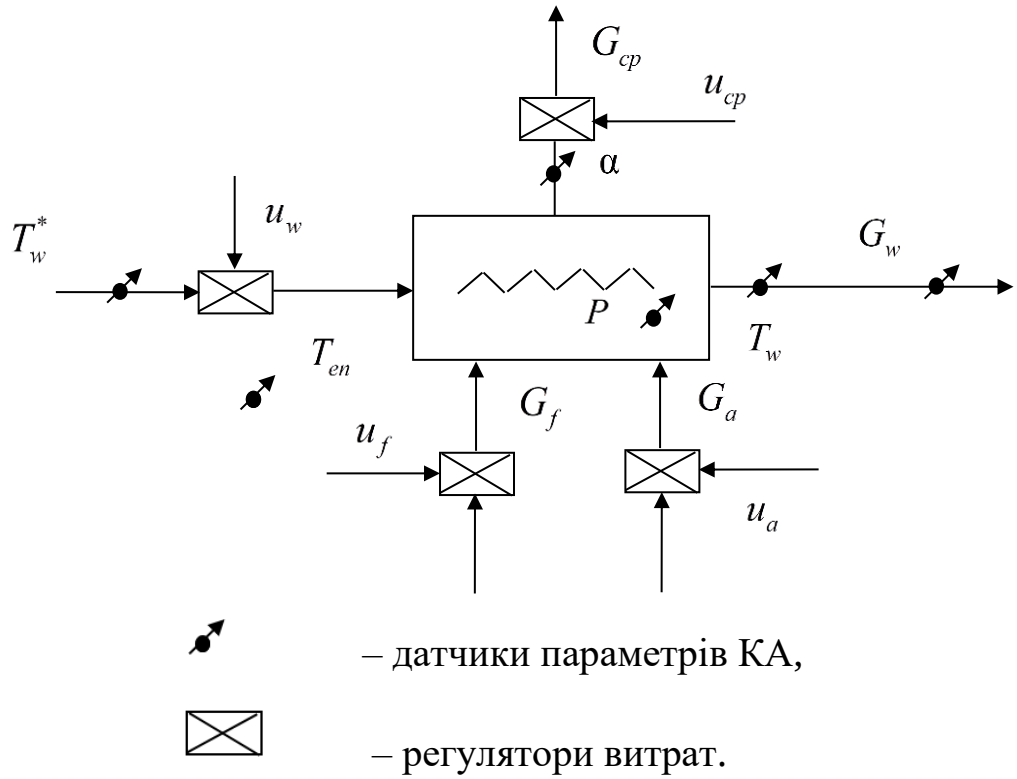
Тоді, рахуючи теплоту по гарячій воді, парі чи паливі, можна підтримувати витрату повітря пропорційним витраті палива, тобто здійснювати схему регулювання «паливо – повітря», що найбільш придатна для палив з постійною за часом теплотою згоряння, і за можливості вимірювати витрату цього палива, що в свою чергу може бути проблематичним для газоподібного палива.

Для підтримки постійного значення тиску у топочній камері, що необхідно для забезпечення безпеки персонала котельної та стабілізації подачі повітря та газоподібного палива, звичайно використовується астатичний регулятор, який керує витратою димових газів – необхідною дією на напрямний апарат димососу.

Таким чином, основним підходом до проблеми автоматичного керування процесом згоряння є розділена на три канали система керування витратами повітря, газоподібного палива та димових газів, які забезпечують потрібні значення теплової потужності, тиску в топочній камері та коефіцієнту надлишку повітря.

6.2. **Структурна схема водогрійного КА**

Спрощена структурна схема водогрійного КА представлена на рис. 6.1.



– датчики параметрів КА,

– регулятори витрат.

Рис. 6.1. Функціональна схема водогрійного котельного агрегату

На цій схемі прийнято такі позначення:

G_f, G_a, G_{cp}, G_w – масові витрати палива, повітря, продуктів згоряння та води відповідно;

T_w, T_w^* – температури води на виході та на вході КА;

p – тиск газів у камері згоряння;

$\alpha = \dfrac{G_a}{G_f L_0}$ – коефіцієнт надлишку повітря;

L_0 – стехіометричне співвідношення, що залежить від фракційного складу палива;

u_f, u_a, u_{cp}, u_w – керуючі впливи, що подаються на регулятори відповідних витрат;

T_{en} – температура навколишнього середовища.

Параметри, що вимірюються датчиками, наведені безпосередньо біля їх позначень на структурній схемі.

Як видно із рис. 6.1. КА, як об'єкт управління є багатозв'язковою системою з чотирма керуючими впливами (u_f, u_a, u_{cp}, u_w). В якості

вихідних координат зазвичай розглядають (T_w, G_w, p, α), що визначають енергетичні, екологічні та надійнісні показники функціонування КА. Обурюючими впливами на КА слід вважати T_{en} і T_w^* – обурення, що вимірюються.

Стехіометричне співвідношення L_0 є найважливішою характеристикою палива, яка разом із коефіцієнтом надлишку повітря α визначає енергетичні та екологічні показники процесу згоряння. Величина L_0 безпосередньо пов'язана з фракційним складом палива, який залежить від наявних опалювальних паливних ресурсів: природний, нафтовий гази, мазут, а також альтернативних палив: біогаз, коксовий газ, генераторний газ та інші. Перераховані палива можуть бути використані як окремо, так і сумішах з різними масовими чи об'ємними частками базових палив.

Розглянемо досить універсальний підхід щодо визначення L_0 довільних паливних сумішей.

Нехай $B_1, B_2, ..., B_m$ множина хімічних елементів, з яких складається паливоповітряна суміш. Кожен із елементів B_i характеризується своєю елементарною масою E_i. У свою чергу елементи B_i утворюють індивідуальні речовини $A_1, A_2, ..., A_n$. Кожній з речовин A_i можна поставити у відповідність його елементарну формулу

$$A_i = B_{1l_{1i}} B_{2l_{2i}} ... B_{ml_{mi}}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6.1}$$

де l_{ji} – ціле число, що є кількістю атомів j-го елемента в i-й індивідуальній речовині.

Розглянемо тепер паливну суміш, що складається з індивідуальних речовин $A_1, A_2, ..., A_n$, взятих відповідно до молярних часток $r_1, r_2, ..., r_n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} r_k = 1 \right)$. Під умовною формулою Ω такої суміші будемо розуміти формулу речовини, молярна маса якої збігається з молярною масою суміші, що здається, а співвідношення між елементами $B_1, B_2, ..., B_m$

відповідає співвідношенням, визначеним вектором складу суміші $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ і структурою індивідуальних речовин суміші (6.1). Таким чином

$$\Omega = B_{1y_1} B_{2y_2} ... B_{my_m},$$

де $y_k = \sum_{i=1}^{n} r_i l_{ki}$.

З умовної формули палива неважко визначити і стехіометричне співвідношення L_0. Нехай множина елементів, що становлять паливні суміші є C, H, O, N. Тоді деякої паливоповітряній суміші можна поставити у відповідність його умовну формулу $C_n H_m O_r N_l$. Враховуючи, що повітря на 21% складається з молекул кисню O_2, його кількість для окислення одного моля палива, очевидно, запишеться як

$$L_0 = \frac{1}{0,21}\left(n + \frac{m}{4} - \frac{r}{2}\right).$$

Таким чином, для визначення параметра L_0 потрібна докладна інформація про поточний склад палива, яка може бути отримана в результаті лабораторних досліджень. Це виключає можливість оперативного визначення L_0, а отже, даний параметр можна віднести до розряду неконтрольованих збурень.

З іншого боку, інформація про точне значення L_0 необхідна для випадку програмного управління витратами палива та повітря для досягнення оптимального значення коефіцієнта надлишку повітря α, що становить для газоподібних палив 1,1 [48]. У разі реалізації управління якістю процесу згоряння за відхиленням немає прямої необхідності у знанні точного значення L_0. Інформація про поточне значення коефіцієнта надлишку повітря може бути отримана на підставі безпосереднього вимірювання кількості різних компонентів продуктів згоряння. Найбільш зручним слід вважати безпосереднє визначення α виходячи з об'ємної частки залишкового кисню відповідно до

співвідношення

$$[O_2] = 0,21\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Сучасні газоаналізатори дозволяють визначити величину $[O_2]$ з високою точністю та з часом вимірювання менше 10 секунд.

