УДК 629.3.015.5

Н.В. КОХАНОВСКИЙ, канд. техн. наук, ***С.В. ПАВЛЕНКО***, ***О.В. СТАХОВСКИЙ***, канд. техн. наук, ***А.Г. ЯНЧИК*** (г. Харьков)

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ЗАМКНУТОМУ ОБВОДУ ГИБКОЙ ЛЕНТЫ

Запропоновано числовий метод визначення характеристичних корнів рівняння 4-го ступеня з комплексними коефіцієнтами и реалізовано ітерарційну процедуру находження рішення частотного рівняння вільних поперечних коливань гнучкої стрічки, що рухається вздовж замкнутого обводу.

Numerical method of the determination of the characteristic roots equation in the fourth power with complex coefficients are offered and iteration procedure of solution finding of frequency equation of free diametrical vibrations of flexible belt moving along closed contour of track is realized.

Введение. Дальнейшее увеличение скоростных возможностей современных быстроходных гусеничных машин (ГМ) неразрывно связано с решением проблемы обеспечения устойчивости гусеничного обвода, снижения его динамической и вибрационной активности. Это связано с тем, что при неизбежном увеличении динамических ходов опорных катков и применением гусениц с резинометаллическими шарнирами (РМШ) с ростом скорости движения значительно возрастают возмущающие воздействия на гусеничный обвод параметрического и кинематического характера. При значительной свободе перемещений провисающих гусеничных ветвей в поперечном направлении это приводит к возникновению в них значительных по амплитуде поперечных колебаний. Особенно остро этот вопрос стоит с гусеничными обводами с РМШ, так как из-за продольной податливости гусеницы с РМШ ограничивающее амплитуду поперечных колебаний действие нелинейных «цепных» сил [1] значительно меньше, чем для гусеницы с металлическим шарниром (МШ).

Поперечные колебания вызывают высокие динамические нагрузки как в гусеничном обводе, так и во всех узлах гусеничного движителя, могут явиться причиной ограничения скорости движения и сбрасывания гусеницы. При режимах значительной виброактивности гусеничного обвода значительно возрастают динамические составляющие потерь мощности в шарнирах гусеницы и составляющие потерь мощности в зацеплении и на удар. Поэтому при создании быстроходных ГМ одной из актуальных задач является задача исследования динамических параметров колебательных процессов в гусеничном обводе.

1. Анализ последних достижений и публикаций. Вид аналитического представления дифференциальных уравнений поперечных колебаний провисающей ветви гусеничного обвода определяется характером решаемых задач, скоростным диапазоном и особенностями использования рассматриваемых гусеничных машин. Так при определении собственных частот поперечных колебаний гусеничная ветвь представлялась в виде нерастяжимой гибкой нити с сосредоточенными на равных расстояниях точечными массами, каждая из которых равна массе одного трака в сборе [2]. При рассмотрении свободных и вынужденных поперечных колебаний состоящая из n траков гусеничная ветвь представлялась в виде цепочки жестких стержней (траков), соединенных между собой упругими и демпфирующими связями [3, 4]. Такая задача сводилась к решению системы (5n + 2) дифференциальных и алгебраических уравнений со сложным алгоритмом определения действующих на концах траков сил и моментов. Численное решение такой задачи и анализ результатов счета при большом числе содержащихся в ветви траков представляет значительные трудности и нерационально. Проектировщика не интересует закон движения каждого трака в отдельности в виде функции времени. Его интересует, прежде всего то, как ведет себя гусеничная ветвь в целом. Практическую ценность для исследователя представляет информация о динамических характеристиках колебательного процесса и закономерностях возникновения неустойчивых поперечных колебаний, об условиях потери устойчивости гусеничного обвода. Для решения таких практически важных задач гораздо эффективнее является представление гусеничной ветви в виде системы с равномерно распределенными по длине параметрами [3].

Учет продольного движения гусеницы приводит к появлению в уравнении смешанной частной производной. Согласно [5], к таким уравнениям нельзя применить классическую схему разделения переменных в действительной области искомых функций. В [5] предлагается представлять решение в виде суперпозиции двух групп волн. При этом проблема сводится к решению характеристического уравнения 4-го порядка с комплексными коэффициентами. Ввиду того, что нахождение корней этого уравнения в аналитическом виде не представляется возможным, частотное уравнение решено только для частных случаев (при $V = 0$ и $V = \sqrt{T/\mu}$).

