запишем следующую систему соотношений для рекуррентного вычисления оценки $B[n]=\hat{Q}^{-1}[n]$:

$$B[n+1]=R^{-1}+(1+n-\chi[n+1]e^T[n+1]R^{-1}v[n+1])^{-1}\times$$
$$\times\chi[n+1]R^{-1}v[n+1]e^T[n+1]R^{-1};$$
$$R^{-1}=S_N^{-1}-(1+n+e_1^TS_N^{-1}e_0)^{-1}S_N^{-1}e_0e_1^TS_N^{-1};$$
$$S_N^{-1}=S_{N-1}^{-1}-(1+n+e_N^TS_{N-1}^{-1}e_N)^{-1}S_{N-1}^{-1}e_Ne_N^TS_{N-1}^{-1};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_1^{-1}=\frac{n+1}{n}\left(B[n]-(n+e_1^TB[n]e_1)^{-1}B[n]e_1e_1^TB[n]\right).$$

Предложенные алгоритмы отличаются простотой вычислительной реализации и могут использоваться в задачах адаптивного управления дискретными стохастическими объектами.

Список литературы: 1. *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений.— М.: Наука, 1977.— 176 с. 2. *Любчик Л. М., Позняк А. С.* Обучающиеся автоматы в задачах управления стохастическими объектами.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 5, с. 95—109.

3. *Yoursi M. El-Fattah.* Recursive Algorithms for Adaptive Control of Finite Marcov Chains. — IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1981, SMC-11, N 2, p. 135 — 144.

Поступила в редколлегию 10.10.83.

УДК 62-50

А. Н. СИРЕНКО

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССОВ С АПРИОРНО НЕИЗВЕСТНЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ОСНОВАМИ

Рассмотрим задачу определения характера и структуры взаимосвязей между анализируемыми показателями, характеризующими состояние или поведение статистически обследуемого процесса. Для простоты ограничимся изучением процесса, в котором результирующий показатель $S_c(x_i, y_j)$ является функцией двух фактор-аргументов: $x_i\,(i=1, 2, \ldots, m)$ и $y_j\,(j=1, 2, \ldots, n)$. Предположим, что $S_c(x_i, y_j)=S(x_i, y_j)+\varepsilon_{ij}$, где $S(x_i, y_j)$ — истинная модель процесса; ε_{ij} — некоррелированные случайные числа, распределенные по нормальному закону с нулевым средним ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$).

Для получения оптимальных оценок $\hat{S}(x_i, y_j)$ (несмещенных, состоятельных, эффективных) при таких предположениях следует решать вариационную задачу

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[S_c(x_i, y_j)-S(x_i, y_j)]^2\to\min, \tag{1}$$

которую рассмотрим для случая $S(x_i, y_j)=\lambda f_1(x_i)f_2(y_j)$, когда на искомые функции $f_1(x_i)$, $f_2(y_j)$ наложены ограничения

$$\sum_{i=1}^{m}[f_1(x_i)]^2=1;\quad\sum_{j=1}^{n}[f_2(y_j)]^2=1. \tag{2}$$

Решение данной задачи можно осуществить численными методами [1]. Однако этот способ не позволяет провести всестороннее исследование свойств решений. Поэтому будем находить решения задачи (1), (2) в аналитическом виде. Используя методику, изложенную в работе [2], и учитывая, что фактор-аргументы x_i, y_j принимают дискретные значения, записываем систему уравнений

$$\lambda f_1(x_i) = \sum_{j=1}^{n} S_c(x_i,\ y_j)\, f_2(y_j);$$

$$\lambda f_2(y_j) = \sum_{i=1}^{m} S_c(x_i,\ y_j)\, f_1(x_i).$$

Введем обозначения

$$\boldsymbol{f}_1 = [f_1(x_1) f_1(x_2)\ \ldots\ f_1(x_m)]^T;$$

$$\boldsymbol{f}_2 = [f_2(y_1) f_2(y_2)\ \ldots\ f_2(y_n)]^T;$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} S_c(x_1,\ y_1) & S_c(x_1,\ y_2) & \ldots & S_c(x_1,\ y_n) \\ S_c(x_2,\ y_1) & S_c(x_2,\ y_2) & \ldots & S_c(x_2,\ y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_c(x_m,\ y_1) & S_c(x_m,\ y_2) & \ldots & S_c(x_m,\ y_n) \end{bmatrix}.$$

Тогда система (3) примет вид

$$\lambda \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_2;\ \lambda \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{f}_1. \tag{4}$$

Подставляя второе уравнение системы (4) в первое, получаем

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T - \mathrm{I}\lambda^2)\boldsymbol{f}_1 = 0. \tag{5}$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) сводится к нахождению собственных чисел λ_i^2 и соответствующих им собственных векторов $\boldsymbol{f}_{1i}$ матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Покажем, что решением задачи (1), (2) является выражение

$$S(x_i,\ y_j) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_{1k}(x_i) f_{2k}(y_j). \tag{6}$$

Матрица $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ представляет собой квадратную симметрическую матрицу размера $m \times m$ с положительными элементами. Она может быть дана в следующей форме:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = [\boldsymbol{f}_{11}\boldsymbol{f}_{12}\ \ldots\ \boldsymbol{f}_{1m}]\, \Lambda^2 [\boldsymbol{f}_{11}\boldsymbol{f}_{12}\ \ldots\ \boldsymbol{f}_{1m}]^T, \tag{7}$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Домножим равенство (7) справа на матрицу $[f_{11} f_{12} \ldots f_{1m}]$. Учитывая, что векторы f_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ортогональны и нормированны, получаем

$$AA^T [f_{11} f_{12} \ldots f_{1m}] = [f_{11} f_{12} \ldots f_{1m}] \Lambda^2. \qquad (8)$$

Из системы (4), принимая во внимание соотношение (5), выводим

$$\lambda_1 f_{21} = A^T f_{11};$$
$$\lambda_2 f_{22} = A^T f_{12};$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_m f_{2m} = A^T f_{1m}.$$

Запишем эту систему в виде

$$[f_{21} f_{22} \ldots f_{2m}] \Lambda = A^T [f_{11} f_{12} \ldots f_{1m}].$$

Затем преобразуем формулу (8):

$$A [f_{21} f_{22} \ldots f_{2m}] = [f_{11} f_{12} \ldots f_{1m}] \Lambda. \qquad (9)$$

Домножим выражение (9) справа на матрицу $[f_{21} f_{22} \ldots f_{2m}]^T$. Поскольку векторы f_{2i} удовлетворяют уравнениям (4), они взаимно ортогональны и нормированны. Поэтому

$$A = [f_{11} f_{12} \ldots f_{1m}] \Lambda [f_{21} f_{22} \ldots f_{2m}]^T =$$
$$= [\lambda_1 f_{11} \lambda_2 f_{12} \ldots \lambda_m f_{1m}] [f_{21} f_{22} \ldots f_{2m}]^T =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{1i} f_{2i}^T.$$

Отсюда и следует равенство (6).

Так как на векторы f_{1i}, f_{2i} наложены ограничения (2), вклад каждого слагаемого в общую сумму в выражении (6) определяется собственным значением λ_i. Это дает возможность выделить слагаемые с наибольшими числами λ_i, которым будут соответствовать собственные векторы f_{1i}, f_{2i}.

Список литературы: 1. *Сиренко А. Н., Тупас Н. Ю.* Сравнительный анализ методов идентификации сложных систем.— Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1983, № 199. Прикл. механика и процессы упр., вып. 3, с. 28—30. 2. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами,— М.: Наука, 1965.—474 с.

Поступила в редколлегию 24.10.83.