6.3. **Математична модель процесу згоряння в котельному агрегаті**

Для аналізу основних закономірностей процесів згоряння та теплообміну в КА скористаємося балансовими співвідношеннями, що зв'язують витрати палива, повітря та продуктів згоряння, а також витрати теплоти, що передається робочій речовині та відводиться в довкілля з продуктами згоряння та у вигляді теплових втрат. Система балансових рівнянь базується на фундаментальних фізичних законах та доповнюється емпіричними співвідношеннями, які отримуються в результаті експериментів. У зв'язку з цим така система рівнянь, незважаючи на ряд припущень, є достатньо адекватною математичною моделлю процесів в енергоперетворювальних пристроях і дозволяє оцінити основні закономірності функціонування енергоустановок. На рис. 6.2. наведено структурну схему зв'язків основних компонентів, що беруть участь у складанні рівнянь балансу.

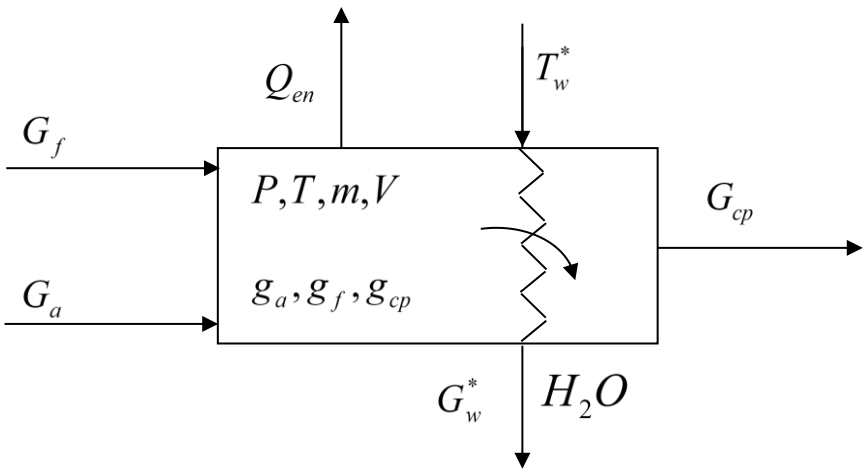


Рис. 6.2. Основні компоненти матеріального та енергетичного балансів КА

G_f, G_a, G_{fg}, G_w – масові витрати палива, повітря, димових газів та води відповідно;

i_f, i_a, i_{cp}, i_w – питомі ентальпії палива, повітря, продуктів згоряння та води відповідно;

Q, Q_w, Q_{en} – інтенсивності підведення теплоти в КА, теплообміну з робочою речовиною та втрат у навколишнє середовище відповідно;

p, T, m, V – тиск, середня температура, маса та об'єм газів у топці КА;

g_a, g_f, g_{cp} – масові частки повітря, палива та продуктів згоряння в топці КА.

Виходячи із закону збереження енергії для процесу згоряння основне диференціальне рівняння енергетичного балансу для камери згоряння в КА набуде вигляду

$$\frac{dU}{dt} = i_f G_f + i_a G_a - i_{cp} G_{cp} + Q - Q_w - Q_{en}, \qquad (6.2)$$

де $U = mu(g_a, g_f, g_{cp}, T)$ – внутрішня енергія димових газів в топці КА;

$u(g_a, g_f, g_{cp}, T)$ – питома масова внутрішня енергія димових газів – відома функція складу та температури;

$Q = H_f G_f$ – теплота згоряння паливоповітряної суміші при $\alpha \geq 1$;

H_f – питома хімічна енергія палива;

$i_f(T_{en})$, $i_a(T_{en})$, $i_{cp}(g_a, g_f, g_{cp}, T)$ – відомі функції температури та складу.

Величина Q_w визначається коефіцієнтом корисної дії КА η, що залежить в основному від коефіцієнта надлишку повітря α. Замість ККД котла можна розглядати відносні втрати теплоти з димовими газами, що відходять Δ_{cp} (рис. 6.3).

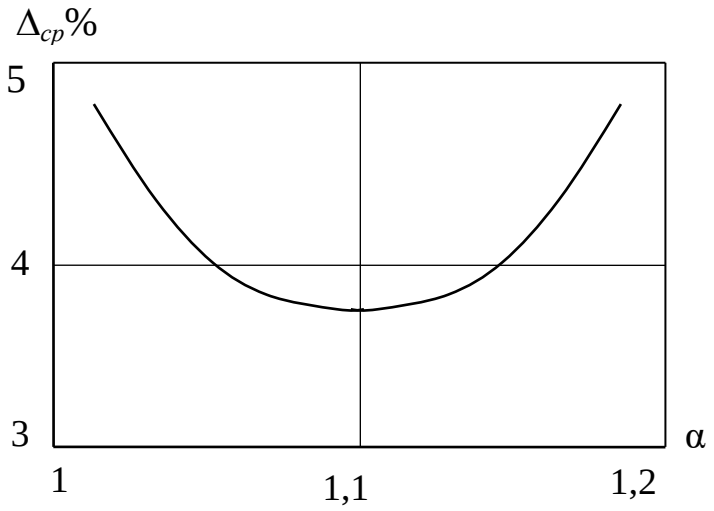


Рис. 6.3. Експериментальна залежність величини відносних втрат теплоти з димовими газами залежно від коефіцієнта надлишку повітря

Залежність втрат теплоти з газами, що відходять, можна в першому наближенні описати параболічною залежністю

$$\Delta_{ср} = \frac{Q - Q_w - Q_{en}}{Q} = B_1\alpha^2 + B_2\alpha + B_3, \qquad (6.3)$$

де B_1, B_2, B_3 – емпіричні коефіцієнти.

Втрати в довкілля для сучасних котлів незначні і становлять частки відсотків від хімічної енергії палива [47]. У зв'язку з цим, доданком Q_{en} у (6.2) і (6.3) надалі можна знехтувати. Таким чином ККД котла має вигляд

$$\eta = 1 - \Delta_{ср}.$$

При складанні рівнянь матеріального балансу необхідно врахувати перетворення речовин у результаті хімічних реакцій згоряння у топці КА. Попередньо виведемо загальний вигляд диференціальних рівнянь, що описують процес змішування речовин із різними складами у відкритій термодинамічній системі. Структурна схема таких процесів у найбільш загальному вигляді представлена на рис. 6.4. Схема являє собою контрольний об'єм, до якого підводиться S потоків різних

сумішей з n речовин з масовими витратами G_k. Суміш із контрольного обсягу відводиться з масовою витратою G.

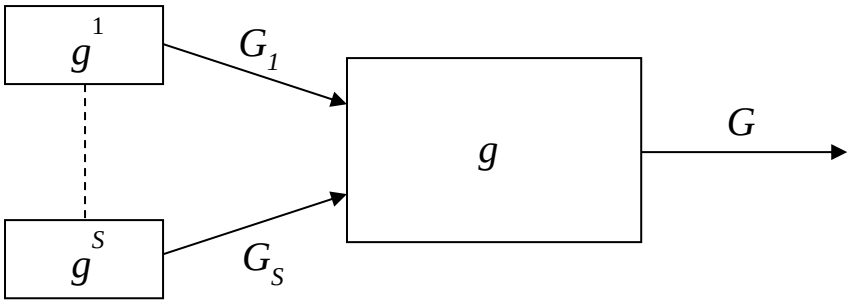


Рис. 6.4. Структурна схема процесів змішування у відкритій термодинамічній системі

На рис. 6.4 $g^k = \left(g_1^k, g_1^k, ..., g_n^k\right)$ – вектор масових часток, що задає фракційний склад речовин в k-м джерелі. Вектор $g = \left(g_1, g_2, ..., g_n\right)$ – вектор масових частин речовин всередині контрольного об'єму.

Система рівнянь, що зв'язують маси кожної з речовин m_i в контрольному об'ємі та вектор складу g запишеться як

$$mg_i = m_i, \tag{6.4}$$

де m – повна маса суміші у контрольному об'ємі.