2. Цель и постановка задачи. Целью исследования является получение решения задачи о поперечных колебаниях движущейся по замкнутому обводу гусеничной ветви, представленной как система с равномерно распределенными по длине ветви приведенными погонной массой, изгибной жесткостью и моментом инерции поворота трака, в виде суперпозиции двух групп волн. Ставится задача: разработать численный метод и реализовать алгоритм решения уравнения частот, соответствующего граничным условиям применительно к провисающему участку гусеничного обвода.

3. Вывод уравнения частот. Как известно [1], свободные поперечные колебания движущейся гусеничной ветви с равномерно распределенными по длине ветви приведенными погонной массой, изгибной жесткостью и моментом инерции поворота трака, описываются дифференциальным уравнением:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}+V^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\lambda EI\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t}-\rho I\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}-$$
$$-(T_{cv}+\mu V^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0, \tag{1}$$

с соответствующими ему граничными условиями шарнирного опирания:

$$y/_{x=0}=y/_{x=l}=0;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big/_{x=0}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big/_{x=l}=0, \tag{2}$$

где

$$T_{cv}=T_0-\frac{1}{(e_c+e_p+2\chi)}\left[(e_c+e_p)\mu V^2+P(e_p+\chi)-\Delta_{1v}-\Delta_{2v}\right]. \tag{3}$$

В выражении (3) второе и последующие составляющие натяжения определяют изменение статического натяжения с ростом скорости движения, увеличением тягового усилия и приращением длин передней и задней наклонных ветвей из-за статического "всплытия" корпуса машины [1].

Уравнение (1) с граничными условиями (2) содержит смешанную частную производную. Это является причиной того, что к подобным уравнениям нельзя применить классическую схему разделения переменных в действительной области искомых функций. Согласно метода Горошко [5], решение предлагается отыскивать в виде специального двухчленного представления, позволяющего разделить переменные:

$$y(x,t)=\varphi(x)\cos\omega t+\psi(x)\sin\omega t. \tag{4}$$

При отыскании собственных частот поперечных колебаний будем пренебрегать влиянием на собственные частоты демпфирующих сил ветви. Это, как известно, не вносит существенных погрешностей при определении низших собственных частот колебаний. Подставив (4) в (1) и приравняв нулю коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получим систему 2-х уравнений относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде:

$$\begin{aligned}&EI\varphi^{IV}+\rho I\omega^2\varphi^{I}-\mu\omega^2\varphi+2\mu V\omega\psi^{I}-T_{cv}\varphi^{II}=0;\\&EI\psi^{IV}+\rho I\omega^2\psi^{I}-\mu\omega^2\psi-2\mu V\omega\varphi^{I}-T_{cv}\psi^{II}=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Следуя методу, введем комплексную функцию:

$$\Phi(x) = \varphi(x) + i\psi(x), \tag{6}$$

где i – мнимая единица.

Тогда нетрудно видеть, что решение системы (5) сводится к решению дифференциального уравнения с комплексными коэффициентами:

$$\Phi^{IV} + b\Phi^{II} + id\Phi^{I} + e\Phi = 0, \tag{7}$$

где $b = \dfrac{\rho I\omega^2 - T_{cv}}{EI}$; $\quad d = -\dfrac{2\mu V\omega}{EI}$; $\quad e = -\dfrac{\mu\omega^2}{EI}$.

Решение уравнения (7) представим в виде:

$$\Phi(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x}, \tag{8}$$

где k_i – корни характеристического уравнения:

$$k^4 + bk^2 + idk + e = 0\,. \tag{9}$$

Аналитическое определение корней характеристического уравнения 4-ой степени с комплексными коэффициентами (9) не представляется возможным. Предлагается находить корни уравнения 4-ой степени с комплексными коэффициентами и решать частотное уравнение следующим образом. Представив левую часть уравнения (9) в виде разложения по собственным корням и приведя его к полиному 4-ой степени, приравняем между собой действительные и мнимые части коэффициентов левой части уравнения (9) и полученного полинома. Из полученной системы уравнений нетрудно сделать вывод, что найденные корни уравнения (9) имеют вид:

$$k_{1,2} = i(\pm\gamma - \delta); \quad k_{3,4} = \pm\beta + i\delta\,, \tag{10}$$

Из этой же системы уравнений следует, что связь между значениями β, γ, δ выражена в виде соотношений:

$$\begin{aligned}&2\delta^2+\gamma^2-\beta^2=b;\\&2\delta\left(\beta^2+\gamma^2\right)=d;\\&\left(\gamma^2-\delta^2\right)\left(\beta^2+\delta^2\right)=e.\end{aligned} \tag{11}$$

Тогда выражение (8) в этом случае можно представить в следующем виде:

$$\Phi(x)=e^{i\delta x}\left(C_1\operatorname{ch}\beta x+C_2\operatorname{sh}\beta x\right)+e^{-i\delta x}\left(C_3\cos\gamma x+C_4\sin\gamma x\right), \tag{12}$$

где C_i – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий, которые в соответствии с (2) для функции $\Phi(x)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}&\Phi(0)=\Phi(l)=0;\\&\Phi^{II}(0)=\Phi^{II}(l)=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Из условия равенства нулю определителя составленной из граничных условий однородной системы уравнений (13), получаем частотное уравнение в виде:

$$\frac{\cos 2\delta l}{\operatorname{ch}\beta l}-\frac{\sin\gamma l\operatorname{sh}\beta l}{2\gamma\beta\operatorname{ch}\beta l}\left[\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\delta}\right)^2-\left(\gamma^2-\beta^2\right)\right]-\cos\gamma l=0. \tag{14}$$

Так как, входящие в выражение (14), значения β,γ,δ связаны соотношениями (11), то значения ω, удовлетворяющие частотному уравнению, можно определить из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}F_1=2\delta^2+\gamma^2-\beta^2-b=0;\\F_2=2\delta\left(\beta^2+\gamma^2\right)-d=0;\\F_3=\left(\gamma^2-\delta^2\right)\left(\beta^2+\delta^2\right)-e=0;\\F_4=\dfrac{\cos 2\delta l}{\operatorname{ch}\beta l}-\dfrac{\sin\gamma l\operatorname{sh}\beta l}{2\gamma\beta\operatorname{ch}\beta l}\left[\left(\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{2\delta}\right)^2-\left(\gamma^2-\beta^2\right)\right]-\cos\gamma l=0.\end{cases} \tag{15}$$

Для решения нелинейной системы уравнений (15) был применен численный метод Ньютона, согласно которому решение системы уравнений на

$j+1$ – ом шаге ищется через значения искомых величин на предыдущем шаге из указанной системы уравнений, приведенной к виду:

$$F_i + \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\left(x_k^{j+1} - x_k^{j}\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{16}$$

Сходимость решения нелинейной системы уравнений (15) существенно зависит от удачности выбора начальных приближений. Для обеспечения сходимости начальные приближения для β, γ, δ определялись по итерационному методу Ньютона из системы уравнений (11) при значении ω, рассчитанном для неподвижной гусеничной ветви без учета изгибной жесткости ветви и моментов инерции поворота траков.

Выводы.

1. Исследование поперечных колебаний скоростных гусеничных машин необходимо производить с учетом кориолисовых и центробежных сил, обусловленных продольным движением гусеничной ветви.

2. Получено уравнение частот, решение которого позволяет проанализировать влияние на собственные частоты и формы поперечных колебаний скорости продольного движения ветви, инерционных, жесткостных и силовых параметров гусеничного обвода.

3. Предложен численный метод определения характеристических корней уравнения 4-ой степени с комплексными коэффициентами и реализована итерационная процедура нахождения решения частотного уравнения.

Список литературы: **1.** *Кохановский Н.В., Магерамов Л.К.* Неустойчивые режимы поперечных колебаний верхней ветви гусеничного обвода танка // Механика и машиностроение. – 1998. – № 2. – С. 41 – 46. **2.** *Леонов С.И.* Поперечные колебания верхней ветви обвода гусеничного движителя с передним расположением звездочки // Известия вузов. – М.: Машиностроение, 1958. – № 9. – С. 10 – 19. **3.** *Платонов В.Ф.* Динамика и надежность гусеничного движителя. – М.: Машиностроение, 1973. – 232 с. **4.** *Ребров А.Ю.* К вопросу о моделировании звенчатой гусеничной цепи // Вестник НТУ "ХПИ". Сборник научных трудов «Автомобиле и тракторостроение». – Харьков: НТУ "ХПИ", 2003. – № 4. – С. 62 – 66. **5.** *Горошко О.А., Демьяненко А.Г.* О двух волновом представлении решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых конструкций с подвижной нагрузкой // Украинский математический журнал. – 1974. – Т. 29. - № 5. – С. 638 – 641.

Поступила в редколлегию 05.05.06.