Диференціюючи (6.4) за часом, отримаємо:

$$m\dot{g}_i = \dot{m}_i - \dot{m}g_i$$

і, враховуючи, що

$$\begin{aligned} \dot{m}_i &= \sum_{k=1}^{s} G_k g_i^k - Gg_i, \\ \dot{m} &= \sum_{k=1}^{s} G_k - G, \end{aligned} \tag{6.5}$$

отримаємо остаточно

$$m\frac{dg_i}{dt}=\sum_{k=1}^{s}\left(g_i^k-g_i\right)G_k,\quad i=\overline{1,n}. \tag{6.6}$$

Система n диференціальних рівнянь (6.6) спільно з (6.5) для повної маси m утворюють математичну модель змішування у заданому контрольному об'ємі.

У разі хімічних перетворень речовин, що знаходяться в контрольному об'ємі, рівняння (6.5) та (6.6) необхідно доповнити системою рівнянь, що зв'язують вектори складів $g^*=\left(g_1^*,g_2^*,...,g_n^*\right)$ до і $g=\left(g_1,g_2,...,g_n\right)$ після хімічної реакції. Вектор складу g^*, що отримується відповідно до розв'язку системи диференціальних рівнянь чистого змішування (6.6), будемо далі називати уявним вектором складу. Справжній же вектор складу g, пов'язаний з уявним g^* системою рівнянь, яка обумовлена хімічними реакціями в контрольному об'ємі:

$$g=g\left(g^*,T,p\right). \tag{6.7}$$

Вектор складу g, визначений відповідно до (6.7) залежить, в загальному випадку, як від уявного вектора складу g^*, так і від термодинамічних параметрів всередині контрольного об'єму: тиску p і температури T.

Тепер адаптуємо рівняння масового балансу (6.5), (6.6) і (6.7) стосовно процесу згоряння в топці КА. Припускатимемо, що коефіцієнт надлишку повітря завжди більше або дорівнює 1 і газоподібне паливо повністю перетворюється на продукти згоряння. Тобто склад продуктів згоряння визначається двома компонентами: g_a, $g_{ср}$. З іншого боку в КА паливо та повітря надходять із двох окремих джерел. Тому, можна вважати, що вектори складів джерел повітря та палива мають вигляд

$$g^1=(1,0),$$
$$g^2=(0,1).$$

де перша компонента сумішей – масова частка повітря, а друга – масова частка палива.

Тоді уявний склад речовин у топці КА $\left(g_a^*, g_f^*\right)$ визначиться із системи рівнянь (6.4), (6.6), яка для нашого випадку запишеться як

$$\frac{dm}{dt} = G_f + G_a - G_{cp}, \tag{6.8}$$

$$m\frac{dg_a^*}{dt} = -G_f g_a^* + G_a g_f^*, \tag{6.9}$$

$$m\frac{dg_f^*}{dt} = G_f g_a^* - G_a g_f^*. \tag{6.10}$$

Замість двох рівнянь (6.9) та (6.10) можна розглядати лише одне, скориставшись умовою нормування

$$g_a^* + g_f^* = 1.$$

Дійсний склад продуктів згоряння визначиться виходячи з основних співвідношень для перетворення вихідних речовин на чисті продукти згоряння:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{g_a^*}{g_f^* L_0}, \\ g_a &= \frac{L_0(\alpha - 1)}{\alpha L_0 + 1}, \\ g_{cp} &= \frac{L_0 + 1}{\alpha L_0 + 1}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Крім рівнянь енергетичного та масового балансів до математичної моделі робочого процесу КА необхідно включити рівняння газового стану

$$pV = mRT, \tag{6.12}$$

а також залежності:

$$\begin{aligned} R &= R\left(g_a, g_{cp}\right), \\ u &= u\left(g_a, g_{cp}, T\right), \\ i_{cp} &= i_{cp}\left(g_a, g_{cp}\right) \end{aligned} \tag{6.13}$$

обумовлені на підставі відомих положень термодинаміки сумішей.

Останнім рівнянням, що замикає систему балансових співвідношень, є рівняння балансу енергії для потоку робочої речовини (води), що має вигляд

$$Q_w = G_w C_w \left(T_w - T_w^*\right), \tag{6.14}$$

де C_w – теплоємність води.

Таким чином, система 4 диференціальних рівнянь (6.2), (6.8), (6.9), (6.10) та 8 алгебраїчних і трансцендентних рівнянь (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.3) замкнута щодо 12 невідомих: m, g_a, g_{cp}, g_a^*, g_f^*, α, u, T, p, R, i_{cp}, T_w, які визначають основні параметри процесу згоряння у КА.

6.4. **Спрощена квазістатична математична модель процесу згоряння**

Спростимо математичну модель процесу згоряння в КА, прийнявши ряд припущень, які не впливають на отримані результати. Основними припущеннями є такі:

- паливо, повітря та продукти згоряння передбачаються ідеальними газами;

- топковий пристрій КА розглядається як термодинамічна система із зосередженими параметрами;

- коефіцієнт корисної дії КА залежить тільки від коефіцієнта надлишку повітря та не залежить від теплової потужності КА і температури навколишнього середовища;

- теплові втрати КА у навколишнє середовище та втрати від недопалу палива зневажливо малі порівняно з потужністю КА та

втратами з димовими газами;

- дисоціація продуктів згоряння не враховується;

- температури палива та повітря підтримуються постійними.

Перелічені припущення прийнято у більшості практичних методик теплового розрахунку КА [48, 49], і принципово не впливають на отримані результати.

З урахуванням прийнятих припущень диференціальне рівняння енергетичного балансу (6.2) можна подати у вигляді

$$mc_v \frac{dT}{dt} + c_v T \frac{dm}{dt} = \left(i_f + H_f - \eta H_f\right) G_f + i_a G_a - c_p T G_{cp},$$

де c_v і c_p – ізохорна та ізобарна теплоємності димових газів, η – коефіцієнт корисної дії КА.

Останнє рівняння з урахуванням (6.8) після перетворень приводиться до виду

$$m\frac{dT}{dt} = (A-T)G_f + (B-T)G_a + (1-\gamma)TG_{cp},$$

де $A = \dfrac{i_f - H_f - \eta H_f}{c_v}$, $B = \dfrac{i_a}{c_v}$ – постійні у межах прийнятих припущень величини, γ – показник адіабати продуктів згоряння.

Остаточно, спрощена система балансових диференціальних рівнянь процесу згоряння в КА набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{A-T}{m}G_f + \frac{B-T}{m}G_a + \frac{(1-\gamma)T}{m}G_{cp},\\
\frac{dg}{dt} &= -\frac{g}{m}G_f + \frac{1-g}{m}G_a,\\
\frac{dm}{dt} &= G_f + G_a - G_{cp},
\end{aligned}$$

де g – уявна масова частка повітря в топковій камері КА. Остання пов'язана з коефіцієнтом надлишку повітря α співвідношенням

$$g = \frac{\alpha L_0}{\alpha L_0 + 1}. \tag{6.15}$$

У матричній формі система балансових рівнянь запишеться як

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{g} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A-T}{m} & \frac{B-T}{m} & \frac{(1-\alpha)T}{m} \\ -\frac{g}{m} & \frac{1-g}{m} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_f \\ G_a \\ G_{cp} \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Як видно з (6.16) отримана система диференціальних рівнянь має структуру (1.26), тобто представляє собою квазістатичну систему третього порядку з 3 управліннями: G_f, G_a і G_{cp}. Відповідно до результатів, що отримано раніше, така система може мати ненульові положення рівноваги. Умови динамічної рівноваги знайдемо прирівнявши нулю праві частини 2-го та 3-го рівнянь (6.16). В результаті отримаємо

$$\begin{pmatrix} G_f \\ G_a \\ G_{cp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g}{1-g} \\ \frac{1}{1-g} \end{pmatrix} c, \tag{6.17}$$

де c – довільна постійна, яка пропорційна тепловій потужності КА.

Умову виродженості матриці $\Phi(x)$ для (6.16) отримаємо, якщо прирівняємо нулю праву частину першого з рівнянь системи (6.16) з урахуванням (6.17). В результаті, після нескладних перетворень отримаємо необхідний зв'язок між рівноважними параметрами процесу у вигляді

$$A(1-g) + Bg = \gamma T. \tag{6.18}$$

Аналізуючи умову (6.18), можна зробити висновок, що завдання відношення паливо-повітря, яке визначається величиною g, однозначно визначає температуру продуктів згоряння. При цьому маса газів в топці КА може бути довільною і вибиратися відповідно до необхідної величини тиску в топці КА

$$m = \frac{pV}{RT}, \tag{6.19}$$

де R – газова постійна продуктів згоряння.

Таким чином, усі змінні стану доступні прямому або непрямому виміру. Коефіцієнт надлишку повітря α контролюється датчиками O_2 і CO_2 на виході з КА, температура і тиск КА відповідними датчиками в топці. Величина g визначається виходячи з (6.15), а m відповідно до (6.19).

Дослідимо стійкість квазістатичної системи (6.16). Для цього в положенні рівноваги, що визначене в силу (6.15), (6.17), (6.18), (6.19) трьома параметрами G_f, α, p, побудуємо відповідно до (6.3) систему рівнянь першого наближення в відхиленнях від положення рівноваги. В результаті отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{T} \\ \Delta\dot{g} \\ \Delta\dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{m(1-g)}G_f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}G_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta g \\ \Delta m \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{A-T}{m} & \frac{B-T}{m} & \frac{(1-\alpha)T}{m} \\ -\frac{g}{m} & \frac{1-g}{m} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta G_f \\ \Delta G_a \\ \Delta G_{cp} \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Аналізуючи (6.20), можна зробити висновок, що однорідна система, яка відповідна (6.20) розпадається і може бути описана трьома незалежними диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \Delta\dot{T} &= -\frac{\gamma}{m(1-g)} G_f \Delta T, \\ \Delta\dot{g} &= -\frac{1}{m} G_f \Delta g, \\ \Delta\dot{m} &= 0. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Перші два рівняння (6.21) визначають аперіодично стійкі перехідні процеси у зв'язку з від'ємністю показника експоненти за будь-яких фізично обґрунтованих величин параметрів, що входять у праві частини (6.21). Останнє ж рівняння відповідає стану байдужої рівноваги по координаті Δm. Таким чином, система (6.20) асимптотично нестійка.

Введемо відносні безрозмірні координати:

$$\overline{\Delta T} \triangleq \frac{\Delta T}{T}; \quad \overline{\Delta g} \triangleq \frac{\Delta g}{g}; \quad \overline{\Delta m} \triangleq \frac{\Delta m}{m};$$
$$\overline{\Delta G_f} \triangleq \frac{\Delta G_f}{G_f}; \quad \overline{\Delta G_a} \triangleq \frac{\Delta G_a}{G_a}; \quad \overline{\Delta G_{cp}} \triangleq \frac{\Delta G_{cp}}{G_{cp}}.$$

У відносних координатах система (6.20) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{d\overline{\Delta T}}{d\tau} \\ \frac{d\overline{\Delta g}}{d\tau} \\ \frac{d\overline{\Delta m}}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{(1-g)} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta T} \\ \overline{\Delta g} \\ \overline{\Delta m} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{v\gamma}{g+v(1-g)} - 1 & \left(\frac{\gamma}{g+v(1-g)} - 1\right)\frac{g}{1-g} & \frac{1-\gamma}{1-g} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{g}{1-g} & -\frac{1}{1-g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta G_f} \\ \overline{\Delta G_a} \\ \overline{\Delta G_{cp}} \end{pmatrix}, \tag{6.22}$$

де $v = \frac{A}{B}$, $\tau = \frac{G_f}{m} t$ – безрозмірний час.

Крім лінеаризованої математичної моделі КА, необхідної для синтезу стійкої системи стабілізації, бажано мати нелінійну модель у відносних безрозмірних координатах. Така математична модель може бути отримана в результаті підстановки в (6.16) відносних змінних і має вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{d\overline{\Delta T}}{d\tau} \\ \frac{d\overline{\Delta g}}{d\tau} \\ \frac{d\overline{\Delta m}}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{A}{T} - 1 - \overline{\Delta T}}{1+\overline{\Delta m}} & \frac{\frac{B}{T} - 1 - \overline{\Delta T}}{1+\overline{\Delta m}} \cdot \frac{g}{1-g} & \frac{(1-\gamma)\left(1+\overline{\Delta T}\right)}{1+\overline{\Delta m}} \\ -\frac{1+\overline{\Delta g}}{1+\overline{\Delta m}} & \frac{(1-g)-\Delta g}{1+\overline{\Delta m}} \cdot \frac{g}{1-g} & 0 \\ 1 & \frac{g}{1-g} & -\frac{1}{1-g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\overline{\Delta G_f} \\ 1+\overline{\Delta G_a} \\ 1+\overline{\Delta G_{cp}} \end{pmatrix}. \tag{6.23}$$

6.5. **Синтез оптимальної системи стабілізації процесу згоряння**

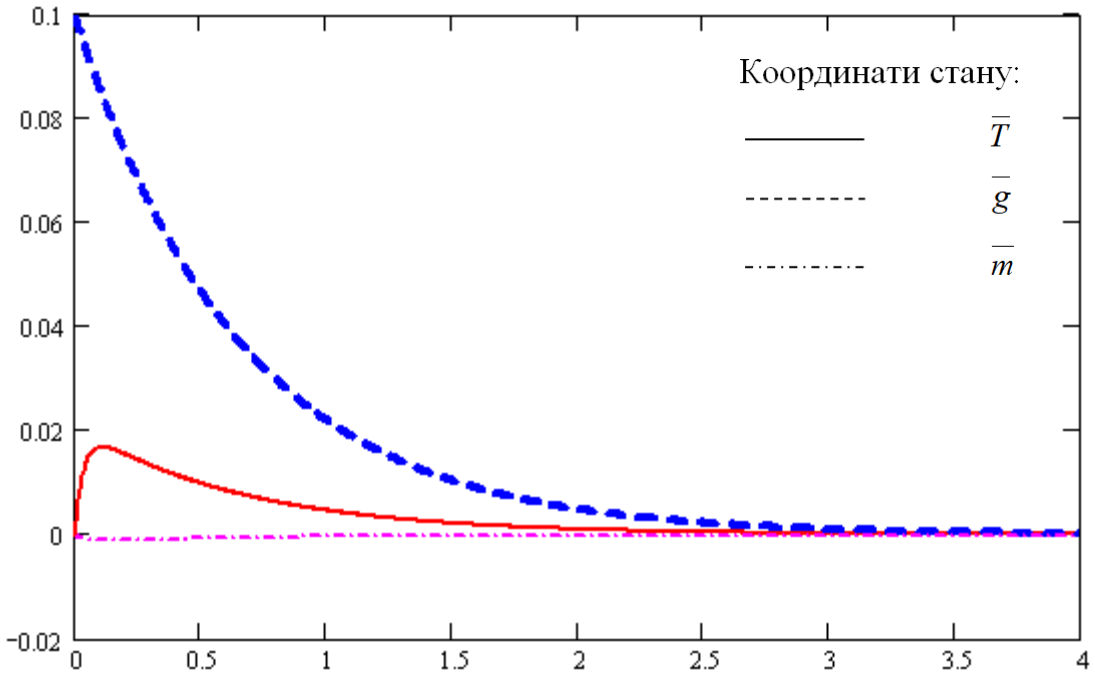
Розглянемо декілька підходів до синтезу системи управління КА, що забезпечують його стійкість та оптимальну якість перехідних процесів.

В якості першого критерія було обрано квадратичний інтегральний критерій.

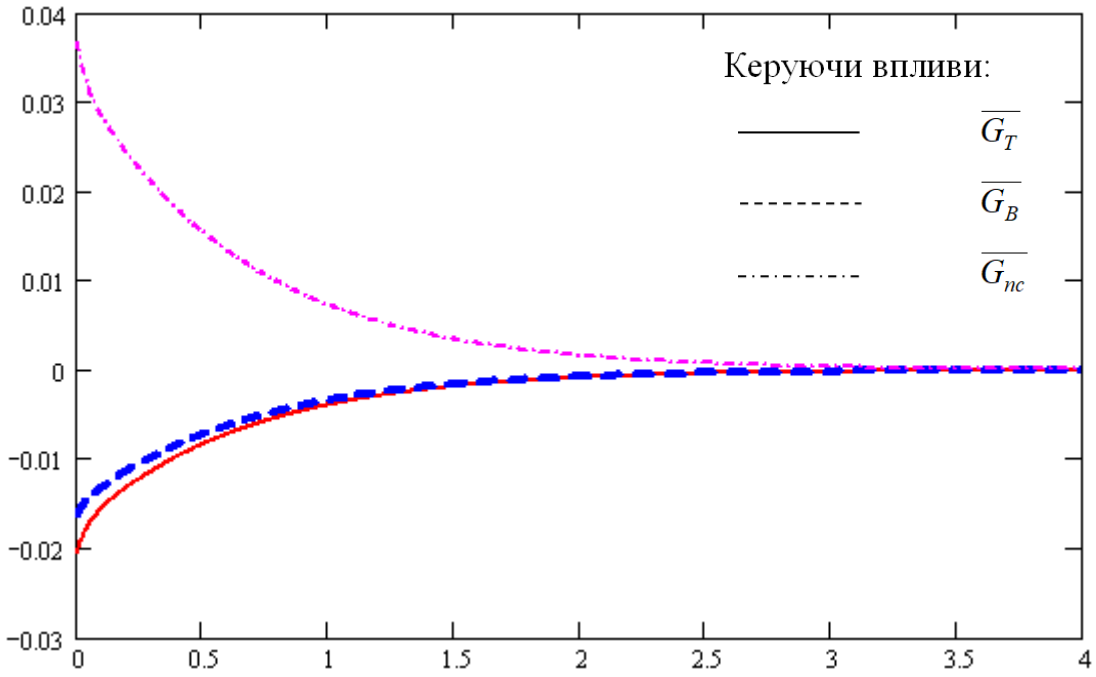
$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\overline{\Delta T}^2 + \overline{\Delta g}^2 + \overline{\Delta m}^2 + \overline{\Delta G_f}^2 + \overline{\Delta G_a}^2 + \overline{\Delta G_{cp}}^2\right)dt\,. \qquad (6.24)$$

Синтез параметрів регулятора здійснювався відповідно до стандартної методики [50] для лінійних систем з квадратичним критерієм якості.

Чисельне розв'язання рівняння Ріккаті для визначення матричного коефіцієнта посилення здійснювалося шляхом інтегрування відповідного диференціального рівняння у зворотному часі за нульових початкових умов. Перехідні процеси в замкнутій системі управління представлені на рис. 6.5.



а)



б)

Рис. 6.5. Перехідні процеси в САУ із пропорційним регулятором при збуренні коефіцієнта надлишку повітря: а) координати стану; б) управління

Пропорційний регулятор передбачає безінерційну зміну витрат газів на вході та на виході КА. У реальних умовах зміна витрат здійснюється або шляхом повороту заслінок, що управляють, або в результаті повороту лопатей або зміни частот обертання вентиляторів подачі повітря і димососа. Таким чином, в якості управління можна розглядати не витрати газів, а швидкості їх змін, а витрати віднести до змінних стану. Тобто систему рівнянь (6.22) необхідно доповнити системою рівнянь інтегруючих елементів

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\Delta G_f}} &= \delta_1, \\ \dot{\overline{\Delta G_a}} &= \delta_2, \\ \dot{\overline{\Delta G_{cp}}} &= \delta_3, \end{aligned} \qquad (6.25)$$

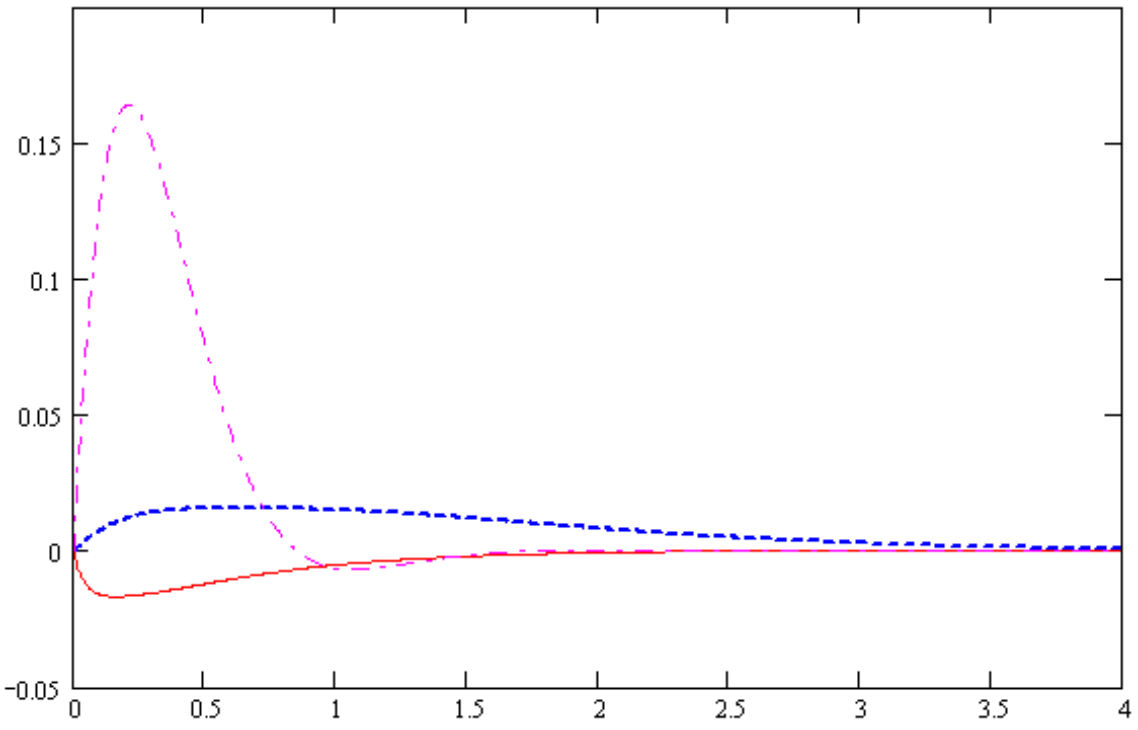
де δ_1, δ_2 і δ_3 – нові управління.

Критерій якості має вигляд аналогічний (6.24)

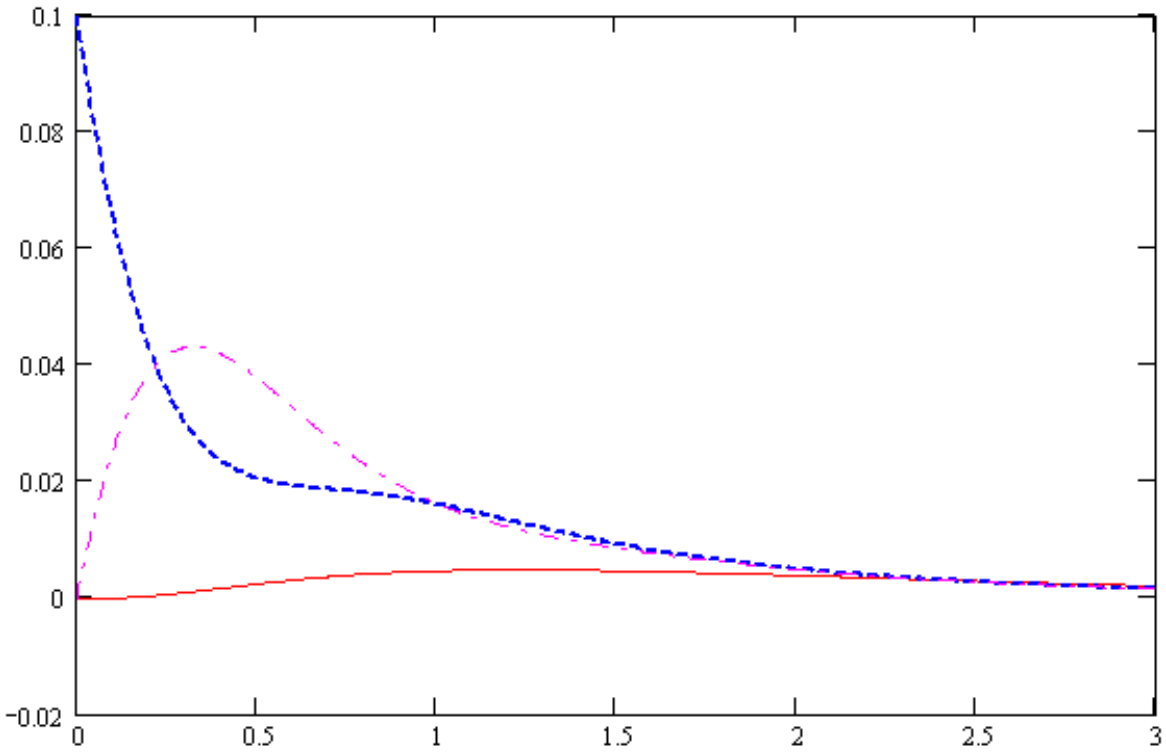
$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\overline{\Delta T}^2 + \overline{\Delta g}^2 + \overline{\Delta m}^2 + \overline{\Delta G_f}^2 + \overline{\Delta G_a}^2 + \overline{\Delta G_{cp}}^2 + \sum_{i=1}^{3}\delta_i^2\right)dt. \quad (6.26)$$

Перехідні процеси в оптимальній 6-мірній системі стабілізації КА наведені на рис. 6.6.

Оптимальні пропорційний та інтегруючий регулятори для своєї реалізації вимагають інформації про повний вектор стану. Що стосується пропорційного регулятора – це $\overline{\Delta T}$, $\overline{\Delta g}$ і $\overline{\Delta m}$. З інтегруючим регулятором необхідно мати інформацію також про витрати $\overline{G_f}$, $\overline{G_a}$ і $\overline{G_{cp}}$, що не завжди може бути здійснено в умовах реальної експлуатації з високим ступенем точності. Для визначення поточних значень відносних витрат в системі стабілізації необхідно включити динамічний спостерігач Люенбергера 3-го порядку.



а)



б)

Рис. 6.6. Перехідні процеси в САУ з регулятором, що інтегрує, при обуренні витрати повітря: а) координати стану; б) управління

Таким чином, враховуючи реальні умови щодо можливостей поточного вимірювання параметрів процесу згоряння в топці КА, а також існуючу інерційність виконавчих органів, що забезпечують необхідні витрати палива, повітря та продуктів згоряння, можна запропонувати наступну структурну схему оптимальної системи стабілізації процесу згоряння (рис. 6.7).

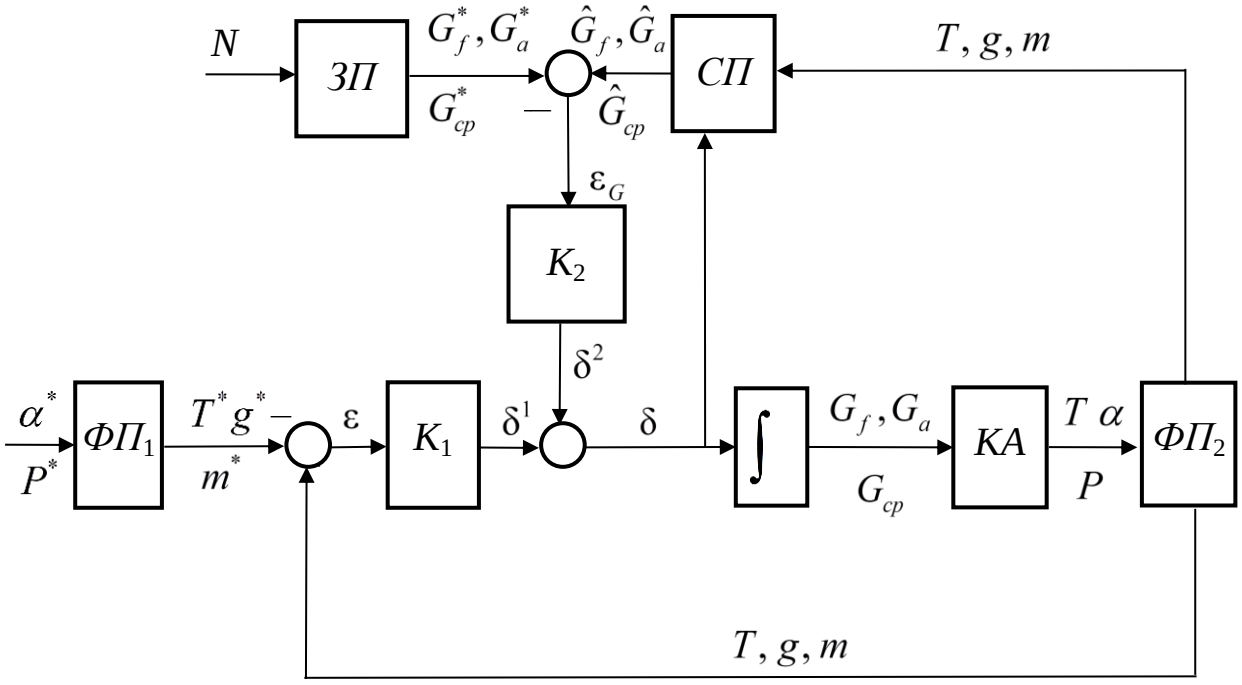
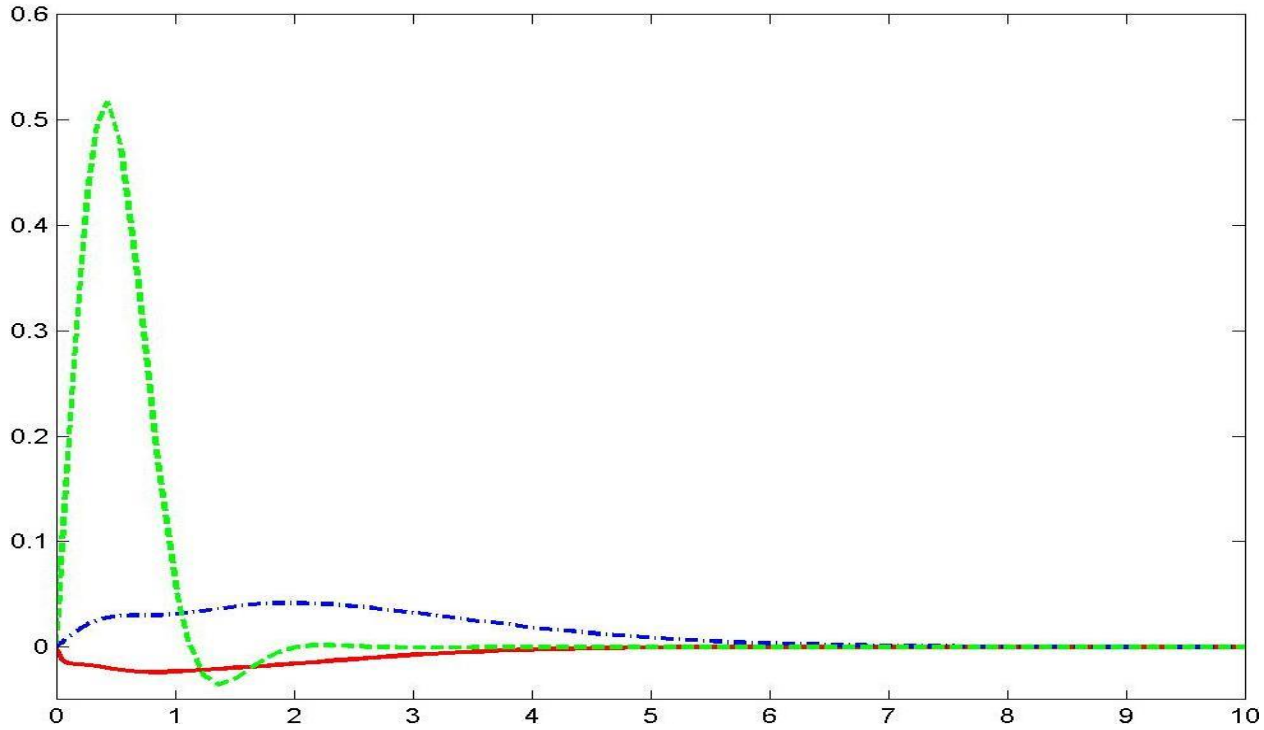


Рис. 6.7. Структурна схема оптимальної системи стабілізації процесу згоряння

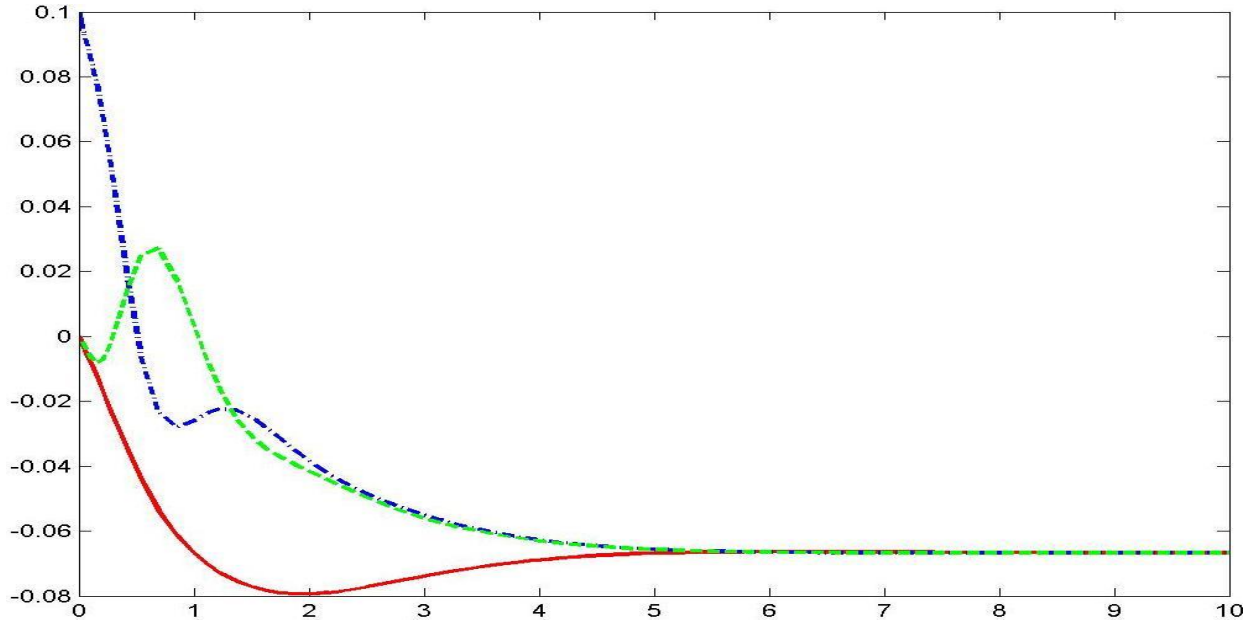
ЗП – задаючий пристрій, *СП* – спостерігаючий пристрій, $ФП_1$ та $ФП_2$ – функціональні перетворювачі.

Відповідно до структурної схеми завдання по потужності N, тиску P^* та коефіцієнту надлишку повітря α^* в задаючому пристрої перетворюється в необхідні величини витрат палива, повітря і продуктів згоряння (G_f^*, G_a^* і G_{cp}^*) згідно зі співвідношеннями (6.14) і (6.17). Функціональний перетворювач $ФП_1$ перетворює завдання α^* і P^* на завдання T^*, g^* і m^* відповідно до (6.18) і (6.19). У свою чергу функціональний перетворювач $ФП_2$ перетворює вимірювальні значення T, α, p в параметри T, g, m, які і порівнюються із заданими T^*, g^* і m^*. Одночасно параметри T, g, m а також вектор управління δ подаються на спостерігаючий пристрій виходом якого є оцінки витрат $\hat{G}_f$, $\hat{G}_a$ і $\hat{G}_{cp}$, на підставі яких формується вектор оцінки відхилень витрат ε_G. Вектори відхилень параметрів процесу ε та витрат ε_G є

входами в лінійний багатовимірний регулятор з коефіцієнтами посилення K_1 та K_2, що обчислюються як для інтегруючого регулятора з критерієм (6.26). Деякі результати обчислювальних експерементів наведено на рис. 6.8.



а)

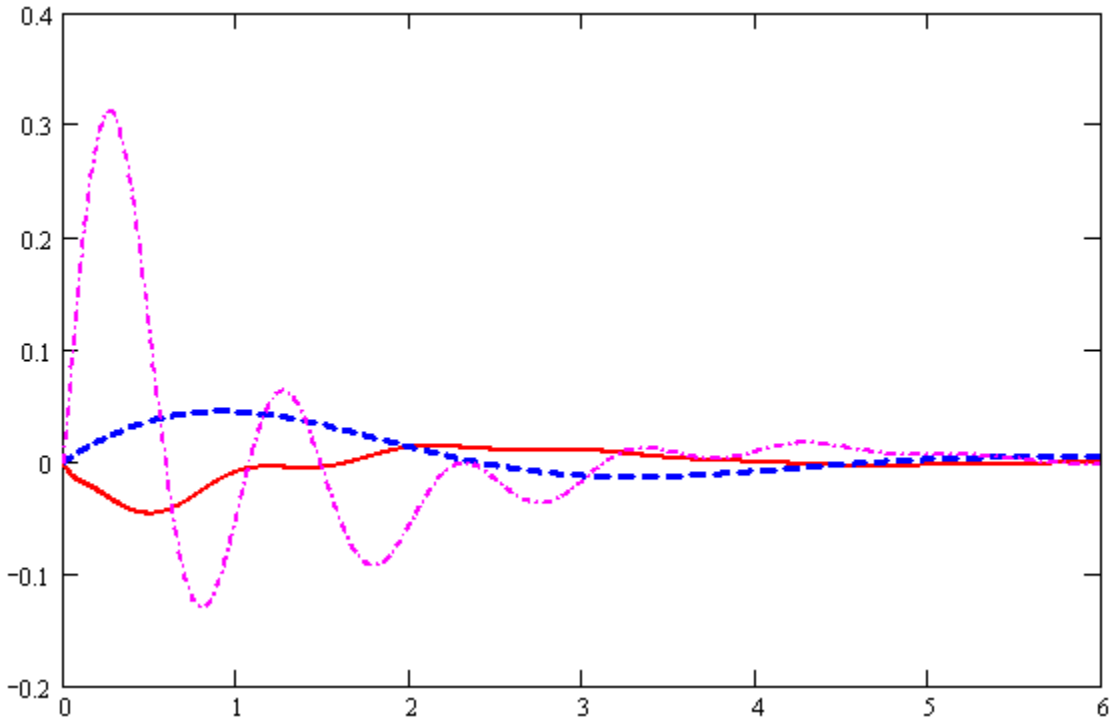


б)

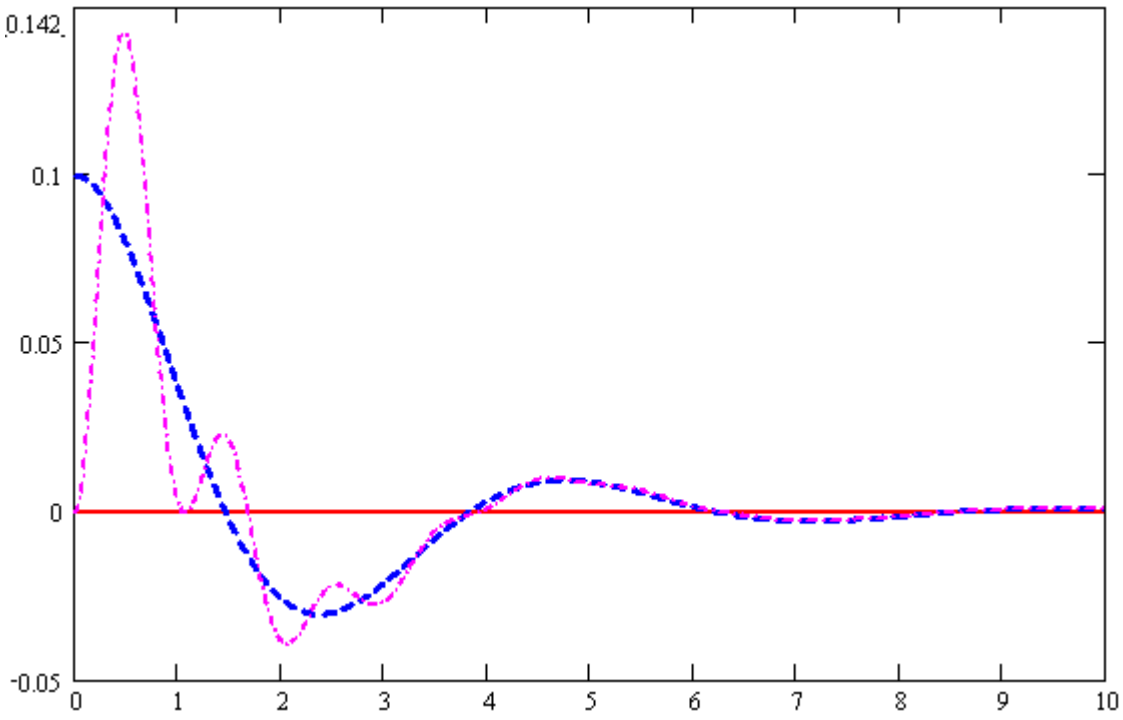
Рис. 6.8. Перехідні процеси в САУ із спостерігачем витрат при збуренні витрати повітря: а) координати стану; б) управління

6.6. **Обговорення результатів**

Для порівняння було розглянуто традиційний регулятор процесу згоряння, заснований на роздільному управлінні тепловою потужністю, складом паливоповітряної суміші та тиском у топковому пристрої. При цьому використовувалися інтегруючі виконавчі пристрої з витрат палива та повітря, а також інерційний виконавчий пристрій з витрат продуктів згоряння. Останнє було зумовлено вимогою структурної стійкості контуру управління тиском. Деякі результати чисельного моделювання перехідних процесів для традиційної системи стабілізації наведено на рис. 6.9.



а)



б)

Рис. 6.9. Перехідний процес у традиційній САУ при збуренні витрати повітря: а) координати стану; б) управління

Таким чином можна відмітити значне покращення показників перехідних процесів в системі стабілізації процесу згоряння завдяки багатозв'язному регулюванню витрат палива, повітря та димових газів в порівнянні з традиційною САУ.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Планк М. Термодинамика. Ленинград-Москва : ГИЗ, 1925. 311 с.
2. Карно С. Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу. В сб: *Второе начало термодинамики*. Москва-Ленинград : Гостехиздат, 1934. С. 2–69.
3. Клаузиус Р. Механическая теория тепла. Математическое введение. В кн.: *Второе начало термодинамики*. Москва-Ленинград : Гостехиздат, 1934. С. 73–157.
4. Путилов К. А. Термодинамика. Москва : Наука, 1971. 375 с.
5. Кубо Р. Термодинамика. Москва : Мир, 1870. 304 с.
6. Гухман А. А. Об основаниях термодинамики. Москва : Энергоиздат, 1986. 384 с.
7. Аверин Г. В. Системодинамика, Донецк : Донбасс, 2014. 403 с.
8. Куценко А. С. Оптимальное управление термодинамическими процессами. *Механіка та машинобудування*. 1999. №1. С. 93–97.
9. Куценко А. С. Равновесная термодинамика с точки зрения теории управления. *Інтегровані технології та енергозбереження*. 2001. №4. С. 35–41.
10. Куценко А. С., Коваленко С. В., Товажнянский В. И. Структурный и параметрический синтез системы стабилизации квазистатического технологического процесса. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. 2015. №58(1167). С. 24–28.
11. Каратеодори К. Об основаниях термодинамики. *Развитие современной физики:* Пер. с нем. Москва, 1964. С. 188–222.
12. Landsberg P. T. On Suggest Simplification of Carateodory's Thermodynamics. *Phys. Status Solidi*. 1961. Vol 1, No 2. P. 120–126.
13. Аверин Г. В., Звягинцева А. В., Шевцова М. В. К вопросу обоснования положений термодинамики методом дифференциальной геометрии многомерных пространств. *Научные ведомости НИУ БелГУ. Сер. Математика. Физика*. 2016. Вып. 45, №27(248). С. 36–44.

14. Falk G., Jung H., Axiomatik der Thermodynamik. *Handbuch der Physik.* 1959. III/2. P. 119–175.
15. Lieb E. H. Yngvason J. The phisics and mathematics of the second law of thermodynamics. *Physics Reports.* 1999. Vol. 310, No 1. P. 1–96.
16. Белоконь Н. И. Термодинамика. Москва-Ленинград : Госэнергоиздат, 1954. 416 с.
17. Горн И. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Москва : ГОНТИ НКТП СССР, 1938. 274 с.
18. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 392 с.
19. Зубов В. И. Лекции по теории управления : [Для вузов по специальности «Прикл. математика»]. Москва : Наука, 1975. 495 с.
20. Чермак И., Петерка В., Заворка И. Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии. Москва : Мир, 1972. 623 с.
21. Анисимов И. В. Основы автоматического управления технологическими процессами нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности. Ленинград : Химия, 1967. 408 с.
22. Кафаров В. В., Дорохов И. Н. Системный анализ процессов химической технологии. Технологический принцип формализации. Москва : Наука, 1979. 394 с.
23. Профос П. Регулирование паросиловых установок. Москва : Энергия, 1967. 368 с.
24. Химия горения : пер. с англ. / под ред. У. Гардинера. Москва : Мир, 1988. 464 с.
25. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 600 с.
26. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. Киев : Техніка, 1975. 768 с.
27. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 616 с.

28. Kutsenko A., Kovalenko S., Tovazhnyanskyy V. Inversion of Dynamic Systems for Certain Classes of Signals. *The Second International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems* (CMIS-2019), Zaporizhzhia, Ukraine, 2019. P. 391–401.
29. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 575 с.
30. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. Москва : Наука, 1981. 488 с.
31. Бортаковский А. С., Пантелеев А. В. Линейная алгебра в примерах и задачах. Москва : Высшая школа, 2005. 592 с.
32. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Москва : Наука, 1988. 320 с.
33. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. Москва : Наука, 1975. 526 с.
34. Нейман М. С. Автоматические процессы и явления. Москва : Советское радио, 1958. 148 с.
35. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва : Мир, 1972. 544 с.
36. Менский Б. М. Принцип инвариантности в автоматическом регулировании и управлении. Москва : Машиностроение, 1972. 247 с.
37. Пухов Г. Е., Жук К. Д. Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов. Киев : Наук. думка, 1966. 218 с.
38. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. Системы управления с динамическими моделями. Харьков : Основа, 1996. 212 с.
39. Куценко А. С., Конохов С. В., Чан Занг Лю Квазистатическое управление процессом сгорания в котельных агрегатах. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Харків : НТУ «ХПІ», 2006. №39. С. 3–12.
40. Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Маквиладзе. Москва : Наука, 1980. 478 с.

41. Теория топочных процессов / Г. Ф. Кнорре и др. Москва : Энергия, 1966. 491 с.
42. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Москва : Госэнергоиздат, 1956. 425 с.
43. Борщов А. Я. Устройство и эксплуатация отопительных котельных малой мощности. Москва : Стройиздат, 1989. 324 с.
44. Вдовцев Р. А., Перепелицын В. Б. Автоматическое регулирование технологических параметров котельных. *Промышленная энергетика*. 1987. № 2. С. 24–29.
45. Бузников Е. Ф., Верес А. А., Грибов В. Б. Пароводогрейные котлы на электростанциях и котельных. Москва : Энергоатомиздат, 1989. 230 с.
46. Шински Ф. Управление процессами по критерию экономии энергии. Москва : Мир, 1981. 387 с.
47. Оптимизация режимов энергетических систем / В. М. Синьков и др. Киев : Вища школа, 1973. 280 с.
48. Арнольд Л. В. Теория теплового расчета котельных агрегатов. Ленинград : Ленинградский институт инженеров транспорта, 1936. 215 с.
49. Теплотехника / А. М. Архаров и др. ; под ред. В. И. Крутова. Москва : Машиностроение, 1986. 432 с.
50. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. Москва : Наука, 1976. 424 с.

Наукове видання

КУЦЕНКО Олександр Сергійович
КОВАЛЕНКО Сергій Володимирович

УПРАВЛІННЯ КВАЗІСТАТИЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

В авторській редакції

Підготовлено до друку:
Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002

Підп. до друку 23.02.2024. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 9,07.
Зам. №5/02/24. Наклад 100 прим. Ціна договірна.

Видавець і виготовлювач: ФОП Панов А. М.
Свідоцтво серії ДК № 4847 від 06.02.2015 р.
м. Харків, вул. Жон Мироносиць, 10, оф. 6,
тел.: +38(057)714-06-74, +38(050)976-32-87
copy@vlavke.com